This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

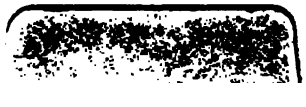
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 6105 000 664 479
Stanford University Libraries

LELAND·STANFORD·JVNIOR·VNIVERSITY



ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE.

BAND 61.

285373

STAMFORD LIBRARY

Inhalt.

Vierte Folge. Band 61.

Erstes Heft.

		Seite
1.	Ernst Reichenbächer. I. Das skalare Gravitationspotential	1
2.	Ernst Reichenbächer. II. Die Krümmung des Lichtstrahls infolge der Gravitation	21
3.	Ernst Reichenbächer. III. Die Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfelde	25
4.	H. Lang. Zur Tensorgeometrie in der allgemeinen Relativitätstheorie	32
5.	Erwin Schrödinger. Über die Kohärenz in weitgeöffneten Bündeln	69
6.	M. Born. Über die elektrische Natur der Kohäsionskräfte fester Körper	87
7.	E. Böttcher und F. Tuczek. Der Effekt des elektrischen Feldes auf Linien des Argons und des Sauerstoffs	107

Ausgegeben am 8. Januar 1920.

Zweites Heft.

1.	Fritz Banneitz, Gerhard Rhein und Benno Kurze. Untersuchungen über die Grundlagen zum Bau von Transportgefäßen für verflüssigte Gase	113
2.	G. Falckenberg. Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante des Wassers, Äthylalkohols, Methylalkohols und Acetons vom Druck	145
3.	G. Falckenberg. Eine Differentialschaltung zur Messung von Kapazitäten und Selbstinduktionen mit einer Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-6}$	167
4.	George Jaffé. Über zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zwischen parallelen ebenen Wänden	173

Seite

5. Marie Anna Schirmann. Versuch einer einheitlichen Erklärung der Erscheinungen der atmosphärischen Polarisation . 195
6. Karl Heil. Läßt sich ein Einfluß der Kristallstruktur auf α-Strahlen nachweisen? 201

Ausgegeben am 15. Januar 1920.

Drittes Heft.

1. J. E. Lilienfeld. Zur Hochvakuumentladung 221
2. Teófilo Isnardi. Die Dampfspannung des festen Broms. (Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans) 264
3. G. Bakker. Die Dicke der Kapillarschicht zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes, insbesondere von Kohlensäure 273
4. F. v. Hauer. Bewegung und Ladung kleiner Teilchen im ionisierten elektrischen Feld 303

Ausgegeben am 3. Februar 1920.

Viertes Heft.

1. H. Dember und M. Uibe. Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes 313
2. P. Boedke. Versuch zu einer Erweiterung der Planckschen Theorie der verdünnten Lösungen 334
3. H. Dember und M. Uibe. Versuch einer physikalischen Lösung des Problems der sichtbaren Größenänderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont 353
4. Richard Gans. Die reversible Permeabilität auf der idealen Magnetisierungskurve 379
5. Richard Gans. Die Trägheitsmomente der Magnetonen . 396
6. Richard Gans. Bemerkung zu meiner Arbeit „Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium“ 398
7. Richard Gans. Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden. Ein Beitrag zur Quantentheorie 400
8. A. Esau. Der gegenseitige Induktionskoeffizient von Rechtecken und Quadraten 410

Ausgegeben am 22. Februar 1920.

Fünftes Heft.

1. Helge Bohlin. Eine neue Anordnung für röntgenkristallographische Untersuchungen von Kristallpulver. (Hierzu Taf. I 421
2. P. Ehrenfest. Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik? 440

Nachweis zu der Figurentafel.

Tafel I. H. Bohlin.

1920. № 1.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *I. Das skalare Gravitationspotential;* von *Ernst Reichenbächer.*

1. Abschnitt.

Wie entsteht die Verzerrung der Raumzeitmannigfaltigkeit durch die Gravitation im allgemeinsten Falle?

Die Gravitationswirkungen werden bekanntlich nach der Einsteinschen Theorie aus der Annahme eines von der gewöhnlichen Euklidisch-Minkowskischen Maßvorschrift verschiedenen und auch nicht aus ihr durch Transformation herleitbaren Ansatzes für das Linienelement der vierfach ausgedehnten Raumzeitmannigfaltigkeit abgeleitet, wobei die 10 Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ dieses Ansatzes als Gravitationspotentiale aufgefaßt werden. Hierbei ergibt sich die Massendichte im Gegensatz zu der gewöhnlichen Anschauung nicht als Skalar, sondern als 44-Komponente eines 16gliedrigen Tensors, dessen andere Komponenten allerdings ihr gegenüber sehr klein sind. Dies und die Tatsache, daß die $g_{\mu\nu}$ wegen ihrer Abhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems einer freilich eingeschränkten Willkür unterworfen sind, hat mich in der Einsteinschen Theorie nicht befriedigt, und ich habe deshalb in meiner Arbeit: „Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und der Gravitation“[1]) versucht, die Theorie eines skalaren Gravitationspotentials, das ich mit der Lichtgeschwindigkeit identifizierte, aufzustellen, wobei ich an bestimmte Voraussetzungen über die Gravitationserregung durch die Elektronen anknüpfte, die ich — positive und negative — als das einzig Materielle ansah. Den einfachsten Fall der Verzerrung einer ohnedies Minkowskischen Mannigfaltigkeit durch die Gravitation eines einzigen Elektrons hatte ich dabei erledigt und nach Analogie dieses Falles allgemein die Gleichung[2])

$$(1) \qquad \mathfrak{R} = 2 \,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathrm{lg}\,l$$

1) Ann. d. Phys. 52. S. 134. 1917.

2) A. a. O. S. 168. Gl. (76), S. 169. (Gl. 77), desgl. im Nachtrag S. 176. Gl. (VII).

aufgestellt. Es fehlte aber der Beweis für diesen Analogieschluß, der insbesondere auf den Nachweis der Möglichkeit dieses Ansatzes 1 hinausläuft und in folgendem geführt werden soll.

Es ist im allgemeinen Falle zu erörtern, wie die Gravitationswirkung eines weiteren Elektrons oder Anziehungsmittelpunktes verzerrend auf die Raumzeitmannigfaltigkeit einwirkt, die ihrerseits selbst schon ohnedies durch die Gravitation von beliebig vielen anderen Elektronen umgebildet ist. Dies Einführen einer „neuen" Verzerrung soll nun aber nicht etwa bedeuten, daß nun irgendwo und irgendwann ein neues Elektron plötzlich entstehen und das vorhandene Feld umbilden könnte, sondern geschieht nur zu dem Zwecke einer vollständigen Induktion, eines Schlusses von n auf $n+1$. Es kann also nun kein Zweifel darüber herrschen, daß ich mit den Ausdrücken „vor" und „nach" der Verzerrung durch die Gravitation des „neuen" Elektrons keine zeitlichen Beziehungen meine. Die Mannigfaltigkeit vor der Verzerrung ist, wie eben gesagt, schon nicht mehr Minkowskisch, da sie ja schon durch die übrigen Elektronen umgebildet ist; es soll aber für sie die Gültigkeit der Gleichung (1) gefordert werden, was für ein einziges solches Elektron möglich ist, wie ich in meiner Arbeit gezeigt habe, sogar auch für den von Einstein geforderten Fall der Verzerrung des Ruhraumes des gravitierenden Zentrums, wobei die Perihelwanderung die doppelte ist wie in dem sonst von mir zugrunde gelegten Fall.[1])

Die Gravitation des neuen Elektrons äußert sich natürlich in einer Änderung des Fundamentaltensors der $g_{\mu\nu}$ in dem Ausdruck für das Linienelementquadrat in der Mannigfaltigkeit, wie er vor der Verzerrung bestand. Diese Änderung wird sich nun wieder am leichtesten für ein Koordinatensystem berechnen lassen, dessen Lage dem mit räumlichen Polarkoordinaten in dem in meiner Arbeit erledigten Falle entspricht, wo die Mannigfaltigkeit vor der Verzerrung Minkowskisch war. Ein solches Koordinatensystem konstruiere ich folgendermaßen: In allen Punkten der Weltlinie (besser Mittelisogone) des verzerrenden Elektrons errichte ich die orthogonalen geodätischen Linien; die zu je einem Punkte gehörigen bilden

1) A. a. O. Nachtrag S. 176. Gl. (VI) und S. 177. Gl. (X).

eine räumliche Mannigfaltigkeit, die man als jeweiligen Ruhraum des Elektrons bezeichnen kann. Die Schar der orthogonalen Trajektorien dieser Ruhräume wird dann einer Verzerrung unterworfen, deren Betrag nur von ihrem geodätisch gemessenen Abstand von der Mittelisogone abhängen wird. Dies ist deshalb möglich, da sich dieser Abstand nicht ändert, wenn man eine solche Trajektorie durchläuft; denn diese liegt gänzlich in einem Parallelraum zur Mittelisogone, den man erhält, wenn man auf allen geodätischen Linien von dieser Isogone aus gleiche Stücke abträgt. Da dieser Parallelraum auf allen geodätischen Linien senkrecht steht, bildet er auch mit den Ruhräumen rechte Winkel und enthält also die Trajektorien in ihrer ganzen Ausdehnung. Sämtliche Parallelräume — die übrigens mit Zylindern verglichen werden können — bilden mit den geodätischen Linien ein sogenanntes Gaußsches Koordinatensystem[1]), während die Trajektorien mit dem — den Ebenen unseres Raumes analogen — Ruhräumen ein halborthogonales System zusammensetzen, in dessen L. E. Q.[2])

$$ds^2 = g_{00}\,dx^{0\,2} + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu \tag{2}$$

g_{00} im allgemeinen nicht nur von x^0, sondern auch von den anderen Koordinaten abhängen wird, da die Trajektorien keine geodätischen Linien zu sein brauchen.

Durch die Gravitation unseres Elektrons sollen nun die Trajektorien verzerrt, dagegen die Ruhräume im Verfolg meiner Annahme im Gegensatz zur Einsteinschen, die ich später daraufhin zu untersuchen vorhabe, unverzerrt bleiben. Dagegen kann das in ihnen liegende dreifache Koordinatensystem und zwar für jeden Ruhraum anders transformiert werden, so daß das L. E. Q. die Gestalt erhält:

$$ds'^2 = g_{00}\,l^2\,dx'^{0\,2} + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g'_{\mu\nu}\,dx'^\mu\,dx'^\nu\,. \tag{3}$$

(Durch die Apostrophe sollen alle Größen nach der Verzerrung

1) Vgl. wegen dieser Bezeichnung Hilbert, Gött. Nachr. 1917, S. 58f.

2) Abkürzung für Linien-Element-Quadrat.

von den entsprechenden vor ihr unterschieden werden.) Dies wird durch folgende Gleichungen erreicht:

$$(4) \qquad d\,x^0 = l\,d\,x'^0\,,$$

$$(5) \qquad d\,x^\varrho = \sum_1^3{}_\mu\, a^\varrho_\mu\, d\,x'^\mu \qquad (\varrho = 1, 2, 3)$$

Damit im Ruhraum keine Verzerrung, sondern nur eine Transformation eintritt, muß das System (5) integrabel sein, d. h. es muß für alle ϱ, μ, ν von 1 bis 3 sein:

$$(6) \qquad \frac{\partial\, a^\varrho_\mu}{\partial\, x'^\nu} = \frac{\partial\, a^\varrho_\nu}{\partial\, x'^\mu}\,.$$

Statt dieser Gleichungen kann ich auch die inversen fordern, die aus den Umkehrungen

$$(7) \qquad d\,x'^\mu = \sum_1^3{}_\varrho\, a'^\mu_\varrho\, d\,x^\varrho \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

von (5) folgen und lauten [für alle μ, ϱ, σ von 1 bis 3]:

$$(8) \qquad \frac{\partial\, a'^\mu_\varrho}{\partial\, x^\sigma} = \frac{\partial\, a'^\mu_\sigma}{\partial\, x^\varrho}\;;$$

Denn aus der Integrabilität des Systems (5) folgt die des Systems (7). Dabei sind die a'^μ_ϱ die durch die Determinante a der Matrix der Koeffizienten a^ϱ_μ geteilten Unterdeterminanten dieser Matrix.

Aus den Gleichungen (5) und (7) folgen die Beziehungen für die Komponenten der Fundamentaltensoren:

$$(9) \quad g'_{\mu\nu} = \sum_1^3{}_{\varrho\sigma}\, a^\varrho_\mu\, a^\sigma_\nu\, g_{\varrho\sigma}\,, \qquad (10) \quad g'^{\mu\nu} = \sum_1^3{}_{\varrho\sigma}\, a'^\mu_\varrho\, a'^\nu_\sigma\, g'^{\varrho\sigma}\,,$$

$$(11) \quad g_{\varrho\sigma} = \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, a'^\mu_\varrho\, a'^\nu_\sigma\, g'_{\mu\nu}\,, \qquad (12) \quad g^{\varrho\sigma} = \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, a^\varrho_\mu\, a^\sigma_\nu\, g'^{\mu\nu}\,.$$

Ferner ergibt sich für die ko- und kontravariante Differentiation:

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial\, x'^\mu} = a^\varrho_\mu\, \frac{\partial f}{\partial\, x^\varrho}\,, \qquad (14) \quad g'^{\mu\nu}\, \frac{\partial f}{\partial\, x'^\nu} = a'^\mu_\varrho\, g^{\varrho\sigma}\, \frac{\partial f}{\partial\, x^\sigma}\;;$$

$$(15) \quad \frac{\partial f}{\partial\, x^\varrho} = a'^\mu_\varrho\, \frac{\partial f}{\partial\, x'^\mu}\,, \qquad (16) \quad g^{\varrho\sigma}\, \frac{\partial f}{\partial\, x^\sigma} = a^\varrho_\mu\, g'^{\mu\nu}\, \frac{\partial f}{\partial\, x'^\nu}\,.$$

Zunächst erhält man für die Fundamentaldeterminante $G = g \cdot g_{00}$ nach der Verzerrung:

$$G' = g'_{00}\, g' = g_{00}\, \mathfrak{l}^2 \cdot g \cdot a^2 = \mathfrak{l}^2 \cdot a^2 \cdot G\,. \tag{20}$$

Dann sondere man aus der Divergenz des Gradienten wieder den auf den Index 0 bezüglichen Summanden aus:

$$\begin{aligned}\text{Div Grad } f = \sum_0^3{}^{\varrho\sigma} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \sqrt{G}\, g^{\varrho\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{G}\, g^{00} \frac{\partial f}{\partial x^0} \\ &+ \sum_1^3{}^{\varrho\sigma} \frac{1}{\sqrt{g \cdot g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \sqrt{g \cdot g_{00}}\, g^{\varrho\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho}\,.\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned}\text{Div Grad } f = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{G}\, g^{00} \frac{\partial f}{\partial x^0} &+ \sum_1^3{}^{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} \\ &+ \sum_1^3{}^{\varrho\sigma} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \sqrt{g} \cdot g^{\varrho\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho}\,.\end{aligned}\right. \tag{21}$$

Der letzte Summand ist der Laplacesche Operator div grad f für die drei Indizes 1 bis 3, der bei der Verzerrung, die für diese eine bloße Transformation ist, ungeändert bleibt. Man erhält also für alle vier Ausdehnungen nach der Verzerrung:

$$\begin{aligned}\text{Div Grad}' f &= \frac{1}{\sqrt{G'}} \frac{\partial}{\partial x'^0} \sqrt{G'}\, g'^{00} \frac{\partial f}{\partial x'^0} \\ &\quad + \sum_1^3{}^{\mu\nu} g'^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{g'_{00}}}{\partial x'^\nu} \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} + \text{div grad}' f \\ &= \frac{1}{\sqrt{G} \cdot a \cdot \mathfrak{l}} \frac{\partial}{\partial x'^0} \sqrt{G}\, a\, g^{00} \frac{\partial f}{\mathfrak{l}\, \partial x'^0} \\ &\quad + \sum_1^3{}^{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lg (\sqrt{g_{00}} \cdot \mathfrak{l})}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} + \text{div grad } f \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^0} \sqrt{G}\, g^{00} \frac{\partial f}{\partial x^0} + 2 g^{00} \frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0} \frac{\partial f}{\partial x^0} \\ &\quad + \sum_1^3{}^{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} + \sum_1^3{}^{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho} \\ &\quad + \text{div grad } f.\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned}\text{Div Grad}' f = \text{Div Grad } f + 2 g^{00} \frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0} \frac{\partial f}{\partial x^0} \\ + \sum_1^3{}^{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^\varrho}\,.\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Der Einfluß der Verzerrung auf die skalare Krümmung $\mathfrak{R} = g^{\varrho\sigma} K_{\varrho\sigma}$ macht für seine Untersuchung umfangreichere Vorarbeiten nötig, die im nächsten Abschnitt erledigt werden sollen.

2. Abschnitt.

Vergleich der Krümmung einer Mannigfaltigkeit mit der einer in ihr gelegenen Untermannigfaltigkeit, die eine Ausdehnung weniger besitzt.

Da bei der Verzerrung die Ruhräume nicht verändert werden und also auch ihre Krümmung erhalten bleibt, liegt der Gedanke nahe, die Gesamtkrümmung auf eine Formel zu bringen, die diese Teilkrümmung enthält. Um dies auszuführen, soll jedoch für erstere zunächst ein wesentlich kürzerer Ausdruck hergeleitet werden.

Nach Einstein[1]) hat man

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{R} = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = &- g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\varkappa} \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + g^{\mu\nu} \left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \varkappa\end{matrix}\right\} \\ &+ g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - g^{\mu\nu} \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda} \end{aligned}\right.$$

und

$$(2)\quad \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\left(g^{\mu\tau}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \nu\end{matrix}\right\} + g^{\nu\tau}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \mu\end{matrix}\right\}\right) = - g^{\mu\tau} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\tau} - g^{\nu\tau} \left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \mu\end{matrix}\right\}.$$

Aus der letzten Gleichung erhält man durch Differentiation

$$\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = - \frac{\partial g^{\mu\tau}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\tau} - g^{\mu\tau} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\tau} - \frac{\partial g^{\nu\tau}}{\partial x^\mu} \left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \mu\end{matrix}\right\} - g^{\nu\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \mu\end{matrix}\right\}$$

und hieraus nach (2) und der Einsteinschen[1]) Gleichung (34):

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = &\; g^{\sigma\tau} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\tau} + g^{\mu\sigma} \left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \tau\end{matrix}\right\} \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\tau} \\ &- g^{\mu\tau} \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\tau} + g^{\sigma\tau} \left\{\begin{matrix}\sigma\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \mu\end{matrix}\right\} + g^{\nu\sigma} \left\{\begin{matrix}\sigma\mu\\ \tau\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \mu\end{matrix}\right\} \\ &- g^{\nu\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{\begin{matrix}\nu\tau\\ \mu\end{matrix}\right\}. \end{aligned}\right.$$

1) Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. **49.** 1916: S. 801. F. 44; S. 796. F. 34, 29a.

Aus (2) erhält man durch Änderung der Indizes:

$$\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} = -g^{\lambda\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu} - g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\},$$

daher

$$g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} - g^{\lambda\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu}. \tag{4}$$

Ebenso aus (3):

$$\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu} + g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda}$$
$$- g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - 2g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \varkappa\end{matrix}\right\} - g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}.$$

Hierin setze man den Wert für $g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\}$ aus 4) ein und streiche $g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu}$ gegen $-g^{\lambda\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda}$, während in $-\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\lambda}$ μ statt λ gesetzt wird:

$$\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} - g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - 2g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \varkappa\end{matrix}\right\}$$
$$- g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}.$$

Daraus erhält man nach Division durch -2:

$$-g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} - g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \varkappa\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu}$$
$$+ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}.$$

Diesen Wert, sowie $g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\}$ (aus 4) mit μ statt λ rechts), setze man in (1) ein:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$
$$- \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$
$$+ g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^\nu}.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{R} = {} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{3}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \tfrac{3}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ & + g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Nun ist

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa} + \frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left(g^{\mu\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\right),$$

d. h. nach (4) mit $\varkappa$ statt λ und nach Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} = {} & \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{\varkappa\nu}}{\partial x^\varkappa \partial x^\nu} \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\varkappa\nu}}{\partial x^\varkappa}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu} + \tfrac{1}{2} g^{\varkappa\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\varkappa \partial x^\nu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} = {} & \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.\end{aligned}$$

Dies setze man in (5) ein und ziehe zusammen:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{R} = {} & \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + 2\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + 2 g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ & + g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}.\end{aligned}\right.$$

Da

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} &= \sqrt{G}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial g^{\mu\nu}\partial x^\varkappa} g^{\mu\nu} \\ &= \sqrt{G}\left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + 2\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right. \\ &\qquad \left. + g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}\right)\end{aligned}$$

ist, kann man der Gleichung (6) auch die Gestalt geben:

$$(7)\quad \left\{\quad \mathfrak{R} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}.\right.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\sqrt{G}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} = g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} = \text{Div Grad } \lg\sqrt{G},$$

also

$$(8)\quad \left\{ \mathfrak{R} = 2\,\text{Div Grad lg}\sqrt{G} - g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \tfrac{1}{2}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{Bmatrix}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}. \right.$$

Endlich ist

$$\frac{\partial^2 \lg(g^{\mu\nu}G)}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} = \frac{\partial^2 \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} = \frac{1}{g^{\mu\nu}\sqrt{G}}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}\sqrt{G}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} - \frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu},$$

daher nach: (7)

$$(9)\quad \left\{ \mathfrak{R} = g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2 \lg(g^{\mu\nu}G)}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^\nu} + \tfrac{1}{2}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}\right]. \right.$$

In den Gleichungen (6) bis (9) hat man natürlich alle Summanden mit μ, ν, $\varkappa$ von 0 bis 3 zu bilden und diese zu addieren. Da nur ein einziges Glied mit drei Indizes vorliegt, ist der Ausdruck von $\mathfrak{R}$ gegenüber der Gleichung (1) sehr vereinfacht.

Die allgemeine Gleichung (9) wende ich nun auf ein halborthogonales System an, in dem g_{01}, g_{02}, g_{03} verschwinden. In diesem ist dann wie im Abschnitt 1 die Determinante $G = g_{00}\cdot g$. Nun scheide ich aus der allgemeinen Summe den einzigen Summanden mit dem Index 0 aus und erhalte:

$$\mathfrak{R} = g^{00}\left[\frac{\partial^2 \lg g^{00} g\, g_{00}}{(\partial x^0)^2} + \left(\frac{\partial \lg(g^{00}\sqrt{g\,g_{00}})}{\partial x_0}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\sum_0^3{}_\varkappa \begin{Bmatrix}00\\ \varkappa\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg g^{00}}{\partial x^\varkappa}\right] + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2 \lg(g^{\mu\nu} g\, g_{00})}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{g\,g_{00}})}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg(g^{\mu\nu}\sqrt{g\,g_{00}})}{\partial x^\nu} + \tfrac{1}{2}\sum_0^3{}_\varkappa \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}\right].$$

Es ist aber

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}}, \quad \left\{\begin{matrix}00\\0\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}, \quad \left\{\begin{matrix}00\\\varkappa\end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_\varrho\, g^{\varkappa\varrho}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varrho},$$

$$\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\0\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2g_{00}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \text{ für } \varkappa,\ \mu,\ \nu \neq 0.$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} = \frac{1}{g_{00}}\Big[&\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2 \\ &- \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\sum_1^3{}_{\varkappa\varrho}\, g^{\varkappa\varrho} g_{00}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\varrho}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\varkappa}\Big] \\ + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\Big[&\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}\frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\mu} \\ &+ \frac{1}{4}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{4g_{00}}\frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\Big] \\ + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\Big[&\frac{\partial^2 \lg (g^{\mu\nu} g)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\nu} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_1^3{}_\varkappa \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\\varkappa\end{matrix}\right\}\frac{\partial \lg g^{\mu\nu}}{\partial x^\varkappa}\Big].\end{aligned}$$

In der letzten Doppelzeile steht offenbar wieder der Ausdruck für die Krümmung nach Gleichung (9), aber beschränkt auf μ, ν, $\varkappa$ gleich 1 bis 3, also die Krümmung $\mathfrak{k}$ der dreifach unendlichen Mannigfaltigkeit $x_0 = \text{const}$. Im zweiten und dritten Gliede der vorletzten Doppelzeile ist μ und ν vertauschbar; ferner ist $\varkappa$ und ϱ durch μ und ν zu ersetzen:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{R} = \mathfrak{k} + \frac{1}{g_{00}}\Big[&\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} \\ &- \frac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\Big] \\ + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\Big[&\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\nu} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}\Big].\end{aligned}\right.$$

Nun ist

$$\text{div grad lg } g_{00} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} + g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

$$= g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^\nu} \right].$$

Setzt man dies in (10) ein, so erhält man:

$$(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{R} = \mathfrak{k} + \frac{1}{g_{00}} \left[\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x_0)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x_0} \right. \\ \qquad \left. - \frac{1}{4} \sum_1^3{}^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \right] \\ \quad + \text{div grad lg } g_{00} + \frac{1}{2} \sum_1^3{}^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}. \end{cases}$$

Diese Gleichung, die die Krümmung der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf die in ihr enthaltene dreifache zurückführt, ist natürlich entsprechend auch auf Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Ausdehnungen anzuwenden. Sie enthält neben der Funktionaldeterminante g der Untermannigfaltigkeit noch die Ergänzungskomponente g_{00} und den Ausdruck

$$- \frac{1}{4 g_{00}} \sum_1^3{}^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0};$$

von den Koordinaten tritt nur x^0 selbständig auf, die anderen drei dagegen in den Skalaren div grad lg g_{00} und

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}.$$

Ist das halborthogonale System ein Gaußsches, in dem g_{00} nur von x^0 abhängen darf und einer Konstanten 1 gleichgesetzt werden kann, so erhält man insbesondere:

$$(12) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{k} + \frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_1^3{}^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}.$$

Man kann übrigens die Formel (11) durch Einführung der Komponente K_{00} des Krümmungstensors noch vereinfachen. Aus der allgemeinen Gleichung [vgl. (1)]:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mu\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\lambda\\ \varkappa\end{matrix}\right\} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} - \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\lambda}$$

erhält man für $\mu = \nu = 0$:

$$K_{00} = -\frac{\partial}{\partial x^\varkappa} g^{\varkappa\sigma}\begin{bmatrix}00\\ \sigma\end{bmatrix} + g^{\lambda\varrho}\begin{bmatrix}0\varkappa\\ \varrho\end{bmatrix}\cdot g^{\varkappa\sigma}\begin{bmatrix}0\lambda\\ \sigma\end{bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} - g^{\lambda\varrho}\begin{bmatrix}00\\ \varrho\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\lambda}.$$

Wegen $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$ ist

$$\begin{bmatrix}00\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0},\quad \begin{bmatrix}00\\ \mu\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu},\quad \begin{bmatrix}0\mu\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu},$$

$$\begin{bmatrix}0\mu\\ \nu\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \text{ für } \mu,\ \nu \neq 0.$$

$$K_{00} = -\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left[g^{\varkappa\sigma}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}(\delta_\sigma{}^0 - \tfrac{1}{2})\right] + \tfrac{1}{4} g^{\lambda\varrho} g^{\varkappa\sigma}\frac{\partial g_{\varkappa\varrho}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^0}$$
$$- \tfrac{1}{4} g^{\lambda\varrho} g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varrho}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} - \tfrac{1}{4} g^{\varkappa\sigma} g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varkappa}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} + \tfrac{1}{2}(g^{00})^2\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\right)^2$$
$$+ \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} - g^{\lambda\varrho}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varrho}(\delta_\varrho{}^0 - \tfrac{1}{2})\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\lambda};$$
$$\delta_\sigma{}^0 = 0 \text{ für } \sigma \neq 0,\ = 1 \text{ für } \sigma = 0.$$

Unter Benutzung der Gleichung (2) erhält man hieraus, da $g_{\varkappa\varrho}\, g^{\varkappa\sigma} = \delta_\varrho^\sigma$ ist:

$$K_{00} = \left[g^{\sigma\tau}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\tau} + g^{\tau\nu}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \sigma\end{matrix}\right\}\right]\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}(\delta_\sigma{}^0 - \tfrac{1}{2}) - g^{\varkappa\sigma}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\sigma\,\partial x^\varkappa}(\delta_\sigma{}^0 - \tfrac{1}{2})$$
$$- \tfrac{1}{4} g^{\lambda\varrho} g_{\varkappa\varrho}\frac{\partial g^{\varkappa\sigma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2} g^{\lambda\varrho} g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varrho}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2$$
$$+ \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} - g^{\tau\sigma}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}(\delta_\sigma{}^0 - \tfrac{1}{2})\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^\tau},$$

$$K_{00} = g^{\tau\nu}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ 0\end{matrix}\right\}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2} g^{\tau\nu}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ \sigma\end{matrix}\right\}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} - g^{00}\frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^0)^2} + \tfrac{1}{2} g^{\varkappa\sigma}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\sigma\,\partial x^\varkappa}$$
$$- \tfrac{1}{4}\frac{\partial g^{\varkappa\sigma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\varkappa\sigma}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2} g^{\lambda\varrho} g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\varrho}\frac{\partial g_{\varkappa\varrho}}{\partial x^\lambda} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2$$
$$+ \frac{\partial^2 \lg\sqrt{G}}{(\partial x^0)^2};\ g^{\tau\nu}\left\{\begin{matrix}\tau\nu\\ 0\end{matrix}\right\} = -\frac{\partial g^{00}}{\partial x^0} - g^{00}\frac{\partial \lg\sqrt{G}}{\partial x^0}$$

nach Gleichung (4), desgleichen

$$g^{\tau\nu}\begin{Bmatrix}\tau\nu\\ \sigma\end{Bmatrix} = -\,g^{\sigma\nu}\frac{\partial \lg (g^{\sigma\nu}\sqrt{G})}{\partial x^{\nu}};$$

$$K_{00} = \tfrac{3}{2}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2 - \frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^0}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - \frac{1}{g_{00}}\frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^0)^2} + \frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{(\partial x^0)^2}$$
$$- \tfrac{1}{2} g_{00}\, g^{\lambda\varrho}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\varrho}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\lambda}} + \tfrac{1}{2}\, g^{\lambda\varrho}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{\varrho}\,\partial x^{\lambda}} - \tfrac{1}{4}\frac{\partial g^{\varkappa\sigma}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g_{\varkappa\sigma}}{\partial x^0}$$
$$+ \tfrac{1}{2} g^{\sigma\nu}\frac{\partial \lg g^{\sigma\nu}\sqrt{G}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\sigma}};$$

$$g^{00}K_{00} = \frac{1}{g_{00}}\frac{\partial^2 \lg \sqrt{G}}{(\partial x^0)^2} - \frac{2}{g_{00}}\frac{\partial^2 \lg \sqrt{g_{00}}}{(\partial x^0)^2} + \frac{2}{g_{00}}\left(\frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0}\right)^2$$
$$- \frac{2}{g_{00}}\frac{\partial \lg \sqrt{G}}{\partial x^0}\,\frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\nu}}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\frac{g^{\mu\nu}}{g^{00}}\,\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}} - \frac{1}{4\,g_{00}}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}$$
$$+ \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g^{\mu\nu}\sqrt{G}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}};$$

$$g^{00}K_{00} = \frac{1}{g_{00}}\left[\frac{\partial^2 \lg \sqrt{g}}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2 \lg \sqrt{g_{00}}}{(\partial x^0)^2} - 2\,\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^0}\,\frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0}\right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{4}\sum_0^3{}_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\right] + \tfrac{1}{2}\sum_0^3{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{G})}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}}\right);$$

$$= \frac{1}{g_{00}}\left[\frac{\partial^2 \lg \sqrt{g}}{(\partial x^0)^2} - 2\,\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^0}\,\frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} + \left(\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x^0}\right.\right.$$
$$\left. - \frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0}\right)\frac{\partial \lg \sqrt{g_{00}}}{\partial x^0} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right)^2$$
$$\left. - \tfrac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\right] + \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial^2 \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial \lg (g^{\mu\nu}\sqrt{g})}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\nu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}}\right];$$

$$= \frac{1}{2\,g_{00}}\left[\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,\mathrm{div\ grad}\,\lg g_{00} + \tfrac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^{\nu}}.$$

Daher erhält man entweder

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{R} - \mathfrak{k} - g^{00} K_{00} = \dfrac{1}{2 g_{00}} \left[\dfrac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \lg g}{\partial x^0} \dfrac{\partial \lg g_{00}}{g x^0} \right] \\ \qquad + \tfrac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{grad} \lg g_{00} + \tfrac{1}{4} \sum_1^3{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \dfrac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} \dfrac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu} \end{cases}$$

oder

$$(14)\quad \mathfrak{R} - \mathfrak{k} - 2 g^{00} K_{00} = \frac{1}{4 g_{00}} \left[\left(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0} \right)^2 + \sum_1^3{}_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \right].$$

Im Falle des Gaußschen Systems wird einfach (für $g_{00} = 1$):

$$(15)\quad \mathfrak{R} - \mathfrak{k} - K_{00} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{(\sigma x^0)^2}.$$

3. Abschnitt.

Der Einfluß der Verzerrung auf das Krümmungsmaß.

Nun sind alle Vorbereitungen erledigt, um die Änderung des Krümmungsmaßes durch die Verzerrung bestimmen zu können. Wendet man die Gleichung (11) des vorigen Abschnittes auf die verzerrte Mannigfaltigkeit an, so erhält man:

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{k}' + \frac{1}{g_{00}'} \left[\frac{\partial^2 \lg g'}{(\partial x'^0)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \lg g'}{\partial x'^0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g'}{\partial x'^0} \frac{\partial \lg g'_{00}}{\partial x'^0} - \tfrac{1}{4} \sum_1^3{}_{\mu\nu} \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^0} \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x'^0} \right] + \operatorname{div} \operatorname{grad}' \lg g_{00}' + \tfrac{1}{2} \sum_1^3{}_{\mu\nu} g'^{\mu\nu} \frac{\partial \lg g'_{00}}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \lg g'_{00}}{\partial x'^\nu}.$$

Nach Früherem ist hierin

$$\mathfrak{k}' = \mathfrak{k},\ g_{00}' = g_{00} \mathfrak{l}^2,\ \frac{\partial}{\partial x'^0} = \mathfrak{l} \frac{\partial}{\partial x^0},\ \frac{\partial^2}{(\partial x'^0)^2} = \mathfrak{l}^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}{}^{1}),\ g' = g \cdot a^2,$$

$\operatorname{div} \operatorname{grad}' = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ und $g'^{\mu\nu} \dfrac{\partial}{\partial x'^\mu} \dfrac{\partial}{\partial x'^\nu} = g^{\mu\nu} \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$

zu setzen. Man erhält also:

---

1) $\partial \mathfrak{l} / \partial x^0$ ist gleich 0 zu setzen, da die x_0-Linien in die Räume konstanter Verzerrung fallen.

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{l} + \frac{1}{g_{00}\,\mathfrak{l}^2}\Big[\mathfrak{l}^2\frac{\partial^2 \lg g}{(\partial x^0)^2} + \mathfrak{l}^2\frac{\partial^2 \lg a^2}{(\partial x^0)^2} + \tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2\Big(\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\Big)^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}^2\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0}$$
$$+ \tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2\Big(\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0}\Big)^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}^2\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}^2\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}$$
$$- \mathfrak{l}^2\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^0}\,^{1)} - \mathfrak{l}^2\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^0}\,^{1)} - \tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2\sum_1^3{}_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}'}{\partial x^0}\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0}\Big]$$
$$+ \operatorname{div}\operatorname{grad}\lg g_{00} + 2\operatorname{div}\operatorname{grad}\lg \mathfrak{l} + \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\nu}$$
$$+ 2\sum_1^3 g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu} + 2\sum_1^3 g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}.$$

Mit Benutzung der Gleichung (2, 11) findet man dann:

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} + \frac{1}{g_{00}}\Big[\frac{\partial^2 \lg a^2}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0}\Big)^2$$
$$- \frac{1}{2}\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} + \frac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\Big(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0}\Big)\Big]$$
$$+ 2\operatorname{div}\operatorname{grad}\lg \mathfrak{l} + 2\sum_1^3 g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg' g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}$$
$$+ 2\sum_1^3 g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}.$$

Diese Gleichung kann dadurch vereinfacht werden, daß man die Gleichungen (21) und (22) des Abschnitts 1 auf die Funktion $f = \lg \mathfrak{l}$ anwendet. Danach erhält man

$$\operatorname{Div}\operatorname{Grad}'\lg \mathfrak{l} = \operatorname{Div}\operatorname{Grad}\lg \mathfrak{l} + 2\,g_{00}\frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^0}\,^{1)}$$
$$+ \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^0}\sqrt{G}\,g^{00}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^0}\,^{1)} + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\,\tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}$$
$$+ \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu} + \operatorname{div}\operatorname{grad}\lg \mathfrak{l}.$$

$$\operatorname{Div}\operatorname{Grad}'\lg \mathfrak{l} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\lg \mathfrak{l} + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\,\tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}$$
$$+ \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\nu}.$$

1) Vgl. Anmerkung auf S. 15.

Setzt man dies in die Gleichung für $\mathfrak{K}'$ ein, so erhält man:

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}' = \mathfrak{K} + \frac{1}{g_{00}}\left[\frac{\partial^2 \lg a^2}{(\partial x^0)^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0}\right)^2\right. \\ \qquad \left. - \frac{1}{2}\frac{\partial \lg a^2}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}\right] - \frac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\left[\left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0}\right.\right. \\ \qquad \left.\left. - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\right)\right] + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \lg l}{\partial x^\nu} \\ \qquad + 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}'\lg l. \end{cases}$$

Nun nehme ich an, daß vor der Verzerrung meine Behauptung richtig sei, die Krümmung $\mathfrak{K}$ also die Gestalt habe:

$$(2)\qquad \mathfrak{K} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A}\ ^1);$$

dann ist nach Gleichung (1, 22):

$$\mathfrak{K} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}\,\mathfrak{A} = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}'\,\mathfrak{A} - 4\,g^{00}\frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x^0}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^0} - 2\sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg l}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\nu}.$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{K}' = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}'(\mathfrak{A} + \lg l) + \frac{1}{g_{00}}\left[2\frac{\partial^2 \lg a}{(\partial x^0)^2} + \frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\frac{\partial \lg a}{\partial x^0} + \left(\frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\right)^2 - \frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0} - 2\frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^0}\right] - \frac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\right) + \sum_1^3{}_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg l}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu} - 2\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}\right).$$

Soll nun die Behauptung richtig sein, daß auch

$$(3)\qquad \mathfrak{K}' = 2\,\mathrm{Div}\,\mathrm{Grad}'\,\mathfrak{A}'$$

werde, so kann das nur der Fall sein, wenn

$$(4)\qquad \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \lg l$$

wird, wie ich das im Nachtrag meiner Arbeit vorausgesagt

---

1) Die Bezeichnung entspricht der Gleichung (VI) auf S. 176 meiner Annalenarbeit.

habe.[1]) Es muß aber außerdem die Bedingung erfüllt sein, daß die Zusatzglieder verschwinden. Es muß also

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}\sum_1^3{}_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\frac{\partial \lg l}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^\mu}-2\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^\mu}\right) &= \frac{1}{4}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\ \frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0}\right.\\ &-\left.\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}\right)-\frac{1}{g_{00}}\left[2\frac{\partial^2 \lg a}{(\partial x^0)^2}+\frac{\partial \lg g}{\partial x^0}\ \frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\right.\\ &+\left.\left(\frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\right)^2-\frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\ \frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x^0}-2\frac{\partial \lg a}{\partial x^0}\ \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^0}\right]\end{aligned}\right.$$

sein. Das kann man durch die bisher offen gelassene Wahl der Koeffizienten a^ϱ_μ erreichen. Diese waren an die Bedingung (1,6) oder (1,8) geknüpft:

$$\frac{\partial a^\varrho_\mu}{\partial x'^\nu}=\frac{\partial a^\varrho_\nu}{\partial x'^\mu},\qquad \frac{\partial a'^\mu_\varrho}{\partial x^\sigma}=\frac{\partial a'^\mu_\sigma}{\partial x^\varrho}.$$

Aus diesen geht hervor, daß es sich im ganzen um drei voneinander unabhängige Funktionen handelt, deren partielle Ableitungen die a oder a' sind. Natürlich sind dies die transformierten Koordinaten, da $a'^\mu_\varrho=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\varrho}$ ist.

Mit diesen drei Funktionen läßt sich drei Bedingungsgleichungen Genüge leisten. Eine davon ist die Gleichung (5); eine zweite ergibt sich daraus, daß die Differenz $\mathfrak{A}'-\mathfrak{A}$ einen vorgeschriebenen, von der geodätischen Entfernung r von der Mittelisogone allein abhängigen Wert annehmen muß, der im Außenraum, wo diese Entfernung größer als der Elektronenradius ist, gleich 0, im Innenraum aber nach meiner bisherigen Annahme[2]) gleich $\frac{6\varrho^2+4r^2}{(\varrho^2+r^2)^2}$ wird — ϱ ist der Krümmungs-

1) Vgl. den Nachtrag zu meiner Annalenarbeit, S. 176. Gl. (VIII).

2) A. a. O. S. 150f. Ich möchte hieran die Bemerkung knüpfen, daß es auch möglich ist, diese Größe, deren Veränderlichkeit wegen der Kleinheit von r gegenüber ϱ verschwindend gering ist, genau konstant, also gleich dem Werte $6/\varrho^2$ im Mittelpunkte zu machen, wenn man im Innenraume l nicht mehr gleich $\frac{1}{k_0}\sqrt{1+\frac{r^2}{\varrho^2}}$, sondern gleich $\frac{\varrho}{2rk_0\sqrt{3}}\left(e^{\sqrt{3}\frac{r}{\varrho}}-e^{-\sqrt{3}\frac{r}{\varrho}}\right)$ setzt. Außerhalb bleibt der Ansatz $l=1-c_1/r$ nach Analogie meiner Gleichung (37) auf S. 154 unverändert.

radius des Elektronenraumes, der von dem von mir mit a bezeichneten Radius der Elektronenkugel zu unterscheiden ist.[1])

Da im Rahmen meiner Theorie nur die Gleichung (5), sowie die Vorschrift über das Krümmungsmaß notwendig sind, bleibt für die dritte Bedingungsgleichung eine gewisse Willkür bestehen. Ich will sie nun so aufstellen, daß die Verhältnisse möglichst einfach werden, und da empfiehlt sich die Annahme der Unabhängigkeit der Transformationsdeterminante a von x^0, da dann die letzte Klammer der Gleichung (5) ganz fortfällt. Wenn a nur noch von x^1, x^2, x^3 abhängt, kann es ja bekanntlich konstant, insbesondere gleich 1 gemacht werden, und dies bedeutet, daß durch die Verzerrung das Volummaß im Ruhraum nicht geändert wird. Dagegen kann dasselbe nicht von dem Längenmaß in den einzelnen Richtungen gesagt werden, da sonst a_μ^2 bei gleichen Indizes 1 und bei ungleichen 0 werden müßte; die Verzerrung ist also anisotrop, und es kann auch nicht mehr von der Lichtgeschwindigkeit als dem Verhältnis des Längen- zum Zeitmaße gesprochen werden. Es läßt sich aber gerade bei Annahme der Bedingung $a = 1$ dafür Ersatz durch Einführung eines mittleren Längenmaßes gewinnen, wobei jedes Streckenelement gleich der Kubikwurzel aus dem durch die Fundamentaldeterminante g geteilten Volumelement ist, und dieses mittlere Maß wird durch die Verzerrung nicht verändert.

Damit und durch die sogleich zu erörternden Grenzbedingungen sind alle Größen festgelegt. Zunächst ist r als Funktion von x^1, x^2, x^3 definiert, da es die Länge der auf der Mittelisogone senkrechten geodätischen Linien mißt, die mit dem zu ihnen orthogonalen zylindrischen Parallelräumen das Gaußsche Koordinatensystem bilden. Dieses aber ist in dasjenige halborthogonale System der $x^0\, x^1\, x^2\, x^3$ zu transformieren, das mit ihm die $x^1\, x^2\, x^3$-Räume der sämtlichen von einem Punkte der Mittelisogonen ausgehenden geodätischen Linien gemeinsam hat, auf welchen Räumen dann die x_0-Linien senkrecht stehen. Als Funktion von r ist dann $\mathfrak{l}$ mit verschiedenem Ansatz für Außen- und Innenraum gegeben, wobei die Konstanten wie auf S. 154 meiner Arbeit so zu bestimmen sind, daß $\mathfrak{l}$ und $d\mathfrak{l}/dr$ in der Grenz-

1) Vgl. a. a. O. S. 164f.

kugel des Elektrons stetig übergehen. Die übrigen mit a bezeichneten Komponenten der Verzerrung oder ihre Kontravarianten a'^{μ}_{ϱ}, bzw. deren Integrale x'^{μ} sind dann aus Gleichung (5), der Beziehung für $\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}$ außen und innen und der Gleichung $a = 1$ zu gewinnen. Dabei sind für den Außenraum die Grenzbedingungen dadurch gegeben, daß im Unendlichen die Verzerrung verschwindet, d. h. a^{ϱ}_{μ} bei gleichen Indizes 1, bei ungleichen 0 wird. Die somit für den Außenraum gegebenen Werte der Komponenten a^{ϱ}_{μ} nehmen auf der Grenzkugel des Elektrons Größen an, die wieder zur Aufstellung von Grenzbedingungen für den Innenraum führen. Damit sind sämtliche Komponenten völlig definiert, und zugleich ist der stetige Übergang von innen nach außen gesichert. Ich möchte nur noch ergänzend hinzufügen, wie der Ausdruck für die Summe über

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0}$$

in Gleichung (5) mit Benutzung der Werte von $g'_{\mu\nu}$ und $g'^{\mu\nu}$ nach (1, 9) und (1, 10) auszuführen ist. Es wird nämlich:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^0} - \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_0}\,\dfrac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} = \dfrac{\partial a^{\varrho}_{\mu} a^{\sigma}_{\nu} g_{\varrho\sigma}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial a'^{\mu}_{\tau} a'^{\nu}_{\varphi} g^{\tau\varphi}}{\partial x^0} \\ -\dfrac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial g^{\varrho\sigma}}{\partial x^0} = 2\,\dfrac{\partial a'^{\nu}_{\mu}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial a'^{\mu}_{\nu}}{\partial x^0} + 2 a^{\varrho}_{\mu}\, a'^{\nu}_{\varphi}\, g_{\varrho\sigma}\, g^{\tau\varphi}\,\dfrac{\partial a^{\sigma}_{\nu}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial a'^{\mu}_{\tau}}{\partial x^0} \\ \qquad\qquad + 4 a^{\varrho}_{\mu}\, g^{\tau\sigma}\,\dfrac{\partial g_{\sigma\varrho}}{\partial x^0}\,\dfrac{\partial a'^{\mu}_{\tau}}{\partial x^0}\,. \end{cases}$$

Somit wäre durch eine vollständige Induktion gezeigt, daß sich das Krümmungsmaß $\mathfrak{R}$ der Raumzeitmannigfaltigkeit ganz allgemein als doppelte Divergenz des Gradienten einer Größe $\mathfrak{A}$ darstellen läßt, die ich als das skalare Gravitationspotential ansehe, und die sich als Logarithmus der veränderlichen Lichtgeschwindigkeit deuten läßt. Dabei ist aber wegen der Anisotropie der Verzerrung ein mittleres Längenmaß zu wählen und außerdem die Voraussetzung gemacht, daß die Verzerrung für den Ruhraum verschwindet.

Wilhelmshaven, 25. Juni 1919.

(Eingegangen 28. Juni 1919.)

2. *II. Die Krümmung des Lichtstrahls infolge der Gravitation;*

von Ernst Reichenbächer.

Bekanntlich hat Einstein als eine durch die Erfahrung zu prüfende Folgerung seiner Gravitationstheorie die Krümmung eines an der Sonne tangential entlang streifenden Lichtstrahls im Gesamtbetrage von 1,7″ festgestellt. Demgegenüber behauptet Eddington[1]), daß aus der Gravitationswirkung der Sonne auf die mit der Geschwindigkeit $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec bewegte Lichtenergie die Hälfte des Einsteinschen Effektes sich ergeben muß, wobei weiter keine Annahme zu machen ist, als daß die Wirkung auf einen Energiepunkt dieselbe ist wie auf einen Massenpunkt. Daraufhin will ich in Fortsetzung meiner Ausführungen in der Arbeit: „Theorie der Elektrizität und der Gravitation", die in Heft 52 der Annalen der Physik 1917, S. 134ff., erschienen ist, prüfen, welche Krümmung des Lichtstrahls sich aus der dort entwickelten Theorie ergibt.

Ich hatte auf S. 157 als Gleichungen für einen der Gravitation unterworfenen Körper die drei folgenden aufgestellt (40b):

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} : \left[1 - \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_0}{\partial x_\tau} \quad (\tau = 1, 2, 3)$$

Ersetzt man hierin den Nenner durch $g_0\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2$, so lauten sie

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_0}{dx_\tau} \cdot g_0 \left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_0}{\partial x_\tau}\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2.$$

In dieser Gestalt erkennt man sofort, daß es sich um die kürzesten Linien der Mannigfaltigkeit handelt, deren Linienelementquadrat ja nach Gleichung (35) (S. 151)[2]) durch

$$ds^2 = g_0\, dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

---

1) Vgl. Naturwissenschaften 1919, Heft 20, S. 368.

2) Mit Ersatz der Polarkoordinaten durch Cartesische.

gegeben war. Aus diesem Grunde muß ich die Gleichungen (40 b) und ihre Folgerungen auch für den Lichtstrahl als gegeben annehmen mit der besonderen Maßgabe, daß für diesen ds gleich 0 werden muß. Nun ergeben sich aus (40 b) die drei folgenden:

$$x_3 = \text{const.}, \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2Ai}{c} \text{ (Gl. 42)}, \quad 1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \frac{B}{g_0} = \frac{Bc^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2 r}\right)^2} \text{ (Gl. 43) mit } x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi.$$

Weil ds verschwindet, werden sowohl A als B unendlich, aber so, daß der Quotient $B/A^2 = \Gamma$ endlich bleibt. Danach erhält man nach (44) mit $k = 1/r$:

$$\left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2 + k^2 = \frac{\Gamma}{4\left(1 - \frac{b}{c^2 k}\right)^2}.$$

Dies ist die Gleichung der krummen ebenen Kurve, die das Licht infolge der Gravitation eines Zentrums beschreibt. Die Konstante b ist nach S. 160, Gleichung (49) und (50), fast genau gleich $\frac{4A^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, wo a und T mittlere Entfernung und Umlaufszeit eines das Zentrum umkreisenden Planeten sind, also gleich $\varkappa M$, dem Produkt aus Gravitationskonstante und Masse des Zentrums. Da nun $k = 1/r$ im massefreien Äther höchstens den umgekehrten Wert $1/r_1$ des Radius des anziehenden Weltkörpers hat, kann man, wie ich das auch für die Planetenbewegung getan habe, wegen der Kleinheit des Ausdruckes $\frac{\varkappa M}{c^2 r}$ die obige Differentialgleichung durch

$$\left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2 + k^2 = \frac{\Gamma}{4}\left(1 + 2\frac{b}{c^2}k + 3\frac{b^2}{c^4}k^2\right)$$

ersetzen, deren Lösung auf S. 159 gegeben wurde:

$$k = \frac{1 + \varepsilon\cos\lambda\varphi}{p}, \quad \frac{dk}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon\lambda}{p}\sin\lambda\varphi$$

mit [vgl. Gleichung (45), (46) f.]

$$\lambda^2 = 1 - \frac{3\Gamma b^2}{4c^4}, \quad \frac{\Gamma}{4}\frac{bp}{c^2} = 1 - \frac{\Gamma}{4}\cdot 3\frac{b^2}{c^4}, \quad -\frac{\Gamma}{4} = \frac{\lambda^2}{p^2}(1 - \varepsilon^2).$$

Durch Elimination von λ und p erhält man hieraus

$$\frac{\Gamma}{4} = \frac{c^4}{b^2(2 + \varepsilon^2)} = \frac{c^4}{\varkappa^2 M^2 (2 + \varepsilon^2)}.$$

führung des Eddingtonschen Gedankens, der ja durch seine Gleichsetzung von Energie und Masse manches für sich hat, auf meine Gravitationstheorie führen muß, wenn man an dem oben genannten Fermatschen Prinzip der kürzesten Lichtzeit und daneben an der Unverzerrtheit des Raumes festhält. In letzteren Punkte setzt die Abweichung der Einsteinschen Theorie ein, der statt dessen das Verschwinden des Krümmungstensors $B_{\mu\nu}$ fordert und infolgedessen auch andere Effekte, nämlich stets das Doppelte, sowohl für die Ablenkung des Lichtstrahls, als auch für die Perihelwanderung erhält [vgl. Gleichung (52), S. 161 meiner Arbeit].

Wilhelmshaven, 25. Juni 1919.

(Eingegangen 28. Juni 1919.)

3. *III. Die Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfelde;*

von Ernst Reichenbächer.

In meiner Arbeit über das skalare Gravitationspotential hatte ich gezeigt, daß die Feldgleichung

$$\mathfrak{K} = 2 \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \mathfrak{A} \tag{1}$$

für ein beliebiges Gravitationsfeld aufrecht erhalten werden kann, das sich aus n Einzelfeldern so zusammensetzt, daß in jedem einzelnen von diesen die Wirkung der Gravitation darin besteht, daß eine Schar von Räumen, die sogenannten Ruhräume, unverzerrt bleibt, während deren orthogonale Trajektorien eine Verkürzung im Verhältnis $1 : l_h$ ($h = 1$ bis n) erfahren. Das Gesamtpotential $\mathfrak{A}$ war gleich der Summe der Logarithmen dieser Verzerrungsfaktoren l_h. Daraus geht nun hervor, daß man mehrere dieser Einzelwirkungen oder sie alle durch eine einzige gleichartige ersetzen kann, bei der wiederum eine Schar von Räumen unverzerrt bleibt, während der Verzerrungsfaktor l der orthogonalen Trajektorien (also die Gesamtlichtgeschwindigkeit) jetzt gleich dem Produkt sämtlicher Einzellichtgeschwindigkeiten l_h oder gleich $e^{\mathfrak{A}}$ wird. Man erhält also aus der unverzerrten Minkowskischen Mannigfaltigkeit ein beliebiges Gravitationsfeld dadurch, daß man eine Schar von Räumen unverzerrt läßt und deren senkrechte Trajektorien im Verhältnis $1 : l$ verkürzt. Dabei wandern aber die Durchschnittspunkte der Trajektorien mit den Räumen, was dadurch zum Ausdruck kommt, daß in jedem von diesen Räumen eine andere Koordinatentransformation auszuführen ist, deren Komponenten von der längs der Trajektorien zu messenden Koordinate abhängen. Wird diese wieder mit x^0, die drei anderen mit x^1, x^2, x^3 bezeichnet.

so besteht die Verzerrung in der vorderen und hinteren Multiplikation des Fundamentaltensors mit der Matrix

$$\begin{vmatrix} l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{\,1} & a_1^{\,2} & a_1^{\,3} \\ 0 & a_2^{\,1} & a_2^{\,2} & a_2^{\,3} \\ 0 & a_3^{\,1} & a_3^{\,2} & a_2^{\,3} \end{vmatrix}$$

Wäre l von x^1, x^2, x^3 und $a_i^{\,k}$ von x^0 unabhängig, so würde die Verzerrung auf eine bloße Transformation hinauslaufen. Dies soll nicht der Fall sein, es soll sich vielmehr um eine echte Verzerrung handeln. Da der Verzerrungsfaktor l sich längs einer Trajektorie nicht ändern darf, müssen diese in die Räume $l = \text{const.}$ fallen, auf denen also die unverzerrten Räume senkrecht stehen müssen.

Für die Untersuchung der Punktbewegung im allgemeinen Gravitationsfeld, bei der ich mich eng an das von mir in meiner Arbeit „Theorie der Elektrizität und Gravitation" für einen einzigen Anziehungsmittelpunkt beschriebene Verfahren anlehne, lege ich nun ein solches halborthogonales Koordinatensystem der unverzerrten Räume mit ihren Trajektorien zugrunde. Die Maßvorschrift

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{2}$$

für das Linienelementquadrat geht also über in

$$ds^2 = g'_{\mu\nu}\, dx'^\mu\, dx'^\nu\,, \tag{3}$$

wobei

$$g'_{00} = l^2 g_{00}\,,\quad g'_{0\nu} = g_{0\nu} = 0\,,\quad g'_{\mu\nu} = a_\mu^{\,\varrho}\, a_\nu^{\,\sigma}\, g_{\varrho\sigma} \tag{4}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x'^0} = l\,\frac{\partial f}{\partial x^0}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = a_\mu^{\,\varrho}\,\frac{\partial f}{\partial x^\varrho} \tag{5}$$

ist, da

$$dx^0 = l\,dx'^0 \quad \text{und} \quad dx^\varrho = a_\mu^{\,\varrho}\, dx'^\mu \tag{6}$$

wird.

Maßgebend für das von mir in genannter Arbeit entwickelte Verfahren waren die Gleichungen auf S. 156f.

$$\frac{1}{\sigma} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma}\cos^2\vartheta\,, \tag{7}$$

$$\cos^2(r\,\sigma)\cos^2\psi = \left(\frac{d\,s_0}{d\,s}\right)^2 = \cos^2(x^0\,s) \tag{8}$$

und

$$\frac{\cos(x_\tau\,\sigma)}{\sigma} = -\frac{d^2 s_\tau}{d\,s^2} \qquad (\tau = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$\frac{1}{\sigma} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\,\lg g_0}{\partial\,\sigma}\frac{\cos^2(x_0\,s)}{\cos^2(r\,\sigma)}. \tag{10}$$

In dieser Gleichung spielt $\sqrt{g_0}$ die Rolle des Verzerrungsfaktors und ist daher im allgemeinen Falle durch 1 zu ersetzen, während alles andere übernommen werden kann. Dagegen geht Gleichung (9) über in

$$\frac{c_\tau^{(\sigma)}}{\sigma} = -x_{ss}^{(\tau)}. \tag{11}$$

Die Bezeichnungen entsprechen denen Kottlers in seinen Annalenarbeiten, **44.** S. 701 ff. und **45.** S. 481 ff. Diese Größen lassen sich durch die Gleichungen bestimmen

$$c_\tau^{(\sigma)} = \frac{d\,x^\tau}{d\,s^\sigma} \tag{12}$$

und

$$x_{ss}^{(\tau)} = \frac{d^2 x^\tau}{d\,s^2} + \left\{\begin{matrix}\varkappa\,\lambda\\ \tau\end{matrix}\right\}\frac{d\,x^\varkappa}{d\,s}\frac{d\,x^\lambda}{d\,s}. \tag{13}$$

Mit den Richtungskosinus hängen die $c_\tau^{(\sigma)}$ zusammen durch die Gleichung von

$$\cos(\sigma\,x^i) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}g_{\tau i}\frac{d\,x^\tau}{d\,s^\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}g_{\tau i}\,c_\tau^{(\sigma)} \tag{14}$$

und

$$c_\tau^{(\sigma)} = g^{\tau k}\sqrt{g_{kk}}\cos(\sigma\,x^k).$$

Also wird die Gleichung (11):

$$\frac{c_\tau^{(\sigma)}}{\sigma} = -\frac{d^2 x^\tau}{d\,s^2} - \left\{\begin{matrix}\varkappa\,\lambda\\ \tau\end{matrix}\right\}\frac{d\,x^\varkappa}{d\,s}\frac{d\,x^\lambda}{d\,s}.$$

Man multipliziere mit $g_{h\tau}$ und summiere über τ von 0 bis 3:

$$\frac{g_{h\tau}\, c_\tau^{(\sigma)}}{\sigma} = -\, g_{h\tau}\frac{d^2x^\tau}{ds^2} - g_{h\tau}g^{\tau\varrho}\begin{bmatrix}\varkappa\,\lambda\\ \varrho\end{bmatrix}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds} = -\, g_{h\tau}\frac{d^2x^\tau}{ds^2} - \begin{bmatrix}\varkappa\,\lambda\\ h\end{bmatrix}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}$$

$$= -\, g_{h\tau}\frac{d^2x^\tau}{ds^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\varkappa h}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda h}}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\right]\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}$$

$$= -\, g_{h\tau}\frac{d^2x^\tau}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa h}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\lambda h}}{\partial x^\varkappa}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}$$

$$= -\, g_{h\tau}\frac{d^2x^\tau}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\varkappa h}}{ds}\frac{dx^\varkappa}{ds} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\lambda h}}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}$$

$$= -\, g_{h\tau}\frac{d^2x^\tau}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\tau h}}{ds}\frac{dx^\tau}{ds} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\tau h}}{ds}\frac{dx^\tau}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}$$

$$(15)\qquad \frac{g_{h\tau}\, c_\tau^{(\sigma)}}{\sigma} = -\,\frac{d}{ds}g_{h\tau}\frac{dx^\tau}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}.$$

Führt man hierin den Wert von $c_\tau^{(\sigma)}$ aus (14) ein, so ergibt sich

$$(16)\qquad \frac{\sqrt{g_{hh}}\cos(x^h\,\sigma)}{\sigma} = -\,\frac{d}{ds}g_{h\tau}\frac{dx^\tau}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}$$

und nach Berücksichtigung der Gleichung (10):

$$(17)\qquad -\,\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial\sigma}\,\frac{\cos(x^h\,\sigma)\cos^2(x^0\,s)}{\cos^2(r\,\sigma)}\sqrt{g_{hh}} = -\,\frac{d}{ds}g_{h\tau}\frac{dx^\tau}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\,\frac{dx^\lambda}{ds}.$$

Die Größen $\partial \lg \mathfrak{l}/\partial\sigma$ und $\cos(x_h\,\sigma)$ lassen sich nun ganz dem Verfahren auf S. 156f. a.a.O. entsprechend umbilden. Fällt nämlich die eine von den drei räumlichen Achsen mit dem Gradienten r des Gravitationspotentials zusammen, so ist, da außer $\partial \lg \mathfrak{l}/\partial r$ alle anderen Differentialquotienten verschwinden,

$$(18)\qquad \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial\sigma} = \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\varrho}c_\varrho^{(\sigma)} = \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\varrho}g^{\varrho k}\sqrt{g_{kk}}\cos(\sigma\,x^k) = \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial r}\,\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\cos(\sigma\,r).$$

Es steht ja σ orthogonal zu den beiden nicht mit x^0 und r zusammenfallenden Achsen; daher verschwindet $\cos(\sigma x^k)$ für diese Richtungen; andererseits ist aber $g^{\varrho 0} = 0$ außer für $\varrho = 0$, wo aber wieder $\partial \lg \mathfrak{l} / \partial x^\varrho$ verschwindet. So erhält man

$$(19) \qquad -\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial r}\frac{\cos(x^h \sigma)}{\cos(r\sigma)}\sqrt{\frac{g_{hh}}{g_{rr}}}\cos^2(x^0 s) = -\frac{d}{ds}g_{h\tau}\frac{dx^\tau}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}.$$

Nun ist, da σ in der $x_0 r$-Ebene liegt (vgl. S. 156):

$$(20) \qquad \cos(x^h \sigma) = \cos(r\sigma)\cdot\cos(r x^h),$$

ferner

$$\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial s^h} = \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\varrho}\mathfrak{c}_\varrho^{(h)} = \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^\varrho}g^{\varrho k}\sqrt{g_{kk}}\cos(x^h x^k)$$

in einem beliebigen Koordinatensystem. Wählt man dies[1]) so, daß eine seiner Richtungen mit r zusammenfällt, während die anderen dazu senkrecht stehen, so erhält man:

$$(21) \qquad \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial s^h} = \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial r}\frac{\cos(r x^h)}{\sqrt{g_{rr}}}.$$

Das ergibt aber für die linke Seite der Gleichung (19) den Wert

$$-\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial s^h}\sqrt{g_{hh}}\cos^2(x^0 s) = -\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^h}\cos^2(x^0 s) = -\frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^h}\cdot g_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)$$

[nach Gleichung (14), da $g_{\tau 0} = 0$ für $\tau \neq 0$]. Demnach bekommt man für die Gleichung der durch die Gravitation erzeugten Punktbewegung

$$(22) \qquad \frac{\partial \lg \mathfrak{l}}{\partial x^h}g_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = \frac{d}{ds}g_{h\tau}\frac{dx^\tau}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^h}\frac{dx^\varkappa}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} \quad (h = 1, 2, 3).$$

Diese Gleichung enthält die Koordinaten der unverzerrten Mannigfaltigkeit. Ich will jetzt zeigen, daß sie in dem verzerrten System eine geodätische Linie darstellt. Deren Gleichung in den neuen Koordinaten ist bekanntlich:

$$(23) \qquad 0 = \frac{d}{ds}g'_{k\nu}\frac{dx'^\nu}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^k}\frac{dx'^\mu}{ds}\frac{dx'^\nu}{ds} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

1) Dies Koordinatensystem ist auch der Gleichung (18) zugrunde zu legen. Seine Einführung ist möglich, da der Gradient r ganz in die $x^1 x^2 x^3$-Räume fällt. Dieses System würde also auch halborthogonal sein und enthält als Parameterräume diejenigen, in denen das Gravitationspotential konstant ist.

1. *Zur Tensorgeometrie in der allgemeinen Relativitätstheorie*[1]; *von H. Lang.*

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — § 1. Allgemeine Maßbestimmung in einem geradlinigen Koordinatensystem. Kontravariante und kovariante Koordinaten und Vektorkomponenten. — § 2. Der aus einem Vierervektor gebildete spezielle symmetrische Tensor 2. Ranges und seine geometrische Darstellung. — § 3. Geometrische Darstellung des allgemeinen symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 4. Die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 5. Geometrische Definition der Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 6. Geometrische Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 7. Ein Integralsatz über den symmetrischen Tensor 2. Ranges und die Integralform der Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie. — § 8. Geometrische Darstellung und Divergenz des nichtsymmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 9. Definition der Divergenz des Tensors $n$ten Ranges.

Einleitung.

Eine geometrische Darstellung von *Vektoren* durch gerichtete Strecken im *Riemannschen Raum* von vier Dimensionen, das heißt in einem Raum mit der Maßbestimmung

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{ik}^{1\ldots4} g_{ik}\, dx^i\, dx^k,$$

scheint zunächst nicht statthaft zu sein, da der Riemannsche Raum keine Geraden im euklidischen Sinne enthält, also auch nicht Strecken als Teile einer Geraden in ihm abgetragen werden können. Wie aber in der Mechanik Geschwindigkeit und Beschleunigung eines auf einer krummen Fläche bewegten Punktes durch gerichtete Strecken dargestellt werden, die nur nicht mehr in dieser Fläche selbst liegen, so wird es auch für den Riemannschen Raum zulässig sein, Vektoren durch Strecken darzustellen, die von Punkten des Riemannschen Raumes ausgehen, aber mit allen ihren anderen Punkten nicht mehr

[1] Kürzung der unter dem gleichen Titel an der Universität München erschienenen Dissertation des Verfassers.

in ihm liegen. Dazu muß freilich angenommen werden, daß der Riemannsche Raum von vier Dimensionen in einem höher dimensionalen euklidischen Raum gelegen ist, ebenso wie die krumme Fläche von zwei Dimensionen in einem euklidischen Raum von drei Dimensionen liegt. Diese Annahme kann, wie kurz angedeutet werden soll, gemacht werden, wenn nur die Dimension des euklidischen Raumes hoch genug gewählt wird. Es ist nämlich ein Riemannscher Raum von vier Dimensionen als in einem euklidischen Raum von m Dimensionen gelegen zu betrachten, wenn die Maßbestimmung (1) übergeführt werden kann in die Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_{r}^{1-m} dz_r^2$$

durch die Transformation

$$z_r = z_r(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad r = 1, 2 \ldots m.$$

Dann ist nämlich

$$dz_r = \sum_{i}^{1-4} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} dx^i,$$

$$dz_r^2 = \sum_{ik}^{1-4} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} \frac{\partial z_r}{\partial x^k} dx^i dx^k$$

und

$$ds^2 = \sum_{r}^{1-m} \sum_{ik}^{1-4} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} \frac{\partial z_r}{\partial x^k} dx^i dx^k.$$

Soll dies aber die im Riemannschen Raum gegebene Maßbestimmung sein, so müssen die Gleichungen

$$g_{ik} = \sum_{r}^{1-m} \frac{\partial z_r}{\partial x^i} \frac{\partial z_r}{\partial x^k}$$

erfüllt sein. Dies wird im allgemeinen nur möglich sein, wenn $m = 10$ ist, da bei allgemeiner Maßbestimmung 10 Funktionen g_{ik} vorhanden sind. Lassen sich also m Funktionen $z_r = z_r(x^1, x^2, x^3, x^4)$ angeben, die diesen Differentialgleichungen genügen, so ist es berechtigt zu sagen, daß der Riemannsche Raum von vier Dimensionen in einem euklidischen Raum von m Dimensionen liegt. Es können also von einem Punkt des Riemannschen Raumes aus Gerade gezogen werden, die dann

(2) $$s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k,$$

wobei die g_{ik} jetzt Konstante sind und die Werte haben, die ihnen im Punkt 0 zukommen. Dabei ist ferner angenommen, daß die Tangenten an die Kurven der wachsenden kontravarianten Koordinaten zu Koordinatenachsen gewählt sind. Denn da dann für die unendlich kleine Strecke, die in dem gemeinsamen Volumelement des Riemannschen Raumes und des Tangentialraumes liegt, die Maßbestimmung (1) gilt, so muß sich auch die endliche Strecke durch die gleiche quadratische Form der Koordinaten berechnen lassen.

Diese Form der Maßbestimmung im euklidischen Raum geht aus der gewöhnlichen Form der Maßbestimmung im schiefwinkligen, geradlinigen Koordinatensystem hervor, wenn die Koordinaten. die geometrisch ja die Längen der *Parallelprojektionen* der Strecke OP auf die Achsen sind, nicht in dem *Einheitsmaßstab*, sondern *auf jeder Achse mit besonderem Maßstab* gemessen werden. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz für das schiefwinklige Achsensystem ist nämlich die Länge s gegeben durch

(2a) $$s^2 = \sum_{ik} X^i X^k \cos(ik),$$

wo (ik) den Winkel zwischen der i- und der k-Achse bezeichnet. Durch die Transformation

$$X^i = \sqrt{g_{ii}}\, x^i,$$

die der Einführung eines besonderen Maßstabes auf jede Achse entspricht, geht (2a) über in

$$s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k,$$

wenn noch festgesetzt wird, daß

$$g_{ik} = \sqrt{g_{ii} g_{kk}} \cos(ik)$$

sein soll.

Daraus folgt umgekehrt für die Maßbestimmung (1), daß die Winkel zwischen den Kurven der wachsenden x^i Koordinaten im Riemannschen Raum gegeben sind durch

$$\cos(ik) = \frac{g_{ik}}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}.$$

Der Punkt 0 kann aber statt durch die Parallelprojektionen auch durch die *Orthogonalprojektionen* auf die Achsen im schief-

winkligen System bestimmt werden. Die im Einheitsmaßstab gemessene Orthogonalprojektion X_m der Strecke OP auf die m-Achse wird aus den im Einheitsmaßstab gemessenen Parallelprojektionen X^i berechnet durch

$$X_m = \sum_i X^i \cos(mi)$$

in Erweiterung einer einfachen Formel der dreidimensionalen Geometrie. Werden hierin rechts die X^i durch die x^i ausgedrückt und noch festgesetzt, daß die Orthogonalprojektionen nicht im Einheitsmaßstab gemessen werden sollen, sondern so, daß

$$x_m = \sqrt{g_{mm}}\, X_m,$$

wenn x_m die im veränderten Maßstab gemessenen Längen sind, so ergibt sich die Beziehung zwischen kontravarianten und kovarianten Koordinaten

$$x_m = \sum_i g_{mi} x^i \tag{3}$$

und ihre Umkehrung

$$x^i = \sum_m g^{mi} x_m, \tag{3a}$$

wobei g^{mi} gleich ist der Unterdeterminante von g_{mi} in der Determinante der g_{ik}, geteilt durch den Wert g dieser Determinante.

Die Strecke OP kann aber aufgefaßt werden als ein vom Punkt 0 ausgehender Vektor $\mathfrak{s}$. Dieser Vierervektor hat in dem rechtwinkligen Koordinatensystem die Komponenten X_1, X_2, X_3, X_4, in dem schiefwinkligen mit allgemeiner Maßbestimmung aber wird er bestimmt sein ebensowohl durch die kontravarianten Komponenten x^1, x^2, x^3, x^4, wie durch die kovarianten Komponenten x_1, x_2, x_3, x_4. Der Zusammenhang zwischen den kontravarianten und kovarianten Komponenten des Vektors $\mathfrak{s}$ wird durch die Gleichungen (3) und (3a) gegeben. Diese Gleichungen, hier aus der geometrischen Darstellung des Vektors abgeleitet, gelten nicht nur für den euklidischen, sondern auch für den Riemannschen Raum und können rein analytisch gefunden bzw. definiert werden.[1]) Dann zeigt sich umgekehrt die Berechtigung der Darstellung eines Vektors durch eine

1) So bei H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. § 5. Berlin 1918.

Strecke darin, daß durch diese geometrische Darstellung eben jener Zusammenhang zwischen kontravarianten und kovarianten Komponenten wieder gegeben wird.

Daß ein Vierervektor, für den drei der kontravarianten Komponenten den Wert Null haben, in die Richtung derjenigen Achse fällt, nach der die nicht verschwindende Komponente auftritt, folgt sofort aus dem Umstand, daß die kontravarianten Komponenten des Vektors gegeben sind durch die Parallelprojektionen auf die Achsen. Wie liegt aber ein Vierervektor, für den drei der kovarianten Komponenten den Wert Null haben? Wenn die kovariante Komponente bezüglich einer Achse verschwindet, so heißt das, die Orthogonalprojektion des Vektors auf die betreffende Achse verschwindet, der Vektor muß also senkrecht auf dieser Achse stehen. Wenn drei der kovarianten Komponenten den Wert Null haben, so steht der Vektor also senkrecht auf drei Achsen des Koordinatensystems oder senkrecht auf dem durch diese drei Achsen bestimmten dreidimensionalen Raum.

Mit Rücksicht auf die Anwendung in den folgenden Paragraphen möge nun noch auf einige Beziehungen zwischen Vektorkomponenten in verschiedenen Koordinatensystemen hingewiesen werden.

Der Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem (X_i) mit gewöhnlicher Maßbestimmung zu einem schiefwinkligen System (x^i) mit allgemeiner Maßbestimmung wird vermittelt durch Transformationsformeln

$$X_m = \sum_i \alpha_{mi} x^i . \tag{4}$$

Auch die kontravarianten Komponenten eines beliebigen Vierervektors $\mathfrak{a}$ im System der x^i drücken sich durch die Komponenten im System der X_i aus durch

$$A_m = \sum_i \alpha_{mi} a^i . \tag{4a}$$

Daraus ergibt sich die Beziehung zwischen den kovarianten Komponenten a_i und den A_i durch einfache Rechnung unter Benutzung der Gleichungen (3) zu

$$a_k = \sum_m \alpha_{mk} A_m \tag{5}$$

Ihre Umkehrung ist

(5a) $$A_m = \sum_k \alpha^{mk} a_k .$$

Die Gleichungen (4a) und (5a) können noch etwas anders gedeutet werden. In dem System (x^i) wird die Koordinatenachse X_m eine bestimmte, aber beliebige Richtung haben. A_m ist die Orthogonalprojektion des Vektors $\mathfrak{a}$ auf diese Richtung. Nun wird die Orthogonalprojektion eines Vektors $\mathfrak{a}$ auf eine beliebige Richtung nach den Regeln der Vektorrechnung gefunden, indem das skalare Produkt aus dem Vektor $\mathfrak{a}$ und dem *Einheitsvektor* η in der betreffenden Richtung gebildet wird. Da dies auch für Koordinatensysteme mit allgemeiner Maßbestimmung gelten muß wegen der invarianten Bedeutung der Orthogonalprojektion und des skalaren Produkts, so muß also A_m auch bestimmt sein durch

(4b) $$A_m = \sum_k \eta_k a^k$$

oder

(5b) $$A_m = \sum_k \eta^k a_k ,$$

wo η_k bzw. η^k die Komponenten des Einheitsvektors η sind. Das sind aber gerade die Gleichungen (4a) und (5a), wenn nur $\alpha^{mk} = \eta^k$ und $\alpha_{mk} = \eta_k$ gesetzt wird. Sie erlauben also die Orthogonalprojektion eines Vektors auf eine beliebige Richtung zu berechnen aus den Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$ und des Einheitsvektors η in dem jeweiligen Koordinatensystem.

§ 2. Der aus einem Vierervektor gebildete spezielle symmetrische Tensor 2. Ranges und seine geometrische Darstellung.

Aus einem Vierervektor $\mathfrak{a}$, der durch eine vom Punkt 0 des Riemannschen Raumes ausgehende Strecke geometrisch dargestellt wird und durch seine Komponenten A_1, A_2, A_3, A_4 oder a^1, a^2, a^3, a^4 oder a_1, a_2, a_3, a_4 gegeben sein kann, läßt sich in einfacher Weise ein symmetrischer Tensor 2. Ranges bilden dadurch, daß jede der Komponenten von $\mathfrak{a}$ mit jeder anderen und mit sich selbst multipliziert wird. Die Komponenten dieses Tensors lauten dann

$$T_{ik} = A_i A_k \quad \text{oder} \quad t^{ik} = a^i a^k \quad \text{oder} \quad t_{ik} = a_i a_k .$$

Im ersten Fall sind es die auf ein rechtwinklig geradliniges System bezogenen Komponenten des Tensors, im zweiten Fall die

kontravarianten, im dritten Fall die kovarianten Komponenten des auf ein schiefwinkliges System mit allgemeiner Maßbestimmung bezogenen Tensors. Dazu treten als vierte Möglichkeit der Bestimmung dieses Tensors die gemischten Komponenten

$$t_i^k = a_i a^k .$$

Letztere erfüllen jedoch nicht mehr die Symmetriebedingungen.

Es ist offenbar, daß der so gebildete Tensor ein *spezieller* ist; denn zwischen seinen Komponenten bestehen noch gewisse Gleichungen, so z. B.

$$t^{ii} t^{kk} = t^{ik\,2} .$$

Dieser spezielle Tensor möge im folgenden kurz mit $[[\mathfrak{a}^2]]$ bezeichnet werden, wobei das Zeichen [[ ]] die äußere Multiplikation der Vektorkomponenten andeuten soll.[1])

Welches ist nun die Gleichung des *Tensorraumes* des Tensors $[[\mathfrak{a}^2]]$? Wenn das rechtwinklige Koordinatensystem zugrunde gelegt wird, so lautet sie

$$A_1^2 X_1^2 + A_2^2 X_2^2 + A_3^2 X_3^2 + A_4^2 X_4^2 + 2 A_1 A_2 X_1 X_2 + 2 A_1 A_3 X_1 X_3 + \ldots = \text{const},$$

wobei die Konstante willkürlich ist und gleich 1 angenommen werden kann. Die linke Seite dieser Gleichung ist aber das Quadrat eines linearen Ausdrucks, so daß auch geschrieben werden kann:

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4)^2 - 1 = 0 . \tag{6}$$

Der Tensorraum von $[[\mathfrak{a}^2]]$ zerfällt also in die beiden ebenen Räume

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 + 1 = 0$$

und

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 - 1 = 0 .$$

Dies sind zwei parallele ebene Räume im Abstand

$$r = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}}$$

---

1) Die Bezeichnung „Äußere Multiplikation" im Anschluß an A. Einstein, „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". § 7. Ann. d. Phys. **49**. S. 784. 1916.

beiderseits des Nullpunkts. Auch liegt der Vektor $\mathfrak{a}$ in der Richtung des Lotes vom Nullpunkt auf die ebenen Räume, denn die Neigungswinkel des Vektors $\mathfrak{a}$ gegen die Achsen, wie die des Lotes r sind bestimmt durch

$$\cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2}} \text{ usw.}$$

Der Vektor $\mathfrak{a}$ steht also senkrecht auf den beiden parallelen ebenen Räumen. Beide sind durch ihn eindeutig bestimmt, da ja die Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$ eben die Koeffizienten in der Gleichung des Tensorraumes sind. Es liegt daher nahe, nicht die beiden parallelen ebenen Räume als Darstellung des Tensors $[[\mathfrak{a}^2]]$ zu betrachten, sondern vielmehr die beiden entgegengesetzt gerichteten Vektoren von der Länge

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2},$$

die auf je einen der beiden parallelen ebenen Räume hinweisen und auf ihnen senkrecht stehen und die dann als geometrische Darstellung des Tensors $[[\mathfrak{a}^2]]$ zu einem *Doppelvektor* verschmelzen und sich nicht, wie sie es als gewöhnliche Vektoren tun würden, als gleich und entgegengesetzt gerichtet, gegenseitig aufheben.

Dieser Doppelvektor, gebildet aus den Vektoren $+\mathfrak{a}$ und $-\mathfrak{a}$, werde im folgenden einfach als der Doppelvektor $\mathfrak{a}$ bezeichnet. Nebenstehend ist die Schnittfigur gezeichnet, die entsteht, wenn die beiden parallelen ebenen Räume durch einen ebenen Raum E, der den Doppelvektor $\mathfrak{a}$ enthält, geschnitten werden. Die Schnittflächen des Raumes E mit den parallelen, ebenen Räumen sind zwei parallele Ebenen; der Doppelvektor $\mathfrak{a}$ steht auf diesen Ebenen senkrecht.

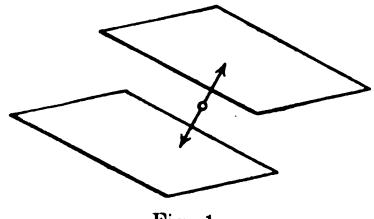
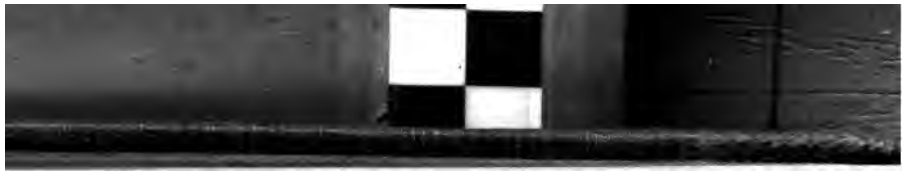


Fig. 1.

Diese geometrische Darstellung des Tensors $[[\mathfrak{a}^2]]$ ist selbstverständlich unabhängig vom Koordinatensystem; denn der Doppelvektor, abgeleitet aus dem Raumpaar, ist wie dieses in jedem Koordinatensystem derselbe. Im rechtwinkligen System der X_i kam die Beziehung zwischen Raumpaar und Doppelvektor analytisch dadurch zum Ausdruck, daß die Komponenten



von $\mathfrak{a}$ als Koeffizienten in den Gleichungen der ebenen Räume auftraten. Auch für ein beliebiges Koordinatensystem gilt Entsprechendes. Denn die Gleichung des Tensorraumes

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4)^2 - 1 = 0$$

geht durch die Transformation (4) über in

$$(6\,\mathfrak{a}) \qquad (a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)^2 - 1 = 0,$$

oder, wenn statt kontravarianter Koordinaten kovariante eingeführt werden, in

$$(6\,\mathfrak{b}) \qquad (a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 + a^4 x_4)^2 - 1 = 0.$$

Es ergibt sich also: Ist der Tensor $[[\mathfrak{a}^2]]$ — und wie sich später zeigen wird ein beliebiger Tensor 2. Ranges — gegeben durch die *kontravarianten Komponenten* $t^{ik} = a^i a^k$, so läßt sich die Gleichung des Tensorraumes unter Benützung dieser Komponenten als Koeffizienten in *kovarianten Koordinaten* x_i anschreiben und umgekehrt, wenn der Tensor in *kovarianten Komponenten* gegeben ist, erscheint die Gleichung des Tensorraumes in *kontravarianten Koordinaten.*

Damit ist die geometrisch invariante Beziehung zwischen dem Paar paralleler ebener Räume und dem Doppelvektor $\mathfrak{a}$ auch für ein beliebiges Koordinatensystem analytisch zum Ausdruck gebracht.

Die geometrische Darstellung des Tensors $[[\mathfrak{a}^2]]$ durch den Doppelvektor $\mathfrak{a}$ läßt sich nun auch noch dadurch physikalisch deuten, daß gezeigt wird, wie der Tensor $[[\mathfrak{a}^2]]$ zusammen mit einem Ortsvektor $\mathfrak{r} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ einen Vektor $\mathfrak{p}$ bestimmt, so daß für alle möglichen $\mathfrak{r}$ die $\mathfrak{p}$ das Vektorfeld einer einfachen *Dehnung in Richtung des Doppelvektors* $\mathfrak{a}$ liefern. Denn wird in üblicher Weise $\mathfrak{p}$ als lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{r}$ mit Hilfe der Tensorkomponenten angeschrieben, also

$$p_i = a_i a_1 x^1 + a_i a_2 x^2 + a_i a_3 x^3 + a_i a_4 x^4,$$

so wird daraus einfach

$$(7) \qquad p_i = a_i (\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}),$$

wo $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r})$ das skalare Produkt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}$ bezeichnet. $\mathfrak{p}$ ist also ein Vektor in der Richtung von $\mathfrak{a}$, weil seine Komponenten denen von $\mathfrak{a}$ proportional sind. Für alle Punkte des ebenen

Raumes, der bestimmt ist durch $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}) = 0$, verschwindet $\mathfrak{p}$, während er, wie sich leicht zeigen läßt, in allen zu diesem Raum parallelen ebenen Räumen einen konstanten Wert hat; für solche, die im gleichen Abstand auf beiden Seiten von $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}) = 0$ liegen, hat $\mathfrak{p}$ entgegengesetzt gleiche Werte. Das gleiche Verhalten nach Richtung und Größe zeigt aber die bei einer vierdimensionalen Dehnung des Raumes entstehende Verschiebung jedes Raumpunktes.

Der Doppelvektor $\mathfrak{a}$ kann also auch aufgefaßt werden als geometrischer Ausdruck für eine Dehnung des Raumes, ebenso wie der einfache Vierervektor eine Parallelverschiebung, der spezielle Sechservektor eine Drehung des Raumes festlegt.

Die Darstellung einer Dehnung durch einen Doppelvektor findet sich für den dreidimensionalen Fall bei W. Voigt, „Kristallphysik“[1]) und „Über die Parameter der Kristallphysik und über gerichtete Größen höherer Ordnung“, Ann. d. Phys. 5. S. 241. 1901. Jedoch scheint diese Darstellung bisher nicht im Zusammenhang mit dem Tensor $[[\mathfrak{a}^2]]$ betrachtet worden zu sein. So erwähnt Budde in „Tensoren und Dyaden“ Braunschweig 1914, beide an getrennter Stelle.[2])

§ 3. Geometrische Darstellung des allgemeinen symmetrischen Tensors 2. Ranges.

Wie oben erwähnt, ist der Tensor $[[\mathfrak{a}^2]]$ ein spezieller symmetrischer Tensor, zwischen dessen Komponenten noch gewisse Gleichungen bestehen. Der allgemeine symmetrische Tensor im Riemannschen Raum aber ist bestimmt durch 10 von einander unabhängige Komponenten t^{ik} oder t_{ik}. Es gilt nun, wie im folgenden gezeigt werden soll, der Satz:

Der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges läßt sich aus vier speziellen Tensoren von der Art des Tensors $[[\mathfrak{a}^2]]$ *zusammensetzen.*

Oder genauer geometrisch ausgedrückt:

Der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges läßt sich geometrisch darstellen durch vier Doppelvektoren, wobei diese Doppel-

1) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin-Leipzig 1910. II. Kapitel. § 70.

2) A. a. O., S. 25 und S. 216.

vektoren so gewählt werden können, daß sie auf einander senkrecht stehen.

Der eben angeführte Satz behauptet also, daß immer vier spezielle Tensoren $[[\mathfrak{a}^2]]$, $[[\mathfrak{b}^2]]$, $[[\mathfrak{c}^2]]$, $[[\mathfrak{d}^2]]$ gefunden werden können, so daß die Summen ihrer Komponenten gleich sind den Komponenten des allgemeinen symmetrischen Tensors. Also

$$t^{ik} = a^i a^k + b^i b^k + c^i c^k + d^i d^k, \tag{8}$$

oder

$$t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k.$$

Der Beweis hierfür läßt sich mittels Transformation des Tensorraumes auf Hauptachsen erbringen. Daß eine Transformation des Tensorraumes auf Hauptachsen immer möglich ist, wird für den Tensor in vier Dimensionen ebenso bewiesen, wie in drei Dimensionen für die Transformation der Fläche 2. Ordnung auf Hauptachsen. (Satz von Laplace.)

Die Gleichung des Tensorraumes im System der Hauptachsen lautet

$$T_{\mathrm{I}} X_1^2 + T_{\mathrm{II}} X_2^2 + T_{\mathrm{III}} X_3^2 + T_{\mathrm{IV}} X_4^2 = \text{const.}$$

Diese Gleichung kann aber aufgefaßt werden als die Summe der vier Gleichungen

$$T_{\mathrm{I}} X_1^2 = \lambda, \quad T_{\mathrm{II}} X_2^2 = \mu, \quad T_{\mathrm{III}} X_3^2 = \nu, \quad T_{\mathrm{IV}} X_4^2 = \tau,$$

wobei $\lambda + \mu + \nu + \tau$ dem Wert der willkürlichen Konstanten in der Gleichung des Tensorraumes gleich ist. Es wird daher im allgemeinen erlaubt sein, $(\lambda, \mu, \nu, \tau) = \pm 1$ anzunehmen.

Jede der vier Gleichungen stellt aber ein Paar paralleler, ebener Räume im Abstand

$$\pm\sqrt{\frac{\lambda}{T_{\mathrm{I}}}}, \quad \pm\sqrt{\frac{\mu}{T_{\mathrm{II}}}}, \quad \pm\sqrt{\frac{\nu}{T_{\mathrm{III}}}}, \quad \pm\sqrt{\frac{\tau}{T_{\mathrm{IV}}}}$$

vom Nullpunkt dar, jedoch nur dann ein reelles Raumpaar, wenn λ, μ, ν, τ gleiches Vorzeichen haben wie T_{I}, T_{II}, T_{III}, T_{IV}. Dementsprechend soll die Vorzeichenwahl für λ, μ, ν, τ getroffen werden. Jedes dieser Raumpaare ist nun nach den Betrachtungen des § 2 bestimmt durch einen Doppelvektor, gebildet aus den Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, deren Komponenten hier die Werte haben

$$(9)\quad \begin{cases} A_1 = \sqrt{\frac{T_{\mathrm{I}}}{\lambda}}, & A_2 = 0, & A_3 = 0, & A_4 = 0, \\ B_1 = 0, & B_2 = \sqrt{\frac{T_{\mathrm{II}}}{\mu}}, & B_3 = 0, & B_4 = 0, \\ C_1 = 0, & C_2 = 0, & C_3 = \sqrt{\frac{T_{\mathrm{III}}}{\nu}}, & C_4 = 0, \\ D_1 = 0, & D_2 = 0, & D_3 = 0, & D_4 = \sqrt{\frac{T_{\mathrm{IV}}}{\tau}}. \end{cases}$$

Dabei stehen die vier Doppelvektoren auf einander senkrecht, weil $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf einander senkrecht stehen.

Damit ist die Möglichkeit einer Zusammensetzung des allgemeinen symmetrischen Tensors aus vier speziellen Tensoren oder die Möglichkeit einer Darstellung durch vier Doppelvektoren bewiesen.

Wird zu einem beliebigen Bezugssystem mit allgemeiner Maßbestimmung auf den Achsen übergegangen durch die Transformationsgleichungen (4), so wird die Gleichung des Tensorraumes

$$\lambda A_1^2 X_1^2 + \mu B_2^2 X_2^2 + \nu C_3^2 X_3^2 + \tau D_4^2 X_4^2 = \text{const}$$

übergehen in

$$\lambda (A_1 \sum_i \alpha_{1i} x^i)^2 + \mu (B_2 \sum_i \alpha_{2i} x^i)^2 + \nu (C_3 \sum_i \alpha_{3i} x^i)^2 + \tau (D_4 \sum_i \alpha_{4i} x^i)^2 = \text{const.}$$

Nun sind aber $a_m = \sum_k \alpha_{mk} A_k$ die kovarianten Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$; das gleiche gilt für die kovarianten Komponenten von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$. Also lautet die Gleichung des Tensorraumes mit Rücksicht auf das Verschwinden je dreier Komponenten im System der Hauptachsen auch

$$\lambda (\sum_i a_i x^i)^2 + \mu (\sum_i b_i x^i)^2 + \nu (\sum_i c_i x^i)^2 + \tau (\sum_i d_i x^i)^2 = \text{const},$$

oder

$$\sum_{ik} (\lambda a_i a_k + \mu b_i b_k + \nu c_i c_k + \tau d_i d_k) x^i x^k = \text{const},$$

womit die Zerlegung des allgemeinen symmetrischen Tensors in die speziellen Tensoren $[[\mathfrak{a}^2]]$, $[[\mathfrak{b}^2]]$, $[[\mathfrak{c}^2]]$, $[[\mathfrak{d}^2]]$ gegeben ist.

Daher läßt sich allgemein sagen:
Die 16 Gleichungen

$$(10)\qquad \begin{cases} t_{ik} = \lambda a_i a_k + \mu b_i b_k + \nu c_i c_k + \tau d_i d_k, \\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = 0 \quad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) = 0 \quad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}) = 0 \\ (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = 0 \quad (\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}) = 0 \quad (\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = 0 \end{cases}$$

für die 16 unbekannten Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ haben immer ein reelles Lösungssystem, weil die Parameter λ, μ, ν, τ immer so als $+1$ oder -1 gewählt werden können. daß imaginäre Lösungen vermieden werden. Es läßt sich also allgemein der eingangs erwähnte Satz aussprechen, daß ein beliebiger symmetrischer Tensor durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren geometrisch dargestellt werden kann.

Werden aber statt der Doppelvektoren die Paare paralleler ebener Räume als geometrische Darstellung der speziellen Tensoren betrachtet, so nimmt dieser Satz die selbstverständlich erscheinende Form an:

Dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung kann immer ein rechtwinkliges, vierdimensionales Parallelepiped eingeschrieben werden. (Eingeschrieben deshalb, weil der Tensorraum durch die Schnittpunkte der ebenen Raumpaare hindurchgehen muß.)

Die vier Paare paralleler ebener Räume bilden dabei die dreidimensionalen Begrenzungen des Parallelepipeds.

Endlich läßt sich der Satz auch in der Form aussprechen:

Die durch einen beliebigen symmetrischen Tensor 2. Ranges bestimmte Deformation des Raumes läßt sich durch vier aufeinander senkrechte Dehnungen hervorbringen.

Es ist dieser Satz das vierdimensionale Analogon zu dem von Helmholz für drei Dimensionen aufgestellten Satz, daß sich eine beliebige Deformation aus drei Dehnungen in zueinander senkrechten Richtungen zusammensetzen läßt.

§ 4. Die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges.

An das eben gewonnene Ergebnis, daß der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges sich geometrisch darstellen läßt durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren, schließen sich sogleich folgende Fragen an:

Was für Arten von Tensoren entstehen, wenn die Doppelvektoren, aus denen die fraglichen Tensoren zusammengesetzt werden, nicht aufeinander senkrecht stehen?

Welche Arten von Tensoren entstehen durch Zusammensetzung von weniger als vier, also von zwei oder drei Doppelvektoren?

Daß alle diese so gebildeten Tensoren selbst wieder symmetrische Tensoren sind, folgt aus dem Additionsgesetz der Tensoren. Um aber die verschiedenen Arten von Tensoren zu untersuchen, die entsprechend den verschiedenen möglichen Zusammensetzungen aus speziellen Tensoren gebildet werden können, ist es nötig, die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges näher zu betrachten.

Invarianten des symmetrischen Tensors werden gewisse algebraische Verbindungen der Tensorkomponenten t_{ik} und der g_{ik} — der Komponenten des metrischen Fundamentaltensors — sein, die beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern ihren Wert nicht ändern.

Nehmen nun für einen bestimmten Tensor eine oder mehrere der Invarianten den Wert Null an, so sind dadurch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Komponenten des Tensors gegeben. Die Komponenten dieses Tensors sind nicht mehr voneinander unabhängig, der Tensor also ein spezieller Tensor. Durch die Anzahl der Invarianten des symmetrischen Tensors sind also die möglichen Arten von speziellen Tensoren festgelegt.

Die Invarianten des symmetrischen Tensors können aber nach einer wohl auf Salmon zurückgehenden Methode auf folgende Art gefunden werden.

Die Gleichung des Tensorraumes

$$\sum_{ik} t_{ik} x^i x^k = \text{const}$$

wird bei einer beliebigen Koordinatentransformation übergehen in die Gleichung

$$\sum_{ik} t'_{ik} x'^i x'^k = \text{const},$$

wobei der Wert der Konstanten rechts derselbe bleibt. Die Komponenten des Tensors bilden also zusammen mit den kovarianten Koordinaten des Tangentialraumes eine invariante Bilinearform.

Andererseits sind alle möglichen Koordinatentransformationen dadurch charakterisiert, daß sie die Bilinearform

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k$$

ungeändert lassen; denn diese gibt die invariante Länge des Linienelementes. Aber auch die Länge s einer von einem Punkt des Riemannschen Raumes ausgehenden Strecke im Tangentialraum, gegeben durch

$$s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k ,$$

muß invariant sein gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen.

Dann wird auch die Summe beider Bilinearformen

$$\sum_{ik} (t_{ik} + \lambda g_{ik}) x^i x^k$$

eine Invariante sein, wobei der Parameter λ noch ganz willkürlich gewählt werden kann.

Nach einem allgemeinen Satz der Invariantentheorie ist auch die Determinante dieser Bilinearform eine Invariante. Diese Determinante

$$|t_{ik} + \lambda g_{ik}| = \Delta(\lambda) \tag{11}$$

werde als Funktion des Parameters λ betrachtet und nach ihm entwickelt. So wird

$$\Delta(\lambda) = S_0 \lambda^4 + S_1 \lambda^3 + S_2 \lambda^2 + S_3 \lambda + S_4 \tag{11a}$$

und es müssen wegen der freien Wählbarkeit von λ auch die Koeffizienten der Potenzen von λ einzeln Invarianten sein. Diese Invarianten S_1, S_2, S_3, S_4 enthalten nur die Komponenten des Tensors und die g_{ik}. Die Invariante S_0 aber hängt nur von den g_{ik} ab; sie ist, wie aus der Determinante $\Delta(\lambda)$ zu ersehen, gleich der Determinante g der g_{ik}, gehört also nicht mit zu den Invarianten des Tensors.

Über den Zahlenwert der Invarianten S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 läßt sich folgendes sagen:

Wird auf die Hauptachsen des Tensorraumes transformiert, so nimmt die Determinante $\Delta(\lambda)$ die Form an

$$\begin{vmatrix} T_{\mathrm{I}} + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{\mathrm{II}} + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{\mathrm{III}} + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{\mathrm{IV}} + \lambda \end{vmatrix}$$

Dabei ist angenommen, daß die g_{ik} so bestimmt sind, daß die Strecke s in rechtwinkligen Koordinaten zu berechnen ist durch

$$s^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2.$$

Es hat also die Determinante der g_{ik} und damit die mit ihr identische Invariante S_0 den Wert 1. Die Invarianten S_1, S_2, S_3, S_4 sind dann, wie aus der Gleichung (11a) hervorgeht, die symmetrischen Funktionen der Wurzeln dieser Gleichung. Nach der Transformation auf Hauptachsen ergeben sie sich speziell als die symmetrischen Elementarfunktionen gebildet aus den Komponenten des auf Hauptachsen transformierten Tensors.

Diese Invarianten des Tensors wurden rein analytisch gefunden. Aber auch auf geometrischem Wege lassen sich Invarianten des Tensors aufweisen. Denn allen geometrisch invarianten Eigenschaften des den Tensor darstellenden Gebildes — als solches werde zu diesem Zweck nochmals der Mittelpunktsraum 2. Ordnung betrachtet — müssen analytisch Invarianten des Tensors entsprechen. Der Mittelpunktsraum 2. Ordnung ist geometrisch bestimmt, wenn seine Hauptachsen gegeben sind. Die Längen der Hauptachsen, gemessen im Einheitsmaßstab, ändern ihre Werte nicht beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern. Sie, oder was das gleiche bedeutet, die Werte T_{I}, T_{II}, T_{III}, T_{IV} der Komponenten des auf Hauptachsen transformierten Tensorraumes sind also auch Invarianten des Tensors. Denn es lassen sich ja in jedem Koordinatensystem die Längen der Hauptachsen in bestimmter Weise aus den gegebenen Komponenten des Tensors berechnen. Nur sind sie zum Unterschied von den oben gefundenen Invarianten des Tensors keine rationalen, sondern irrationale Verbindungen der t_{ik} und g_{ik}. Wie bereits gezeigt, sind die S_1, S_2, S_3, S_4 die symmetrischen Funktionen der T_{I}, T_{II}, T_{III}, T_{IV}. Es können entweder die ersteren oder die letzteren als unabhängige Invarianten betrachtet werden.

Nachdem so die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges bekannt sind, lassen sich die verschiedenen möglichen Arten spezieller Tensoren folgendermaßen bestimmen:

1. Eine der Invarianten $T_i = 0$. Dann ist auch

$$S_4 = T_{\mathrm{I}}\, T_{\mathrm{II}}\, T_{\mathrm{III}}\, T_{\mathrm{IV}} = 0.$$

Geometrisch heißt das, daß eine der Hauptachsen des Mittelpunktraumes 2. Ordnung unendlich groß wird; der Mittelpunktsraum artet aus in einen Zylinderraum 1. Art, dessen Gleichung auf Hauptachsen bezogen, lautet

$$T_{\mathrm{I}} X_1^2 + T_{\mathrm{II}} X_2^2 + T_{\mathrm{III}} X_3^2 = \text{const}, \quad \text{wenn} \quad T_i = T_{\mathrm{IV}}.$$

Ein spezieller Tensor dieser Art ist darstellbar durch drei Doppelvektoren.

2. Zwei Invarianten verschwinden; $T_i = 0$ und $T_k = 0$. Dann ist auch $S_4 = 0$ und $S_3 = 0$. Der Mittelpunktsraum artet in einen Zylinderraum 2. Art aus, indem zwei der Hauptachsen unendlich groß werden. Seine Gleichung lautet

$$T_{\mathrm{I}} X_1^2 + T_{\mathrm{II}} X_2^2 = \text{const}, \quad \text{wenn} \quad T_i = T_{\mathrm{IV}}; \quad T_k = T_{\mathrm{III}}.$$

Der entsprechende spezielle Tensor wird durch zwei Doppelvektoren geometrisch dargestellt.

3. Drei der Invarianten verschwinden; $T_i = 0$, $T_k = 0$, $T_l = 0$. Dann ist auch $S_4 = 0$, $S_3 = 0$, $S_2 = 0$. Drei der Hauptachsen werden unendlich groß; der Mittelpunktsraum 2. Ordnung artet in ein Paar paralleler ebener Räume aus, deren Abstand vom Nullpunkt gleich ist der vierten, nicht verschwindenden Hauptachse. Seine Gleichung lautet

$$T_{\mathrm{I}} X_1^2 = \text{const}, \quad \text{wenn} \quad T_i = T_{\mathrm{IV}}, \quad T_k = T_{\mathrm{III}}, \quad T_l = T_{\mathrm{II}}.$$

Der spezielle Tensor dieser Art ist der durch einen Doppelvektor geometrisch darstellbare Tensor, der Tensor von der Form $[[\mathfrak{a}^2]]$.

Nun lassen sich auch die am Anfang dieses Paragraphen gestellten Fragen beantworten.

Durch Addition von drei speziellen Tensoren von der Form $[[\mathfrak{a}^2]]$ entsteht ein Tensor, für den $S_4 = 0$ ist.

Durch Addition von zwei speziellen Tensoren von der Form $[[\mathfrak{a}^2]]$ entsteht ein spezieller Tensor, für den $S_3 = 0$ und $S_4 = 0$ ist.

Dabei, sowie bei der Zusammensetzung des allgemeinen symmetrischen Tensors aus vier Tensoren $[[\mathfrak{a}^2]]$, $[[\mathfrak{b}^2]]$, $[[\mathfrak{c}^2]]$, $[[\mathfrak{d}^2]]$ ist es gleichgültig, ob die betreffenden Doppelvektoren aufeinander senkrecht stehen oder nicht.

Denn wenn auch zwei Doppelvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht aufeinander senkrecht stehen, kann der durch die Komponenten

$t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k$ bestimmte Mittelpunktsraum 2. Ordnung nur ein Zylinderraum 2. Art sein, da er durch die vier Schnittebenen der beiden Paare von parallelen, ebenen Räumen, den Tensorräumen von $[[\mathfrak{a}^2]]$ und $[[\mathfrak{b}^2]]$, gehen muß.

Ebenso kann der durch drei beliebige Doppelvektoren bestimmte Tensor mit den Komponenten $t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k$ nur einen Zylinderraum 1. Art als Tensorraum haben; denn dieser Tensorraum muß die acht parallelen Geraden enthalten, in denen sich die drei Paare paralleler ebener Räume schneiden.

Der Tensorraum des aus vier beliebigen Doppelvektoren gebildeten Tensors mit den Komponenten $t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k$ wird ein durch die 16 Schnittpunkte der vier Paare ebener Räume gehender und durch sie bestimmter Mittelpunktsraum 2. Ordnung sein.

Dabei sind die Paare ebener Räume einem Quadrupel konjugierter Durchmesserräume des Mittelpunktsraumes 2. Ordnung parallel. Sie bilden die Begrenzungen eines dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung eingeschriebenen vierdimensionalen Parallelepipeds. Die vier Doppelvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ stehen senkrecht auf den ebenen Begrenzungen des Parallelepipeds.

Die Darstellung des symmetrischen Tensors 2. Ranges durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren ist also nicht die einzig mögliche Art der Darstellung des symmetrischen Tensors durch vier Doppelvektoren, sondern nur ein besonderer Fall der allgemeinen Darstellung durch vier beliebig zueinander geneigte Doppelvektoren, deren Richtungen bestimmt sind durch die Lote auf ein dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung eingeschriebenes Parallelepiped.

§ 5. Geometrische Definition der Komponente des symmetrischen Tensors.

Mit der durch die Betrachtungen des § 3 gewonnenen geometrischen Darstellung des symmetrischen Tensors 2. Ranges ist nun auch die geometrische Deutung der einzelnen Komponente des Tensors möglich geworden.

Bei dem speziellen Tensor $[[\mathfrak{a}^2]]$ ist nämlich die kovariante Komponente $t_{ik} = a_i a_k$ das Produkt der Orthogonalprojektionen des Vektors $\mathfrak{a}$ auf i- und k-Achse. Die kontravariante Komponente $t^{ik} = a^i a^k$ ist das Produkt aus den Parallelprojektionen

des Vektors $\mathfrak{a}$ auf die i- und die k-Achse. Werden Orthogonalprojektion und Parallelprojektion im Einheitsmaßstab gemessen, so ist

$$a_i = A_i \sqrt{g_{ii}} \quad \text{und} \quad a^i = \frac{A^i}{\sqrt{g_{ii}}},$$

also

$$t_{ik} = A_i A_k \sqrt{g_{ii} g_{kk}} \quad \text{und} \quad t^{ik} = \frac{A^i A^k}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}.$$

$T_{ik} = A_i A_k$ und $T^{ik} = A^i A^k$ sind die kovarianten bzw. die kontravarianten Komponenten des Tensors, wenn die Koordinatenbestimmung mit dem Einheitsmaßstab erfolgt.

Für $i = k$ ergeben sich die Komponenten t_{ii} oder t^{ii} als die Quadrate der Orthogonalprojektionen oder Parallelprojektionen auf die i-Achse.

Für den allgemeinen symmetrischen Tensor 2. Ranges, der durch vier Doppelvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ geometrisch dargestellt wird, ist dann die Komponente t_{ik} die Summe der Produkte aus den Orthogonalprojektionen der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf die i- und k-Achse. Die Komponente t^{ik} ist die Summe der Produkte aus den Parallelprojektionen der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf die i- und k-Achse.

Daraus ist zu ersehen, daß die Komponenten des symmetrischen Tensors 2. Ranges nicht nach einer Geraden, wie beim Vierervektor, auch nicht nach einer Ebene, wie beim Sechservektor, sondern nach einem *Geradenpaar* zu bilden sind, wobei diese beiden Geraden einen beliebigen Winkel miteinander einschließen können, weil ja beim schiefwinkligen Koordinatensystem die Achsen beliebig zueinander geneigt sein können.

Dies führt dazu, die Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges nach einem beliebigen Geradenpaar, das nicht mit einem Achsenpaar des Koordinatensystems zusammenfällt, geometrisch und unabhängig vom Koordinatensystem folgendermaßen zu definieren:

Es soll die Komponente T_{sr} des symmetrischen Tensors nach einem beliebigen Geradenpaar mit den Richtungen s und r gleich sein der Summe der Produkte aus den Orthogonalprojektionen der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ *auf die Richtungen s und r.* Also

$$T_{sr} = A_s A_r + B_s B_r + C_s C_r + D_s D_r. \tag{12}$$

Dabei sind A_s, A_r, B_s, B_r usw. die im Einheitsmaßstab messenen Orthogonalprojektionen. Da diese unabhängig vom ›ordinatensystem sind, so ist auch T_{sr} unabhängig definiert.

Wird das Koordinatensystem so gewählt, daß zwei der :hsen in die Richtungen s und r fallen und werden in diesem ›ordinatensystem die Längen mit dem Einheitsmaßstab ge-:ssen, so tritt tatsächlich T_{sr} als eine der Komponenten des mmetrischen Tensors in diesem Koordinatensystem auf.

Wie drückt sich nun die durch die Gleichung (12) definierte :nsorkomponente nach zwei beliebigen Richtungen s und r .rch die jeweils gegebenen Tensorkomponenten t_{ik} oder t^{ik} er t_i^k aus?

Entsprechend der Darstellung des symmetrischen Tensors rch vier Doppelvektoren ist

$$t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k$$

er $$t^{ik} = a^i a^k + b^i b^k + c^i c^k + d^i d^k$$

er $$t_i^k = a_i a^k + b_i b^k + c_i c^k + d_i d^k .$$

Es sei ferner η der Einheitsvektor in der Richtung s, ζ r Einheitsvektor in der Richtung r. Nun ist nach Gleichung ›) des § 1

$$A_s = \sum_i a_i \eta^i .$$

Entsprechend wird

$$A_r = \sum_k a_k \zeta^k ,$$

o

$$A_s A_r = \sum_{ik} a_i a_k \eta^i \zeta^k .$$

Ebenso findet sich

$$B_r = \sum_{ik} b_i b_k \eta^i \zeta^k , \quad C_s C_r = \sum_{ik} c_i c_k \eta^i \zeta^k , \quad D_s D_r = \sum_{ik} d_i d_k \eta^i \zeta^k$$

.her wird

$$T_{sr} = \sum_{ik} (a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k) \eta^i \zeta^k$$

!a) $$T_{sr} = \sum_{ik} t_{ik} \eta^i \zeta^k .$$

Damit ist die Komponente des Tensors nach den Rich-ıgen s und r ausgedrückt durch die kovarianten Kom-nenten t_{ik}.

Falls aber der Tensor nicht durch die kovarianten, sondern rch die kontravarianten Komponenten t^{ik} in dem betreffenden

Koordinatensystem gegeben ist, kann nach Gleichung (4b) des § 1 geschrieben werden

$$A_s = \sum_i a^i \eta_i ,$$

entsprechend

$$A_r = \sum_k a^k \zeta_k ,$$

also ist

$$A_s A_r = \sum_{ik} a^i a^k \eta_i \zeta_k .$$

Die Ausdrücke für $B_s B_r$, $C_s C_r$ und $D_s D_r$ sind ebenso gebaut, so daß sich ergibt

(12b) $$T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k .$$

Damit ist T_{sr} durch die kontravarianten Komponenten ausgedrückt.

Endlich, wenn der Tensor durch seine gemischten Komponenten gegeben ist, kann geschrieben werden

$$\begin{aligned} A_s A_r &= \sum_i a_i \eta^i \sum_k a^k \zeta_k \\ &= \sum_{ik} a_i a^k \eta^i \zeta_k \end{aligned}$$

und es wird

(12c) $$T_{sr} = \sum_{ik} t_i^{\,k} \eta^i \zeta_k .$$

Diese Bildungsweise der Tensorkomponente T_{sr} nach den Richtungen s und r aus den im jeweiligen Koordinatensystem gegebenen Tensorkomponenten stimmt überein mit der im dreidimensionalen Fall angewendeten Bildung der Tensorkomponente nach zwei Richtungen. So wird z. B. in der Mechanik der Kontinua gezeigt, daß die Spannung oder der Druck, der auf ein Flächenstück mit der Normalrichtung r wirkt, in der Richtung s die Größe hat

$$\sigma_{sr} = \sum_{ik} \sigma_{ik} \cos \alpha_i \cos \beta_k ,$$

wobei σ_{ik} die Komponenten des Drucktensors in dem der Betrachtung zugrunde gelegten Koordinatensystem sind, $\cos \alpha_i$ die Richtungskosinus von s, $\cos \beta_k$ die von r. Wird insbesondere nach der Größe des Normaldruckes gefragt, so fällt s mit r zusammen und es ist

$$\sigma_{rr} = \sum_{ik} \sigma_{ik} \cos \alpha_i \cos \alpha_k .$$

Dabei tritt in der klassischen Mechanik und Elastizitätstheorie nur eine Art von Tensorkomponenten auf, da für die dort angewendeten orthogonalen Koordinatensysteme kontravariante und kovariante Komponenten zusammenfallen. Werden aber auch dort schiefwinklige Koordinatensysteme benützt, so muß selbstverständlich auch in der klassischen Mechanik zwischen kontravarianten und kovarianten Vektor- und Tensorkomponenten unterschieden werden. Die bisher durchgeführten Betrachtungen über den symmetrischen Tensor sind aber auf diesen Fall unmittelbar anzuwenden, wenn nur statt der Dimensionszahl 4 die Dimensionszahl 3 gewählt wird.

§ 6. Geometrische Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges.

Bisher wurde ein symmetrischer Tensor 2. Ranges betrachtet, der nur für einen Punkt des Riemannschen Raumes als gegeben angenommen wurde. Im folgenden soll nun der Betrachtung ein *Tensorfeld* zugrunde gelegt werden. Die Tensorkomponenten sind also Funktionen der Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 im Riemannschen Raum. Für jeden Punkt des Riemannschen Raumes ist damit ein bestimmter Tensor gegeben. Jeder dieser Tensoren kann geometrisch dargestellt werden durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren, die im Tangentialraum des betreffenden Punktes liegen. Durch diese vier Doppelvektoren sind dann vier Vektorfelder $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ im Riemannschen Raum bestimmt. Diese vier Vektorfelder ersetzen gleichsam das Tensorfeld.

Es ist somit auch für jeden Punkt des Riemannschen Raumes eine Tensorkomponente T_{sr} nach zwei Richtungen s und r eindeutig bestimmt durch

$$T_{sr} = A_s A_r + B_s B_r + C_s C_r + D_s D_r.$$

Dadurch ist es möglich, einen aus dem Tensorfeld abzuleitenden Vierervektor, die Divergenz des symmetrischen Tensors — geschrieben $\mathfrak{Div}\, T$ — geometrisch und unabhängig vom Bezugssystem zu definieren in analoger Weise wie A. Sommerfeld die Divergenz des Vierervektors und Sechservektors definiert hat.[1])

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis. Ann. d. Phys. **33**. S. 649. 1910.

Ein Vierervektor $\mathfrak{a}$ ist unabhängig vom Bezugssystem bestimmt, wenn seine Komponente A_s in einer beliebigen Richtung s angegeben werden kann. Dabei muß unter der Komponente A_s die Orthogonalprojektion von $\mathfrak{a}$ auf die Richtung s, gemessen im Einheitsmaßstab verstanden werden; denn nur die im Einheitsmaßstab gemessene Orthogonalprojektion, nicht etwa die Parallelprojektion ist unabhängig vom jeweiligen Bezugssystem bestimmbar.

Es sei nun s diejenige Richtung, nach der die Komponente des Vierervektors $\mathfrak{Div}\, T$ bestimmt werden soll. Ist $\Delta\Sigma$ ein beliebig gestaltetes vierdimensionales Volumen in der Umgebung des betrachteten Punktes, ΔS seine dreidimensionale Begrenzung n die Normale auf ΔS, so ist zu definieren:

$$\mathfrak{Div}_s T = \lim_{\Delta\Sigma = 0} \frac{\int T_{sn}\, dS}{\Delta\Sigma}. \tag{13}$$

Da die Komponente T_{sn} nach den Richtungen s und n unabhängig vom Bezugssystem und eindeutig definiert ist, so ist auch $\mathfrak{Div}\, T$ unabhängig vom Bezugssystem definiert.

Um nun zu erkennen, daß diese Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors mit der üblichen übereinstimmt, soll im folgenden gezeigt werden, wie sich durch spezielle Wahl des Volumelementes $\Delta\Sigma$ und der Richtung s aus dieser Definition die von Einstein-Großmann angegebene und rein analytisch abgeleitete Formel für die Divergenz des symmetrischen Tensors ergibt.

Das Volumelement $\Delta\Sigma$ werde zu diesem Zweck als Parallelepiped gewählt, dessen Kanten in die Richtungen der wachsenden kontravarianten Koordinaten fallen. Sie sind also dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 und es ist

$$\Delta\Sigma = dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4 \sqrt{g},$$

wo g der Wert der Determinante der g_{ik} ist.

Die Begrenzungen von $\Delta\Sigma$ sind dann die dreidimensionalen Parallelepipede $\Delta S_4, \Delta S_3, \Delta S_2, \Delta S_1$ mit den Kanten dx^1, dx^2, dx^3; dx^1, dx^2, dx^4; dx^1, dx^3, dx^4; dx^2, dx^3, dx^4, sowie die ihnen gegenüberliegenden und es ist

$$\Delta S_1 = dx^2\, dx^3\, dx^4 \sqrt{g^{11} g};$$

denn $g^{11} g$ ist die Unterdeterminante von g_{11}.

Oder

$$\Delta S_1 = \frac{\Delta \Sigma \sqrt{g^{11}}}{dx^1},$$

allgemein

$$\Delta S_i = \frac{\Delta \Sigma \sqrt{g^{ii}}}{dx^i}.$$

Die Integration ist zu erstrecken über die 8 dreidimensionalen Parallelepipede und zwar bei festgehaltener Richtung s. Dann muß in Anbetracht der Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

der Einheitsvektor η in dieser Richtung beim Übergang vom Punkt P zum Punkt P', der unendlich benachbart sein soll, gewisse Zuwächse erfahren, die gegeben sind durch

$$\delta \eta^i = -\sum_{rs} \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} \eta^r\, \delta x^s \quad (14)$$ [1]),

wobei die δx^s die kontravarianten Komponenten des Vektors PP' sind.

Ferner soll nach der Definition von $\mathfrak{Div}_s T$ die Richtung n die der Normalen auf der Begrenzung von $\Delta\Sigma$ sein. Ist wieder ζ der in die n-Richtung fallende Einheitsvektor, so muß ζ also auf den Parallelepipeden ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3 und ΔS_4, bzw. auf den diesen gegenüberliegenden, jeweils senkrecht stehen. Der Vektor ζ, der auf den Achsenrichtungen 2, 3, 4 senkrecht steht, hat aber die kovarianten Komponenten ζ_1, 0, 0, 0. Da er Einheitsvektor sein soll, so ist $\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$. Entsprechendes gilt für ζ, wenn er auf den anderen Parallelepipeden senkrecht steht.

Wird nun T_{sn} ausgedrückt durch die gemischten Komponenten des symmetrischen Tensors, also $T_{sn} = \sum_{ik} t_i^k \eta^i \zeta_k$ gesetzt und wird ferner die s-Richtung in eine der Achsenrichtungen, z. B. die Richtung 1 gelegt, so ergibt sich als Wert der Komponente T_{sn} für das Parallelepiped ΔS_1, das vom Punkt P ausgeht

$$T_{11} = t_1^1 \eta^1 \zeta_1 = t_1^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g^{11}}},$$

---

1) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, § 14. S. 100

und als Wert von T_{sn} für das Parallelepiped ΔS_1, das vom Punkt P' ausgeht,

$$\bar{T}_{11} = \sum_i \bar{t}_i^{\,1}\,\bar{\eta}^i\,\bar{\zeta}_1 = \sum_i \bar{t}_i^{\,1}(\eta^i + \delta\eta^i)\,\bar{\zeta}_1\,,$$

wobei durch die Striche angedeutet werden soll, daß die Werte für den Punkt $(x^1+dx^1, x^2, x^3, x^4)$ statt für den Punkt $(x^1, x^2, x^3\, x^4)$ zu nehmen sind.

Wird also der zu berechnende Grenzwert für das Parallelepiped $(dx^2,\ dx^3,\ dx^4)$ und das ihm gegenüberliegende gebildet, wobei bei diesem Übergang zu setzen ist: $\delta x^1 = dx^1$, $\delta x^2 = \delta x^3 = \delta x^4 = 0$, so ergibt sich daraus zur Berechnung von $\mathfrak{Div}.\,T$ der Anteil

$$\lim_{\Delta\Sigma=0}\left(T_{11}\frac{\Delta S_1}{\Delta\Sigma} + \bar{T}_{11}\frac{\overline{\Delta S_1}}{\Delta\bar{\Sigma}}\right)$$

$$= -\,t_1^{\,1}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{g^{11}}}\frac{\sqrt{\bar{g}^{11}g}}{dx^1\sqrt{g}} + \bar{t}_1^{\,1}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\sqrt{\bar{g}^{11}}}\frac{\sqrt{\bar{g}^{11}\bar{g}}}{dx^1\sqrt{g}}$$

$$-\sum_i \bar{t}_i^{\,1}\left\{\begin{matrix}1\,1\\ i\end{matrix}\right\}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{dx^1}{\sqrt{\bar{g}^{11}}}\frac{\sqrt{\bar{g}^{11}\bar{g}}}{dx^1\sqrt{g}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(t_1^{\,1}\sqrt{g}) - \sum_i t_i^{\,1}\left\{\begin{matrix}1\,1\\ i\end{matrix}\right\}\sqrt{g}\right).$$

Allgemein berechnet sich für ein Parallelepiped ΔS_m und das ihm gegenüberliegende der Anteil

$$\frac{1}{\sqrt{g}\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^m}(t_1^{\,m}\sqrt{g}) - \sum_i\left\{\begin{matrix}1\,m\\ i\end{matrix}\right\}t_i^{\,m}\sqrt{g}\right).$$

Also ist

$$\mathfrak{Div}_1\,T = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left(\sum_m\frac{\partial}{\partial x^m}(t_1^{\,m}\sqrt{g}) - \sum_{i\,m}\left\{\begin{matrix}1\,m\\ i\end{matrix}\right\}t_i^{\,m}\sqrt{g}\right)$$

und die Komponente von $\mathfrak{Div}\,T$ nach einer beliebigen Achse

$$\text{(13a)}\quad \mathfrak{Div}_k\,T = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sum_m\frac{\partial}{\partial x^m}(t_k^{\,m}\sqrt{g}) - \sum_{i\,m}\left\{\begin{matrix}k\,m\\ i\end{matrix}\right\}t_i^{\,m}\sqrt{g}\right),$$

wenn dabei noch die Maßbestimmung $ds_k = \sqrt{g_{kk}}\,dx^k$ auf der k-Achse berücksichtigt wird, also die Orthogonalprojektion von $\mathfrak{Div}\,T$ auf die k-Achse nicht im Einheitsmaßstab gemessen wird, sondern so, wie es die allgemeine Maßbestimmung in dem betreffenden Koordinatensystem verlangt.

Durch diese Formel ist die Komponente von $\mathfrak{Div}\, T$ nach der k-Achse ausgedrückt durch die gemischten Komponenten des symmetrischen Tensors in dem jeweiligen Koordinatensystem.

Soll aber die k-Komponente von $\mathfrak{Div}\, T$ durch die kontravarianten Komponenten t^{ik} oder durch die konvarianten Komponenten t_{ik} ausgedrückt werden, so sind bei gleicher Wahl des Parallelepipeds

$$T_{sn} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k ,$$

bzw.

$$T_{sn} = \sum_{ik} t_{ik} \eta^i \zeta^k$$

bei der Berechnung des Grenzwertes einzuführen. Dabei unterscheidet sich die Rechnung von der obigen im ersten Fall dadurch, daß statt der kontravarianten Komponenten η^i und $\delta\eta^i$ die kovarianten Komponenten η_i und $\delta\eta_i$ zu benutzen sind, im zweiten Fall statt der Komponenten ξ_i die Komponenten ξ^i. Die Rechnung ergibt:

$$\text{(13b)} \qquad \mathfrak{Div}_k T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{im} \frac{\partial}{\partial x^m} (t^{im} \sqrt{g})\, g_{ki} - \sum_{im} t^{mi} \sqrt{g} \begin{bmatrix} km \\ i \end{bmatrix} \right)$$

bzw.

$$\text{(13c)} \qquad \mathfrak{Div}_k T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{lm} \frac{\partial}{\partial x^m} (t_{kl} g^{ml} \sqrt{g}) - \sum_{ilm} t_{il}\, g^{ml} \sqrt{g} \begin{Bmatrix} km \\ i \end{Bmatrix} \right) .$$

Dies sind aber die Formeln, die A. Einstein in „Die formale Grundlage der Relativitätstheorie", Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften 1914, XLI angegeben hat. Und zwar erhält Einstein diese Formeln, indem er aus dem Tensor 2. Ranges durch Differentiation erst die „Erweiterung" des symmetrischen Tensors, also einen Tensor 3. Ranges bildet und an diesem Tensor 3. Ranges zusammen mit dem Fundamentaltensor $\delta_\mu{}^\nu$ die innere Multiplikation durchführt. Diese Bildungsweise läßt aber den eigentlichen Zusammenhang zwischen dem symmetrischen Tensor 2. Ranges und seiner Divergenz nicht erkennen, während durch die hier gegebene Ableitung der Divergenz dieser Zusammenhang klar hervortritt. Es zeigt sich also, daß auch im Riemannschen Raum eine geometrische Darstellung von Vektoren und Tensoren dazu

führen kann, besseren Einblick in die Eigenschaften dieser Gebilde zu erhalten, wie die rein analytische Betrachtungsweise.

Allgemein hat schon F. Jung gezeigt[1]), wie mittels Integration über die $(n-1)$ dimensionale Begrenzung eines n-dimensionalen Volumens im Raum von n-Dimensionen auf Tensoren anwendbare Differentialoperationen abgeleitet werden können. Dieser von Jung „Feldableitung" genannte, allgemein definierte Grenzübergang umfaßt als Spezialfall auch die hier gegebene Ableitung der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges. Jedoch bietet die hier gegebene Ableitung insofern Neues, als sie auf einer geometrischen Darstellung des Tensors selbst beruht, während bei Jung von einer Darstellung der Tensoren durch geometrische Gebilde nicht die Rede ist. Deshalb ist auch sein Grenzübergang nicht eigentlich geometrisch definiert, da er den Tensor, dessen Feldableitung gebildet werden soll, in keine geometrische Beziehung setzt zu der $(n-1)$ dimensionalen Oberfläche, über die integriert wird, sondern nur rein analytisch angibt, daß der Tensor auf irgendeine Art multipliziert werden soll mit dem vektoriell gedachten Oberflächenelement. Dabei benützt Jung ein weitläufiges Schema des Vektorkalküls im Anschluß an die Grassmannsche Ausdehnungslehre für n-Dimensionen. In der vorliegenden Arbeit dagegen wird versucht, das Rechnen mit Vektoren und Tensoren vom euklidischen Raum in einfacher Weise auf den Riemannschen Raum zu übertragen und dabei die Tensoren auch nach der Seite ihrer Anschaulichkeit den Vektoren möglichst anzupassen.

§ 7. Ein Integralsatz über den symmetrischen Tensor 2. Ranges und die Integralform der Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Aus der im § 6 gegebenen Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges entspringt ein Integralsatz ähnlich dem Gausschen Satz in drei Dimensionen. Er lautet:

$$\int \mathfrak{Div}_k T \, d\Sigma = \int T_{k\,n} \, dS \tag{15}$$

1) F. Jung, „Die Feldableitungen bei allgemeinen Koordinaten". Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung IIa. 126. Heft 10.

und gestattet ein über die dreidimensionale Begrenzung eines beliebig gestalteten vierdimensionalen Volumens erstrecktes Tensorintegral überzuführen in ein Vektorintegral über dieses Volumen. Umgekehrt kann mit Hilfe dieses Satzes ein Vektorintegral über ein vierdimensionales Volumen ersetzt werden durch ein Tensorintegral über die Begrenzung dieses Volumens, jedoch nur dann, wenn bekannt ist, daß das betreffende Vektorfeld durch die Operation $\mathfrak{Div}$ aus einem Tensorfeld entstanden ist.

Der Beweis dieses Integralsatzes ergibt sich in bekannter Weise: Wird das Volumen Σ in die Volumelemente $d\Sigma$ geteilt, so gilt für jedes einzelne Volumelement die Gleichung (13), die auch geschrieben werden kann

$$\mathfrak{Div}_k T\, d\Sigma = \int T_{kn}\, dS.$$

Durch Summation all dieser für die einzelnen Volumelemente geltenden Gleichungen ergibt sich links $\int \mathfrak{Div}_k T\, d\Sigma$, rechts heben sich die Anteile der gemeinsamen Begrenzung je zweier benachbarter Volumelemente $d\Sigma$ auf, weil die Normalen für beide entgegengesetzte Richtung haben, und es bleiben bei der Summation nur die Anteile der äußeren Begrenzung S von Σ stehen, so daß sich das $\int T_{kn}\, dS$ über die Begrenzung S erstreckt.

Dieser Integralsatz kann dazu benützt werden, die *Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie in Integralform* zu schreiben.

Im *elektromagnetischen Feld* läßt sich die Viererkraft $\mathfrak{p}$, die an einem mit Elektrizität geladenen Punkte angreift, aus einem symmetrischen Tensor 2. Ranges ableiten. Es ist nämlich

$$p_i = -\,\mathfrak{Div}_i F.$$

Dabei baut sich der Energietensor F in bekannter Weise aus den Feldvektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ auf.

Obiger Integralsatz auf diese Gleichungen angewendet, ergibt

$$\int p_i\, d\Sigma = -\int F_{in}\, dS. \tag{16}$$

Nun ist aber $\int p_i\, d\Sigma = P_i$ die i-Komponente der Gesamtviererkraft, die auf das betrachtete vierdimensionale Volumen Σ wirkt. Die Gleichungen (16) zeigen also, daß sich diese

Gesamtviererkraft berechnen läßt durch ein über die „Oberfläche“ dieses Volumens erstrecktes Tensorintegral gemäß

$$P_i = -\int F_{in}\, dS. \tag{16a}$$

Diese Gleichungen sind ganz analog denjenigen, die im Falle konstanten elektromagnetischen Feldes die auf ein dreidimensionales Raumgebiet wirkende ponderomotorische Kraft zu berechnen gestatten aus dem für die Oberfläche dieses Gebietes gegebenen Maxwellschen Spannungstensor. Sie sind deren vierdimensionale Erweiterung für den Fall zeitlich veränderlicher Felder. Die Viererkraft $\mathfrak{P}$ gibt dabei durch ihre räumlichen Komponenten eben die gesamte ponderomotorische Kraft auf ein dreidimensionales Raumgebiet S, das bei der Bewegung (oder Ruhe) das vierdimensionale Volumen Σ beschreibt.

Ebenso lassen sich bekanntlich die Impuls-Energiegleichungen der *Mechanik und Hydrodynamik* nach der allgemeinen Relativitätstheorie in der Form schreiben

$$p_i = \mathfrak{Div}_i R, \tag{17}$$

wobei R der *kinetische* Energie-Impulstensor ist. Es gilt also auch hier

$$\int p_i\, d\Sigma = \int R_{in}\, dS$$

oder

$$P_i = \int R_{in}\, dS. \tag{17a}$$

Im *Gravitationsfeld* beschreibt ein Punkt mit der Ruhmasse μ_0, auf den keine äußere Kraft außer der Gravitationskraft selbst wirkt, nach Einstein eine geodätische Bahn. Die Viererkraft p verschwindet für ihn und seine Bewegungsgleichung lautet

$$\mathfrak{Div}_i R = 0, \tag{18}$$

wo $R_{ik} = \mu_0 u_i u_k$ (μ_0 Ruhmassendichte, u_i, u_k Komponenten der Vierergeschwindigkeit). R ist also in diesem Fall ein durch einen Doppelvektor darstellbarer Tensor zweiten Ranges.

Sollen nun für die *Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen die Impuls-Energiegleichungen* aufgestellt werden, so müssen der elektromagnetische und der kinetische Energie-Impulstensor

zu einem Energie-Impulstensor, dem *Welttensor* T vereinigt werden. Das *Prinzip von der Erhaltung der Energie* verlangt aber dann, daß die aus dem Welttensor T abzuleitende Viererkraft verschwindet, also

$$\mathfrak{Div}_i T = 0,$$

wofür jetzt auch geschrieben werden kann

$$\int T_{in}\, dS = 0. \tag{19}$$

Wird nun der Welttensor T als vierdimensionaler Spannungstensor betrachtet, so läßt sich der *Satz von der Erhaltung der Energie* in folgender, *geometrischer Form* aussprechen:

Die metrischen Eigenschaften des vierdimensionalen Raumes werden durch die Materie derart bestimmt, daß die Gesamtviererkraft verschwindet, die auf ein vierdimensionales Volumen Σ durch die auf dessen Oberfläche wirkenden, dem Welttensor T entsprechenden Spannungen ausgeübt wird.

§ 8. Geometrische Darstellung und Divergenz des nichtsymmetrischen Tensor 2. Ranges.

Die Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges nach einem Richtungspaar r und s war unabhängig vom Koordinatensystem definiert als Summe der Produkte der Orthogonalprojektionen der den Tensor darstellenden Doppelvektoren auf die Richtungen r und s. $T_{sr} = A_s A_r + B_s B_r + C_s C_r + D_s D_r$. Es zeigte sich, daß die so definierte Komponente durch die Tensorkomponenten in dem jeweils der Betrachtung zugrunde gelegten Koordinatensystem sich ausdrückte in den Form

$$T_{sr} = \sum_{ik} t_{ik}\, \eta^i\, \zeta^k \quad \text{oder} \quad T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik}\, \eta_i\, \zeta_k \quad \text{oder} \quad T_{sr} = \sum_{ik} t_i{}^k\, \eta^i\, \zeta_k.$$

Daraus kann auch analytisch erkannt werden, daß T_{sr} eine invariante Bildung ist; denn wie oben erwähnt, haben die Tensorkomponenten die Eigenschaft, mit den Komponenten zweier Vierervektoren zur Bilinearform vereinigt, eine Invariante zu ergeben. Dies gilt nicht nur für den symmetrischen Tensor, sondern auch für den nichtsymmetrischen Tensor, also insbesondere auch für den antisymmetrischen. Daraus kann der Schluß gezogen werden, daß unabhängig von einer geometrischen

Darstellung für einen *beliebigen Tensor 2. Ranges* die Komponente nach zwei Richtungen s und r zu definieren ist durch

$$T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k$$

und entsprechend für die kovarianten und gemischten Komponenten, wobei also η und ζ die Einheitsvektoren in diesen Richtungen sind. Dann kann aber auch für einen beliebigen Tensor 2. Ranges die Divergenz durch denselben Grenzprozeß definiert werden, wie für den symmetrischen Tensor, also durch

$$\mathfrak{Div}_k T = \lim_{\Delta \Sigma = 0} \frac{\int T_{kn} \, dS}{\Delta \Sigma}$$

und die aus dieser Definition für ein bestimmtes Koordinatensystem abgeleiteten Gleichungen (13a), (13b), (13c) gelten ebenso für den symmetrischen, wie für den nichtsymmetrischen Tensor. In der Tat sind sie diejenigen Formeln, die Einstein auch für den nichtsymmetrischen Tensor angibt. Der Weg aber, der zu der Erkenntnis führt, daß die Invariante $\sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k$ als Komponente des Tensors auch den Richtungen der Vektoren η und ζ zu betrachten sei, ist der der geometrischen Darstellung.

Insbesondere wird für den *antisymmetrischen* Tensor wegen $t^{ik} = - t^{ki}$ die Komponente nach den Richtungen s und r

$$T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik} (\eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i).$$

$p_{ik} = \eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i$ sind aber die Komponenten des speziellen Sechservektors, der geometrisch durch das von den beiden Vektoren η und ζ bestimmte Parallelogramm dargestellt wird. Nun bleiben aber die p_{ik} ungeändert, wenn η und ζ sich in derselben Ebene irgendwie ändern, wobei nur der Flächeninhalt des durch sie bestimmten Parallelogramms derselbe bleiben muß. Es bleibt dann also auch die Komponente T_{sr} ungeändert. Aus diesem Grunde läßt sich für den antisymmetrischen Tensor 2. Ranges die Komponente nach einer Ebene bilden, die bestimmt sein kann durch ein *beliebiges* Richtungspaar in ihr, statt wie beim symmetrischen Tensor die Komponenten nach einem *festen* Richtungspaar. Dies ergibt sich unabhängig von der geometrischen Darstellung des antisymmetrischen Tensors. Nun läßt sich aber der antisymmetrische

Tensor oder allgemeine Sechservektor geometrisch darstellen durch zwei aufeinander senkrechte Flächenstücke von bestimmtem Inhalt und bestimmter Orientierung im Raum. Die Komponente des antisymmetrischen Tensors nach einer beliebigen Ebene ist dann geometrisch definiert durch die Summe der Orthogonalprojektionen der beiden Flächenstücke auf die betreffende Ebene.[1]) Es ist leicht einzusehen, daß diese geometrische Definition der Komponente des antisymmetrischen Tensors analytisch sich ausdrückt durch eben die Bildung

$$\sum_{ik} \varepsilon^{ik} (\eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i).$$

Da der nichtsymmetrische Tensor 2. Ranges immer in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Tensor zerlegt werden kann, so kann der nichtsymmetrische Tensor 2. Ranges dargestellt werden durch vier Doppelvektoren zusammen mit zwei aufeinander senkrechten Flächenstücken von bestimmtem Inhalt. Die Komponente des nichtsymmetrischen Tensors nach einem beliebigen Richtungspaar ist also geometrisch definiert als Summe aus den Produkten der Orthogonalprojektionen der Doppelvektoren auf die beiden Richtungen und aus den Orthogonalprojektionen der beiden Ebenenstücke auf die durch die zwei Richtungen bestimmte Ebene.

A. Sommerfeld hat für den Fall der pseudoeuklidischen Geometrie in vier Dimensionen die Divergenz des allgemeinen Sechservektors f definiert[2]) durch den Grenzübergang

$$\mathfrak{Div}_s f = \lim_{\Delta S = 0} \frac{\int f_{sn}\, d\sigma}{\Delta S},$$

dabei ist ΔS ein beliebig gestaltetes dreidimensionales Volumen in dem ebenen Raum S senkrecht zur Richtung s, $d\sigma$ ist das Element der zweidimensionalen Begrenzung von ΔS, n die Richtung der Normalen auf $d\sigma$ im Raum S.

Es wäre für den Fall der pseudoeuklidischen Geometrie ebenso gut möglich, die Divergenz des Sechservektors durch den Grenzübergang zu definieren, der oben für die Definition

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra. Ann. d. Phys. 32. S. 749. 1910.

2) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis. § 5. Ann. d. Phys. 33. S. 649. 1910.

der Divergenz des symmetrischen Tensors verwendet wurde, also durch

$$\mathfrak{Div}_s f = \lim_{\Delta\Sigma=0} \frac{\int f_{sn}\, dS}{\Delta\Sigma}.$$

Eine nähere Betrachtung, die hier jedoch nicht durchgeführt werden soll, zeigt nämlich, daß die durch die zweite Art des Grenzüberganges definierte Divergenz des Sechservektors mit der durch den ersten Grenzübergang definierten identisch ist, nicht nur für den Fall der pseudoeuklidischen Geometrie, sondern überhaupt im Riemannschen Raum von vier Dimensionen.[1]) Es ist dies jedoch nur für den antisymmetrischen Tensor der Fall. Für den symmetrischen Tensor 2. Ranges wäre durch die zweite Art des Grenzüberganges ein anderer Vierervektor definiert wie durch die erste Art. Oder die beiden Grenzübergänge würden angewandt auf den symmetrischen Tensor zwei verschiedene Differentialoperationen bedeuten.

Es gelten, wie schon erwähnt, die Formeln (13a, b, c) auch für den antisymmetrischen Tensor. Denn bei ihrer Ableitung für den symmetrischen Tensor wurde die Symmetrieeigenschaft der Komponenten $t^{ik} = t^{ki}$ nicht benützt. Wird nun andererseits berücksichtigt, daß für den antisymmetrischen Tensor $t^{ik} = -t^{ki}$, so führt dies in den Formeln (13a, b, c) zunächst zwar zu keiner Vereinfachung. Wird aber von den kovarianten Komponenten von $\mathfrak{Div}\, T$ zu den kontravarianten Komponenten übergangen, so ergibt die Umformung allgemein

$$(13\,\mathrm{d}) \quad \mathfrak{Div}^i T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{lm} \frac{\partial}{\partial x^m} (\sqrt{g}\, t^{lm}) + \sum_{ik} \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} t^{ik} \sqrt{g} \right),$$

und hier fällt für den antisymmetrischen Tensor wegen der Symmetrie der Ausdrücke $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ bezüglich der Indizes i und k das zweite Glied der Gleichung weg, so daß allein bleibt

$$\mathfrak{Div}^i f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{lm} \frac{\partial (\sqrt{g}\, f^{lm})}{\partial x^m}.$$

1) Diese, sowie einige andere an das Thema dieser Abhandlung sich anschließenden Betrachtungen sind durchgeführt in der oben zitierten Dissertation des Verfassers.

§ 9. Definition der Divergenz des Tensors $n$ten Ranges.

Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, daß für den Tensor 2. Ranges die Invariante

$$\sum_{ik} \varepsilon^{ik} \eta_i \zeta_k$$

als Komponente des Tensors nach den Richtungen der Einheitsvektoren η und ζ zu betrachten ist.

Nun bilden die Komponenten des *Tensors $n$ten Ranges* zusammen mit den Produkten aus n Vektorkomponenten zur Form $n$ten Grades vereinigt eine Invariante:

$$\sum_{l_1 l_2 \dots l_n} \varepsilon^{l_1 l_2 \dots l_n} x_{l_1} x_{l_2} x_{l_3} \dots x_{l_n} .$$

Denn die Tatsache, daß diese Form eine Invariante ist, ist gleichbedeutend mit dem für die Komponenten des Tensors $n$ten Ranges geltenden Transformationsgesetz, wonach sich nämlich die Komponenten des Tensors $n$ten Ranges transformieren wie die Produkte aus n Vektorkomponenten.

Die für den Tensor 2. Ranges gewonnenen Ergebnisse legen es daher nahe, auch für den Tensor $n$ten Ranges die invariante Bildung

$$T_{s_1 s_2 \dots s_n} = \sum_{l_1 l_2 \dots l_n} \varepsilon^{l_1 l_2 \dots l_n} \eta_{l_1} \eta_{l_2} \dots \eta_{l_n} \tag{20}$$

als *Komponente des Tensors nach den Richtungen der Einheitsvektoren η_{l_1}, η_{l_2}, ... bis η_{l_n}* zu betrachten. Denn der Tensor $n$ten Ranges muß die Eigenschaft haben, daß sich für ihn eine Komponente nach n beliebigen Richtungen bestimmen läßt. Damit ist die Bedeutung der Komponentenbildung für sämtliche Tensoren, zu denen auch der Tensor 1. Ranges, der Vierervektor gehört, einheitlich festgelegt.

Hiernach kann aus dem Tensor $n$ten Ranges durch denselben Grenzübergang wie beim Tensor 2. Ranges ein Tensor $n-1$)ten Ranges, die Divergenz des Tensors $n$ten Ranges abgeleitet werden. Sie ist zu definieren durch

$$\mathfrak{Div}_{s_1 s_2 \dots s_{n-1}} T = \lim_{\Delta \Sigma = 0} \frac{\int T_{s_1 s_2 \dots s_{n-1} N} \, dS}{\Delta \Sigma} \tag{21}$$

Dabei haben $\Delta \Sigma$ und dS die gleiche Bedeutung wie oben, N ist die Richtung der Normalen auf dS. s_1, $s_1 \dots$ bis s_{n-1}

sind die n—1-Richtungen, die bei der Integration festzuhalten sind und nach denen die Komponente des Tensors $(n-1)$ten Ranges gebildet wird.

Auf den so entstandenen Tensor $(n-1)$ten Ranges läßt sich selbstverständlich wieder die Operation Div anwenden. Durch wiederholte Anwendung desselben Grenzüberganges läßt sich also aus einem Tensor $n$ten Ranges ein Tensor von entsprechend niedrigerem Range ableiten. Durch n-malige Anwendung der Operation Div kann insbesondere aus dem Tensor $n$ten Ranges ein Skalar gewonnen werden.

(Eingegangen 7. August 1919.)

5. *Über die Kohärenz in weitgeöffneten Bündeln;* *von Erwin Schrödinger.*

1. Einleitung.

Eine Reihe theoretischer Erwägungen[1]) sprechen dafür, daß wir uns die Aussendung von Licht vielleicht aus *gerichteten* Elementarprozessen zusammengesetzt zu denken haben, derart, daß bei jedem Emissionsakt nur in einen kleinen, eventuell sehr kleinen Raumwinkel gestrahlt wird. Wenn dem so ist, so sollte man glauben, daß das in den Kohärenzverhältnissen der von einem Volumelement eines Selbstleuchters ausgehenden Strahlung zutage treten müßte. Strahlen, welche unter großem Winkel gegeneinander ausgegangen sind, dürften, wenn man sie in geeigneter Weise, unter hinreichend kleinem, die Beobachtung von Fransen ermöglichendem Winkel kreuzt, nicht mehr interferieren. Obwohl nun die Undulationstheorie bekanntlich von jeher das Gegenteil angenommen hat, ohne mit den Tatsachen in Widerspruch zu geraten, scheint die Frage experimentell doch noch nicht genügend geklärt, wie z. B. aus folgender Bemerkung W. Feussens[2]) hervorgeht, die er an die Darstellung des Fresnelschen Dreispiegelversuches knüpft: „Fresnel macht noch die Bemerkung, daß man die Spiegel einander nähern müsse in dem Maße, als man den Einfall des Lichtes steiler nehme, und schreibt das dem Umstande zu, daß nur solche Strahlen als im Einklang schwingend angesehen werden könnten, welche unter sehr kleinem Winkel gegeneinander von der Lichtquelle ausgegangen seien. *Wir wissen hierüber noch nichts Bestimmtes* . . ."

Überlegt man, wie der Versuch anzustellen sei, so erkennt man sofort, daß die Abmessungen der Lichtquelle, mindestens nach zwei Dimensionen kein allzu großes Vielfaches der Wellenlänge sein dürfen, weil sonst die von den verschiedenen Ele-

1) Vgl. bes. A. Einstein, Phys. Zeitschr. 18. S. 121. 1917.

2) Artikel „Interferenz des Lichtes" in Winkelmanns Handbuch, 2. Auflage, 6, S. 934. 1906.

menten der Lichtquelle erzeugten Fransensysteme nicht koinzidieren, sondern einander größtenteils zerstören, d. h. zu gleichmäßiger Helligkeit ergänzen. Derart kleine Lichtquellen werden nun in der experimentellen Optik sehr häufig benötigt, und zwar im wesentlichen stets aus dem eben angeführten Grunde. Sie werden fast immer verwirklicht durch sehr kleine Löcher oder Spalte in einem undurchsichtigen Schirm, den man von rückwärts beleuchtet. Die Kohärenz von Strahlen, die unter beträchtlichen Winkeln von solch einer kleinen Öffnung ausgehen, ist demnach schon in Tausenden optischer Versuche direkt oder indirekt festgestellt worden; ihr Bestehen — in dem bei den jeweiligen Dimensionen der Öffnung zu erwartenden Ausmaß — kann, glaube ich, über jeden Zweifel erhoben gelten.

Ebenso sicher ist, daß solche Versuche durchaus nichts über die „Gerichtetheit" oder „Kugelförmigkeit" der Elementarprozesse aussagen, sondern lediglich die Gültigkeit des Huyghens-Kirchhoffschen Prinzips für den Luftraum beweisen. Nach diesem ist die „Lichterregung" s_P in einem beliebigen Aufpunkt P diesseits des Schirmes gegeben durch ein über die freie Öffnung zu erstreckendes Oberflächenintegral

$$4\pi s_P = \int \left\{ \frac{\partial \frac{s(t-r/o)}{r}}{\partial r} \cos(nr) - \frac{1}{r} \frac{\partial s(t-r/o)}{\partial n} \right\} dO.$$

Wie nun auch immer $s(t)$ von der Stelle dO abhängen mag, jedenfalls wirkt dieses Element im Aufpunkt P wie ein Erregungszentrum mit der Schwingung

$$-\left[\left(\frac{s}{r} + \frac{s'}{o}\right)\cos(nr) + \frac{\partial s}{\partial n}\right],$$

also ganz ähnlich wie ein lichtaussendendes Molekül nach der klassischen Theorie.

Der Versuch, die Forderung nach *Kleinheit* der Lichtquelle durch *geometrisch-optische Verkleinerung* zu erfüllen, führt um keinen Schritt weiter. Man erreicht damit zwar, daß die Kohärenz bis zu viel größeren Winkeln erhalten bleibt, und bekanntlich macht man von diesem Prinzip zur Herstellung feiner Lichtpünktchen oder Lichtlinien für Interferenz- oder Beugungsversuche mit Vorteil Gebrauch. Aber wegen des Sinussatzes, der für punktweise Abbildung von Flächenelementen erfüllt sein muß, haben die Strahlen, welche von

dem verkleinerten *Bild* unter jenem größeren Winkel ausgehen, das Original unter so viel kleinerem Winkel verlassen, daß für die in Rede stehende Frage die Zwischenschaltung des optischen Systems gerade genau überflüssig ist.

Es schien mir darum wünschenswert, auch einmal direkt die Interferenzfähigkeit von Strahlen zu prüfen, welche eine Lichtquelle von hinreichend kleinen *Original*dimensionen unter großen Winkeln verlassen haben. Unter geeigneten Bedingungen erhielt ich positive Resultate bis zu Winkeln von 50—60°. Erst nachträglich wurde mir bewußt, daß damit doch auch wieder ganz und gar nichts für oder gegen die Gerichtetheit des elementaren Emissionsaktes bewiesen ist, sondern wieder nur die Gültigkeit des Huyghens-Kirchhoffschen Prinzips für eine ganz im Luftraum gelegene, den Glühdraht eng umschließende Zylinderfläche. Solange nur die Wellengleichung für den Luftraum als gültig angesehen wird, sind, so glaube ich, der Grad der „Weitwinkelkohärenz" und die *Kleinheit des leuchtenden Querschnittes* für die durch die beiden Strahlen bestimmte Flächenrichtung ganz ebenso *wechselseitig* aneinander gebunden, ja die Aussagen über beide inhaltlich nicht verschieden, wie das bekanntlich für die von Michelson und von Fabry und Perot untersuchte *Kohärenz bei hohem Gangunterschied* und die *Monochromasie* der Lichtquelle zutrifft.

Wenn ich trotz dieser Skepsis an der Bedeutsamkeit der Versuche für die eingangs berührte Alternative doch kurz darüber berichte, so geschieht es einerseits, weil sie vielleicht an und für sich einiges Interesse beanspruchen dürfen, andererseits, weil sie mir eben doch die einzige Möglichkeit einer direkten experimentellen Prüfung jener Hypothese zu bilden scheinen. Sollen die Elementarprozesse gerichtet sein, so muß das Huygenssche Prinzip, wenn man zu immer kleineren und kleineren Dimensionen übergeht — schließlich jedenfalls für eine, das einzelne lichtaussendende Molekül umschließende Kugel — versagen. Daß bei den kleinsten herstellbaren Selbstleuchtern noch nichts dergleichen zu bemerken ist, ist deshalb vielleicht doch der einmaligen Feststellung wert.

2. Elementare Theorie der Versuche.

Die Lichtquellen waren elektrisch geglühte Drähte. Das zu prüfende „Strahlenpaar" wird durch zwei komplanare,

zum Glühdraht parallel und symmetrisch gelegene Spalte ausgeblendet und durch ein unmittelbar hinter der Spaltblende angebrachtes Objektiv unter kleinem Winkel, d. h. in beträchtlicher Entfernung gekreuzt. Untersucht wird mit einer Okularlupe die Lichtverteilung in der zum Glühdraht konjugierten Bildebene. Die Anordnung unterscheidet sich von jener, die Michelson zur Messung der Winkelgröße astronomischer Objekte ausgearbeitet hat[1]), nur durch die veränderten Dimensionen und dementsprechend veränderte Lage von Objekt und Bild, wodurch die — hier eben angestrebten — größeren Achsenwinkel beim Objekt bedingt werden. Die elementare Theorie, bei der wir das Objekt als ebenen leuchtenden Streifen ansehen und von der Beugungserscheinung an den Spaltblenden absehen wollen, ist kurz

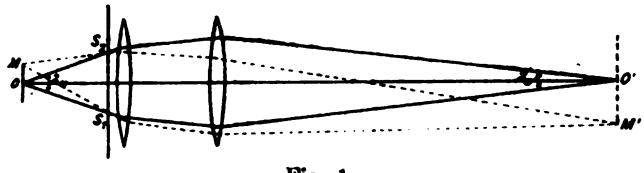


Fig. 1.

die folgende (vgl. Fig. 1, die einen horizontalen Querschnitt senkrecht zu der vertikalen Längsrichtung des Glühfadens und der Spalte darstellt). Die vom Achsenpunkt O der Lichtquelle unter $\sphericalangle S_1 O S_2 = 2u$ divergierenden Strahlen kommen im konjugierten Bildpunkt O' unter dem Winkel $2u'$ zum Schnitt. Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = V, \tag{1}$$

die Linearvergrößerung. Andererseits überlegt man leicht, daß zwei unter dem Winkel $2u'$ sich durchkreuzende Wellenzüge von der Wellenlänge λ ein zur Ebene der Wellennormalen senkrechtes Fransensystem mit sinusförmiger Intensitätsverteilung und der Halbfransenbreite (Abstand vom Maximum zum Minimum)

$$\delta = \frac{\lambda}{4 \sin u'} \tag{2}$$

erzeugen. Hier liegt ein Maximum natürlich bei O', da dorthin die optischen Wege gleich sind. — Ganz dieselbe Überlegung

1) A. A. Michelson, Phil. Mag. (5) **30**. S. 1. 1890; **31**. S. 256. 1891.

ist — und zwar wegen der Kleinheit der Querdimensionen von Objekt und Bild mit ungeändertem u und u' — auf den von O um $OM = y$ entfernten Punkt M der Lichtquelle anwendbar. Er erzeugt ein Fransensystem von gleichem δ, nur liegt das Hauptmaximum jetzt bei M'. Sei $O'M' = y'$, so ist

$$\frac{y'}{y} = V = \frac{\sin u}{\sin u'} \cdot \tag{3}$$

Die Fransen werden bei wachsender Objektbreite zum erstenmal verschwinden, sobald ein *Rand*element der (zur Achse symmetrisch gedachten) Lichtquelle sein Hauptmaximum auf das erste vom zentralen Element herrührende seitliche Minimum entwirft; denn dann ergänzen sich die Fransensysteme paarweise zu gleichförmiger Helligkeit. Die erforderliche *Halb*breite des Objekts, y, wird gegeben, indem wir δ aus (2) und y' aus (3) gleichsetzen:

$$\frac{\lambda}{4 \sin u'} = y \frac{\sin u}{\sin u'} \cdot \tag{4}$$

Die ganze Breite ist also

$$2y = \frac{\lambda}{2 \sin u} \cdot \tag{5}$$

(Daß man durch vorherige optische Verkleinerung in Wahrheit nichts gewinnt, erkennt man jetzt sofort, weil dabei $\sin u$ genau in demselben Maße vergrößert, wie y verkleinert wird.) — Wächst die Objektbreite noch weiter, so erscheinen die Fransen wieder, man kann sie erzeugt denken allein durch den über die Verschwindungsbreite (5) hinausragenden Teil des Objekts. Durch die überlagerte gleichförmige Erhellung sind sie natürlich undeutlicher. Für ganze Vielfache von $\lambda/2 \sin u$ verschwinden sie immer wieder völlig, dazwischen finden sich Deutlichkeitsmaxima von zusehends abnehmender Deutlichkeit. Michelson konnte so im Laboratorium mit weißem Licht, wo die Verschiedenheit der λs stört, bis zu 5, mit „rotem" Licht bis zu 8 Verschwindungen beobachten.

Wird nicht die Objektbreite, sondern der Spaltenabstand

$$S_1 S_2 = b$$

variiert, so ist, wenn a der Abstand vom Objekt zur Spaltebene

$$\operatorname{tg} u = \frac{b}{2a} \cdot$$

Die Fransen verschwinden, wenn die, jetzt feste, Objektbreite, sagen wir $2y_0$, ein ganzes Vielfaches von (5) ist:

$$2y_0 = \frac{n\lambda}{2\sin u},$$

also wenn

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tg} u = \frac{b}{2a} = \frac{n\lambda/4y_0}{\sqrt{1 - n^2\lambda^2/16y_0^2}}.$$

Ist das Objekt viele Wellenlängen breit, so sind die ersten Verschwindungswinkel klein, die zugehörigen Spaltdistanzen bilden eine arithmetische Reihe

$$\text{(6')} \qquad b_n = \frac{n\lambda a}{2y_0}.$$

Später oder bei kleinem Objekt wachsen sie rascher.

Bisher wurden nur die in der einen Symmetrieebene der Anordnung (Papierebene der Fig. 1) gelegenen Objektpunkte

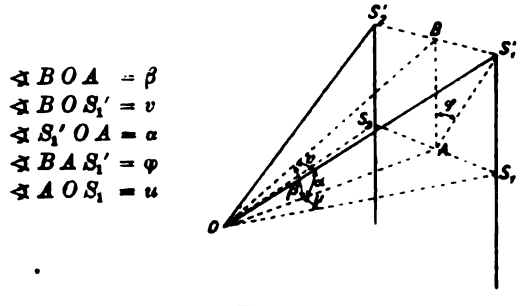


Fig. 2.

und nur der Strahlengang in dieser Ebene betrachtet. Was den ersten Umstand betrifft, so überlegt man leicht, daß die endliche Ausdehnung des Objekts senkrecht zu dieser Ebene nicht stört. Denn was eigentlich in der Bildebene $O'M'$ untersucht wird, sind die durch das optische System zur Deckung gebrachten (Fresnelschen) Beugungsbilder der beiden Spalte. Sind diese nur einigermaßen *lang* gegenüber der Breite des Einzelspalts, so sind die Querdimensionen (*senkrecht* zur Papierebene) des von jedem einzelnen Objektpunkt erzeugten Beugungsbildes verschwindend klein. Die Beugungsbilder *übereinander* gelegener Objektpunkte werden einander daher nicht stören. — Dagegen wird der *Strahlengang außerhalb der Papierebene* berücksichtigt werden müssen, sobald der Aperturwinkel u

nicht sehr klein ist. Es handelt sich im wesentlichen um die Frage nach der *zulässigen Länge der Spalte.*

Betrachten wir (vgl. die perspektivische Fig. 2) ein symmetrisches Strahlenpaar OS_1' und OS_2', dessen Ebene mit der früher betrachteten den Winkel β macht; v sei der halbe Strahlenwinkel, α der Achsenwinkel eines Strahles, φ der der Azimutwinkel zwischen den Ebenen, in denen β und α gemessen sind. Die entsprechenden Winkel im Bildraum seien v', α', β', während φ ungeändert bleibt. Aus einem sphärischen Dreieck im Bildraum folgt

$$\cos v' = \cos\alpha' \cos\beta' + \sin\alpha' \sin\beta' \cos\varphi .$$

Den Reziprokwert der Vergrößerung V wollen wir mit ε bezeichnen und als kleine Größe behandeln. Nach dem Sinussatz der geometrischen Optik ist

$$\sin\alpha' = \varepsilon \sin\alpha , \qquad \sin\beta' = \varepsilon \sin\beta ,$$

also mit Vernachlässigung von ε^4

$$\cos v' = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) + \varepsilon^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\varphi .$$

v' ist also, natürlich, ebenfalls klein und man hat

$$\sin^2 v' = \varepsilon^2 (\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \sin\beta \cos\varphi) . \tag{7}$$

Aus dem konjugierten sphärischen Dreieck des Objektraumes, das bei B einen rechten Winkel hat, folgt

$$\cos\varphi = \sin(B S_1' A) \cdot \cos v ; \quad \sin(B S_1' A) = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} ,$$

mithin

$$\sin\alpha \cos\varphi = \sin\beta \cos v , \tag{8}$$

ferner

$$\cos\alpha = \cos v \cos\beta ; \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2 v \cos^2\beta . \tag{9}$$

(8) und (9) in (7) eingesetzt und vereinfacht:

$$\sin^2 v' = \varepsilon^2 [\sin^2 v + \sin^2\beta (1 - \cos v)^2] . \tag{10}$$

Dies ist der Zusammenhang zwischen den Halbwinkeln des betrachteten Strahlenpaares im Objekt- und im Bildraum. Das von ihnen allein erzeugte Fransensystem kann, wegen der Kleinheit von β', mit dem früheren als komplanar, natürlich auch als parallel, die Mittelstreifen als koinzidierend gelten.

Seine Halbfransenbreite, δ, ist, analog zu (2), durch $\sin v'$ bestimmt:

$$\delta = \frac{\lambda}{4 \sin v'} .$$

Obwohl nun die beiden, bzw. die unendlich vielen, für alle möglichen Winkel β erzeugten Frontensysteme nicht einfach ihre Intensitäten superponieren (da Kohärenz besteht), wird es doch hinreichend und wohl auch notwendig sein, zu verlangen, daß auch für das größte auftretende β noch merklich $\delta = \delta$. Dabei werden 10—20% Abweichung die Sichtbarkeit der Fransen in der Mitte des Bildes noch nicht völlig zerstören. — Man wird also verlangen, daß $\sin v'$ merklich gleich $\sin u'$, d. h. wegen (10) und $\sin u' = \varepsilon \sin u$, daß

$$\sin^2 v + \sin^2 \beta \, (1 - \cos v)^2 \simeq \sin^2 u \tag{11}$$

sei. Der Zusammenhang zwischen u und v ist aber offenbar

$$\sin 2v = \sin 2u \cos \beta . \tag{12}$$

Aus (11) und (12) kann man sich ungefähr ein Bild machen von der zulässigen Größe von β. $\beta = u$, d. h. eine Länge der Spalten gleich ihrem Abstand voneinander dürfte selbst für $u = 30^0$ noch erlaubt sein. Die linke Seite von (11) bekommt dann den Wert 0,173 (= 0,171 + 0,002), die rechte 0,25. Der Unterschied von 30—40% überträgt sich auf die δ nur mit 15—20%. Das wird die Sichtbarkeit in der Mitte noch nicht aufheben.

Über die Modifikationen, welche die oben erörterten Verschwindungsbedingungen in diesem Falle jedenfalls erfahren, könnte nur eine genauere Durchrechnung der Interferenzerscheinung Aufschluß geben. Ich unterlasse sie, weil sie für das Folgende ohne Bedeutung ist, und weil man dann auch die wahre Form des Objekts (Zylinder, nicht ebener Streifen), ferner etwas wie das Lambertsche Kosinusgesetz in Betracht ziehen müßte — für Interferenzrechnungen eine heikle, auch vom Standpunkte der klassischen Theorie durchaus nicht völlig klarliegende Sache.

3. Versuche mit Photoobjektiven und Wolframdrähten.

Die ersten Versuche wurden mit gewöhnlichen Metallfadenlampen, dann mit einer einfadigen Glühlampe angestellt,

aus dem dünnsten technisch verwendeten Wolframdraht, welchen die Firma Westinghouse gütigst für mich herstellen ließ. Die Spalte, aus schwarzem Papier, 0,44 mm breit, 24 mm lang, waren auf den Gleitstücken eines kleinen Längenkomparators montiert und mit Rechts- und Linksschnecke symmetrisch verschiebbar. Sie konnten einander auf 6 mm genähert werden, beim Öffnen wurde der Zwischenraum durch eine bewegliche Nase aus schwarzem Papier abgedeckt. Um die Verschiebung mit der Hand regieren zu können, ließ ich den Strahlengang an einem guten kleinen Metallspiegel reflektieren, so daß der Beobachter mit der Lupe neben den Spalten zu sitzen kommt.

Hat man den Glühdraht annähernd in die richtige Lage gebracht, so sieht man in der Pointierungsebene der Lupe die verwaschenen Beugungsbilder der beiden Spalte. Die genaue Einstellung wird durch vollständiges Zusammenlegen der beiden Hauptmaxima herbeigeführt, am genauesten bei möglichst großer Spaltendistanz b. Schiebt man die Spalte dann wieder ganz zusammen, so bemerkt man eine sehr deutliche Längsstreifung des Hauptmaximums. Bei Vergrößerung von b entspricht die Erscheinung durchaus der Erwartung. Die Breite der Fransen nimmt ab, ihre Deutlichkeit zeigt periodische Schwankungen, Maxima, die durch Stellen fast völligen Verschwindens getrennt sind. Sofern die Öffnung des Objektivs ausreicht, lassen sich drei bis vier dieser Verschwindungsstellen noch mit leidlicher Schärfe einstellen, wenn sich auch die wiedererscheinenden Fransen immer mehr auf die Mitte des Beugungsbildes beschränken. Darüber hinaus wird die Einstellung auf das Verschwinden unscharf, weil die Fransen in einem größeren b-Intervall unsichtbar werden. Spuren von Interferenz konnten, als ganz zarte, nur an einzelnen Stellen sichtbare Maserung, noch bis über die fünfte Verschwindungsstelle hinaus entdeckt werden.

Solange sie noch deutlicher sind, tritt die Polychromie der Fransen klar hervor, auch lassen sie sich in bekannter Weise spektral zerlegen, indem man sie quer auf den Spalt eines kleinen Handspektroskops auffallen läßt. Man sieht darin dann die bekannten, gegen Rot bukettartig divergierenden Längsstreifen. Für die Beobachtung fand ich jedoch die lichtstärkere Erscheinung im unzerlegten Licht günstiger.

Lediglich zur Illustration lasse ich einige Messungsreihen

an verschiedenen Drähten und mit verschiedenen Objektiven folgen. In der letzten Spalte sind aus den b_n die Drahtdicken berechnet, wobei für die Wellenlänge rund 0,6 μ angenommen ist.

Tabelle 1.

Distanz Spaltebene—Bildebene = 6,1 m.

Ordnungszahl n	Verschwindungsstelle b_n (cm)	$b_n/2a = \operatorname{tg} u_n$ ($= \sin u_n$)	u_n	Berechnete Drahtdicke $n\lambda/2\sin u_n$ in μ	Lichtquelle und Optik; Objektweite
1	0,73	0,0051	0° 17′5	58,4	Metallfadenlampe 50 K, 110 V; Zeiss Protarlinse $f = 59$ cm $a = 71$ cm
2	1,51	0,0106	0° 37′	56,4	
3	2,29	0,0161	0° 55′	55,8	
4	3,03	0,0213	1° 13′	56,2	
2	0,64	0,0112	0° 39′	53,4	Dieselbe Lampe; zwei Protarlinsen $f = 59$ cm und $f = 48$ cm; $a = 28{,}5$ cm
3	0,96	0,0168	0° 58′	53,4	
1	1,35	0,0095	0° 33′	31,6	Metallfadenlampe 25 K, 110 V; Zeiss Protarlinse $f = 59$ cm; $a = 71$ cm
2	2,79	0,0196	1° 8′	30,5	
2	1,06	0,0186	1° 4′	32,3	Dieselbe Lampe; zwei Protarlinsen, $f = 59$ cm und $f = 48$ cm; $a = 28{,}5$ cm
3	1,64	0,0288	1° 39′	31,3	
	1,01	0,0177	1° 1′	16,9	Einfadenlampe; dieselbe Optik; $a = 28{,}5$ cm
2	2,11	0,0370	2° 7′	16,2	
1	2,60	0,0183	1° 3′	16,4	Einfadenlampe; Protar $f = 59$ cm; $a = 71{,}2$ cm
1	0,76	0,0188	1° 5′	16,0	Einfadenlampe; Petzval-Porträtobjektiv, $f = 28{,}9$ cm; $a = 20{,}2$ cm
2	1,52	0,0376	2° 9′	16,0	
3	2,30	0,0570	3° 16′	15,8	

Nachherige direkte Ausmessung im Mikroskop ergab für die, nicht sehr gleichmäßige, Dicke der Drähte folgende Werte:

	Mikroskopisch	Interferometrisch
50-Kerzenlampe	51—53 μ	55,6 μ
25-Kerzenlampe	29—30 μ	31,4 μ
Einfadenlampe	14,5—16 μ	16,2 μ

Die Übereinstimmung ist, in Anbetracht der unsicheren Annahme über die Wellenlänge, befriedigend; übrigens sind die Abweichungen nach Vorzeichen und Größenordnung durch die Wärmeausdehnung erklärbar.

Wie erwähnt, finden sich Spuren von Kohärenz auch noch bis zu größeren Winkeln u. Den größten Wert erreichte ich mit der Einfadenlampe[1]) und dem Petzvalobjektiv mit $a = 20{,}4$ cm, $b = 4{,}6$ cm; das entspricht $u = 6^0\,26'$, $2u = 12^0\,52'$ und dürfte schon mehr sein, als durch bisher vorliegende Interferenzversuche für Selbstleuchter sichergestellt ist.

4. Die mikroskopische Anordnung.

Die Hauptursache für das Verschwinden der Fransen bei größeren Winkeln ist ohne Zweifel die übergelagerte gleichförmige Erhellung, welche den immer mehr abnehmenden Helligkeitsunterschied zwischen Maximis und Minimis schließlich verdeckt. Um zu größeren Winkeln vorzudringen, mußten also dünnere Drähte und, wenn das gelingt, abbildende Systeme von größerer Apertur benutzt werden (das Petzvalobjektiv hatte etwa 2×8^0 Öffnung, die Protare noch weniger).

Der Versuch, Wollaston-Platindrähte von 2—4 μ Dicke in einer zu diesem Zweck von der Firma Westinghouse freundlichst für mich hergestellten Lampe zum Glühen zu bringen, mißlang im Vakuum völlig; ich glaube wegen der ungleichmäßigen Dicke der Drähte, die beim Mangel jeglichen Wärmeaustausches an einer zufällig besonders dünn geratenen Stelle durchschmelzen, bevor noch ein größeres Stück ins Glühen kommt. In freier Luft dagegen gelingt es leicht, von einem 2—3 mm langen Stückchen *eine* Stelle (Bruchteile eines Millimeters) zu mäßiger Rotglut zu erhitzen und darin längere Zeit zu erhalten. Die Stelle, die ins Glühen kommt, ist offenbar die dünnste, was für unseren Zweck günstig ist. Die anzulegende Spannung ist etwa 3—5 Volt für 2 mm Gesamtlänge. Mit der Zeit scheint der Glühdraht zu zerstäuben. Das Glühen wird immer intensiver und zieht sich auf die Mitte zusammen, man muß mehr Widerstand vorschalten, um den Draht zu erhalten. Zum Schluß entsteht ein einziges, intensiv leuchtendes Pünktchen, wohl das Ideal einer punktförmigen Lichtquelle, das sich aber leider nur kurze Zeit erhalten läßt; dann schmilzt der Draht an dieser Stelle durch. Bei starker Vergrößerung im Mikroskop erweisen sich die Enden kegelförmig verjüngt gegen die Rißstelle zu.

1) Ein anderes Exemplar, für welches die b_n um eine Kleinigkeit größer waren!

Für die Untersuchung in der früher benutzten Anordnung sind die Drähtchen zu lichtschwach — außer etwa im letzten Stadium, das aber viel zu labil ist, um Messungen daran auszuführen. Dagegen drängt sich, da man jetzt mit dem abbildenden System beliebig nahe heran kann, von selbst die Verwendung eines Mikroskopobjektivs auf. Man erzeugt das Streifensystem in der normalen Bildebene und verwendet als Lupe ein passendes Mikroskopokular.

Das anfängliche Bedenken, daß bei der außerordentlich verminderten Bildweite — von 6 m auf etwa 16 cm — die Fransen zu eng werden, erweist sich als unbegründet. Aus theoretischen Gründen muß die ***maximale nutzbare Gesamtvergrößerung***, welche zur ***numerischen Apertur sin u*** gehört, eben hinreichen, um die Fransen für das Auge zu trennen. Denn nach (1) und (2) ist die Fransenbreite 2δ (Abstand von Maximum zu Maximum)

$$2\delta = \frac{\lambda}{2 \sin u} V,$$

wo V die Objektivvergrößerung. Mit einem beliebigen Okular erscheint also der Abstand der hellen Fransen dem Auge so groß, wie bei gewöhnlicher Verwendungsweise desselben Systems ein Objekt von der Länge $\lambda/2 \sin u$. Das ist aber gerade jene Länge[1]), die von der Apertur $\sin u$ eben noch aufgelöst wird und die die Vergrößerung für das Auge trennen, d. h. auf einen Sehwinkel von 2′ bringen muß, um die Auflösungskraft eben auszunützen. Eine solche Vergrößerung reicht dann auch eben hin zur Trennung der Fransen. Für die Fransen handelt es sich aber dabei natürlich um einen ***Minimal***wert; eine stärkere Vergrößerung kann förderlich und wird nötig sein, wenn man z. B. die Lichtverteilung zwischen den Fransen untersuchen wollte. Auch wird man damit rechnen müssen, daß in Wahrheit schon zur deutlichen Sichtbarkeit vielleicht doch etwas mehr als die eben erreichte Trennung benachbarter Maxima nötig sein wird. — Nachstehende kleine Tabelle gibt für kleine und mittlere Aperturen die theoretischen Minimalvergrößerungen ($\lambda = 0{,}6\,\mu$):

$u =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
$\sin u =$	0,0872	0,1737	0,2588	0,3420	0,4226	0,5000	0,5736	0,6428
Vergr. =	42	84	125	165	208	242	277	310

1) Vgl. z. B. P. Drude, Optik, 2. Aufl., S. 85.

Im einzelnen war die Ausführung diese:

1. *Die Drähte.* An einem auf den Mikroskoptisch passenden Träger wurden in 8 mm Abstand zwei kupferne Zuleitungsdrähte parallel montiert, ihre Enden unter 45° bis auf etwa 3 mm Abstand gegeneinandergebogen. Zwischen ihnen wird in kurzem Bogen ein Stückchen Wollastondraht — natürlich *vor* dem Abätzen — eingelötet. Das Abätzen geschah nach dem Verfahren von Benedicks[1]) in heißer konzentrierter Säure, und zwar wird nur der mittlere Teil des Bogens eingesenkt, so daß die Silberhülle an den Enden erhalten bleibt. Die ganze Prozedur dauert kaum 20 Minuten und gelingt fast immer. Verwendet wurden, nach Angabe auf den Spulen, 2 μ- und 4 μ-Drähte, meistens die letzteren. Aus den oben angeführten Gründen ist die Glühstelle stets noch dünner als dieser Mittelwert.

2. *Die Spalte.* Sie wurden aus Stanniol anfangs aus freier Hand mit dem Taschenmesser geschnitten, später auf der Teilmaschine mit einer Giletteklinge. Man erhält so sehr schöne Spalte mit vollkommen geraden Rändern und den Spaltenabstand bis auf einige Hundertstel Millimeter nach Wunsch. Ein einziger Schnitt gibt auf Glasunterlage recht gleichmäßig Spaltenbreiten von 0,02—0,03 mm, größere Breiten erreicht man durch zwei parallele Schnitte und vorsichtige Entfernung des Mittelstreifens. Sodann wird das Stanniol auf ein dünnes Deckgläschen gekleistert — natürlich unter Aussparung der Mitte — dieses selbst auf einen passenden Korkring, mit dem es sich auf das Objektiv unter leichter Reibung aufschieben läßt, bis zur Berührung des Deckgläschens mit der Objektivfassung. Die genaue Zentrierung kann durch leichte seitliche Verdrehung des locker sitzenden Korkringes bewirkt werden, während man durch das Okular auf die erleuchteten Spalte blickt.

3. *Messung der Abstände.* Einige Schwierigkeit macht die Messung des Abstandes a (Objekt — Spaltebene), wenn er klein ist. Für größere a (mehrere Millimeter) genügt ein seitlich aufgestelltes Mikrometerfernrohr, aber bei kleinem a verursacht die unsichere Erfassung der Spaltebene von der Seite her zu große prozentuelle Fehler. In diesen Fällen

1) C. Benedicks, Phys. Zeitschr. 17. S. 319. 1916.

wurde aus Stanniol ein Fensterchen mit einem Querbalken geschnitten und in genau derselben Weise, wie sonst der Doppelspalt, auf das Objektiv aufgeschoben. Das Fensterchen läßt das Objektiv frei, bis auf den Querbalken, der die Güte der Abbildung kaum beeinträchtigt. Nun wird ein durchscheinend versilberter Außenspiegel auf den Objekttisch gelegt und einmal auf das Spiegelbild des Stanniolstreifens, dann — durch mikrometrisches Heben des ganzen Tubus — auf die Kratzer im Spiegel scharf eingestellt. Die Höhendifferenz ist offenbar die Hälfte der gesuchten Distanz.

5. Beschreibung der Mikroversuche.

Da die Spaltblenden nur einen kleinen Bruchteil des Objektivs freilassen und das wenige Licht, das eindringt, nicht zu einem scharfen Bilde vereinigt, sondern auf die breiten Beugungsfiguren der beiden Spalte verteilt wird, ist die Erscheinung äußerst lichtschwach und man muß das Zimmer gut abdunkeln und das Auge einige Zeit lang an die Dunkelheit gewöhnen, um überhaupt etwas zu sehen. Bei den stärkeren Vergrößerungen, die wegen der kleineren Objektdistanz und Spaltendistanz auch eine Verringerung der Spaltbreite nötig machen, ist eine leichte Überlastung des Drahtes nötig, der selten mehr als einen Versuch überlebt.

Da das glühende Drahtstückchen in der Regel nicht genau senkrecht zur optischen Achse steht, sieht man zwei Bilder, die sich an jener Stelle, auf die genau eingestellt ist, durchkreuzen. Es sind, wie gesagt, nicht scharfe Bilder des Drahtes, sondern die breiten Mittelmaxima der Beugungsfiguren von den beiden Spalten, wie sie, von den einzelnen Punkten des Drahtes erzeugt, sich zu zwei breiten, verwaschenen, der Form des Drahtes ähnlichen Lichtbändern zusammensetzen. In der Tat sieht man bei hellerer Glut jedes Band beiderseits von vielen schmäleren, lichtärmeren parallelen Bändern, den sekundären Maximis, begleitet. (Dreht man die Spalte, die natürlich dem glühenden Stück möglichst genau parallel orientiert sind, um 90°, so sieht man nur mehr *ein* viel schmäleres und schärferes *Bild* des Drahtes.) — Die uns interessierende Interferenzerscheinung, die von dem Zusammenwirken der beiden Spalte herrührt, erscheint als eine ungemein zarte, feine und scheinbar scharfe Längsstreifung im

folgend stelle ich die Bedingungen zusammen, unter denen ***die von dem Zusammenwirken der beiden Strahlenbündel erzeugte Interferenzerscheinung mit Sicherheit konstatiert werden konnte.*** Gesamtvergrößerung und Objektabstand a gelten für normalen Tubusauszug von 160 mm.

Tabelle 2.

Objektiv	N.A.	Okular	Vergr.	b (mm)	a (mm)	Spaltbreite (mm)	$b/2a = \operatorname{tg} u$	u
Zeiss, Achromat „A“	0,20	Kompens. 2	30	0,51	8,1	ca. 0,02	0,0315	1° 50
do.	0,20	Huyghens 2	55	1,30	8,1	0,18	0,802	4° 40
do.	0,20	„ 4	90	1,59	8,1	0,25	0,0981	5° 40
do.	0,20	„ 4	90	2,41	8,1	0,19	0,149	8° 30
do.	0,20	„ 4	90	2,79	8,1	0,27	0,172	9° 50
Zeiss, Apochr. 16 mm	0,30	„ 2	60	1,29	4,7	0,18	0,137	7° 50
do.	0,30	„ 4	100	1,70	4,7	0,19	0,181	10° 20
Leitz, Wetzlar, Nr. 4	ca. 0,5	„ 4	170	1,25	1,86	0,18	0,336	18° 30
do.	ca. 0,5	„ 4	170	1,58	1,86	0,18	0,425	23° 0′
do.	ca. 0,5	Reichert 12	300	1,79	1,86	0,18	0,481	25° 40
Zeiss, Apochr. 8 mm	0,65	„ 12	330	0,51	0,62	ca. 0,02	0,411	22° 20
do.	0,65	Kompens 18	485	0,62	0,62	ca. 0,02	0,500	26° 30
do.	0.65	„ 18	485	0,68	0,62	0,03	0,548	28° 40

Als Okular ist immer das schwächste angegeben, das zur Trennung der Fransen für das Auge eben noch hinreicht. Die Okularvergrößerungen sind ungefähr:

Kompens. 2	H. Nr. 2	H. Nr. 4	R. Nr. 12	Komp. 18
2	4	7	10—11	16

Die Gesamtvergrößerung liegt, wie zu erwarten, fast durchwegs zwischen dem Einfachen und Doppelten des früher angegebenen Minimalwertes.

Die Länge des Spaltenpaares war im allgemeinen nicht beschränkt, sie lief über das ganze Objektiv; für den früher mit a bezeichneten Winkel bildet dann die obere Grenze der Aperturwinkel. Nur bei den Versuchen mit Apochromat 8 mm wurde eine Beschränkung der Spalthöhe durch einen breiten Stanniolschlitz auf etwa 0,3 mm versucht und vorteilhaft befunden.

Über die wirkliche Dicke der zum Versuch dienenden Drahtstelle läßt sich aus den oben angeführten Gründen nichts ausmachen; die der Rißstelle benachbarten Teile schätze ich

unserem Spaltinterferometer ein Fransensystem erzeugen, das sich freilich, bei wirklich allseitiger Beleuchtung, wegen der relativ großen allgemeinen Helligkeit der Beobachtung entziehen dürfte. (Wenn man einen geeigneten Teil der beleuchtenden Bündel wegläßt — bei „Dunkelfeldbeleuchtung" — würden sie beobachtbar sein). — Bringt man jetzt auch den Draht selbst, und zwar bei derselben Temperatur, zum Glühen, so müssen die Fransen verschwinden, weil das Instrument nun in einen gleichtemperierten Hohlraum hineingerichtet ist. Da aber zwischen der Sekundärstrahlung und der Glühstrahlung des Drahtes sicher *keine* Kohärenz bestehen kann, muß die Glühstrahlung für sich allein ein dem früheren *komplementäres* Fransensystem erzeugen.

(Eingegangen August 1919.)

6. *Über die elektrische Natur der Kohäsionskräfte fester Körper;*
von M. Born.

Die elastische Kompressibilität der Halogensalze einwertiger Metalle kann durch die Annahme[1]) erklärt werden, daß sich die Ionen entsprechend ihren Ladungen nach dem Coulombschen Gesetze anziehen oder abstoßen und daß außerdem zwischen je zwei Ionen eine Abstoßungskraft wirkt, deren Potential der neunten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Im folgenden soll dieser Ansatz weitergeführt werden. Die Aufgabe ist die, alle übrigen physikalischen Eigenschaften solcher Kristalle aus der genannten Hypothese über die Molekularkräfte abzuleiten. Wenn dies gelingt, so bedeutet es einen Schritt in der Richtung der elektrischen Auffassung der Materie.

Als Material kommen vorläufig nur die schon früher benutzten binären Halogensalze vom Typus NaCl in Betracht, weil sie die reinste Form heteropolarer Verbindungen darstellen; nur bei solchen kann man erwarten, daß sich die Atomkräfte elektrostatisch (ohne Quantentheorie) auffassen lassen, wie Kossel[2]) an dem Beispiel der chemischen Bindung überzeugend nachgewiesen hat.

Leider ist die Anzahl der physikalischen Konstanten, die man berechnen kann, nicht groß. Bei regulären Kristallen hat man die folgenden[3]):

1. eine langwellige ultrarote Eigenfrequenz ω (Reststrahl);
2. den Beitrag dieser ultraroten Schwingung zur Dielektrizitätskonstante, $\varepsilon - \varepsilon_0$;

---

1) M. Born und A. Landé, Verh. d. D. Phys. Ges., 20. S. 210. 1918.
2) W. Kossel, Ann. d. Phys. 49. S. 229. 1916.
3) Vgl. M. Born, Phys. Ztschr. 19. S. 539. 1918.

3. drei Elastizitätskonstanten[1]) c_{11}, c_{12}. c_{44} (wobei c_{11} oder c_{12} durch die Kompressibilität $\varkappa$ ersetzt werden können);
4. bei azentrischen Kristallen eine Konstante e_{14} der polaren Piezoelektrizität.

Dazu kämen noch die auch bei zentrischen Kristallen auftretende tensorielle Piezoelektrizität[2]), die aber quantitativ noch nicht genügend erforscht ist, sowie sämtliche Vorgänge, die mit Temperaturänderung verknüpft sind, also die thermische Ausdehnung, die Temperaturkoeffizienten der unter 1., 2., 3., 4. genannten Konstanten, die Pyroelektrizität usw.; doch müssen diese noch außer Betracht bleiben, weil die Theorie der Zustandsgleichung der Kristallgitter nicht weit genug entwickelt ist.[3])

Da das unserm Ansatze zugrunde liegende Gitter vom Typus des NaCl zentrisch symmetrisch ist, kommen nur die unter 1., 2., 3. genannten Konstanten ω, $\varepsilon - \varepsilon_0$. c_{11}, c_{12}, c_{44} in Frage. Aber es sind noch weitere Einschränkungen notwendig. Wie a. a. O.[4]) gezeigt worden ist, bestehen unter der Voraussetzung, daß die Atome punktförmige Kraftzentren sind, bei zweiatomigen Gittern mit Symmetriezentrum zwei Relationen zwischen diesen fünf Größen, nämlich

$$c_{12} = c_{44}, \quad (\varepsilon - \varepsilon_0)\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{e^2}{\Delta},$$

wo e die Ladung der Ionen, m_1, m_2 ihre Massen und Δ das Volumen der Gitterzelle ist, die ein Atom jeder Art enthält.

Die erste ist die sogenannte Cauchysche Relation; sie ist, wie Voigt[5]) nachgewiesen hat, für den in unsere Klasse gehörigen Kristall KCl (Sylvin) nicht erfüllt. Das muß daran liegen, daß die Atome ausgedehnte Gebilde sind, die sich

---

1) Wir benutzen die Bezeichnungen von W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig, B. G. Teubner 1910. Vgl. insbesondere Kap. VII, § 371, S. 738 und § 372, S. 741.

2) Vgl. W. Voigt, Phys. Ztschr. 17. S. 287 und 307, 1916; 18. S. 59. 1917.

3) Für quantitative Schlüsse, wie sie hier angestrebt werden, genügen die Theorien von Mie, Grüneisen und Debye nicht; ich behalte mir vor, die nötigen Ergänzungen demnächst mitzuteilen.

4) Vgl. die S. 87, Anm. 3 zitierte Abhandlung.

5) W. Voigt, Kristallphysik (vgl. Anm. 1), § 372, S. 744.

drehen und deformieren.[1]) Man kann leicht einsehen, daß diese Drehungen oder Deformationen wesentlich den Wert von c_{44} beeinflussen, während c_{11} und c_{12} nicht so stark davon betroffen werden. Daher werden wir c_{44} aus unseren Betrachtungen ausschließen.

Die zweite Relation ist zuerst von Dehlinger[2]) aufgestellt und dann von mir[3]) unter allgemeineren Voraussetzungen bewiesen worden. Für die Halogensalze der Alkalimetalle bewährt sie sich einigermaßen, für die Halogensalze von Thallium und Silber aber versagt sie vollständig.[4]) Woran das liegen mag, wird im folgenden (S. 102, 103) erörtert werden. Jedenfalls scheidet die Größe $\varepsilon - \varepsilon_0$ für die hier verfolgte Absicht aus.

Unser Ziel ist daher, die Frequenz ω des Reststrahls und die Elastizitätskonstanten c_{11} und c_{12} (oder statt dessen $\varkappa$) aus der eingangs genannten Hypothese über die Atomkräfte zu berechnen.

Ehe man daran geht, muß man sich klar machen, wie weit man überhaupt eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erwarten darf. Die Daten, aus denen die drei Größen ω, c_{11}, c_{12} berechnet werden sollen, sind:

1. die Massen m_1 und m_2 der beiden Atome,
2. das elektrische Elementarquantum e,
3. die Gitterkonstante δ.

Dazu kommt noch der Exponent n des Abstoßungsterms $b r^{-n}$ der potentiellen Energie; nach unseren früheren Ergeb-

---

1) W. Voigt (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918) vertritt die Anschauung, daß es genügt, die Atome als starre Körper zu behandeln, deren Drehungen berücksichtigt werden müssen. Ich glaube, daß das optische Verhalten der Kristalle im Ultraroten, wie es auch in vorliegender Abhandlung wieder deutlich wird, dafür spricht, daß Deformationen der Atome zum mindesten dieselbe Rolle spielen wie Drehungen.

2) W. Dehlinger, Phys. Ztschr. 15. S. 276. 1914.

3) M. Born, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., 13. Juni 1918, S. 604; vgl. auch die S. 87, Anm. 3 zitierte Abhandlung.

4) Ich habe in der zitierten Abhandlung (Anmerkung 3) aus der Formel das Verhältnis z der Ionenladung zur Elektronenladung bestimmt; bei den Alkalisalzen ergab sich z etwas größer als 1, bei den einwertigen Tl-Salzen zwischen 3 und 4, bei den Ag-Salzen zwischen 1 und 2.

nissen soll $n = 9$ sein, doch lassen wir den Wert für den Augenblick unbestimmt.

Dann ergibt eine einfache Dimensionsbetrachtung, daß man zu Formeln folgender Art gelangen muß:

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{e^2}{\delta^3} f(n),$$

$$c_{11} = \frac{e^2}{\delta^4} f_1(n), \qquad c_{12} = \frac{e^2}{\delta^4} f_2(n);$$

dabei sind $f(n)$, $f_1(n)$, $f_2(n)$ dimensionslose Größen, deren Zahlenwert noch von n abhängt. Wenn n gewählt ist, so kommen die Unterschiede der einzelnen Kristalle nur noch durch die Gitterkonstante δ zum Ausdruck, und es ist klar, daß man an so primitive Formeln keine allzu hohen Ansprüche stellen darf. Man sieht nun aber, daß die angegebenen Ausdrücke nur dann in die richtige Größenordnung führen, wenn die Zahlenwerte von f, f_1, f_2 etwa 20—30 betragen; die Frage ist also, ob der für die Kompressibilität gefundene Wert $n = 9$ dies leistet. Wenn dies der Fall ist, so ist damit mehr als eine triviale Größenordnungsbeziehung gewonnen. Wir werden sehen, daß die Theorie diese Forderung erfüllt. Leider ist das Beobachtungsmaterial, besonders bei den Elastizitätskonstanten, noch wenig umfangreich und gestattet nur eine beschränkte Prüfung der Formeln; aber es genügt, um den Glauben an die elektrische Natur der Kohäsionskräfte zu befestigen.

§ 1. Die Gleichgewichtsbedigung.

Um in Übereinstimmung mit den früheren Arbeiten zu bleiben, bezeichnen wir den Abstand zweier gleichartiger Atome in der Richtung der Würfelkante mit δ. Als Elementarparallelogramm (Zelle) des Gitters[1]) wählt man aber am besten

1) Die Bezeichnungen und Benennungen sind bis auf geringfügige Abänderungen dieselben, die ich in meinem Buche „Dynamik der Kristallgitter", Leipzig, B. G. Teubner 1915, gebraucht habe. In folgenden Punkten weiche ich hier davon ab: 1. Ich rechne nicht mit dem „Obergitter", dessen Zelle das Volumen 1 hat, sondern mit dem wirklichen Gitter. 2. Zur Festlegung einer Zelle im Gitter gebrauche ich nicht drei Indizes l, m, n, sondern einen Index l, der oben angeschrieben wird; er ersetzt symbolisch jene drei Indizes, die ich hier mit l_1, l_2, l_3 bezeichne. 3. Die Indizes k, k', welche die verschiedenen Par-

nicht den Würfel von der Kantenlänge δ, der vier Atome jeder Art enthält, sondern ein Rhomboeder, dessen Kanten zu den Verbindungen einer Würfelecke mit den Mittelpunkten der drei Nachbarflächen parallel sind (Fig. 1); diese Zelle enthält je ein Atom von beiden Arten. Ist ihr Volumen Δ, so gilt

$$4\Delta = \delta^3 . \tag{1}$$

Die Gitterpunkte kann man auf die Kanten dieses Rhomboeders als schiefwinklige Achsen beziehen; bequemer ist es, sie durch die rechtwinkligen Koordinaten parallel zu den Würfelkanten zu kennzeichnen. Der Vektor von irgendeinem

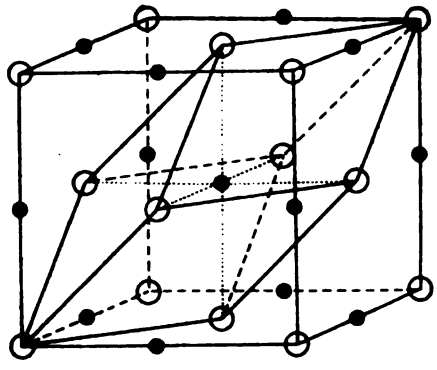


Fig. 1.

Gitterpunkte k zu irgendeinem anderen k' ($k, k' = 1, 2$) sei $\mathfrak{r}_{kk'}$, mit den Komponenten

$$x^{(l)}_{kk'} = \frac{\delta}{2} l_1 , \quad y^{(l)}_{kk'} = \frac{\delta}{2} l_2 , \quad z^{(l)}_{kk'} = \frac{\delta}{2} l_3 , \tag{2}$$

wo l_1, l_2, l_3 ganze Zahlen sind, deren Summe gerade ist, wenn die beiden Atome gleicher Art, aber ungerade, wenn sie verschiedener Art sind:

$$l_1 + l_2 + l_3 \begin{cases} \text{gerade für } k = 1,\ k' = 1 \text{ und } k = 2,\ k' = 2, \\ \text{ungerade für } k = 1,\ k' = 2 \text{ und } k = 2,\ k' = 1. \end{cases} \tag{2'}$$

Wir nehmen nun an, daß die Atome 1 (Metallatome) die positive Ladung $+e$, die Atome 2 (Halogenatome) die negative Ladung $-e$ tragen; dann bestehen zwischen je zwei

tikelsorten voneinander unterscheiden, schreibe ich unten an. Bringt man diese Änderungen der Bezeichnung an, wird man leicht die Formeln des Buches wiedererkennen (ich zitiere dieses im folgenden als D. K.).

Atomen Coulombsche Anziehungen oder Abstoßungen. Außerdem soll noch eine Wirkung zwischen je zwei Atomen vorhanden sein, die das Zusammenstürzen verhindert und näherungsweise als Zentralkraft angesehen werden soll, die einer höheren Potenz des Abstandes umgekehrt proportional ist. Wir setzen daher die gesamte potentielle Energie zwischen zwei Atomen k, k' gleich

$$\varphi_{kk'} = \pm e^2 r^{-1} + b_{kk'} r^{-n}, \qquad b_{k'k} = b_{kk'}. \tag{3}$$

Dabei gilt das $+$-Zeichen im ersten Gliede für $k = k'$, das $-$-Zeichen für $k \neq k'$. Ferner muß für benachbarte Atome verschiedener Art jedenfalls $b_{12} > 0$ sein, damit das zweite Glied eine Abstoßung bedeutet; dagegen kann man das Vorzeichen von b_{11}, b_{22} zunächst offen lassen, da die Wechselwirkung der nächstbenachbarten Atome gleicher Art wegen ihres größeren Abstandes schon so gering sein wird, daß es für die Stabilität des Gitters gleichgültig ist, ob sie sich anziehen oder abstoßen.

Wir berechnen nun zunächst die potentielle Energie des Gitters pro Zelle Δ. Den elektrostatischen Anteil können wir den früheren Arbeiten[1]) entnehmen, wo er nach der Methode von Madelung[2]) berechnet worden ist (vgl. auch den Anhang); wir fanden dort für die elektrostatische Energie des Gitters pro Elementarwürfel der Kante δ den Wert $a\,\delta^{-1}$ mit

$$a = 13{,}94\, e^2. \tag{4}$$

Die elektrostatische Energie pro Zelle Δ ist der vierte Teil davon.

Die gesamte elektrostatische Energie pro Zelle Δ im Gleichgewicht ist daher[3])

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{k'} \sum_l{}' \varphi^{(l)}_{kk'},$$

$$= -\frac{a}{4}\delta^{-1} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{k'} \sum_l{}' b_{kk'} (r^{(l)}_{kk'})^{-n},$$

wo $\varphi^{(l)}_{kk'}$ die potentielle Energie (3) zwischen zwei Gitterpunkten k k' im Gleichgewichtsabstande

1) M. Born und A. Landé, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1918. S. 1048. Vgl. auch die S. 87, Anm. 1 zitierte Abhandlung.

2) E. Madelung, Phys. Ztschr. 19. S. 524. 1918.

3) Der Summationsindex l bedeutet eine Summation über alle ganzzahligen Werte der drei Indizes l_1, l_2, l_3: vgl. Anm. 1, S. 90.

$$r_{kk'}^{l_1 l_2 l_3} = \frac{\delta}{2}(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{\frac{1}{2}}, \quad l_1 + l_2 + l_3 \begin{cases} \text{gerade für } k = k', \\ \text{ungerade für } k \neq k' \end{cases}$$

bedeutet. Wir führen nun die Summen

$$(5) \quad \begin{cases} S_1(n) = \sum\limits_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} \\ \qquad = 6 + 8 \cdot 3^{-\frac{n}{2}} + 24 \cdot 5^{-\frac{n}{2}} + 30 \cdot 9^{-\frac{n}{2}} + \ldots, \\ S_2(n) = \sum\limits_{l_1+l_2+l_3 \text{ gerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} \\ \qquad = 12 \cdot 2^{-\frac{n}{2}} + 6 \cdot 4^{-\frac{n}{2}} + 24 \cdot 6^{-\frac{n}{2}} + 12 \cdot 8^{-\frac{n}{2}} + \ldots \end{cases}$$

und die Bezeichnungen

$$(6) \qquad b_{12} = b, \qquad \frac{b_{11} + b_{22}}{2 b_{12}} = \beta$$

ein; dann wird:

$$(7) \qquad \Phi = -\frac{a}{4}\delta^{-1} + b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n}(S_1(n) + \beta S_2(n)).$$

Im Gleichgewicht muß Φ als Funktion von δ ein Minimum sein; daraus folgt:

$$\frac{d\Phi}{d\delta} = \frac{a}{4}\delta^{-2} - \frac{nb}{2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-1}(S_1(n) + \beta S_2(n)) = 0.$$

Hieraus berechnen wir die Konstante b der Abstoßungskraft durch den Gleichgewichtswert von δ:

$$(8) \qquad b = \frac{a}{8n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{S_1(n) + \beta S_2(n)}.$$

Die Konstante β bleibt unbestimmt; sie ist nach (6) von der Größenordnung 1. Da für größere Werte von n die Summe $S_2(n)$ klein gegen $S_1(n)$ ist, so spielt β keine ausschlaggebende Rolle.

§ 2. Die Kompressibilität.

Die physikalische Konstante, die man am einfachsten aus dem Potential (7) berechnen kann, ist die Kompressibilität.[1]) Drückt man Φ mit Hilfe von (1) als Funktion des Zellenvolumens Δ aus

---

1) Vgl. die S. 87, Anm. 1 u. S. 92, Anm. 1 zitierten Abhandlungen.

$$\Phi = -\frac{a}{8}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} + b\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{n}{3}}\left(S_1(n) + \beta S_2(n)\right),$$

so ist der Druck

$$p = -\frac{d\Phi}{d\Delta} = -\frac{a}{48}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} + b\frac{n}{6}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{n+3}{3}}\left(S_1(n) + \beta S_2(n)\right).$$

Die Kompressibilität $\varkappa$ ist dann definiert durch

$$\frac{1}{\varkappa} = -\Delta\frac{dp}{d\Delta} = -\frac{a}{36}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} + b\frac{n(n+3)}{18}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{n+3}{3}}\left(S_1(n) + \beta S_2(n)\right).$$

Setzt man hier den aus (8) folgenden Wert

$$b = \frac{a}{8n}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}\frac{1}{S_1(n) + \beta S_2(n)}$$

ein, so erhält man

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{a}{36}\cdot\frac{n-1}{4}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = \frac{a(n-1)}{9\delta^4},$$

also

$$\varkappa = \frac{9\delta^4}{a(n-1)} = \frac{9}{13{,}94(n-1)}\cdot\frac{\delta^4}{e^2}, \tag{9}$$

übereinstimmend mit unserer früheren Berechnung.

Die Elastizitätskonstanten c_{11} und c_{12} hängen bekanntlich mit $\varkappa$ durch die Relation[1])

$$c_{11} + 2c_{12} = \frac{3}{\varkappa} \tag{10}$$

zusammen; es genügt also, die eine von ihnen zu berechnen (vgl. § 4).

§ 3. Die ultraroten Eigenschwingungen (Reststrahlen).

Bei Kristallen des regulären Systems sind die Schwingungen parallel zu den Würfelkanten miteinander nicht gekoppelt. Sind u_1 und u_2 die Amplituden der beiden Atomarten bei einer parallel zur x-Achse schwingenden Welle von der Frequenz ω, so gelten Gleichungen der Form[2])

$$m_1\omega^2 u_1 + D\Delta(u_2 - u_1) = 0,$$
$$m_2\omega^2 u_2 + D\Delta(u_1 - u_2) = 0,$$

1) Vgl. W. Voigt, Kristallphysik § 372, S. 738, Formeln (442), (444).

2) Vgl. D. K. Formeln (150), S. 62; vgl. auch M. Born (zitiert Anm. 3, S. 87), Formel (27), ff., woher die Bezeichnung D übernommen ist.

wo der Koeffizient D von den Molekularkräften abhängt; daraus folgt für die Frequenz:

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) D\,\Delta. \tag{11}$$

Um D zu berechnen, bilde man zunächst aus den Potentialen (3) die Größen[1]):

$$\begin{cases} P^{(l)}_{kk'} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{d\varphi_{kk'}}{dr}\right)_{r^{(l)}_{kk'}}, \\ Q^{(l)}_{kk'} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d\varphi_{kk'}}{dr}\right]\right)_{r^{(l)}_{kk'}} \end{cases} \tag{12}$$

und daraus die von den Ionen der ersten auf die der zweiten Art pro Volumeneinheit ausgeübte Kraft[2]):

$$D = \frac{1}{\Delta} \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} \left(P^{(l)}_{12} + Q^{(l)}_{12} x^{(l)^2}_{12}\right). \tag{13}$$

Doch gelten diese Formeln ohne weiteres nur für den zweiten Term der potentiellen Energie, der die Abstoßung darstellt und einer höheren als der (-1)ten Potenz der Entfernung proportional ist. Der elektrische Anteil der potentiellen Energie erfordert wegen der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Schwingungen eine besondere Behandlung [vgl. Anhang, Formel (b)]; man findet, daß er zu $D\,\Delta$ den Beitrag

$$-\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{e^2}{\Delta} = -\frac{2\pi}{3}e^2\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-3}$$

liefert. Daher erhält man:

$$D\,\Delta = -\frac{2\pi}{3}e^2\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-3} - n\,b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-(n+2)} \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+2}{2}}$$
$$+ n(n+2)\,b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-(n+2)} \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+4}{2}}\, l_1^2.$$

Nun ist offenbar

$$3 \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+4}{2}}\, l_1^2 = \sum_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+2}{2}} = S_1(n+2).$$

1) Vgl. D. K., Formeln (14), S. 21.

2) Vgl. D. K., Formeln (18) und (25); die hier D genannte Größe heißt dort $A_0^{(1,2)}$.

Folglich wird

$$D\,\Delta = -\frac{2\pi}{3}e^2\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-3} + \frac{n(n-1)}{3}\,b\,S_1(n+2)\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-(n+2)}.$$

Setzt man hier den Ausdruck (8) für b ein, so bekommt man

$$D\,\Delta = \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-3}\left\{-2\pi e^2 + \frac{(n-1)\,a}{8}\cdot\frac{S_1(n+2)}{S_1(n)+\beta S_2(n)}\right\}.$$

Indem man noch den Wert (4) für a einführt, erhält man für das Quadrat der Frequenz nach (11):

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{e^2}{\delta^3}\cdot f(n), \tag{14}$$

wo

$$f(n) = \frac{1}{3}\left(13{,}94\,\frac{(n-1)\,S_1(n+2)}{S_1(n)+\beta S_2(n)} - 16\pi\right) \tag{15}$$

gesetzt ist.

§ 4. Die Elastizitätskonstanten.

Von den Elastizitätskonstanten c_{11}, c_{12} läßt sich c_{11} direkt berechnen, weil der elektrische Anteil nach der Methode von Madelung gewonnen werden kann; für c_{12} ist das nicht ohne weiteres möglich, aber auch nicht nötig, weil durch die Formel (10) c_{12} auf c_{11} und $\varkappa$ zurückgeführt wird.

c_{11} wird durch folgende Summe dargestellt[1]):

$$c_{11} = \frac{1}{2\Delta}\sum_k\sum_{k'}\sum_l Q^{(l)}_{kk'}\,x^{(l)4}_{kk'}. \tag{16}$$

Der elektrische Anteil davon wird im Anhange besonders berechnet; er hat den Wert $-20{,}42\,e^2\,\delta^{-4}$ [Anhang, Formel (k)].

Führt man nun die Summen

$$\begin{cases} C_1(n) = \sum\limits_{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade}} (l_1^2+l_2^2+l_3^2)^{-\frac{n}{2}}\,l_1^4 \\ \qquad = 2\left\{1 + 4\cdot 3^{-\frac{n}{2}} + 68\cdot 5^{-\frac{n}{2}} + 213\cdot 9^{-\frac{n}{2}} + \ldots\right\} \\ C_2(n) = \sum\limits_{l_1+l_2+l_3 \text{ gerade}} (l_1^2+l_2^2+l_3^2)^{-\frac{n}{2}}\,l_1^4 \\ = 2\left\{4\cdot 2^{-\frac{n}{2}} + 16\cdot 4^{-\frac{n}{2}} + 72\cdot 6^{-\frac{n}{2}} + 64\cdot 8^{-\frac{n}{2}} + \ldots\right\} \end{cases} \tag{17}$$

1) Vgl. D. K., Formeln (18), (26), (42), (51), (57). Es sind hier die Größen $a_1^{(k)}, \ldots$ sämtlich gleich Null und die $a_{11}, \ldots$ direkt die Elastizitätskonstanten.

ein, so erhält man:

$$c_{11} = -20{,}42\, e^2 \delta^{-4} + \frac{1}{A} n(n+2) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} b \left(C_1(n+4) + \beta C_2(n+4)\right).$$

Mit dem Wert (8) von b wird das zu:

$$c_{11} = \frac{e^2}{\delta^4} f_1(n), \tag{18}$$

wo

$$f_1(n) = 13{,}94\,(n+2) \frac{C_1(n+4) + \beta C_2(n+4)}{S_1(n) + \beta S_2(n)} - 20{,}42 \tag{19}$$

gesetzt ist. Aus (10) folgt dann

$$c_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varkappa} - c_{11}\right) = \frac{e^2}{\delta^4} f_2(n), \tag{20}$$

wo

$$f_2(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{13{,}94\,(n-1)}{3} - f_1(n)\right). \tag{21}$$

§ 5. Zusammenstellung der Formeln.

Die Formeln (14), (15), (18), (19), (20), (21) enthalten die Lösung des in der Einleitung gestellten Problems. Wir bringen sie jetzt in eine für die numerische Rechnung geeignete Gestalt.

Die Dichte des Kristalls ist

$$\varrho = \frac{m_1 + m_2}{A} = 4\,\frac{m_1 + m_2}{\delta^3}. \tag{22}$$

Ist N die Avogadrosche Zahl, so sind die Atomgewichte

$$\mu_1 = N m_1, \qquad \mu_2 = N m_2 \tag{23}$$

und

$$F = \varepsilon N = 2{,}90 \cdot 10^{14}\ \text{E.S.E.} \tag{24}$$

ist die Faradaysche Konstante. Daher wird nach (14)

$$\omega^2 = \frac{\varrho F^2}{4 \mu_1 \mu_2} f(n);$$

daraus folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{4\pi c}{F} \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\varrho f(n)}}, \tag{25}$$

mißt man sie in $\mu = 10^{-4}$ cm, so wird

$$\lambda = 13{,}0 \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\varrho f(n)}}. \tag{25'}$$

Die Elastizitätskonstanten haben den Faktor

$$\frac{e^2}{\delta^4} = e^2 \left(\frac{N\varrho}{4(\mu_1+\mu_2)}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{\sqrt{e}F\varrho}{4(\mu_1+\mu_2)}\right)^{\frac{4}{3}}; \tag{26}$$

für $e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ wird dieser:

$$\frac{e^2}{\delta^4} = 1{,}842 \cdot 10^{13} \left(\frac{\varrho}{\mu_1+\mu_2}\right)^{\frac{4}{3}}. \tag{26'}$$

Mit Hilfe der Formel (9) kann man nun aus den gemessenen Werten der Kompressibilität den Abstoßungsexponenten n bestimmen[1]); man findet

$$n - 1 = \frac{9}{13{,}94\,\varkappa} \cdot \frac{\delta^4}{e^2} = 3{,}505 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\varrho}\right)^{\frac{4}{3}}. \tag{27}$$

Die Elastizitätskonstanten ergeben sich aus (26') durch Multiplikation mit $f_1(n)$ und $f_2(n)$; es genügt, c_{11} anzugeben:

$$c_{11} = 1{,}842 \cdot 10^{13} \cdot \left(\frac{\varrho}{\mu_1+\mu_2}\right)^{\frac{4}{3}} f_1(n). \tag{28}$$

Ferner erhält man aus (9) und (18) die Relation:

$$\varkappa c_{11} = \frac{9 f_1(n)}{13{,}94\,(n-1)}; \tag{29}$$

diese ist explizite unabhängig von der Wahl der Zahlenwerte für e und δ und wird von diesen nur insoweit beeinflußt, als sie in die Bestimmung von n aus (27) eingehen.

Zur Orientierung über den Verlauf der Summen S und C als Funktionen von n dient die folgende kleine Tabelle[2]); der Bereich von n ist so gewählt, daß er die im folgenden vorkommenden Werte von n enthält.

Tabelle 1.

n	$S_1(n)$	$S_2(n)$	$S_1(n+2)$	$C_1(n+4)$	$C_2(n+4)$
7	6,231	1,149	6,065	2,028	0,1913
8	6,144	0,785	6,036	2,015	0,1314
9	6,065	0,544	6,020	2,007	0,0910
10	6,036	0,381	6,011	2,004	0,0636

1) Vgl. M. Born und A. Landé (a. a. O. Anm. 1, S. 1). Indem wir hier einen moderneren Wert für das elektrische Elementarquantum benutzen, fallen die numerischen Faktoren etwas anders aus als in der zitierten früheren Arbeit.

2) Die Tabelle ist von Frl. Dr. E. Bormann berechnet, die mich bei dieser Arbeit in liebenswürdiger Weise unterstützt hat.

Hieraus geht hervor, daß die Konstante β keinen sehr großen Einfluß auf die Funktionen $f(n)$, $f_1(n)$, $f_2(n)$ hat.

§ 6. Vergleich mit den Messungen.

Wir bestimmen zunächst n aus (27); die folgende Tabelle enthält die Kompressibilitäten nach Richards und Jones[1]) nebst Atomgewichten und Dichten und die daraus berechneten Werte von n.

Tabelle 2.

	μ_1	μ_2	ϱ	$\varkappa_{\text{beob.}}$	n
NaCl	23,0	35,5	2,17	$4{,}1 \cdot 10^{-12}$	7,91
NaBr	23,0	79,9	3,01	5,1	8,63
NaJ	23,0	126,9	3,55	6,9	8,47
KCl	39,1	35,5	1,98	5,0	9,85
KBr	39,1	79,9	2,70	6,2	9,80
KJ	39,1	126,9	3,07	8,6	9,33
TlCl	204,0	35,5	7,02	4,7	9,25
TlBr	204,0	79,9	7,54	5,1	9,67
TlJ	204,0	126,9	7,06	6,7	9,84

Der Mittelwert der für n gefundenen Werte ist $n = 9{,}20$. Macht man die Annahme, daß n ganzzahlig sein soll, so wird man

$$n = 9$$

setzen, einen Wert, der auch durch theoretische Spekulationen über die Atomstruktur gestützt wird.[2])

Auch die Konstanten λ und c_{11} wird man zunächst mit diesem Werte $n = 9$ berechnen. Dabei ist noch die Konstante β unbekannt; zum Zwecke einer ersten Übersicht über die Brauchbarkeit der Formeln wird man den naheliegenden Ansatz

$$\beta = 1$$

machen, der nach (6) bedeutet, daß für dieselbe Entfernung die Abstoßung zweier Atome verschiedener Art gleich ist dem arithmetischen Mittel der Abstoßung je zweier gleich-

1) Th. W. Richards und Gr. Jones, Journ. Amer. Chem. Soc. **31**. S. 158. 1909. Zitiert nach W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, § 362, S. 720.

2) Vgl. M. Born, Verh. d. D. Phys. Ges. **20**. S. 230. 1918 und A. Landé, ebenda, **21**. S. 2. 1919.

artiger Atome. Für $n = 9$, $\beta = 1$ hat man nach (15) und (19) mit Benutzung der Tabelle 1:

$$f(9) = \frac{1}{3}\left(13{,}94\,\frac{8 \cdot S_1(11)}{S_1(9) + S_2(9)} - 16\,\pi\right) = 17{,}10,$$

$$f_1(9) = 13{,}94 \cdot 11\,\frac{C_1(13) + C_2(13)}{S_1(9) + S_2(9)} - 20{,}42 = 28{,}26.$$

Die Formeln (25'), (27), (28), (29) liefern nun:

$$\lambda = 3{,}14\sqrt{\frac{\mu_1\,\mu_2}{\varrho}}, \tag{25''}$$

$$\varkappa = 4{,}38 \cdot 10^{-14}\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\varrho}\right)^{\frac{4}{3}}, \tag{27'}$$

$$c_{11} = 5{,}21 \cdot 10^{13}\left(\frac{\varrho}{\mu_1 + \mu_2}\right)^{\frac{4}{3}}, \tag{28'}$$

$$\varkappa\, c_{11} = 2{,}28\ . \tag{29'}$$

Die folgende Tabelle enthält die mit den Daten der Tab. 2 berechneten Werte von λ, $\varkappa$, c_{11}. Zum Vergleich sind daneben eingetragen die Wellenlängen der Reststrahlen λ_R, soweit sie bekannt sind, die Kompressibilitäten $\varkappa_{\text{beob.}}$ nach Richards und Jones (vgl. Tab. 2) und die Konstanten $c_{11\text{beob.}}$ nach Voigt[1]), die leider nur für zwei Kristalle vorliegen, endlich das Produkt $\varkappa\, c_{11\text{beob.}}$ aus den gemessenen Werten.

Tabelle 3.

	$\lambda_{\text{ber.}}$	λ_R	$10^{13}\,\varkappa_{\text{ber.}}$	$10^{13}\,\varkappa_{\text{beob.}}$	$10^{-11}\,c_{11\text{ber.}}$	$10^{-11}\,c_{11\text{beob.}}$	$\varkappa\, c_{11\text{beob.}}$
NaCl	60,9	52,0	3,54	4,1	6,44	4,68	1,92
NaBr	77,5	—	4,86	5,1	4,69	—	—
NaJ	90,0	—	6,44	6,9	3,54	—	—
KCl	83,0	63,4	5,53	5,0	4,12	3,68	1,84
KBr	107,0	82,6	6,82	6,2	3,35	—	—
KJ	126,1	94,1	8,96	8,6	2,54	—	—
TlCl	101,0	91,6	4,85	4,7	4,71	—	—
TlBr	146,0	117,0	5,53	5,1	4,12	—	—
TlJ	190,0	151,8	7,40	6,7	3,08	—	—

Die Wellenlängen der Reststrahlen (Maxima des Reflexionsvermögens) entsprechen wegen der Absorption nicht genau den

1) W. Voigt, Kristallphysik, § 373, S. 744. Die Angaben Voigts sind durch Multiplikation mit 981 in C.G.S.-Einheiten umgerechnet.

Eigenschwingungen; vielmehr sind die Wellenlängen der letzteren merklich länger. Für Steinsalz haben Rubens und Nichols[1]) aus der Dispersionskurve die Eigenschwingung $\lambda = 56{,}1$ abgeleitet; dieser Wert liegt dem berechneten $\lambda = 60{,}9$ ziemlich nahe. Für die übrigen Salze ist die Übereinstimmung schlechter, und zwar ist die Abweichung immer im selben Sinne und im großen und ganzen um so größer, je höhere Atomnummern die den Kristall bildenden Atome tragen. Das muß man wohl so verstehen, daß die der Theorie zugrunde liegende Annahme, die Atome seien punktförmige Kraftzentra, um so schlechter erfüllt ist, je größer die den Kristall bildenden Atome sind; denn dann werden Drehungen und Deformationen der Atome auf die Eigenfrequenz Einfluß gewinnen. Die Theorie stellt also den idealen Grenzfall sehr kleiner Atome dar.

Die Übereinstimmung der Elastizitätskonstanten c_{11} muß von demselben Gesichtspunkt aus als befriedigend bezeichnet werden. Auch ist zu berücksichtigen, daß die Sicherheit der gemessenen Werte nicht sehr groß ist.[2]) Für das Produkt $\varkappa c_{11}$ folgen aus den Beobachtungen Werte, die etwas kleiner sind als die theoretische Zahl 2,28. Es wäre sehr zu wünschen, daß durch neue Bestimmungen der Elastizitätskonstanten eine umfangreichere Prüfung der Theorie ermöglicht würde.

Man kann nun versuchen, auf zwei Weisen den Anschluß an die Messungen zu verbessern, ohne den Rahmen der hier gegebenen Theorie zu verlassen. Einmal kann man nämlich, statt mit $n = 9$ zu rechnen, die in Tab. 2 angegebenen n-Werte benutzen, die sich aus der Kompressibilität für jeden Kristall ergeben; man findet, daß das bei einigen Kristallen hilft, bei anderen schadet. Sodann kann man versuchen, ob sich die

1) Rubens und Nichols, Wied. Ann. d. Phys. 60. S. 452. 1897.

2) Voigt (Lehrbuch der Kristallphysik, § 372, S. 742) hebt hervor, daß sich für KCl (Sylvin) aus den von ihm gemessenen Werten von c_{11} und c_{12} die Kompressibilität $\varkappa = 7{,}38$ ergibt, während nach den direkten Messungen von Richards und Jones $\varkappa = 5{,}0$ sein soll. Das Kristallmaterial scheint nicht einheitlich zu sein. Unter diesen Umständen ist es auch überflüssig, die gemessenen Werte auf den absoluten Nullpunkt zu reduzieren, für den die Theorie eigentlich gilt; übrigens wird diese Ungenauigkeit zum größten Teil dadurch kompensiert, daß in die Formeln nicht die Dichte beim absoluten Nullpunkt, sondern bei normalen Temperaturen eingesetzt wird.

Konstante β so bestimmen läßt, daß die Übereinstimmung mit den Beobachtungen verbessert wird; es zeigt sich, daß auch das nicht zum Ziel führt, denn wenn man für die Kristalle NaCl und KCl durch geeignete Wahl von β die Übereinstimmung der Wellenlängen λ verbessert, wird die Abweichung der Elastizitätskonstanten c_{11} größer. In der vorliegenden rohen Form ist also die Theorie nicht geeignet, Aufschluß über das Verhältnis der Kräfte zwischen gleichartigen und ungleichartigen Atomen zu geben. Der Grund ist wohl, daß die Vernachlässigung der Drehbarkeit und Deformierbarkeit der Atome alle feineren Zusammenhänge verdeckt.[1])

Zum Schlusse vergleichen wir die Formel (25′) für die Wellenlänge der ultraroten Eigenschwingungen mit der in der Einleitung erwähnten Relation von Dehlinger

$$(\varepsilon - \varepsilon_0)\omega^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{e^2}{A},$$

die man auch in der Form

$$\lambda = \frac{4\pi c}{F}\sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2 K}{16\pi\varrho}}, \quad K = \varepsilon - \varepsilon_0$$

schreiben kann; sie wäre also mit der neuen Formel (25) identisch, wenn $K = 16\pi/f(n)$ wäre. Dabei ist K die Konstante der Dispersionsformel

$$n^2 = n_0^2 + \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

die den Einfluß der ultraroten Eigenfrequenz ω_0 auf den Brechungsindex n darstellt. Es ist also $K = \varepsilon - \varepsilon_0$, wo ε die statische Dielektrizitätskonstante, d. h. der Wert von n^2 für $\omega = 0$, und $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$ der Wert des Brechungsindex im Ultraroten vor der langwelligen Eigenfrequenz ist. Es wurde damals gezeigt, daß diese Formel zwar für die Salze NaCl, KCl, KBr, KJ einigermaßen stimmt, daß sie aber für die

1) W. Voigt hat kürzlich (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918) den Einfluß der Drehungen der Atome auf die Elastizitätskonstanten untersucht; in einigen Fällen konnte er dabei zu Schätzungen einer β analogen Größe gelangen. Man wird suchen müssen, diese Überlegungen mit der hier gegebenen Theorie zu verschmelzen.

Thallium- und Silbersalze[1]) unter der Annahme einfach geladener Ionen vollständig versagt (vgl. Einleitung, S. 89, insbesondere Anm. 4, S. 89). Die neue Formel (25) liefert weitaus bessere Werte für λ, obwohl ihre Begründung viel spekulativer ist, als die der Formel von Dehlinger. An dem Versagen dieser kann also nicht, wie ich früher glaubte[2]), die Vernachlässigung der Drehbarkeit und Deformierbarkeit der Atome schuld sein, denn diese macht auch die vorliegende Theorie; es scheint mir vielmehr, daß nur die Bestimmung von K aus der empirischen Dispersionskurve den Fehler bewirken kann. Einmal ist die Wahl des Wertes $\varepsilon_0 = n_0^2$ überhaupt sehr willkürlich; sodann handelt es sich um stark gedämpfte Schwingungen, was bei dem Ansatze der Dispersionsformel nicht zum Ausdruck gebracht ist. Jedenfalls ist die neue, direkte Berechnung der ultraroten Frequenzen aus den Atomkräften erfolgreicher als die anscheinend so hypothesenfreie aus dem Verlaufe der Dispersion.

Anhang.

Berechnung der elektrischen Wechselwirkungen zwischen den Atomen.

Eine ausführliche Theorie der elektrodynamischen Vorgänge in einem Gitter habe ich a. a. O.[3]) gegeben. Für die Berechnung der Wechselwirkungen hat man die Fälle zu unterscheiden, ob der Mittelwert der elektrischen Feldstärke über eine Zelle des Gitters verschwindet oder nicht. Im ersten Falle hat man elastische (akustische und thermische) Vorgänge, im zweiten Falle eigentlich elektromagnetische (optische). Im ersten Falle kann man mit gewöhnlichen elektrostatischen (Coulombschen) Kräften rechnen; im zweiten Falle muß man die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der

1) Die Silbersalze verhalten sich gegenüber der neuen Theorie merkwürdig; die Formel (27) liefert mit $n = 9$ viel zu große Kompressibilitäten, dagegen stimmen die mit $n = 9$ aus (25′) berechneten Wellenlängen gut mit den Reststrahlen überein. Die amorphe Struktur dieser Substanzen mag vielleicht erklären, daß sie sich elastisch anomal verhalten, während ihre optischen Eigenschaften unserer Theorie entsprechen.

2) M. Born, D.K., zit. Anm. 1, S. 89.

3) D. K., 2. Teil, § 22—31.

elektromagnetischen Störungen in Rechnung setzen und die Kräfte als Lösungen der Wellengleichung bestimmen.

Betrachten wir zunächst den Fall der optischen Vorgänge.

Die an den Partikeln angreifenden elektrischen Kräfte leiten sich aus einem Hertzschen Vektor ab, der der Wellengleichung genügt; dieser besteht aus zwei Anteilen, die von den positiven und negativen Ionen herrühren. Die auf ein negatives Ion wirkende Kraft in der x-Richtung ist gleich dem Werte von $-e\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ an der Stelle des Ions, wobei φ die von den positiven Ionen herrührende Wirkung darstellt; φ genügt der Wellengleichung und wird an allen positiven Partikeln unendlich wie er^{-1}. Entwickelt man nun unter der Annahme, daß der Mittelwert des Feldes über eine Zelle nicht verschwindet, nach Potenzen der reziproken Wellenlänge, so erhält man in erster Näherung (unendlich lange Wellen) für φ die Differentialgleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{4\pi e}{\Delta}.$$

Da nun aus Symmetriegründen in jedem negativen Gitterpunkte

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

ist, so folgt für die Kraft auf ein Ion

$$\text{(b)} \qquad -e\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\frac{4\pi e^2}{3\Delta};$$

da D die Kraft auf die Ionen einer Art in der Volumeneinheit bedeutet, so ist der gefundene Wert der elektrische Anteil zu $D\Delta$, wie im Text S. 95 angegeben.[1])

Bei der Berechnung der elektrischen Beiträge zu den Elastizitätskonstanten braucht die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht berücksichtigt zu werden. Es handelt sich also um eine rein elektrostatische Aufgabe.

Eine ebenso elegante wie weitreichende Methode zur Berechnung der Potentiale unendlicher Gitter hat Madelung[2]) angegeben. Er hat danach selbst den Wert der potentiellen Energie eines Gitters vom Typus des NaCl pro Elementarwürfel ermittelt; A. Landé und ich haben diesen Wert eben-

1) Vgl. auch D. K., 2. Teil, § 31, S. 98.
2) A. a. O. S. 6, Anm. 2.

falls berechnet und benutzt.[1]) Für die Kantenlänge 1 (gerechnet zwischen zwei Atomen der gleichen Art) hat diese Energie den auf S. 92, Formel (4) mitgeteilten Wert

(c) $$a = 13{,}94\, e^2 .$$

Wir haben hier also nur noch den Beitrag der elektrischen Kräfte zu der Elastizitätskonstanten c_{11} zu bestimmen. Nach der Gittertheorie[2]) beträgt dieser:

(d) $$c_{11}^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} \sum_k \sum_{k'} \sum_l \left(\frac{\partial^2 \varphi_{kk'}^{(l)}}{\partial x^2} \right)_{r_{kk'}^{(l)}} \cdot z_{kk'}^{(l)^2},$$

wobei

(e) $$\varphi_{kk'}^{(l)} = (-1)^{h_1+h_2+h_3} \frac{e^2}{r_{kk'}^{(l)}}$$

das elektrostatische Potential zwischen zwei Gitterpunkten ist. Nun hat offenbar die Summe

(f) $$C = \sum_{k'} \sum_l \left(\frac{\partial^2 \varphi_{kk'}^{(l)}}{\partial x^2} \right)_{r_{kk'}^{(l)}} \cdot z_{kk'}^{(l)^2}$$

in den beiden Gitterpunkten $k = 1$ und $k = 2$ einer Zelle denselben Wert; daher liefert die Summation nach k einfach den Faktor 2. Beziehen wir außerdem C auf ein Gitter mit der Ionenladung 1, bei dem benachbarte Atome verschiedener Art den Abstand 1 haben, so wird

(g) $$c_{11}^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} \cdot 2 \cdot \frac{e^2}{\delta/2} C = \frac{2e^2}{\delta\Delta} C = \frac{8e^2}{\delta^4} C.$$

Es bleibt also nur noch die numerische Konstante C zu berechnen. Wir setzen die Summe C aus den Beiträgen zusammen, die die Netzebenen $z = \text{konst.}$ liefern. Da die Ebene $z = 0$ nichts zu der Summe beiträgt, kann man schreiben:

$$C = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} z^2 \right)_{0,0,p} \cdot (-1)^p ;$$

dabei ist Φ das elektrostatische Potential der Netzebene $z = 0$ in einem Aufpunkte x, y, z, und es sind $x = 0$, $y = 0$ und für z der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen p zu setzen.

1) A. a. O. S. 6, Anm. 1.
2) Vgl. D. K. Formeln (26), (42), (51), (57).

Nach Madelung[1]) ist das Potential der Netzebene $z = 0$ im Punkte x, y, z:

$$\Phi = 8 \sum_{\substack{m \\ \text{ungerade}}} \sum_{n} \frac{e^{-\pi \sqrt{m^2+n^2} \cdot |z|}}{\sqrt{m^2+n^2}} \cos m\pi x \cos n\pi y .$$

Daher wird

$$\text{(h)} \qquad C = 16\pi^2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p p^2 \sum_{\substack{m \\ \text{ungerade}}} \sum_{n} \sqrt{m^2+n^2}\, e^{-\pi \sqrt{m^2+n^2} \cdot p} .$$

Die Reihe konvergiert außerordentlich rasch; um C genauer als auf $1^0/_{00}$ zu erhalten, genügt es, die Indizes $m, n = 1,3$ und $p = 1,2$ zu berücksichtigen. Man findet

$$\text{(i)} \qquad C = -2{,}644 .$$

Setzt man das in (g) ein, so erhält man den auf S. 96 benutzten Wert

$$\text{(k)} \qquad c_{11}^{(0)} = -20{,}42 \frac{e^2}{\delta^4} .$$

---

1) E. Madelung (a. a. O. S. 6, Anm. 2). Die angegebene Formel findet sich auf S. 532 unter 8. Das Feld eines gemischten (flächenzentrierten) rechtwinkligen ebenen Punktgitters; man hat $a = b = 2$, also $k_{mn} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$, und $E = 1$ zu setzen.

(Eingegangen 26. Juli 1919.)

7. *Der Effekt des elektrischen Feldes auf Linien des Argons und des Sauerstoffs*[1]; *von E. Böttcher und F. Tuczek.*

1. *Problemstellung.* Nach den Vorstellungen Starks wird die von einem äußeren Feld herrührende elektrische Kraft im Innern des Atoms durch seine an der Peripherie sitzenden, lose gebundenen Elektronen geschwächt, indem diese sich durch das äußere Feld verschieben. Die Wirkung eines Feldes auf die mehr im Innern liegenden Serienelektronen muß demnach um so geringer sein, je mehr Elektronen das Atom überhaupt enthält, d. h. je größer das Atomgewicht ist, und zweitens je mehr leicht verschiebbare Elektronen an der Peripherie des Atoms vorhanden sind. Als solche sind aber die Valenzelektronen zu betrachten. Hiernach hat man also eine Abnahme des elektrischen Effektes mit zunehmender Valenzzahl zu erwarten. In der Tat konnten Stark und Hardtke[2]) durch Vergleich des elektrischen Effektes auf entsprechende Glieder der diffusen Nebenserie von Na, Cu, Ag_+ und Al nachweisen, daß die Verschiebung für die ersten drei einwertigen Elemente ungefähr gleich, für das dreiwertige Al aber erheblich geringer ist.

In diesem Zusammenhang ist es von Interesse, wie sich einmal die Edelgase und zweitens Elemente mit der Valenzzahl 2 verhalten. Von den Edelgasen werden bekanntlich die Linien des He sehr stark zerlegt, beim Neon fand Nyquist[3]), dessen Arbeit uns leider nicht zugänglich war, einen Effekt des elektrischen Feldes. Wir untersuchten das Argon. Es bestand die Möglichkeit, daß hier eine der ersten oder diffusen Duplet-Nebenserie der oben aufgeführten, von Stark und

1) Die vorliegende Untersuchung ist mit Unterstützung der Jagor-Stiftung ausgeführt worden.

2) Stark u. Hardtke, Ann. d. Phys. 38. S. 712. 1919.

3) Nyquist, Phys. Rev. (II). S. 226. 1917.

Hardtke untersuchten Elemente entsprechende Serie gefunden und es so gelingen würde, durch den Vergleich der Verschiebungen bei Argon und jenen Elementen eine weitere Stütze der Starkschen Theorie zu liefern. Es mag vorweggenommen werden, daß keine solche Serie auftrat, und wir überhaupt keine Verschiebung oder Zerlegung von Argonlinien feststellen konnten.

Als zweiwertiges Element wählten wir den Sauerstoff. Als zweiter Gesichtspunkt für diese Wahl war maßgebend, daß Sauerstoff ein Bogen- und ein Funkenspektrum besitzt, denen nach Stark verschiedene Träger, nämlich das O^+-Atomion für das Bogen- und das O^{++}-Atomion für das Funkenspektrum zukommen. In Analogie zu anderen Elementen ist auch für Sauerstoff zu erwarten, daß die Bogenlinien stärker beeinflußt werden.

2. *Methode.* Die Untersuchungen wurden nach der Methode der ersten Kathodenschicht gemacht, und zwar wurde für Argon dieselbe Röhre verwendet, die schon früher von Stark, Hardtke und Liebert[1]) beschrieben ist, für Sauerstoff eine Röhre aus gewöhnlichem Glas von 4 mm Innendurchmesser mit gut anschließender Aluminiumkathode. Es wurde mit Gleichstrom gearbeitet, die Stromstärke betrug 1—2 Milliampere, die Entladungsspannung bei Argon etwa 4400, bei Sauerstoff 3400 Volt. Die Feldstärke ließ sich aus der Zerlegung der Wasserstofflinien, die im Argonspektrum auftraten, im Maximum zu etwa 26000 V/cm bestimmen. Der Raum vor der Kathode wurde in der üblichen Weise durch ein Tessar auf den Spalt eines Gitterspektrographen abgebildet, der schon früher beschrieben ist[2]), und dessen Dispersion 11 bis 16 Å/mm betrug. Ein Wollastonprisma zwischen Röhre uud Tessar trennte p- und s-Komponenten.

3. *Ergebnisse.* a) Argonlinien. Tab. I enthält die Wellenlängen der von uns untersuchten Argonlinien. Eine Zerlegung oder Schrägstellung konnte nicht aufgefunden werden.

b) Sauerstoff-Funkenlinien. An den in Tab. II aufgeführten Sauerstoff-Funkenlinien fanden wir ebenfalls keine Wirkung des Feldes.

1) J. Stark, O. Hardtke und G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. S. 569. 1918.

2) Ann. d. Phys. 48. S. 195. 1915.

Tabelle I.

1. Rotes Argonspektrum nach Eder u. Valenta.		2. Blaues Argonspektrum nach Eder u. Valenta.			
Wellenlänge	Intensität	Wellenlänge	Intensität	Wellenlänge	Intensität
4522,49	3	4847,94	2	4481,99	7
4510,95	5	4806,17	4	4426,16	8
4335,42	5	4765,04	5	4400,25	8
4300,18	5	4736,03	3	4379,79	7
4272,27	10	4727,00	5	4371,46	6
4266,41	9	4658,04	5	4348,22	10
4259,42	9	4637,35	4	4331,31	4
4200,76	9	4609,73	10	4277,65	10
4198,42	8	4590,05	8	4228,57	5
4164,36	5	4575,53	8	4178,50	3
4158,63	9	4563,87	7	4158,65	2
4044,56	5	4545,26	9	4131,91	8
		4503,15	2	4104,11	5
		4498,68	2	4072,16	6

Tabelle II.

O-Funkenlinien (nach Neovius).

Wellenlänge	Intensität	Wellenlänge	Intensität
4710,1	2	4351,4	mehrfach
4705,6	3	4345,4	mehrfach
4699,4	3	4337,0	4
4676,6	6	4319,6	6
4661,6	6	4317,1	6
4651,0	10	4303,5	4
4638,9	6	4288,5	6
4609,4	6	4253,7	5
4596,3	9	4190,0	7
4591,0	10	4185,5	7
4469,4	3	4153,6	2
4465,3	4	4119,5	6
4452,2	4	4088,9	4
4443,0	3	4085,2	4
4417,2	10	4076,2	8
4415,0	8		

c) Sauerstoff-Bogenlinien. In Tab. III sind die Ergebnisse bezüglich der von uns untersuchten Bogenlinien zusammengestellt. Von der Dupléthauptserie erschien in unseren Spektrogrammen nur das 2. Glied, $\lambda = 4368{,}5$, das keinen Effekt zeigt, von der Triplethauptserie nur das 3. Glied, $\lambda = 3947{,}8$, das aber so dicht an der intensiven Al-Linie 3944 liegt, daß wir keine bestimmten Aussagen über seine Beeinflussung machen können. Das 3. bis 7. Glied der I. Tripletnebenserie zeigt eine

Verschiebung nach Rot, die mit wachsender Gliednummer stark zunimmt, wie es bei allen bisher untersuchten Serien der Fall ist. Weitere Glieder waren auf unseren Spektrogrammen nicht zu erkennen.

Tabelle III.

O-Bogenlinien (nach Runge und Paschen).

Gliednummer	Wellenlänge	Intensität	Verschiebung $\Delta\lambda$ in Å	Dispersion Å/mm
	a) Duplethauptserie.			
2	4368,466	10	nicht merklich	16
	b) Triplethauptserie.			
3	3947,759 3947,661 3947,480	10	?	16,5
	c) I. Tripletnebenserie.			
3	5330,835 5329,774 5329,162	10	+ 0,71	11,9
4	4968,94 4968,04 4967,58	5	+ 2,0	12,0
5	4773,94 4773,07 4772,72	5	+ 5,4	14,0
6	4655,54 4654,74 4654,41	3	+ 7,6	14,6
7	4577,84 4576,97	1	+ 9,3	16,0
	d) II. Tripletnebenserie.			
2	5437,041 5435.968 5435,371	7	nicht merklich	10,0
3	5020,31 5019,52 5018 96	3	„	11,5
4	4803.18 4802,38 4801,98	5	„	13,3

d) Neue Linien des Sauerstoffs. Wir beobachteten zum erstenmal die in Tab. IV angegebenen Linien, die nur im elektrischen Feld auftreten. Die Bestimmung der Wellenlängen kann nicht auf große Genauigkeit Anspruch machen, eben weil die Intensität mit abnehmendem Feld dem Wert Null zustrebt. Die Intensität der s-Komponenten war so klein,

daß ihre Verschiebung nicht gemessen werden konnte; die Verschiebung ist aber etwa ebensogroß wie die der *p*-Komponenten. Die Eigenschaften der neuen Linien sind im folgenden kurz zusammengestellt:

Tabelle IV.

Neue O-Linien.

Wellenlänge	Intensität (Schätzung)	Verschiebung $\Delta\lambda$ in Å	Dispersion
4846	1	− 1,4	13,9
4743	2	− 2,1	14,0
4634	3	− 3,5	15,0
4559	4	− 4,5	16,0

1. Die Linen haben nur im elektrischen Feld merkliche Intensität.

2. Sie werden durch das Feld nach Violett verschoben im Gegensatz zur I. Tripletnebenserie).

3. Die Linien rücken bei kleineren Wellenlängen näher aneinander und an die Glieder der I. Tripletnebenserie.

4. Die Intensität nimmt mit abnehmender Wellenlänge zu (im Gegensatz zum gewöhnlichen Verhalten von Serienlinien). Die Reihe bricht mit dem intensivsten Gliede ab, ohne daß eine Andeutung eines weiteren, weniger intensiven Gliedes zu bemerken wäre. Dies Verhalten ist außerordentlich bemerkenswert.

5. Die *p*-Komponenten sind erheblich intensiver als die *s*-Komponenten.

6. Mit wachsender Feldstärke scheint die Intensität der Linien mit größeren Wellenlängen schneller zu wachsen als die der Linien mit kleineren Wellenlängen. (Ebenso verhalten sich die He-Serien, die nur im elektrischen Feld erscheinen.[1])

7. Die Verschiebung hat etwa die gleiche Größe wie bei der I. Tripletnebenserie des Sauerstoffs und bei der fast scharfen He-II-Haupt- und Nebenserie.[2]) Mit der letzteren haben die neuen Linien außer den unter 1., 2., 4., 6. und 7. aufgeführten Punkten auch die Eigenschaft 5. gemeinsam, die aber bei den

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 56. S. 577. 1918.

2) G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. S. 589. 1918.

O-Linien viel stärker ausgeprägt ist. Wir konnten dies feststellen durch Vergleich mit einer Platte, die uns Herr Prof. Stark zur Verfügung stellte, und die er zur Untersuchung des Spektrums von Silber in Helium aufgenommen hatte. Nach den obigen Feststellungen ist man wohl berechtigt, die von uns gefundenen O-Linien als eine zur I. Tripletnebenserie gehörige fast scharfe Nebenserie anzusprechen.

Herrn Prof. J. Stark verdanken wir die Anregung zu dieser Arbeit und ihre rege Förderung.

Greifswald, Physikalisches Institut, Juli 1919.

(Eingegangen 5. August 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 2.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Untersuchungen über die Grundlagen zum Bau von Transportgefäßen für verflüssigte Gase;* *von Fritz Banneitz, Gerhard Rhein und Benno Kurze.*

(Aus dem Physikalischen Institut der Universität Leipzig.)

Inhaltsübersicht: 1. Allgemeines. — 2. Die Wärmeisolation. — 3. Doppelwandige Glasgefäße. — 4. Gefäße aus Zelluloid. — 5. Gefäße der Firma Ahrendt. — 6. Vorversuche mit Metallgefäßen. — 7. Doppelwandige Metallgefäße. — 8. Weitere Versuche mit Metallvakuumgefäßen, insbesondere Schutz gegen Wärmestrahlung. — 9. Über die Entgasung von Eisenblechen.

Die vorliegenden Untersuchungen entstanden im Anschluß an Versuche von Prof. Lilienfeld, der schon vor mehreren Jahren ein Metallvakuumgefäß hat bauen lassen. Als mit Beginn des Krieges die Luftfahrt erhöhte Bedeutung erhielt, veranlaßte Prof. Wiener die Fortsetzung der Lilienfeldschen Bemühungen zur Gewinnung eines möglichst vollkommenen Metallvakuumgefäßes, die unter seiner und Prof. Lilienfelds ratender Beihilfe erfolgten. Auch mag nicht unerwähnt bleiben, daß Graf v. Zeppelin, als er von den Versuchen hörte, ihre Bedeutung für gewisse Aufgaben der Luftfahrt erkannte und den lebhaftesten Anteil an dem Fortgang der Arbeiten nahm.

Da der Bau großer Metallvakuumgefäße außerhalb der Leistungsfähigkeit eines Universitätslaboratoriums liegt und unsere Arbeiten zudem erheblich unter den Schwierigkeiten der Materialbeschaffung litten, so mußten wir uns darauf beschränken, die Grundsätze aufzustellen, nach denen stationäre und transportable Gefäße für verflüssigte Gase zu konstruieren sind, wenn man den Abdampfverlust nach Möglichkeit herabzusetzen wünscht.

1. Allgemeines.

Als unsere Arbeit begann, benutzte man fast ausschließlich zur Aufbewahrung und zum Transport verflüssigter Gase

die von der Firma Burger in Berlin hergestellten doppelwandigen und versilberten Glasgefäße. Sie können maximal nur für 5 Liter hergestellt werden und haben außerdem den Nachteil, daß ihre Lebensdauer sehr begrenzt ist. Sie beträgt bei starker Benutzung infolge der bei oft wiederholter Temperaturänderung ausgelösten Glasspannungen durchschnittlich nur einige Monate.

Je größer ein solches Gefäß ist, desto geringer ist im Verhältnis zu seinem Inhalt der Verlust durch Verdampfung, da die Wärmezufuhr hauptsächlich der Oberfläche des Gefäßes proportional ist. Daher ist es zweckmäßig, ein großes Gefäß statt mehrerer kleiner zu benutzen. In erster Annäherung wird man den absoluten Abdampfverlust der $^2/_3$ Potenz des Volumens proportional setzen dürfen, den prozentischen Abdampfverlust umgekehrt proportional der dritten Wurzel aus dem Volumen.

Der Gewichtsverlust der Flüssigkeitsmenge oder die Abdampfmenge eines Gefäßes gibt das beste Kriterium für seine Güte. Die Abdampfmenge für 24 Stunden soll mit A bezeichnet werden und es ist dann mit Rücksicht auf den Volumінhalt I eines Gefäßes die prozentuale Abdampfmenge

$$A_p = \frac{A \cdot 100}{I} .$$

Zunächst sollen kurz die Mittel und Wege betrachtet werden, durch die ein Gefäß gegen Wärmezufuhr isoliert werden kann.

2. Die Wärmeisolation.

Die Abdampfmenge eines Gefäßes für flüssige Gase wird hervorgerufen: a) durch die Wärmeleitung des Materials, aus dem das Gefäß hergestellt bzw. mit dem es umgeben ist, in Richtung senkrecht zu den Gefäßwänden, b) durch die durch Wandungen und Halsöffnung eindringenden Wärmestrahlen, c) durch die Wärmeleitung der Halswandung und d) durch den Wärmeaustausch, der durch die Halsöffnung erfolgt.

a) Wegen der sehr geringen Wärmekapazität und Verdampfungswärme flüssiger Gase ist es notwendig, ein möglichst gutes Isolationsmittel zu benutzen.

Eines der besten Wärmeisolationsmittel ist die Luft. Doch stört hier die Wärmekonvektion infolge der Umlaufbewegung

der Luft, die nur in sehr engen Gefäßen vermieden wird. Die Hintanhaltung solchen Umlaufs ist der Zweck von porösen Stoffen, wie Federn, Jute, Kork, Gummi und Kieselgur. Aber ein Teil der günstigen Wirkung dieser Stoffe wird wieder aufgehoben durch ihre eigene, gegenüber der Luft größere Wärmeleitung.

Ein öfters in der Patentliteratur ausgesprochener Gedanke, die kalten Gase der verdampfenden Flüssigkeit zur Isolation und stufenweisen Kühlung des Gefäßes zu benutzen, hat zu dem folgenden Versuch geführt:

Es wurde ein 2 Liter fassendes Gefäß aus Pappe (Fig. 1) hergestellt. Dasselbe war mit einem Abstand von 1 cm von einem zweiten umgeben, und dieses wiederum von einem dritten. Wird das innere Gefäß mit flüssiger Luft gefüllt, so durchstreichen die hier entstehenden kalten Gase die Zwischenräume, wie in der Figur durch Pfeile erkenntlich, und sollen dadurch die Stärke der Verdampfung verringern. Außerdem waren die innere Wandung des äußeren und die äußere Wandung des mittleren Gefäßes mit Stanniol beklebt, um die Strahlung abzuhalten.

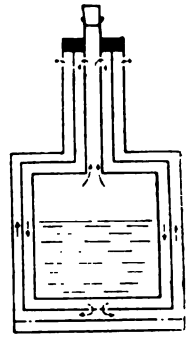


Fig. 1.

Das Resultat mit diesem geschachtelten Pappgefäß war wider Erwarten schlecht. Es verlor in einer Stunde 0,4 kg flüssige Luft, das macht in 24 Stunden 9,6 kg.

Die oben erwähnte Zirkulation verschwindet durch möglichste Luftleere, die zugleich die Wärmeleitung der Luft herabsetzt (Weinhold, Dewar). Das günstigste ist also das extreme Vakuum. Dieses Prinzip ist bei den an einer Luftpumpe evakuierten doppelwandigen Glasgefäßen der Firma Burger angewandt.

Es ist auch versucht worden, ein gutes Vakuum dadurch herzustellen, daß man die Luftfüllung des Zwischenraumes eines doppelwandigen Gefäßes mechanisch durch ein Gas verdrängt, das bei der Temperatur der flüssigen Luft kondensiert wird. Es entsteht dadurch von selbst ein Vakuum, falls diese Gasfüllung keinerlei Beimengung von anderen Gasen enthält, die bei der vorherrschenden Temperatur sich noch nicht verflüssigen.

Ferner hat man nach Dewar Holzkohle zwischen den Wandungen so angebracht, daß diese durch den kalten Inhalt abgekühlt wird und die noch vorhandenen Gase absorbiert (Ahrendt-Gefäße).

Diese beiden Methoden haben den Nachteil, daß es dabei sehr schwierig ist, die letzten Gasreste zu entfernen.

b) Eine starke Wärmezufuhr tritt durch Strahlung ein, wenn man Gefäße benutzt, die Licht- oder Wärmestrahlen durchlassen. Bei Glasgefäßen schützt man sich hiergegen bekanntlich durch Versilberung der Glaswände.

c) Doppelwandige Vakuumgefäße haben eine direkte Verbindung der äußeren Wandung mit der inneren im allgemeinen an der Einfüllstelle. Hier kommt die direkte Leitfähigkeit des Materials zur Geltung, die bei Verwendung von Metallen sehr von Bedeutung sein kann. Es ist daher zweckmäßig, daß man zur Herstellung des Halses ein Material von möglichst geringer Wärmeleitfähigkeit wählt, und dem Hals einen tunlich geringen Durchschnitt verleiht.

d) Zuletzt kommt noch die Wärmezufuhr durch die Halsöffnung in Frage, die wohl hauptsächlich durch die Zirkulation der in dieser vorhandenen Gase und durch die dort eindringenden Wärmestrahlen hervorgerufen wird.

Die Summe dieser Verluste gibt die Gesamtverluste eines Gefäßes an, die sich einfach durch Wägung ermitteln lassen. Schwieriger ist es hingegen, diese Verluste zu trennen oder einzeln festzustellen.

Durch die im folgenden beschriebenen Versuche sollen die Einzelverluste nach Möglichkeit ermittelt werden. Auch werden Versuche beschrieben, bei denen verschiedene Materialien und Herstellungsarten ausgeprobt wurden.

3. Die doppelwandigen Glasgefäße.

a) *Verluste in diesen Gefäßen.* Zur Aufbewahrung und zum Transport verflüssigter Gase werden von der Firma Burger Gefäße in zwei Größen hergestellt, die 2 bzw. 5 Liter fassen. Zur Ermittelung der Gesamtverluste solcher Gefäße wurden sie mit flüssiger Luft gefüllt, und die Gewichtsabnahme des Inhalts während einer bestimmten Zeit festgestellt.

Da flüssiger Sauerstoff etwas langsamer verdampft als flüssiger Stickstoff, so wird der zurückbleibende Rest einer

gegebenen Menge flüssiger Luft allmählich immer sauerstoffreicher und verdampft dementsprechend langsamer. Dieser Unterschied ist jedoch gering und kommt bei diesen Versuchen nicht in Frage.

Ferner kann es von Bedeutung sein, ob ein solches Gefäß ganz oder teilweise mit flüssiger Luft gefüllt ist, denn die die flüssige Luft berührenden Oberflächen der Wandungen nehmen nicht proportional der Menge der Flüssigkeit ab. Nehmen wir ein kugelförmiges Gefäß an, so wird die Oberfläche der den jeweiligen Inhalt berührenden Wandungen prozentual größer, je weniger Flüssigkeit im Gefäß vorhanden ist. Hieraus könnte man schließen, daß die Flüssigkeit um so schneller verdampfen würde, je weniger im Gefäß ist. Die hier untersuchten Gefäße der Firma Burger sind nun aber so gut ausgepumpt, daß dies kaum in Betracht kommt, denn die Leitfähigkeit der Glaswandung ist hierbei größer als die Leitfähigkeit des Vakuums. Infolgedessen spielt bei gutem Vakuum die ganze Oberfläche stets dieselbe Rolle, einerlei bis zu welchem Grade das Gefäß gefüllt ist.

Dies wurde experimentell dadurch gefunden, daß das Gewicht eines mit flüssiger Luft gefüllten 5 Liter-Gefäßes in bestimmten Zeitintervallen festgestellt wurde. Aus den Differenzen ergibt sich dann der jeweilige Verlust an flüssiger Luft. Dieses Gefäß war, in Watte verpackt, in einem Holzkasten untergebracht und mit einem Wattepfropfen verschlossen.

Trägt man die so gefundenen Gewichte als Funktion der Zeit auf, so erhält man eine fast gerade Linie (Fig. 2, Kurve I).

Es verdampfte die ganze Flüssigkeit von 4,81 kg flüssiger Luft in 13 Tagen. Das ergibt im Mittel 370 g Verlust in 24 Stunden oder prozentual zum Inhalt 7,7%/24 Std. Am ersten Tage verdampften 380 g/24 Std., während der Verlust am letzten Tage 350 g/24 Std. betrug.

Zum Vergleich wurden noch verschiedene andere 5 Liter-Gefäße untersucht, die hierbei zwar nur bis zur Hälfte gefüllt wurden. Dieselben verloren im verpacktem Zustand 370, 361 (0,025 kg/Tag auf 1 dm^2 Gefäßoberfläche), 394 und 380 g in 24 Stunden.

Sodann wurde der gleiche Versuch mit einem 2 Liter-Gefäß vorgenommen. Dieses war mit einer 2 cm dicken Filzschicht umgeben und in ein Drahtgestell eingebaut. Auch

hierbei ergab sich eine gerade Linie (Fig. 2, Kurve II). Dieses Gefäß verlor seinen Inhalt von 1,88 kg flüssiger Luft in 7 Tagen und 20 Stunden. Das ergibt im Mittel einen Verlust von 240 g in 24 Stunden oder prozentual zum Inhalt 12.7%/24 Std.

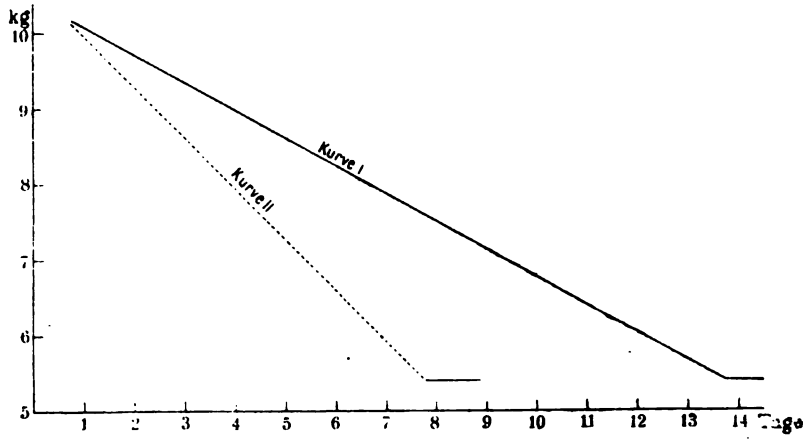


Fig. 2.

Ebenso wurden noch verschiedene andere 2 Liter-Gefäße im verpackten Zustand untersucht. Dieselben verloren 240. 250 und 224 g/24 Std.

b) *Einfluß der Verpackung und des Verschlusses.* Es erschien nun auch wünschenwert, festzustellen, wie groß der Einfluß der Verpackung auf die Verluste des Gefäßes ist. Zu diesem Zweck wurden die Gefäße einmal mit und einmal ohne Verpackung ausgewogen. Es ergab sich, daß die Verluste eines 5 Liter-Gefäßes bei Watteverpackung um 2,6% niedriger waren. Durch Entfernen des als Verschluß dienenden Wattepfropfens wurden die Verluste um noch weitere 5% vergrößert; also vermindert die Gesamtverpackung den Verlust um rund 8%.

c) *Wärmeleitung durch die Halswandung.* Die Wärmezufuhr durch die Glaswandung des Halses läßt sich verhältnismäßig einfach ermitteln, wenigstens angenähert. Es wurde zu diesem Zweck ein 2 Liter-Gefäß, dessen Abdampfmenge unter normalen Verhältnissen bekannt war, mit flüssiger Luft etwa dreiviertel voll gefüllt. Dann wurde ein Glasstab von bekanntem Querschnitt und $^1/_2$ m Länge in das Gefäß hinein-

getaucht, so daß das untere Ende des Stabes etwa 5 cm in flüssiger Luft stand, während das andere Ende aus dem Gefäß herausragte. Mittels Wattepfropfens wurde der freibleibende Teil der Halsöffnung verstopft. Das obere Ende des Glasstabes war hierbei auf Zimmertemperatur, das untere auf der Temperatur der flüssigen Luft. Zwischen beiden Enden bestand demnach einTemperaturgefälle von 210°. Durch Wägung wurde jetzt wieder festgestellt, wieviel das Gefäß mit dem Glasstab verlor. Dieser Verlust, vermindert um den Verlust des Gefäßes unter normalen Verhältnissen, ergibt den Verlust, der durch die Leitung des Glasstabes herbeigeführt wird. Auf diese Weise wurde der Versuch nun mit Glasstäben von verschiedener Dicke ausgeführt und es ergab sich hierbei im Mittel ein Verlust von 30 g/24 Std. pro Quadratzentimeter Glasquerschnitt.

Der Glashals eines 5-Liter-Gefäßes hat bei einer lichten Weite von 4 cm einer Dicke des Glases von 1,3 mm den Querschnitt von 169 qmm. Man kann also hieraus schließen, daß bei einem 5-Liter-Glasgefäß der Verlust durch die Leitfähigkeit der Halswandung 51 g/24 Std.[1]) beträgt.

Bei einem 2-Liter-Gefäß, das einen Querschnitt des Halses von 128 qmm hat, wenn man die lichte Weite zu 3 cm und die Wandstärke zu 1,3 mm einsetzt, berechnet sich der Verlust zu 38 g/24 Std.[1])

d) *Verlust durch Strahlung.* Die Wärmezufuhr durch Strahlung ist bedeutend schwieriger zu bestimmen, denn sie hängt sowohl von der Absorption wie von der Durchlässigkeit der Versilberung ab. Wir können einen Vergleich ziehen zwischen einem versilberten und einem unversilberten Gefäß und ermitteln dadurch, wieviel Wärmezufuhr durch die Versilberung abgehalten wird. Man findet aber hierdurch immer noch nicht, wieviel Wärmestrahlen noch durch die versilberten Wände hindurchtreten.

Einen oberflächlichen Vergleich erhalten wir, wenn wir ein normales doppelwandiges und versilbertes mit einem unversilberten vergleichen, unter der Annahme, daß in beiden Gefäßen das Vakuum das gleiche ist.

Es stand auch ein dreiwandiges, nicht versilbertes Gefäß von etwa 2 Litern Inhalt zur Verfügung, das 2,68 kg/24 Std.

1) Ohne Berücksichtigung der Versilberung des Glases.

und ein gleichgroßes doppelwandiges, welches 3,0 kg/24 Std. (nicht verpackt) verlor, während ein versilbertes Gefäß etwa 250 g/24 Std. verliert.

Man ersieht hieraus, daß der Einfluß der Strahlung ganz bedeutend ist.

Eine Überschlagsrechnung aus den oben angegebenen Daten kann uns schon einen Anhalt geben. Ein evakuiertes, aber nicht versilbertes 2-Liter-Gefäß verliert allein durch Strahlung etwa 2,5 kg/24 Std. Durch die Versilberung machen wir nun das Gefäß für Strahlen undurchdringlich mit Ausnahme der Halsöffnung. Diese beträgt etwa 0,7% der Kugeloberfläche. Die durch den Hals eindringenden Strahlen würden demnach nur 17,5 g/24 Std. der Flüssigkeit verdampfen. Nach dem Versuch mit dem doppelwandigen unversilberten 2-Liter-Gefäß würde sich der Einfluß der Halsstrahlung zu 20 g/24 St. ergeben.

e) *Abhängigkeit vom Vakuum.* Wie schon erwähnt, spielt die Güte des Vakuums eine große Rolle. Um nun den Verlauf der Verluste für verschiedene Vakua festzustellen, und um zu erfahren, wie weit man durch Verbesserung des Vakuums kommen kann, wurde ein versilbertes 2-Liter-Gefäß bei verschiedenen Drucken untersucht. Unter Zwischenschaltung einer mit flüssiger Luft gekühlten Vorlage wurde es an eine Gäde-Quecksilberpumpe, die in Verbindung mit einem Mac-Leod-Manometer stand, angeschlossen.

Für die Werte bis zu 1 Hunderttausendstel Millimeter zeigt das Mac-Leod noch die Drucke an; unterhalb dieses Druckes sind wir jedoch auf Schätzungen angewiesen.

Wir wollen daher hier noch folgende Vakua unterscheiden: 1. Das Vakuum, das man mit der Pumpe erreicht, ohne daß das auszupumpende Gefäß erwärmt wird (Vakuum I); 2. das Vakuum, das wir mit den zu Gebote stehenden Hilfsmitteln als äußerstes erreichen können (Vakuum II). Dies äußerste Vakuum wurde durch Zuhilfenahme der absorbierenden Wirkung gekühlter Kokosnußkohle hergestellt. Direkt an das auszupumpende Gefäß wurde hierbei ein zylinderförmiges Gefäß angeschmolzen, in dem sich die Kokosnußkohle befand. Diese beiden Gefäße wurden während des Evakuierens auf 400 bis 450° erhitzt. War nach mehrstündigem Pumpen ein konstanter Druck erreicht, so wurden diese beiden Gefäße von

der Pumpe abgeschmolzen, und dann nach Abkühlung des Kohlegefäßes, letzteres in flüssige Luft getaucht. Um die Absorption durch die Kokosnußkohle gut auszunutzen, wurde das auszupumpende Gefäß noch weiter erhitzt, während das Kohlegefäß sich in flüssiger Luft befand. Nachdem dies einige Stunden geschehen war, wurde durch Abschmelzen das Versuchsgefäß von dem Kohlegefäß getrennt.

Für die Herstellung eines guten Vakuums ist es von großer Bedeutung, daß das zu evakuierende Gefäß lange Zeit gleichmäßig erhitzt wird, damit die an den Wandungen haftenden Gase entfernt werden. Aus Gründen, die namentlich bei den später beschriebenen Versuchen in Frage kommen, wurde die Erhitzung des auszupumpenden Gefäßes mittels Wirbelströme herbeigeführt. Zu diesem Zweck wurde das Gefäß von einem 2 mm starken Eisenblech umgeben, das ringförmig zusammengenietet, in einzelnen Teilen um das Gefäß herumgebaut werden konnte. Der Zwischenraum zwischen Glasgefäß und diesem Eisenmantel wurde mit aufgelockertem Asbest ausgefüllt, um ein Berühren von Glas mit Eisen zu vermeiden und um Luftströmungen in diesem Zwischenraum auszuschließen. Der Eisenmantel wurde nun außerdem noch außen mit Asbest eingehüllt und von einer aus 5 mm starken Kupferdraht bestehenden Spirale umgeben. Durch diese Wickelung wurde ein Wechselstrom von 600 Perioden in der Sekunde geschickt. In Fig. 3 ist diese Anordnung wiedergegeben. Der dort eingezeichnete Quecksilberverschluß, der als Sicherheitsventil bei den Abdampfproben diente, wurde während des Heizens entfernt. Mittels eines Stickstoffthermometers wurde die Temperatur im Inneren des auszupumpenden Gefäßes, die bis auf 450° gesteigert werden konnte, gemessen, und ein Platin-Platin-Rhodium-Thermoelement, das an dem Eisenmantel anlag, ließ dessen Temperatur erkennen. Bei Herstellung der besten Vakua mußte das

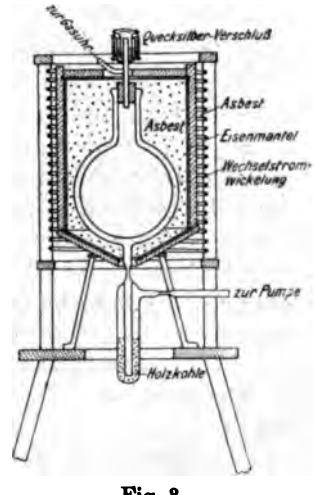


Fig. 3.

Gefäß stundenlang erhitzt werden. Hierbei war ein Energieverbrauch an Wechselstrom von 3400 Watt erforderlich. Das für die Herstellung des Vakuums II benutzte Gefäß mit Kokosnußkohle wurde mit einem Thermostaten und Bunsenbrenner auch bis auf etwa 450° erhitzt.

Bei diesen Versuchen, abgesehen von dem mit extremem Vakuum, wurde das Gefäß nicht abgeschmolzen. Es war daher nicht möglich, den Gewichtsverlust durch Wägung festzustellen. Um trotzdem ein Maß für die Abdampfmenge zu erhalten, wurden die entwickelten Gase durch eine geeichte Gasuhr geleitet. Die Eichung dieser Gasuhr wurde den Messungen entsprechend mit flüssiger Luft ausgeführt, so daß die mit derselben gemessene Luftmenge durch Gewichtsverlust an flüssiger Luft ausgedrückt werden konnte.

Bei Ausführung des Versuches zur Bestimmung der Abhängigkeit vom Vakuum wurde mit der Gädepumpe das Gefäß nebst anschließendem Röhrensystem bis zum gewünschten Druck ausgepumpt und mittels Mac-Leod der Druck gemessen. Dann wurde das Gefäß zur Hälfte mit flüssiger Luft gefüllt, und die Öffnung mit dem in Fig. 3 eingezeichneten Quecksilberverschluß abgesperrt, so daß die entweichenden Gase durch die Gasuhr strömen mußten. Während des Versuches wurde wiederholt eine Druckbestimmung vorgenommen und der nach der Abkühlung vorherrschende Druck im Mittelwert in Rechnung gesetzt.

Da es sehr schwierig war, das Gefäß bei jedem Versuch bis zur gleichen Höhe mit flüssiger Luft wieder zu füllen, so wurde die Füllung jedesmal nur ungefähr bis zur Hälfte ausgeführt. Die Gesamtmenge der eingefüllten Luft ergab sich dann aus dem Stande der Gasuhr, nachdem alles verdampft war (Endstellung), vermindert um den Stand der Gasuhr zu Beginn des Versuches. Außerdem wurden in bestimmten Zeitintervallen durch Ablesen des Standes der Gasuhr Zwischenwerte ermittelt.

Wie schon oben bemerkt, verläuft die Gewichtsabnahme eines gut ausgepumpten Gefäßes geradlinig. Ist der Druck jedoch über einem gewissen Wert, etwa über $^1/_{1000}$ mm, so können wir die Gewichtsabnahme nicht mehr als geradlinig annehmen, denn es spielt dann die Wärmeleitung durch die umgebende Luft schon eine größere Rolle gegenüber der Leitfähigkeit des Glases.

Wir haben hier also eine Abhängigkeit von der Oberfläche der die Flüssigkeit berührenden Wandung. Um nun ein gleiches Maß für die verschiedenen Kurven zu haben und um die Gewichtsabnahme für die verschiedenen Vakua miteinander vergleichen zu können, wurden alle Beobachtungen auf eine bestimmte Füllung des Gefäßes reduziert, und zwar auf einen Inhalt von 300 g flüssiger Luft.

Konstruieren wir für jeden Druck eine Kurve, die den jeweiligen Inhalt des Gefäßes als Funktion der Zeit wieder-

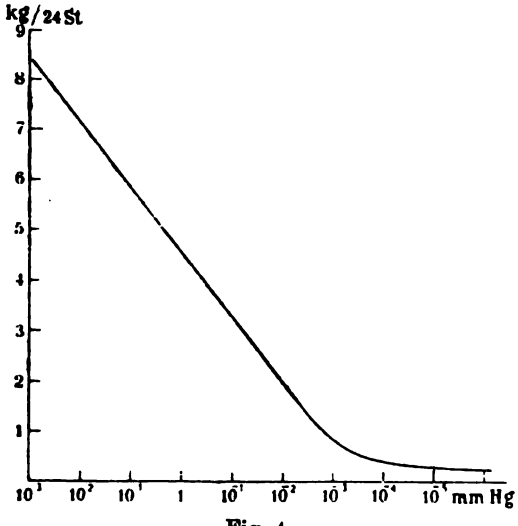


Fig. 4.

gibt, so können wir aus der Neigung dieser Kurven zur Abszisse bei 300 g Füllung die Abdampfmenge pro 24 Stunden ermitteln. Diese Abdampfmengen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, und ergeben die Kurve Fig. 4, wenn die Drucke logarithmisch aufgetragen werden.

	p mm	log p	Abdampfmenge A g/24 Std.
	760	2,8808	8210
	6,4	0,8062	4600
	0,72	0,8573 – 1	4440
	0,0013	0,1139 – 3	880
	0,00014	0,1461 – 4	460
Vakuum I.	0,0000423	0,6263 – 5	410
Vakuum II.	0,0000175	0,2430 – 5	240

Man ersieht hieraus, daß sich die Verluste des Gefäßes mit besser werdendem Vakuum einem Grenzwert nähern. Nehmen wir an, daß dieser Grenzwert bei 200 g/24 Std. liegt, so können wir die Ursache dieses restierenden Verlustes nicht mehr auf die Leitfähigkeit des Vakuums schieben.

f) *Diskussion der Verluste in doppelwandigen Glasgefäßen.* Füllen wir ein weder ausgepumptes noch versilbertes doppelwandiges 2-Liter-Glasgefäß mit flüssiger Luft, so verliert es in 24 Stunden 9,6 kg. Ein versilbertes und nicht ausgepumptes Gefäß verliert dagegen nur 8,2 kg/24 Std. Pumpen wir letzteres bis zum äußersten Vakuum aus, so verliert es nur noch 200 g/24 Std. Diesen Verlust können wir noch weiter verringern, wenn wir das Gefäß in Watte verpacken und mit einem Wattepfropfen verschließen. Es verliert dann nur noch 185 g/24 Std. (0,023 kg/Tag auf 1 dm^2 Gefäßoberfläche). Von diesem Verlust wird hervorgerufen durch die Leitung der Glaswandung des Halses 38 g, durch die Strahlung durch die Halsöffnung 20 g. Ein kleiner Betrag mag noch infolge der Leitung durch die Versilberung des Halses hinzukommen; er wird aber in Anbetracht der geringen Dicke der Silberschicht — vielleicht 0,001 mm — kaum stark in Betracht kommen. Der übrig bleibende Rest von 127 g/24 Std. kann in der Hauptsache anscheinend nur noch durch Wärmeeinstrahlung hervorgerufen werden. Eine Frage für sich ist, wieviel davon darauf zurückzuführen ist, daß die Versilberung nicht dicht genug ist und noch Wärmestrahlen durchläßt, und wieviel noch dann übrig bliebe, wenn der Spiegel überall zuverlässig zusammenhinge.

4. Gefäße aus Zelluloid.

Auf Vorschlag von Hrn. Banneitz wurde der Versuch mit einem doppelwandigen Gefäß aus Zelluloid gemacht. Vorversuche ergaben bereits, daß das Zelluloid bei tiefen Temperaturen wesentlich spröder ist als bei gewöhnlichen Temperaturen und sich nur um ein Geringes verbiegen läßt ohne zu brechen.

Weitere Versuche ergaben, daß eine Zelluloidkugel vollständig luftdicht hergestellt werden kann.

Eine Kugel von 0,8 mm Dicke wurde von dem Luftdruck eingedrückt, so daß man später zu einer Dicke von 8 mm überging. Das Zelluloid gibt zwar sehr viel Gase ab, in denen

mit Hilfe eines Spektralrohres hauptsächlich Kohlenwasserstoffe und Wasserstoff erkannt werden konnten. Aber diese Gase kondensieren sich zur Hauptsache bei tiefen Temperaturen, da das Vakuum nach Eintauchen der Kugel in flüssige Luft wesentlich verbessert wurde.

Auf Grund dieser günstigen Vorversuche wurde ein doppelwandiges Gefäß aus Zelluloid hergestellt, dessen Ausführung in Fig. 5 wiedergegeben ist. Man gelangt zu einem Vakuum, das durch die Dampfspannung des Zelluloids begrenzt ist. In diesem Zustand verlor das Gefäß bei nicht versilberten Wandungen 2,5 kg in 24 Std., also nicht mehr, als ein gut evakuiertes Glasgefäß ohne Versilberung.

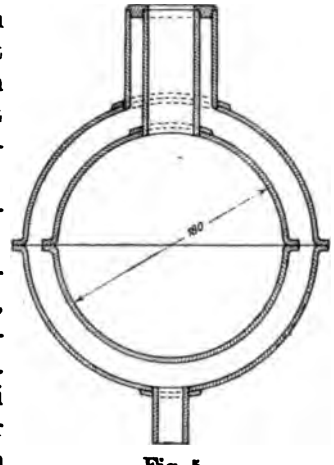


Fig. 5.

Eine Versilberung der Wandungen ist nicht geglückt.

Die Versuche mußten schließlich deshalb abgebrochen werden, weil das Gefäß bei späteren Füllungen mit flüssiger Luft sprang. Die Sprödigkeit dieses Materials bei tiefen Temperaturen ist offenbar zu groß, um die durch das Einfüllen der flüssigen Luft bedingten Spannungen auf die Dauer und mit Sicherheit auszuhalten.

5. Gefäße der Firma Ahrendt.

a) *Konstruktion.* Seit einiger Zeit werden von der Firma Ahrendt Transportgefäße für verflüssigte Gase in den Handel gebracht, die aus Metall hergestellt sind. Die Konstruktion ist, soviel uns bekannt, etwa die folgende.

Ähnlich wie bei den Glasgefäßen sind auch hier zwei kugelförmige Gefäße aus Messingblech ineinander gebaut, so daß das innere Gefäß durch den Hals am äußeren hängt. Der schwache Hals des inneren Gefäßes ist aus Manganstahl hergestellt, um die Leitfähigkeit desselben möglichst herabzusetzen. Der Zwischenraum zwischen den beiden Teilen ist ausgepumpt, aber nicht bis zum äußersten Vakuum, sondern nur mit einer Ölpumpe bis auf einige Millimeter Druck. Um die übrigen

Gasreste zu entfernen, ist Holzkohle zwischen beiden Wandungen so angebracht, daß sie von der eingefüllten flüssigen Luft abgekühlt wird und dabei die Gasreste absorbiert. Das Ganze ist in einem stabilen zylinderförmigen Eisenbehälter untergebracht.

Das innere Gefäß hängt frei am Halse des äußeren. Das Ausgießen des Inhalts geschieht durch Neigung, wobei die Wandung des inneren Gefäßes sich mit der des äußeren berührt (Patent Ahrendt). Die hierdurch eintretende Wärmezufuhr drückt dann die flüssige Luft aus der an und für sich engen Öffnung des Halses.

b) *Festgestellte Verluste.* Es standen zu Versuchszwecken zur Verfügung: ein 5-Liter-Gefäß, ein 15-Liter-Gefäß und ein 25-Liter-Gefäß. Die Abdampfmengen wurden wie oben durch Wägung ermittelt. Es ergab sich, daß das 5-Liter-Gefäß seinen ganzen Inhalt in 6 Tagen verlor. Der Gewichtsverlust fand gleichmäßig statt und betrug 1,095 kg/24 Std. bzw. 22% vom Inhalt (0,075 kg/Tag auf 1 dm^2 Gefäßoberfläche).

Das 15-Liter-Gefäß wurde in gleicher Weise untersucht und es stellte sich heraus, daß dasselbe relativ zu seiner Oberfläche bedeutend mehr als das 5-Liter-Gefäß verlor. Der Verlust betrug im Mittel 2,671 kg/24 Std. bzw. 18% vom Inhalt. Da hier anscheinend ein Fabrikationsfehler vorlag, wurde hierfür von der Firma ein anderes gleichgroßes Gefäß geliefert, dessen Untersuchung einen Verlust von 1,026 kg/24 Std. bzw. 7% vom Inhalt ergab (0,034 kg/Tag auf 1 dm^2 Oberfläche).

Bei dem 25-Liter-Gefäß wurden 1,258 kg in 24 Stunden (0,029 kg/Tag auf 1 dm^2) bzw. 5% vom Inhalt als Verlust festgestellt.

Nach Angaben der Firma sollen die 5-Liter-Gefäße in 24 Stunden 432—1920 g verlieren, je nachdem die Gefäße aus Sparmetall oder zum Teil aus Ersatzmetall ausgeführt sind. Für die 25-Liter-Gefäße wird ein Verlust von 1080 bis 1920 g in 24 Stunden angegeben. Die Firma garantiert, daß ihre Gefäße (wenn von Sparmetall hergestellt), nicht mehr als 1,5 kg in 24 Stunden verlieren, gibt aber bei dieser Garantie keine Unterschiede für die verschiedenen Größen an. Die größten von der Firma offerierten Gefäße fassen 100 Liter.

6. Vorversuche mit Metallgefäßen.

a) *Das Nickelgefäß von Lilienfeld.* Bereits vor mehreren Jahren hat Prof. Lilienfeld ein Metallgefäß für verflüssigte

Gase zu Versuchszwecken bauen lassen. Dasselbe stand noch zur Verfügung und wurde nochmals untersucht. Es besteht aus kugelförmig gepreßtem Nickelblech, ist doppelwandig und hat etwa 1 Liter Inhalt. Der Hals der inneren Wandung ist durch ein zwischengesetztes Glasrohr von dem äußeren Mantel getrennt. Hierdurch soll die metallische Wärmeleitung durch den Hals vermieden werden. Dieses Glasrohr ist unter Zwischensetzung von Platin luftdicht mit dem Nickel verbunden. Die übrigen Wandungen des Gefäßes sind hart mit Silber verlötet. Außerdem sind noch einige Stützen zwischen beiden Gefäßen angebracht, um eine gleichmäßig sichere Lage für das innere Gefäß zu gewährleisten und den zerbrechlichen Glashals vom Druck zu entlasten. Dieses Gefäß ist auch mit einem Spektralrohr versehen und im Jahre 1913 von Prof. Lilienfeld ausgepumpt worden. Das Vakuum hat sich bis jetzt gut gehalten. Nach Angabe von Prof. Lilienfeld fluoresziert das Spektralrohr jetzt noch genau so wie vor Jahren.

Dieses Gefäß verlor jetzt 1,2 kg/24 Std. flüssige Luft. Es wurde an den äußeren Wandungen außerdem sehr kalt und es fand dort Eisbildung statt. Während flüssige Luft im Gefäß war, wurde das Vakuum durch die Abkühlung bedeutend besser und es ging durch das Spektralrohr keine Entladung mehr. Eine Isolation dieses Gefäßes mit Eiderdaunen verbesserte das Resultat auf 775 g/24 Std. (0,16 kg/Tag dm^2).

Es geht hieraus hervor, daß ein außerordentlich gutes Vakuum die Vorbedingung für die praktische Verwertbarkeit eines solchen Gefäßes ist. Die weiteren Versuche sollen zeigen, ob es möglich ist, ein brauchbares Gefäß aus Metall zu konstruieren, von dem man nachher auf die geforderten größeren Gefäße schließen kann.

b) *Material, Wandstärke, Dichtigkeit.* Vor allen Dingen war festzustellen, welche Metalle geeignet sind, welche Wandstärke als Minimum vorausgesetzt werden muß, und womit die Verbindungsstellen gelötet bzw. gedichtet werden müssen.

Für diese Vorversuche wurden kugelförmige Gefäße hergestellt, die, mit einem Glashals versehen, unter Zwischenschaltung von Platin an die Luftpumpe angeschlossen werden konnten. Die Kugelgefäße wurden aus zwei gedrückten Halbkugeln zusammengesetzt und hart verlötet. An Material stand nur Kupfer und Eisen zur Verfügung. Bei Eisen sind Schlacke-

einschlüsse vorhanden, über die sich von vornherein nichts sagen läßt. Man wird daher die Wandstärke nicht zu dünn wählen dürfen. Das beste Resultat wurde bei diesen Versuchen mit einer Wandstärke von 1,5 mm erzielt.

c) *Lötstellen.* Auf die Verbindungsstellen muß ganz besonderer Wert gelegt werden, und es hat schon bei den Vorversuchen sehr viel Schwierigkeiten bereitet, die Lötstellen sicher zu dichten. Das zuerst angewandte Schlaglot bewährte sich nicht. Durch die notwendige Erhitzung beim Auspumpen bildeten sich kleine Kanäle und Poren, die hauptsächlich durch anhaftende Oxyde und Reste des Lötmittels (Borax) zustande kamen, und die vom Lötmaterail selbst nicht ausgefüllt waren.

Ebenso schlecht war die Lötung mit Zinn, abgesehen davon, daß man ein mit Zinn gelötetes Gefäß beim Evakuieren nicht hoch genug erhitzen kann.

Erst eine ganz sorgfältige Lötung mit einer Silberlegierung führte zum Ziele. Es wurde hierbei so verfahren, daß die zu verlötenden Stellen zuerst sauber versilbert wurden und, dann miteinander in Verbindung gebracht, mit einem Schweißbrenner so stark erhitzt wurden, daß das Silberlot dünnflüssig zwischen beiden Lötstellen lief.

d) *Die Herstellung des Vakuums.* Die Herstellung eines guten Vakuums in Metallgefäßen ist ganz besonders schwierig. Die für die Versuche hergestellten Gefäße wurden, mit einem Spektralrohr versehen, an eine rotierende Gäde-Hg-Pumpe angeschlossen und ausgepumpt. Im kalten Zustand pumpt man die Gefäße ohne weiteres bis zum harten Röntgenvakuum. Dieses Vakuum reicht aber bei weitem noch nicht aus. Man muß die an den Wänden haftenden Gase entfernen und eventuell vorhandene Kohlenwasserstoffe, die sich zum Teil in Form von Öltropfen kondensieren, herausbringen. Dies ist nur möglich, wenn man das Gefäß stark erhitzt.

Als einfachste Methode erwies sich auch hier die Erhitzung des auszupumpenden Gefäßes durch Wirbelströme. Die Anordnung der Fig. 3 ist hier besonders vorteilhaft, da die Wirbelströme direkt in den Wandungen des Gefäßes erzeugt werden. Das Gefäß wurde mit Asbest gut verpackt und ähnlich wie in Kapitel 3e beschrieben, mit einer aus 5 mm starkem Kupferdraht bestehenden Drahtspirale umgeben, durch die der

Wechselstrom mit 600 Perioden in der Sekunde geschickt wurde. Bei genügender Isolation des Gefäßes mit Asbest reicht eine Maschinenleistung von 3 KW. aus, um das Gefäß bis zur Rotglut zu erhitzen. Die Temperatur des Gefäßes wurde mittels Thermoelementes gemessen. Außerdem wurden noch an verschiedenen Stellen Glasröhren so durch die Asbestumhüllung geführt, daß man durch sie die Metallwand beobachten konnte und dadurch festzustellen vermochte, ob Rotglut erreicht war. An der Stelle, wo der Metallhals an Platin angelötet war, und letzteres an das Glasrohr, das zur Pumpe führte, angeschmolzen war, wurde weniger stark erhitzt.

Mit Eisenkugeln von 0,7 mm Wandstärke konnte trotz vorzüglicher Herstellung der Schweißstellen kein genügendes Dichthalten erzielt werden.

Es wurde daher eine starkwandige Eisenkugel von 1,5 mm Wandstärke hergestellt, und ganz besonders sorgfältig gelötet. Die zu verlötenden Stellen wurden zuerst mit einem Überzug des Lötmittels, das aus einer schwer schmelzbaren (etwa 600°) Silberlegierung bestand, versehen. Sodann wurden die zu verlötenden Teile aneinander gebracht und mit dem Schweißbrenner so stark erwärmt, daß das aufgetragene Silberlot dünnflüssig den Zwischenraum ausfüllte. Gleich beim ersten Auspumpen stellte sich heraus, daß bei diesem Gefäß das Vakuum bedeutend besser hielt, als bei den früheren. Das Gefäß wurde stark erhitzt und mehrere Male stundenlang ausgepumpt, und schließlich abgeschmolzen.

Nach Ablauf von 5 Tagen hatte sich das Vakuum kaum merklich geändert, so daß angenommen werden konnte, daß dieses Gefäß dicht war. Es wurde daher beschlossen, dasselbe als inneren Teil eines doppelwandigen Gefäßes zu benutzen. Die Versuche mit demselben werden später beschrieben werden.

e) *Wärmezufuhr durch die Metallwandung des Halses.* Genau wie wir oben die Wärmeleitung durch die Halswandung des Glasgefäßes ermittelt haben, wurde festgestellt, wie groß die Wärmezufuhr durch einen Metallhals ist. Wir benutzen hierzu wieder ein doppelwandiges Glasgefäß, dessen Verluste bekannt sind, und tauchen ein Metallrohr von bekanntem Querschnitt hinein. Aus der Zunahme des Verlustes ergibt sich dann die durch das Metallrohr herbeigeführte Wärmezufuhr.

Es wurde ein Eisenrohr von 6 mm äußerem, 4,5 mm innerem Durchmesser und 50 cm Länge untersucht. Es ergab sich eine Differenz der Abdampfmengen von 229 g/24 Std. Da der Metallquerschnitt hier 12,37 qmm betrug, berechnet sich der Verlust pro 1 qcm zu 1,85 kg/24 Std. für Eisen.

f) *Beeinflussen die ausströmenden kalten Gase die Wärmezufuhr durch die Halswandung?* Es erschein wissenswert, ob bei Verwendung eines Metallhalses die durch denselben ausströmenden kalten Gase den Hals besonders kühlen und dadurch die Wärmezufuhr durch die Halswandung vermindern, eine Frage, die durch Hrn. Prof. Lilienfeld aufgeworfen worden war.

Um hierüber genauere Angaben machen zu können, wurde der folgende Versuch gemacht. Ein doppelwandiges 5-Liter-Gefäß wurde wie in Fig. 6 mittels eines Quecksilberverschlusses nach außen hin abgeschlossen. Durch den Hals der Glocke (*G*) wurden ein Eisenrohr (*E*) von 6 mm äußerem und 4,5 mm innerem Durchmesser und ein Glasrohr (*R*) so angebracht, daß das entwickelte Gas entweder durch das Eisenrohr oder durch das Glasrohr strömen mußte. Diese Umstellung geschah mittels der Hähne H_E und H_R. Die kalten Gase der verdampfenden flüssigen Luft sollten nun durch das 50 cm lange Eisenrohr der ganzen Länge nach strömen, unabhängig von der Höhe der Flüssigkeitsoberfläche im Gefäß. Daher wurde am unteren Ende des Eisenrohres ein 10 cm langer Kupferzylinder (*Cu*) angelötet. Die entweichenden Gase mußten durch diesen Kupferzylinder strömen, bevor sie in das Eisenrohr gelangten (in der Figur durch Pfeile gekennzeichnet). Der Kupferzylinder tauchte während des Versuches dauernd in flüssige Luft und hatte an allen Stellen die gleiche Tempe-

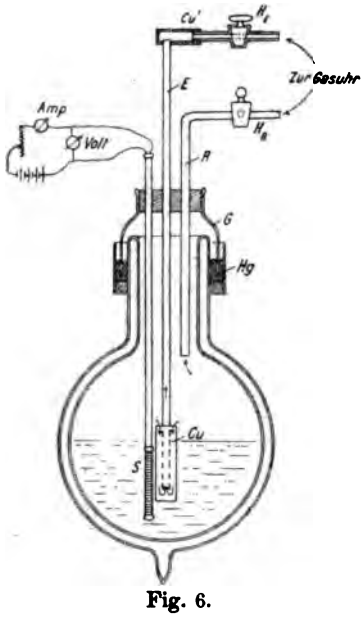


Fig. 6.

ratur von -190^{0}. Am äußeren Ende des Eisenrohres herrschte Zimmertemperatur, was durch den dort aufgelöteten kleinen Kupferzylinder (*Cu'*) sichergestellt wurde. Um nun auch für verschiedene Gasmengen, die durch das Rohr strömen, den Einfluß auf dessen Leitfähigkeit feststellen zu können, wurde noch eine Heizspirale (*S*) in das Gefäß eingeführt. Mittels derselben konnten bis 10 Watt zugeführt werden. Diese Wärmezufuhr entsprach ungefähr einer Verdampfung von 3000 Liter flüssiger Luft in 24 Stunden.

Der Versuch verlief negativ, d. h. es ergab sich, daß in beiden Fällen stets gleiche Mengen verdampften, auch dann, wenn die oben genannte Menge zur Verdampfung kam.

7. Das doppelwandige Metallgefäß.

a) *Konstruktion.* Die schon bei den Vorversuchen (Kapitel 6d) ausgepumpte Eisenkugel von 1,5 mm Wandstärke, die sich als dicht erwiesen hatte, wurde nun zu einem doppelwandigen Gefäß verwendet. Diese Kugel wurde hierbei für den inneren Teil des Gefäßes benutzt. Sie wurde von einer zweiten aus zwei Hälften bestehenden Kugel von rund 30 cm Durchmesser umgeben. Die Konstruktion dieses Gefäßes geht aus Fig. 7 hervor. Der Abstand zwischen beiden Wandungen beträgt 1,8 cm. Das innere Gefäß ist mit dem äußeren am Halse verbunden, jedoch ist in die innere Halswandung ein Glasrohr von etwa 10 cm Länge eingesetzt, durch das die direkte Überleitung der Wärme von der äußeren Kugel auf die innere vermieden wird. Das Gefäß faßt 10 Liter und sein Leergewicht beträgt etwa 10 kg.

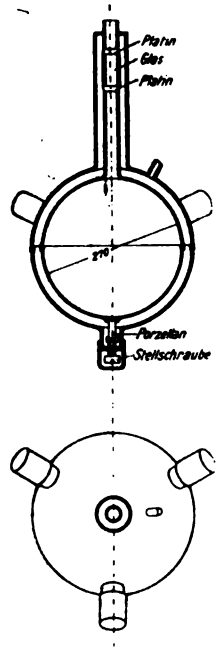


Fig. 7.

Entsprechend dem Gefäß von Prof. Lilienfeld mußte zur Entlastung des Glashalses die innere Kugel gegen die äußere abgestützt werden. In der Figur sind die Einzelheiten dieser Stützen (4 Stück) zu erkennen. Sie bestehen im wesentlichen aus einem Porzellanrohr als isolierendes Material zwischen der äußeren und inneren Kugel, dann aus den Stellschrauben,

mit deren Hilfe die innere Kugel in der äußeren zentrisch festgestellt werden kann. Nach der Einstellung dieser Stellschrauben wurden zur Dichtung Kappen über dieselben gesetzt und verlötet.

Da im Verlauf der Versuche sich die als Stützen dienenden Porzellanröhrchen als zu schwach bzw. zu zerbrechlich erwiesen, wurden sie durch Serpentinzylinder ersetzt. Der Wärmetransport durch diese Stützen wurde an einem Modell geprüft. Es ergab sich, daß der hierdurch bewirkte Mehrverlust pro Stütze rund 60 g/24 Std. beträgt. Die Verwendung von Stützen erwies sich jedoch besonders insofern als ungeeignet, als bei der Erhitzung des Gefäßes ihre stützende Wirkung durch die Ausdehnung des Metalles verloren ging, wodurch der Hals zu sehr beansprucht wurde und an der Verbindungsstelle zwischen Platin und Glas zerriß. Es wurde daher ein neues kleines 2 Liter fassendes Eisengefäß gebaut, wie es Fig. 8 zeigt. Unter Vermeidung von Stützen wurde nach einem Vorschlag von Prof. Lilienfeld die Aufhängung am Hals durch ein zweites Glasrohr verstärkt.

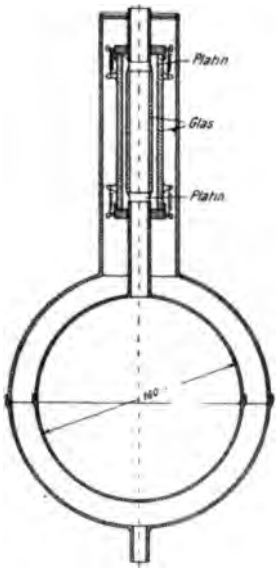


Fig. 8.

b) *Das Vakuum.* Die Einrichtung zum Evakuieren war hierbei die gleiche, wie früher bei Untersuchung der Glasgefäße. Während des Pumpens wurde das Gefäß bis zum Beginn der Rotglut erhitzt. Um festzustellen, ob die Lötstellen dicht hielten, wurde das Gefäß zunächst im kalten Zustand möglichst weit ausgepumpt und über Nacht stehen gelassen. War eine Undichtigkeit vorhanden, so konnte dies leicht an den Stickstofflinien im Spektralrohr festgestellt werden. Die undichten Stellen wurden dann durch teilweises Verschmieren der Lötstellen mit Siegellack ermittelt und nochmals nachgelötet.

Beim erstmaligen Erhitzen und Evakuieren destillierte aus dem Gefäß eine ölige gelbe Flüssigkeit. Erst nach tage-

langem Pumpen unter gleichzeitigem Erwärmen gelangte man so weit, daß nach Absperren des Gefäßes von der Pumpe das Vakuum erhalten blieb. Die Loslösung der Gasreste von den Metallwänden geht nur sehr langsam vor sich. Während des Pumpens in den ersten Tagen und besonders während der ersten Periode dieser Zeit verbesserte sich das Vakuum nicht mit der Abkühlung des Gefäßes. Hieraus war zu schließen, daß die einmal abgegebenen Gase beim Erkalten nicht kondensiert und von den Wänden nicht wieder aufgenommen werden. Besonders stark war die Abgabe von Wasserstoff. Erst zuletzt, nachdem das Gefäß etwa 6 Tage unter Vakuum gestanden hatte, und die Erhitzung täglich mehrere Stunden betrieben worden war, gelangte man zu einem konstanten Vakuum, kenntlich durch kräftige Fluoreszenz des Spektralrohres. Jetzt ließ sich schon beobachten, daß die Wandungen beim Erkalten wieder Gase aufnahmen. Das Vakuum verbesserte sich also während des Abkühlens. Aber trotzdem war nicht das gewünschte extreme Vakuum erreicht. Es ist jedoch anzunehmen, daß es durch noch längeres Pumpen unter gleichzeitigem Erhitzen noch verbessert werden kann. Man muß durch Erwärmung die Gase von den Wänden bis zu dem Grade abtreiben, bei dem die Wandungen beim Erkalten den ganzen Rest der noch vorhandenen Gase wieder absorbieren.

c) *Verluste bei Füllung mit flüssiger Luft.* Es wurde auch ein Versuch mit flüssiger Luft gemacht, um die Abdampfmenge des 10 Liter fassenden Gefäßes der Fig. 7 bei dem bisher erzeugten Vakuum festzustellen. Die Gädepumpe war während dieses Versuches dauernd in Betrieb. Das Vakuum war also im kalten Zustand des Gefäßes so weit vorgeschritten, daß durch das Spektralrohr keine Entladung mehr hindurchging.

Während des Einfüllens der flüssigen Luft und der darauf folgenden Beobachtungszeit wurde die Pumpe nicht abgestellt, auch konnte im Spektralrohr eine Verschlechterung des Vakuums nicht beobachtet werden.

In das Gefäß wurden etwa 10 Liter flüssige Luft eingefüllt, von denen jedoch ein beträchtlicher Teil schon beim Einfüllen verloren ging. Der Abdampfverlust wurde mit der Gasuhr gemessen, und es ergab sich hierbei im Durchschnitt ein Verlust von 10,6 kg/24 Std. Merkwürdigerweise hatte sich unmittelbar nach diesem Versuch das Vakuum sehr verschlechtert.

Die Wandungen hatten anscheinend bei der Temperatur der flüssigen Luft viel Gase absorbiert und gaben dasselbe bei der Zimmertemperatur ab.

Der gleiche Versuch bei dem 2-Liter-Gefäß der Fig. 8 ergab einen Verlust von 4,8 kg/24 Std.[1]) Auf 1 dm^2 Oberfläche verlor das 10-Liter-Gefäß 0,46 kg/24 Std., das 2-Liter-Gefäß 0,60 kg/24 Std.

8. Weitere Versuche mit Metallvakuumgefäßen, insbesondere Schutz gegen Wärmestrahlung.[2])

Es entstand die Frage, warum die Gefäße trotz ausgezeichneten Vakuums noch so große Abdampfverluste ergeben. Es lag der Verdacht nahe, daß die Eisenoberfläche sehr viel mehr Wärmestrahlen aussendet, als das eine glänzende Silberoberfläche tun würde. Es wurde daher von jetzt ab versucht, die Wärmestrahlung durch geeignete Überzüge, insbesondere durch Versilberung, herabzusetzen.

Eine weitere Verminderung kann nach O. Wiener[3]) durch die Einschaltung von gut isolierten Schirmen erzielt werden. Derselbe hat theoretisch nachgewiesen, daß durch Zwischenschalten von $n-1$ isolierten dünnen spiegelnden Metallschirmen der stationäre Wärmeaustausch im Vakuum auf den $n$ten Teil herabgesetzt werden kann. Die im folgenden beschriebenen Versuche bezwecken die Untersuchung der technischen Anwendbarkeit der angegebenen Wärmeschutzmittel, sowie die Feststellung der damit erzielten und zu erwartenden Erfolge. Zunächst wurde eine Reihe von Gefäßen konstruiert, um die verschiedenen Möglichkeiten hinsichtlich ihrer Zweckmäßigkeit gegeneinander abzuwägen. Dabei zeigte es sich nun, daß nicht unter allen Umständen eine genügende Evakuierung möglich war. Daher wurden besondere Versuche angestellt, die die Entgasung der geschützten Oberflächen im allgemeinen aufklären sollten.

Das im vorigen Abschnitt beschriebene kleine 2 Liter fassende Versuchsgefäß (Fig. 8) hatte als Abdampfverlust, auf den Tag berechnet, den, verglichen mit den Glasgefäßen gleicher Größe, außerordentlich großen Wert 4,8 kg ergeben. Weiteres

1) Bis hierher reichen die Versuche des Hrn. Banneitz.

2) Versuche von Hrn. Rhein.

3) O. Wiener, Ber. d. math.-phys. Kl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig. 70. S. 13. 1918.

Erhitzen führte zu keinen besseren Werten. Im Gegenteil, die Verluste wurden immer größer. Auch bei einem ähnlich gebauten aber versilberten Gefäß führte starkes Erhitzen zu keinem besseren Ergebnis als vorher. Vermutlich wurde der Glanz der Versilberung durch die übermäßige Erhitzung zerstört, so daß die Verluste durch Wärmestrahlung zunehmen. Für die Behandlung des Vakuums ergab sich daraus die Folgerung, daß das Erhitzen nur mäßig erfolgen und nicht über eine Temperatur von 300° hinaus gesteigert werden dürfte. Die im folgenden beschriebenen Gefäße sind daher — wenn überhaupt — nur ganz mäßig während des Auspumpens erwärmt worden.

Zunächst wurden vier doppelwandige 2-Liter-Gefäße gebaut. Die Konstruktion war dieselbe wie die des oben beschriebenen kleinen Eisengefäßes der Fig. 8. Sie waren aber darüber hinaus noch nach Art der Dewar-Gefäße versilbert, und zwar die Innenkugel außen und die Außenkugel innen. Das erste ließ nach mehrtägigem Pumpen ohne Erwärmen ein gutes Vakuum erzielen. Die Abdampfverluste betrugen 1,6 kg/Tag, auf 1 dm^2 Oberfläche berechnet: 0,20 kg/24 Std. Ein Heizen auf 400° hatte wiederum nachteilige Folgen. Die Verluste stiegen bis auf etwa 3 kg/Tag. Bei dem zweiten Gefäß war noch eine Zwischenwand aus Silber eingefügt. Mit diesem Gefäß, das gar nicht erhitzt wurde, wurden die besten Resultate erzielt. Die Verluste betrugen 0,6 kg/Tag (0,075 kg im Tag auf 1 dm^2 Oberfläche), spätere Versuche ergaben 0,9 kg/Tag (0,11 kg/Tag auf 1 dm^2 Oberfläche). Sein Durchmesser beträgt 20 cm, sein Gewicht 2,7 kg. Bei den letzten beiden Gefäßen waren neben der Versilberung noch weitere Zwischenwände unregelmäßiger Art angewandt. Der Hohlraum des einen war mit Asbestwolle gefüllt, der des anderen mit versilberten Glasscherben. Das erstere ließ sich nur mangelhaft auspumpen; es verlor pro Tag 6 kg. Das letztere lieferte bessere Resultate; es verlor nur 1,1 kg. Ein nennenswerter Fortschritt war aber auch nicht erzielt.

Nunmehr wurden zwei Gefäße konstruiert, bei denen zwischen der Außen- und der Innenwand noch zwei Zwischenwände aus Eisen eingeschoben waren. Das eine derselben war innen versilbert, das andere nach einem Verfahren der Firma Metallatom mit Aluminium bespritzt. Das aluminierte Gefäß

ließ sich auch beim Erwärmen nicht auspumpen. Es blieb zweifelhaft, ob das Gefäß undicht war oder ob soviel Gase vom Aluminium abgegeben wurden. Das (galvanisch) versilberte Gefäß wurde während des Auspumpens nicht erwärmt; es zeigte, verglichen mit den früheren Konstruktionen, keinen wesentlichen Fortschritt. Über die Einzelheiten der Konstruktion sei folgendes mitgeteilt: um das innere Gefäß von etwa 2 Liter Inhalt, unter dem sich ein Sieb mit geglühter Holzkohle befand, waren vermittelst von je sechs Ebonitstutzen die beiden Zwischenwände herumgebaut. Ohne jede äußere Verbindung hingen alle Innenteile an dem wie früher gestützten Glashals im äußeren Mantel. Das Gewicht des Gefäßes betrug 6,13 kg. Der Durchmesser der innersten Kugel betrug 16, der der äußersten 28 cm. Die Abdampfverluste betrugen 1,1 kg/Tag.

Dieser wider Erwarten große Abdampfverlust erklärt sich vielleicht daraus, daß die Zwischenräume nur mit der inneren, nicht aber auch mit der äußeren Kugel durch die Stutzen in Verbindung standen. Diese Konstruktion war gewählt worden, um andernfalls auftretende Spannungen, die zur Zertrümmerung des Glashalses führen könnten, zu vermeiden. Derartige Spannungen würden auch bei genauester Abmessung der Stutzen infolge der Temperaturerniedrigung beim Einbringen von flüssiger Luft hervorgerufen werden und hatten bereits früher nachteilig gewirkt. Durch diese Anordnung kann nun eine zu niedrige Temperatur der Zwischenwände bedingt sein, indem sich das Gefälle, das zwischen den inneren Wandungen vorhanden sein sollte, wiewohl die Stutzen aus Ebonit, also einem Isolator, bestanden, zum Teil ausgleicht. Das hat aber zur Folge, daß zwischen den beiden äußersten Wänden ein um ein Beträchtliches zu großer Temperaturunterschied vorhanden sein muß, so daß infolge der größeren Oberfläche Verluste bedingt werden, die den Gewinn durch die Schirmwirkung der Zwischenwände ausgleichen, ja sogar überkompensieren können.

Es hat den Anschein, daß es technisch nicht möglich ist, über einen Mindestverlust von 0,6 kg bis 1 kg pro Tag mit 2-Liter-Gefäßen aus Metall wesentlich hinauszukommen. Die Güte der Glasvakuumgefäße scheint nicht erreichbar zu sein. Größere Metallvakuumgefäße, die zumeist ausgiebig von Kohle als Absorbens Gebrauch machen, soweit sie bereits in der

Technik Verwendung finden, liefern natürlich prozentual bessere Resultate.

Es war geplant, ein größeres dreiwandiges Gefäß von etwa 30 Liter Inhalt herzustellen. Das Gefäß sollte sich, um der Kugelgestalt möglichst nahe zu kommen, aus zwei konischen und einem zylindrischen Teil zusammensetzen. An Stelle des zerbrechlichen Glashalses sollten zur Vermeidung größerer Verluste durch Wärmeleitung auf Vorschlag von Prof. Lilienfeld zwei Metallspiralen eingebaut werden, eine zum Füllen, die andere zum Entleeren. Die Stutzen sollten aus Porzellan hergestellt werden. Die Gefäßteile waren zum Teil geschweißt. Es zeigte sich nun[1]), daß die autogen verbundenen Schweißnähte absolut undicht waren; es war nicht möglich, das innere Gefäß auszupumpen. Da eine galvanische Versilberung in den schwierigen Zeiten nicht ausgeführt werden konnte, war ein Bespritzen der Oberfläche in Aussicht genommen. Die schlechten Erfahrungen mit dem aluminierten Gefäß jedoch ließen es dringend geraten erscheinen, die Möglichkeit der Entgasung gespritzter Oberflächen zuvor klarzustellen. Diese Versuche, die im nächsten Kapitel beschrieben sind, ergaben, daß die außerordentlichen Mengen von Gasen, die den gespritzten Oberflächen anhaften, einen derartigen Überzug als ungeeignet erscheinen lassen. Man wird also auf die galvanische Versilberung zurückkommen müssen. Angesichts der technischen Schwierigkeiten, die das Hartlöten derartig großer Nähte, wie sie hier in Frage kamen, mit sich bringt, sowie angesichts der technischen Unmöglichkeit, gegenwärtig einen galvanischen Überzug herzustellen, mußte der Zusammenbau des Gefäßes vorläufig zurückgestellt werden.

9. Über die Entgasung wärmegeschützter Eisenbleche.[1])

Es sollen hier Versuche beschrieben werden, die die Entgasung wärmegeschützter Eisenbleche zum Gegenstand hatten. Wie bereits bemerkt, war es zweifelhaft geblieben, ob das aluminierte Gefäß undicht war oder ob die entweichenden Gase aus der Aluminiumschicht stammten. Um die Frage klarzustellen, wurde die Untersuchung von Grund auf geführt. Die Versuchsbedingungen waren allerdings sehr verwickelt; die Resultate sind daher mehr qualitativ als quantitativ, zu-

1) Nach Versuchen von Hrn. Kurze.

mal das Problem der Absorption von Gasen in Metallen noch keineswegs restlos aufgeklärt ist. Das Ziel der Versuche bestand hauptsächlich in der Frage: ob und in welcher Weise die Entgasung möglich ist.

Ein metallischer Überzug auf metallischer Unterlage kann in verschiedener Weise hergestellt werden: einmal galvanisch; er läßt sich dann gut polieren und liefert hochglänzende Oberflächen; dann durch Aufspritzen der Metalle; in diesem Falle ist er mehr oder weniger matt und verträgt nicht unter allen Umständen eine Politur. Die Metallisierung nach dem letzteren Verfahren wird von der Firma Metallatom-Berlin (später Frankonia) ausgeführt. Nicht alle Metalle haften aufeinander. Man kann jedoch durch Aufspritzen einer dünnen Zinkhaut beispielsweise die Haltbarkeit erhöhen, wenn sich nämlich sowohl die Unterlage wie das aufgespritzte Metall mit Zink leicht legieren. In dieser Weise waren sämtliche nach diesem Verfahren bespritzten Bleche, die zur Untersuchung kamen, hergestellt.

Die Versuche wurden so angestellt, daß die behandelten Eisenbleche aufgerollt in zylindrische Glasgefäße eingeschlossen wurden. Nach Anschluß an die Pumpleitung wurde zunächst ohne Erwärmung der Gefäße mit der Gädepumpe ausgepumpt und stehen gelassen. Zur Messung des Vakuums waren ein Mac-Leod-Manometer sowie ein Spektralrohr angeschlossen. Aus der Druckänderung konnte auf das abgegebene Volum geschlossen werden. Selbstverständlich war es nach dieser Methode nicht möglich, die überhaupt abgegebene Gasmenge zu bestimmen; denn es bleibt unbekannt, wieviel während des Pumpens bereits entweicht. Die abgegebene Menge ist Funktion des Druckes; aber sie hängt darüber hinaus noch von einer Reihe anderer mehr oder weniger unkontrollierbarer Parameter ab: von der Natur des Stoffes, von der Beschaffenheit der Oberfläche, vor allem aber von der Vorgeschichte. Geglühte Bleche verhalten sich ganz anders als nichtgeglühte. Bleche, die bereits im Vakuum waren, geben weniger ab als andere usf. Immerhin dürften die im folgenden des näheren beschriebenen Versuche die daraus auf die Herkunft der abgegebenen Gase gezogenen Schlüsse rechtfertigen.

1. Zunächst wurde gespritztes Aluminium untersucht. 65 qdm Eisenblech wurden beiderseits mit Aluminium bespritzt und in ein Glasrohr von 100 mm Durchmesser eingeschlossen.

Das Volum des Gefäßes (mit Einschluß der Meßapparate bis zum Verschluß) betrug $v = 7{,}3\ \mathrm{dm}^3$. Folgende einfache Überlegung gestattet das Volum Δv der abgegebenen Gase auf Atmosphärendruck umgerechnet zu berechnen. Steigt der Druck um Δp, so ist:

$$(1) \qquad \Delta p \cdot v = 760 \cdot \Delta v.$$

Daraus folgt:

$$(2) \quad \Delta v = \frac{v}{760}\,\Delta p = \frac{7{,}3}{760} \cdot \Delta p = 0{,}0096\,\Delta p\ \mathrm{dm}^3 = 9{,}6\,\Delta p\ \mathrm{cm}^3.$$

Bezieht man die abgegebene Menge auf die Einheit der Oberfläche, so wird:

$$(3) \qquad \Delta v/\mathrm{qm} = \frac{v}{760 \cdot f}\,\Delta p = 7{,}4\,\Delta p\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{qm}.$$

Bereits nachdem die Pumpen wenige Minuten in Betrieb gesetzt waren, zeigte das Spektralrohr Kathodenstrahlung. Das Vakuum ging außerordentlich stark zurück: während zweier Tage von etwa 0,001 mm bis 0,1 mm. Alle 2—3 Tage wurde das Auspumpen wiederholt. Anfangs wurde wenig, später außerordentlich viel Wasserstoff abgegeben. Auch bei zwölfmal wiederholtem Pumpen war noch keine Änderung zu verzeichnen. Darauf wurde das Gefäß sich selbst überlassen und über $^1/_2$ Jahr lang beobachtet. Folgende kleine Tabelle gibt die nach Verlauf der angegebenen Zeit täglich abgegebene Menge in $\mathrm{cm}^3/\mathrm{qm}$. Die letzte Spalte enthält den jeweils herrschenden Gesamtdruck.

nach Tagen	wurden abgegeben $\mathrm{cm}^3/\mathrm{qm}$ Tag	bei einem Druck von mm
2	0,28	0,06
6	0,18	0,19
14	0,10	0,28
56	0,07	0,70
240	0,02	1,2

Die Zahlen entstammen der letzten Beobachtungsreihe. Ein Stillstand ist also auch nach einem halben Jahre nicht eingetreten.

2. Um nun die Herkunft dieser gewaltigen Gasmengen zu erklären, war es wünschenswert, die Gasabgabe von blankem Eisen zu kennen. Es wurden daher Gegenversuche mit nicht bespritzten Eisenblechen gleicher Herkunft angestellt. Im Interesse der technischen Verwertung der Ergebnisse wurde

dabei ein geglühtes und ein nicht geglühtes Blech gleichzeitig untersucht. Die Fläche dieser Bleche betrug je 2·35,3 qdm, ihr Gewicht 1,56 kg (geglüht) bzw. 1,48 kg (nicht geglüht). Das Volumen der Anordnung betrug 4,0 dm³ (geglüht) bzw. 4,7 dm³ (nicht geglüht). Aus diesen Zahlen ergibt sich für den Koeffizienten der Gleichung (3) $\frac{v}{760 \cdot f} = 7{,}5$ (geglüht) und 8,8 (nicht geglüht).

Bei diesen Versuchen ging das Pumpen bedeutend langsamer vor sich als beim ersten Versuch. Der Unterschied zwischen dem geglühten und nicht geglühten Blech war zwar deutlich, aber nicht beträchtlich. Während bei dem aluminierten Blech der Druck während zweier Tage bis auf etwa 0,1 mm stieg, stieg er jetzt anfangs bis auf 0,03, später nur bis auf 0,015. Das geglühte Blech gab dabei vor allem CO ab, das nicht geglühte hingegen Wasserstoff. Eine Konstanz wurde auch hier nicht erreicht. Die folgende kleine Tabelle gibt zum Vergleich die den oben mitgeteilten entsprechenden Werte. Sie ist ebenfalls den Beobachtungen der letzten Versuchsreihe entnommen.

geglüht			nicht geglüht		
Tag	cm³/qm Tag	mm	Tag	cm³/qm Tag	mm
1	0,038	0,013	1	0,018	0,025
2	0,008	0,016	2	0,009	0,030
5	0,007	0,019	5	0,009	0,033
11	0,007	0,027	11	0,009	0,037

Es hat den Anschein, daß das geglühte Blech infolge der Auflockerung des Gefüges rascher abgibt, als das nicht geglühte, jedoch ist dieser Schluß nicht sicher.

Der Unterschied zwischen dem aluminierten Blech und den blanken Eisenblechen ist gewaltig. Ersteres gibt nach einem halben Jahre täglich noch etwa doppelt soviel ab, wie die letzteren nach 8 Tagen!

3. Diese Versuche waren ausgeführt worden, ohne daß die Bleche erwärmt wurden. Da sich eine restlose Entgasung bei gewöhnlicher Temperatur als unmöglich herausstellte, wurden weitere Versuche angestellt, bei denen die Anordnung so getroffen wurde, daß die Bleche erwärmt werden konnten. Außerdem wurden vergleichsweise neben dem gespritzten Metall auch galvanisch hergestellte Überzüge untersucht.

Über die Anordnung im einzelnen sei folgendes mitgeteilt. Es kamen im ganzen fünf Bleche zur Untersuchung. Zwei von ihnen waren neu, d. h. noch nicht im Vakuum behandelt, das eine war blank, nicht versilbert, das andere war hochglänzend versilbert. Sie stammten von einem Stück. Ein drittes war matt versilbert; es war geglüht und auch bereits im Vakuum behandelt. Die zwei letzten Bleche endlich, die dieselbe Vorgeschichte wie das dritte hatten, waren bespritzt, das eine mit einer Zinkhaut, das andere mit Silber, nachdem auf letztem zuvor ebenfalls eine dünne Zinkhaut aufgespritzt worden war. Die Bleche konnten einzeln untersucht werden. Nebenstehende Tabelle orientiert über die wichtigsten Maßverhältnisse.

Die gespritzte Silberauflage haftet schlecht auf dem Eisen. Beim Biegen löste sie sich stellenweise los. Hingegen schien die Temperaturerhöhung keinen nachteiligen Einfluß zu haben. Weder konnte ein selbsttätiges Losblättern noch auch überhaupt eine Veränderung der Oberfläche festgestellt werden.

Diese Versuche bestätigten noch ausgezeichnet den gewaltigen Unterschied zwischen blankem oder galvanisch behandeltem Eisen und den gespritzten Oberflächen. Es zeigte sich das beim Erhitzen. Während bei einer Temperatursteigerung bis auf 200—250° innerhalb von $^3/_4$ Stunden der Druck bei gewöhnlichem Eisen (I) von 0,06 bis auf 0,76 mm stieg, entsprechend einer Abgabe von 8,5ccm/qm,

Herkunft		Zurüstung	Fläche	Gewicht ohne Auflage	Auflage	Auflage/qm	Volum	$v/760\,f$ in $cm^3/mm\ qm$
I.	neu	blank	8,7 qdm	0,3810 g	— g	—	1,61 dm^3	12,2
II.	neu	hochglänzend versilbert	8,7 „	0,3655 g	15,2 g Ag	87,3 g Ag	1,59 „	12.0
III.	geglüht, bereits im Vakuum behandelt	galvanisch versilbert	8,6 „	0,4225 g	22,5 g Ag	130,8 g Ag	1,61 „	12,3
IV.	geglüht, bereits im Vakuum behandelt	mit Zn bespritzt	7,8 „	0,38 g	20 g Zn, — g Ag	128 g Ag	1,57 „	13,2
V.	geglüht, bereits im Vakuum behandelt	mit Ag bespritzt	8,6 „	0,35 g	7 g Zn, 49 g Ag	41 g Zn, 285 g Ag	1,55 „	11.9

veränderte sich das Vakuum unter gleichen Verhältnissen beim Erhitzen des mit Zink bespritzten Bleches (IV) von 0,05 bis auf 30 mm; d. h. es wurden 400 ccm/qm, also die 50fache Menge abgegeben. Im übrigen lieferten diese Versuche diesbezüglich kaum ein anderes Resultat wie früher. Die Natur der gespritzten Oberfläche scheint fast belanglos zu sein. Die abgegebenen Gase bestanden aus Wasserstoff und Luft, wozu beim Erwärmen noch Kohlenoxyd hinzutrat. Luft und Wasserstoff scheinen beim Herstellen der Auflage mechanisch in der Oberfläche festgehalten zu werden.

Ein größeres Interesse hat die Frage, ob die Entgasung durch Erhitzen möglich ist. Zunächst zeigte sich, daß ein Erhitzen bis auf 200—250° nicht genügt. Daher wurde bei gleichzeitigem Pumpen die Temperatur bis 400° erhöht. Der Versuch wurde nicht eher abgebrochen, als auch bei diesen Temperaturen das Spektralrohr Kathodenstrahlung anzeigte. Diese Versuche zeigten deutlich den Einfluß der Vorgeschichte der Bleche. Ein wesentlicher Einfluß der galvanisch versilberten Oberfläche konnte hingegen nicht festgestellt werden. Wiewohl also eine absolute Konstanz des Vakuums nicht erreicht werden konnte, war doch der fördernde Einfluß der Temperatur sehr deutlich, wie ja vorauszusehen war. Verglichen mit den nichtgespritzten, ließen die gespritzten Bleche nicht in derselben Weise einen niedrigen Druck erreichen. Immerhin war es möglich, auch hier ein einigermaßen konstant bleibendes Vakuum herzustellen. So wurde mit dem verzinkten Blech ein Druck von 0,010 mm erreicht, der in 14 Tagen nur um 0,001 stieg. Das entspricht einer Abgabe von etwa 0,013 ccm/qm, also einer täglichen Abgabe von 0,001 cm^3/qm. Das mit Silber gespritzte Blech lieferte schließlich einen Druck von 0,009 mm. Vergleichsweise betrug die Abgabe des parallel untersuchten blanken Eisenbleches pro Tag 0,0005 cm^3.

Bedenkt man, daß die Entgasung gespritzter Oberflächen, ganz abgesehen von dem größeren (ungefähr dreifachen) Materialverbrauch und ganz abgesehen davon, daß eine spiegelglänzende Oberfläche nicht erreicht ist, außerordentlich viel zeitraubender und schwieriger ist, als die der galvanisch hergestellten, wie dies Versuche gezeigt haben, so ist es klar, daß für die Herstellung von Vakuumgefäßen nur die galvanische Versilberung in Frage kommt. Aber auch hier ist es unum-

gänglich notwendig, durch andauerndes Erhitzen die Wände von den absorbierten Gasen zu befreien. Man wird dabei mit der Temperatur nicht allzu hoch gehen dürfen; bei höheren Temperaturen tritt nämlich eine Umkristallisation ein, durch die das Gefüge der Feinbleche zerstört, die Oberfläche, welche Gase abgibt, vergrößert und die Wärmestrahlung erhöht wird.

Ergebnisse.

Die vorliegenden Untersuchungen zeigen, daß es möglich ist, selbst mit Eisengefäßen das zur Aufbewahrung von verflüssigten Gasen erforderliche hohe Vakuum herzustellen, wenn man nur dafür sorgt, daß die Lötstellen mit größter Sorgfalt, am besten mit Silberlot (Lilienfeld) ausgeführt werden, und die Gefäße vor Benutzung längere Zeit unter Auspumpen auf eine Temperatur von etwa 300° C, gebracht werden.

Die Wärmeisolation der Zuführung kann bei kleinen Gefäßen nach Vorgang von Lilienfeld durch Zwischenschaltung eines Glasrohres erreicht werden, das durch Platinring an das Metall beiderseits angeschlossen ist. Für größere Gefäße hat man nach Vorschlag von Lilienfeld ausreichend lange Rohre, gegebenenfalls Schlangen von schlechtleitendem Metall einzuschalten.

Ein zweites wichtiges Ergebnis der Untersuchung ist aber, daß mit unüberzogenen Metallgefäßen aus Eisen und Nickel aus dem Grunde noch kein gutes Ergebnis erzielt werden kann, weil die Wärmestrahlung dieser Metalle viel zu groß ist. Es ist daher ein möglichst wenig strahlender Überzug herzustellen, der am besten aus Silber gewählt wird und zwar darf der Überzug nicht durch Spritzverfahren hergestellt werden, weil das aufgespritzte Metall erstens außerordentlich viel Gase adsorbiert und zweitens nicht genügend blank hergestellt werden kann. Man muß daher unbedingt auf galvanische Versilberung Bedacht nehmen. Ob eine Verzinnung genügt, konnte nicht geprüft werden, da während des Krieges kein Zinn erhältlich war.

Der Überzug leidet durch zu große Erhitzung Schaden. Man darf daher die Entgasung nur bei mäßigen Temperaturen bis etwa 300° C. vornehmen. Die Dauer der Erhitzung und des Auspumpens hat dementsprechend eine längere Zeit vor sich zu gehen.

Der Verlust durch Strahlung und durch Wärmeleitung im äußersten Vakuum kann nach Vorschlag von O. Wiener durch Zwischenschaltung einer gut isolierten beiderseits versilberten Wand auf die Hälfte herabgesetzt werden.

Auf diese Art wurde das günstigste Ergebnis mit einem versilberten Eisengefäß von 2 Liter Inhalt erzielt, mit einem täglichen Verlust von 0,6 kg flüssiger Luft. Unter der Annahme, daß der Verlust mit zunehmendem Volumen v im Verhältnis von $v^{2/3}$ anwächst, berechnet sich daraus für ein entsprechendes Gefäß von 1000 Litern Inhalt ein Verlust von 38 kg täglich, d. h. rund 4%.

Die folgende Tabelle enthält für die wichtigsten der untersuchten Gefäße mit den jeweils besten Ergebnissen eine Zusammenstellung des spezifischen Abdampfverlustes, d. h. das Verhältnis des Abdampfverlustes A in kg/Tag zur Oberfläche des innersten Gefäßes in dm². Die Oberfläche des Gefäßes wurde, wo nicht die Maße genau bekannt waren, aus dem angegebenen Inhalt unter Aufschlag von 4 v. H. berechnet.

	Besprochen auf Seite	Inhalt in Litern	Abdampfungsverlust in kg/Tag	Angenommene Oberfläche in dm²	Spezifischer Abdampfungsverlust $\frac{A}{O}$ $\left(\frac{\text{kg}}{\text{Tag dm}^2}\right)$
Versilbertes Glasgefäß von Burger im Laboratorium extrem ausgepumpt . .	12	2	0,185	8,0	0,023
Versilbertes Glasgefäß von Burger geliefert	5	5	0,361	14,7	0,025
Gefäße von Ahrendt . . .	14	5	1,095	14,7	0,075
	14	15	1,026	30,6	0,034
	14	25	1,258	43,0	0,029
Nickelgefäß von Lilienfeld	15	1	0,775	5,0	0,16
Eisengefäße unversilbert	22	10,3	10,6	22,9	0,46
	22	2	4,8	8,0	0,60
Eisengefäße galvanisch versilbert, doppelwandig . .	23	2	1,6	8,0	0,20
Dreiwandig	23	2	0,6	8,0	0,075

Leipzig, Physik. Institut der Universität, August 1919.

(Eingegangen 6. August 1919.)

2. *Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante des Wassers, Äthylalkohols, Methylalkohols und Acetons vom Druck;* *von G. Falckenberg.*

(Rostocker Habilitationsschrift.)

In vorliegender Arbeit wird der Druckkoeffizient der Dielektrizitätskonstante von Wasser, Äthylalkohol, Methylalkohol und Aceton untersucht. Den Zuwachs der Dielektrizitätskonstanten durch Drucksteigerung bezeichne ich im folgenden mit $\Delta\,\varepsilon$. Eine Untersuchung von $\Delta\,\varepsilon$ für Wasser und die beiden Alkohole ist deswegen von besonderem Interesse, weil für diese drei Flüssigkeiten genaue Messungen über ihre Kompressibilität vorliegen und infolgedessen die Beziehung von $\Delta\,\varepsilon$ zu der durch Druck bewirkten Änderung der Dichte geprüft werden kann. Die ersten Untersuchungen über Änderung der Dielektrizitätskonstante von Flüssigkeiten durch Drucksteigerung führte Röntgen[1]) aus. Röntgen stellte für Wasser fest, daß ε bei Drucksteigerung von 1 auf 500 Atmosphären „nicht sicher nachweisbar um 1% geändert wurde". Zu ähnlichen Resultaten führten Röntgens Untersuchungen bei Äthylalkohol. Messungen von Ratz[2]) für Wasser ergaben: „Eine Änderung der Dielektrizitätskonstante innerhalb eines Intervalls von 300 Atm. konnte nicht sicher beobachtet werden und liegt jedenfalls unter 1%." Ratz untersuchte ferner Äther, Benzol, Anilin und Amylalkohol. Röntgen und Ratz benutzten zu ihren Messungen die bekannte Nernstsche Brückenanordnung, welche für diese Messungen nicht empfindlich genug ist. Ortvay[3]) untersuchte mit einer durch Differentialschaltung verbesserten Nernstschen Anordnung $\Delta\,\varepsilon$ von Äthyläther, Benzol, Xylol, Toluol, Schwefelkohlenstoff, Chloroform, Paraffin liqu., Petrol-

1) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. **52.** S. 599. 1894.
2) F. Ratz, Zeitschr. f. physik. Chemie **19.** S. 111. 1896.
3) R. Ortvay, Ann. d. Phys. **36.** S. 1. 1911.

äther und Rizinusöl. Auf diese Arbeit komme ich noch weiter unten zurück. Für Messungen von $\Delta\varepsilon$ an Wasser, Äthylalkohol und Methylalkohol würde auch die von Ortvay benutzte Differentialanordnung zu ungenaue Resultate liefern, weil das Leitvermögen dieser Flüssigkeiten zu groß ist. Es mußten daher andere Wege beschritten werden. Ich ging aus von der bekannten Drudeschen Anordnung für Dielektrizitätskonstanten-Messungen mittels stehender Wellen von hoher Frequenz, bei welcher sich die zu untersuchende Flüssigkeit in einem kleinen Kondensatorfläschchen befindet. Diese Anordnung verbesserte ich durch Verwendung von elektromagnetischen Schwingungen sehr kleinen Dämpfungsdekrements, wie sie der von Rukop[1]) konstruierte Sender liefert; d. h. ich kombinierte aus dem Drudeschen und Rukopschen Apparat eine zur Durchführung der vorgenommenen Messungen geeignete Versuchsanordnung.

Versuchsanordnung.

Zur Erzeugung elektromagnetischer Wellen von 5 m Wellenlänge benutzte ich den vortrefflichen, von Rukop konstruierten Sender (in Fig. 1 in $^1/_6$ natürlicher Größe abgebildet), welchen Rukop in seiner Arbeit über „Messungen im elektromagnetischen Spektrum des Wassers“[1]) beschreibt. Dieser Sender gestattet, die Wellenlänge seiner Eigenschwingung in weiten Grenzen kontinuierlich zu ändern. Die Änderung der Wellenlänge geschieht durch Verlängern oder Verkürzen der Schenkel des Senders (Antennen) mit Hilfe einer Mikrometerschraube. Fig. 1 stellt Sender und Empfänger dar. Der mit dem Sender lose gekoppelte Empfänger, welcher wie der Sender als $\lambda/4$ schwingt, besteht aus einem mit der zu messenden Flüssigkeit gefüllten Kondensatorfläschchen in einem Druckgefäß, welches in Fig. 1 in $^1/_6$ natürlicher Größe abgebildet ist, und zwei parallelen, ineinander verschiebbaren Messingröhren, die bei A kurzgeschlossen sind. Das aus Messing hergestellte Druckgefäß ist mit Glasplattenverschlüssen versehen. Die Glasplatten liegen direkt auf dem Messingrand des Druckgefäßes auf. Ebenso liegen die kleinen Platten s direkt auf dem durchbohrten Glase auf. Die Ab-

1) H. Rukop, Ann. d. Phys. **42.** S. 489. 1913.

dichtung besteht aus einem Rande von Marineleim im Innern des Druckgefäßes. Die Drucksteigerung wurde durch eine Cailletetsche Druckpumpe erzeugt. Zirka 2 cm vom Ende der Messingröhren bei *A* ist als Wellenindikator ein Thermokreuzelement eingeschaltet. Es wurde mit einem Kugel-Panzergalvanometer von Du Bois-Rubens verbunden. Werden Schwingungen im Sender erzeugt, so wird das Thermoelement Maximalausschläge am Galvanometer hervorrufen, wenn Sender und Empfänger in Resonanz sind. Wird im Empfänger die Resonanz gestört durch Vergrößerung der Fläschchenkapazität bei Drucksteigerung, so müssen ent-

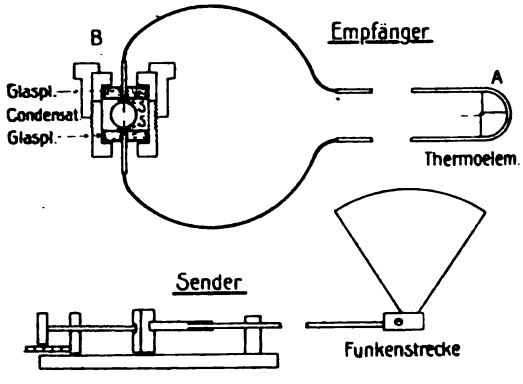


Fig. 1.

weder die Messingrohre am Empfänger verkürzt oder die Antennen des Senders verlängert werden, um die Resonanzlage wieder herzustellen. Die Resonanzlage wurde folgendermaßen bestimmt. Die Länge der Schenkel am Sender wurde mit Hilfe einer Mikrometerschraube verändert. Die beobachteten ballistischen Ausschläge des Galvanometers wurden als Ordinaten, die Länge der Schenkel als Abszissen aufgetragen. Die so erhaltene Resonanzkurve gestattet den Resonanzpunkt bis auf $^1/_{10}$ mm genau zu bestimmen (vgl. Fig. 2). Aus der Verschiebung der Resonanzlage bei Drucksteigerung kann durch Beschicken des kleinen Kondensators mit Eichflüssigkeiten bekannter Dielektrizitätskonstante ε die Änderung der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten durch Drucksteigerung berechnet werden, wie später eingehend beschrieben wird. Die Kapazität *B*, Fig. 1, setzt sich in der

Hauptsache aus zwei Größen zusammen, der Kapazität des Fläschchens und der Kapazität des Druckgefäßes. Das Druckgefäß wurde möglichst klein gewählt, denn je kleiner die Kapazität des Druckgefäßes ist, um so größer kann bei gleicher Eigenschwingungsdauer des Systems die Fläschchenkapazität gewählt werden und um so größer ist die Änderung der Kapazität durch Drucksteigerung und damit die Genauigkeit der Messung. Die Glasplatten sprangen bei etwa 250 Atm. Das Druckgefäß und die Cailletetsche Pumpe wurde mit Paraffinöl gefüllt, weil dasselbe eine keine Dielektrizitätskonstante hat, deren Änderung mit dem Druck bekannt ist.

Messungen.

I. Wasser.

Das Kondensatorfläschchen wurde mehrmals mit doppelt destilliertem Wasser ausgespült und nach Füllung in das Druckgefäß eingefügt. Nach dem Zusammensetzen des Empfangsapparates wurde Öl in das Druckgefäß gepumpt. Die Luft entwich durch ein im oberen Teil des Druckgefäßes befindliches Loch, welches erst verschlossen wurde, nachdem sich an dem heraustretenden Öl längere Zeit keine Luftblasen mehr zeigten. Dann wurde das Gefäß zirka 10 Minuten lang unter 200 Atm. Druck gesetzt. Unter einem Druck von 7 Atm. wurde dann das Druckgefäß 2—3 Stunden gelassen, bevor die Messungen begannen. Für möglichste Konstanz der Zimmertemperatur innerhalb dieser Zeit wurde gesorgt. Mit Hilfe eines im Innern des Druckgefäßes befindlichen Thermoelements wurde festgestellt, daß in 20 Minuten die Kompressionswärme auf einen Betrag zurückging, deren Einfluß bereits innerhalb der Versuchsfehler der übrigen Messungen lag. Während der Aufnahme der Resonanzkurven befand sich kein Thermoelement zur Temperaturmessung im Druckgefäß, um Kapazitätsstörungen durch dasselbe zu vermeiden. Auf Konstanthaltung der Temperatur mußte deshalb die größte Sorgfalt verwandt werden, da bereits 2° Temperaturerhöhung die Kapazitätsvermehrung durch Druckerhöhung von 200 Atm. aufgehoben hätten. Die letzte Stunde vor Beginn der Messungen wurde die Zimmertemperatur auf $16{,}3 \pm 0{,}1°$ konstant gehalten, bis auf kurze Zeit andauernde Schwankungen, welche durch Öffnen der Tür entstanden. Der Anfangsdruck

von 7 Atm. wurde benutzt, weil bei kleinerem Überdruck die Gefahr bestanden hätte, daß die Glasplatten des Druckgefäßes nicht dicht auf dem Rand des Druckgefäßes aufliegen würden und bei weiterer Drucksteigerung sich eventuell verschieben könnten. Zuerst wurde die Resonanzkurve I, Fig. 2, bei 7 Atm. Druck aufgenommen, durch Veränderung der Länge der Antennen, wie schon oben beschrieben. Sofort nach dieser Messung wurde der Druck auf 200 Atm. erhöht

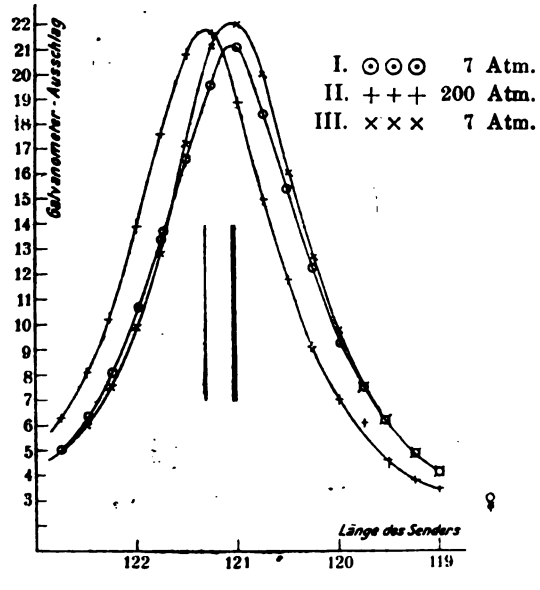


Fig. 2.

und 30—45 Minuten gewartet bis zum Beginn der zweiten Messung. Nach der Aufnahme der II. Resonanzkurve (Fig. 2) bei 200 Atm. wurde wieder sofort der Druck auf 7 Atm. reduziert und abermals 30 Minuten gewartet bis zum Beginn der Aufnahme der III. Resonanzkurve bei 7 Atm. Druck.

Die I. und III. Resonanzkurve deckten sich auch bei anderen Füllungen nie völlig miteinander. Kleine Temperaturänderungen, Schwankungen der Senderenergie, sowie Leitfähigkeitsänderung des Wassers, die nicht zu verhindern waren, werden wohl die Differenzen verursachen.

Der Druck konnte durch geeignete Belastung des Pumpen-

hebels auf $\pm$ 1 Atm. konstant gehalten werden. So wurden mehrere Messungen mit verschiedenen Füllungen gemacht.

Mit Einstellung l_s des Senders werde ich im folgenden die Länge der Schenkel des Senders im Resonanzpunkt, mit Einstellung l_e des Empfängers die Länge des Empfängers von der Glasdurchbohrung bis zum Ende bei A ebenfalls im Resonanzpunkt bezeichnen.

Der Resonanzpunkt verschob sich bei drei Gruppen von Messungen, wenn man die Differenz nimmt zwischen den Einstellungen des Senders bei 200 Atm. und dem Mittel der vor und nach dieser Messung mit 7 Atm. am Sender gefundenen Einstellungen, im Mittel um 3,05 mm wie aus folgender Tabelle ersichtlich ist.

Tabelle 1.

Gruppe	Mikrometer-Einst. des Senders in mm bei 7 Atm. vor erhöhtem Druck	200 Atm.	7 Atm. nach erhöhtem Druck	Mittlere Differenz der Einstellungen
1	$42{,}9_2$	$46{,}0_6$	$43{,}5_0$	$2{,}8_8$
2	$50{,}4_8$	$53{,}2_5$	$50{,}2_0$	$2{,}9_1$
3	$51{,}2_1$	$54{,}7_6$	$51{,}5_1$	$3{,}4_0$
			Mittelwert	$3{,}0_5 \pm 0{,}23$

Dieser Mittelwert von $3{,}0_5$ wurde der Berechnung zugrunde gelegt. Durch Messungen ergab sich bei der benutzten Einstellung, daß eine Verlängerung des Senders um 40,0 mm eine Verlängerung des Empfängers von 38,2 mm entsprach. Dem Mittelwert der Verschiebung des Resonanzpunktes am Sender von $3{,}0_5$ mm entspricht daher einer Verkürzung der Einstellung l_e von $2{,}9_1$ mm.

Eichung des Kölbchens mit Gemischen von Aceton und Wasser.

Um die Änderung der Dielektrizitätskonstante $= \Delta\varepsilon$ des Wassers durch Drucksteigerung berechnen zu können, wurde das Kölbchen mit verschiedenen Mischungen von Aceton und Wasser beschickt. Es wurde mit 6, $12^1/_2$ und 25 g Aceton in 100 g Mischung gearbeitet. Die Werte der betreffenden Dielektrizitätskonstante wurden aus einer Arbeit von Drude[1]) entnommen. Die Einstellung l_e wurde diesmal durch Änderung

1) P. Drude, Ann. d. Phys. **61.** S. 496. 1897.

der Röhrenlänge des Empfängers aufgenommen. Als Abszissen wurden die Längen des Empfangssystems eingetragen, als Ordinaten, wie früher, die ballistischen Ausschläge des Galvanometers. Die Werte der Dielektrizitätskonstante wurden dann in Fig. 3 als Abszissen, die gefundenen Werte der Einstellungen als Ordinaten aufgetragen.

$\Delta\,\varepsilon$ wurde aus der so erhaltenen Kurve auf zweierlei Art berechnet:

1. Es wurde angenommen, daß zwischen den Punkten 4 und 5 und 1 und 2, Fig. 3, die Kurve als Gerade betrachtet

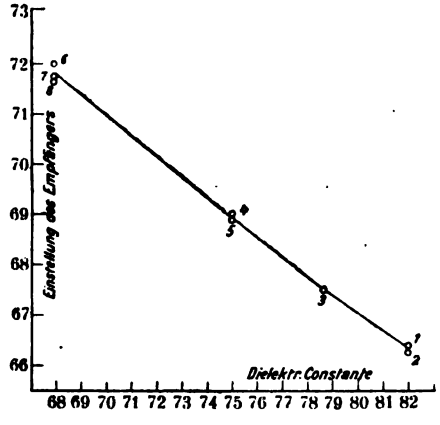


Fig. 3.

werden kann. Der Mittelwert von 4 und 5 wurde der Rechnung zugrunde gelegt.

2. Die Mittelwerte von 6 und 7 und 1 und 2 wurden benutzt und $\Delta\,\varepsilon$ mit Hilfe einer von Drude aufgestellten Formel berechnet. Trägt man nach Drude die Werte von $\operatorname{cotg} 2\pi \frac{l}{\lambda}$, wo l die Einstellung, λ die Wellenlänge bedeutet, als Ordinaten, die zugehörigen Dielektrizitätskonstanten der im Kölbchen befindlichen Mischungen als Abszissen auf, so ist die so erhaltene Kurve nahezu eine gerade Linie.

Ich lege den von Drude angegebenen Wert der Dielektrizitätskonstante des Wassers zugrunde. Auf einen kleinen Fehler des absoluten Wertes kommt es hier nicht an. Nach Drude ist ε für 1 Atm. und $16{,}3^0 = 81{,}99$.

Nach 1 berechnet ist

$$\Delta\varepsilon = 0{,}76_4 \text{ für 193 Atm. Druckdifferenz.}$$

Nach 2 berechnet ist

$$\Delta\varepsilon = 0{,}775\,.$$

Paraffinölkorrektion.

Der für $\Delta\varepsilon$ ermittelte Wert bedarf der Korrektur, weil die Dielektrizitätskonstante des Paraffinöls mit zunehmendem Druck ebenfalls größer geworden ist. Zur Berechnung der Korrektion wurde das Druckgefäß parallel geschaltet zu einem variablen, geeichten Meßkondensator, welcher sich in einem der beiden Zweige einer Differentialanordnung[1]) befand. Diese Anordnung gestattet, mit ungedämpften Wellen von 800 m Wellenlänge genaue Kapazitätsmessungen auszuführen. Das Fläschchen wurde zur Bestimmung seiner Kapazität mit Aceton gefüllt, weil Aceton ein kleines Leitvermögen hat.

Unter der Annahme, daß die Paraffinölkapazität des Druckgefäßes als parallel geschaltet zur Fläschchenkapazität angesehen werden kann, beträgt die Gesamtkapazität C des inneren Druckgefäßes:

$$\varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 = C\,, \tag{1}$$

wo

ε_1 = Dielektrizitätskonstante des Acetons für $16{,}1^0 = 20{,}8$.
c_1 = Kapazität des luftgefüllten Fläschchens.
ε_2 = Dielektrizitätskonstante des Paraffinöls für $16{,}1^0 = 2{,}2$.
c_2 = Kapazität des Teiles des Druckgefäßes, welcher bei obigen Druckmessungen mit Paraffinöl gefüllt war für Luftfüllung.

Bedeutet p den Druck, unter dem das Aceton und Paraffinöl steht, so beträgt die durch Druckänderung Δp bedingte Änderung der mit Aceton gefüllten Fläschchenkapazität $= \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial p} c_1 \Delta p$, der Paraffinölkapazität $= \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial p} c_2 \Delta p$.

Durch die Druckerhöhung Δp wächst die Gesamtkapazität C [Gleichung (1)] um den Betrag ΔC. Es ist also:

$$\Delta C = \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial p} c_1 + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial p} c_2\right) \Delta p\,. \tag{2}$$

Die Gesamtänderung durch den Druck wurde gemessen

1) Vgl. nachstehende Abhandlung: G. Falckenberg, Eine Differentialschaltung zur Messung von Kapazitäten usw.

durch die Vergleichung mit den Fläschchenkapazitäten bei der Eichung mit Aceton-Wasser-Gemischen beim konstanten Druck von 1 Atm. Beim Eichen des Fläschchens mit Aceton-Wasser-Gemischen wurde also dieselbe Änderung ΔC durch Änderung der Dielektrizitätskonstante der Fläschchenfüllung um $\Delta \varepsilon$ erzeugt. Folglich

$$\Delta C = c_1 \cdot \Delta \varepsilon . \tag{3}$$

Gleichung (2) und (3) ergeben, wenn $\Delta \varepsilon / \Delta p = A$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial p} = A - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial p} \frac{c_2}{c_1} ,$$

wo

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial p} \cdot \frac{c_2}{c_1}$$

das Korrektionsglied ist.

Durch Messungen mit Hilfe der Differentialschaltung wurde festgestellt, daß sich die Kapazität des nur mit Luft gefüllten Druckgefäßes (also ohne Fläschchen) $= K$ durch

Hineinbringen des mit Aceton gefüllten Fläschchens um 0,97 cm
„ „ „ Luft „ „ „ $0{,}08_5$ „
Hineingießen von Paraffinöl in das innere Druckgefäß
falls Fläschchen mit Aceton gefüllt war, um 0,162 cm
„ „ „ Luft „ „ „ $0{,}13_1$ „

steigerte.

$$C_a = \varepsilon_1 c_1 + c_2 \quad = K + 0{,}97 \text{ cm}$$
$$C_b = \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 = K + 0{,}97 \text{ cm} + 0{,}16_2 \text{ cm} = K + 1{,}13_2 \text{ cm}$$
$$C_c = c_1 + c_2 \quad = K + 0{,}085 \text{ cm}$$
$$C_d = c_1 + \varepsilon_2 c_2 \quad = K + 0{,}085 \text{ cm} + 0{,}13_1 \text{ cm} = K + 0{,}21_1 \text{ cm}.$$

Aus $C_b - C_a = c_2 (\varepsilon_2 - 1)$ folgt: $c_2 = \frac{0{,}162}{1{,}2} = 0{,}13_5$ cm

„ $C_d - C_c = c_2 (\varepsilon_2 - 1)$ „ $c_2 = \frac{0{,}131}{1{,}2} = 0{,}10_9$ cm

„ $C_a - C_c = c_1 (\varepsilon_1 - 1)$ „ $c_1 = \frac{0{,}885}{19{,}8} = 0{,}045$ cm

„ $C_b - C_d = c_1 (\varepsilon_1 - 1)$ „ $c_1 = \frac{0{,}916}{19{,}8} - 0{,}046$ cm.

Die Differenz der beiden Werte von c_2 zeigt, daß obige Annahme, wir könnten die Paraffinölkapazität als parallel zur Fläschchenkapazität geschaltet ansehen, genau der Wirklichkeit nicht entspricht. Es treten Kraftlinien aus der

Fläschchenkapazität in das Paraffinöl und umgekehrt. Der Fehler, der bei Bestimmung des Korrektionsgliedes unter obiger Annahme gemacht wird, liegt aber, da es sich um Korrektionsglieder handelt, innerhalb der Beobachtungsfehler bei der Bestimmung von $\Delta\,\varepsilon$. Es können daher Mittelwerte von c_1 und c_2 zur Bestimmung des Korrektionsgliedes mit hinreichender Genauigkeit benutzt werden.

$\partial\,\varepsilon_2/\partial\,p$ beträgt nach Ortvay[1]) für den Bereich von 7—200 Atm. $= 0{,}00010_4$.

Das Korrektionsglied

$$\frac{\partial\,\varepsilon_2}{\partial\,p}\cdot\frac{c_2}{c_1} = \frac{0{,}00010_4\cdot 0{,}12_2}{0{,}045_5} = 0{,}00028.$$

Nun war $A = \partial\,\varepsilon/\partial\,p$ *unkorrigiert* für Wasser von 16,3° zwischen 7 und 200 Atm.

$$A = 0{,}0040_2$$

Korrektionsglied $= 0{,}00028,$

also ist $\partial\,\varepsilon/\partial\,p$ für Wasser *korrigiert* $= 0{,}0037_4$.

Die Korrektion beträgt also 7%.

Folglich beträgt der nach der Drudeschen cotg-Formel berechnete Wert $\Delta\,\varepsilon = 0{,}77_5$, welchen ich für den genaueren halte, korrigiert: $\Delta\,\varepsilon$ korrigiert $= 0{,}72_2$[2]) für 193 Atm. Druckdifferenz bei 16,3°.

Unter der Annahme, daß die Dielektrizitätskonstante von Wasser sich nahezu proportional mit der Dichte ändert (die Annahme bestätigt sich später), kann aus dem Drudeschen Wert der Dielektrizitätskonstante von Wasser für 1 Atm. die Dielektrizitätskonstante für 7 Atm. berechnet werden.

Es beträgt: $\varepsilon_{16{,}3°,\ 7\ \mathrm{Atm.}} = 82{,}0_1$.

Obgleich die beschriebene Anordnung gestattet, Änderungen der Kapazität auf einige Prozent genau zu messen, so halte ich $\Delta\,\varepsilon$ nur auf die erste Dezimale für sichergestellt, da infolge der Kompression das Volumen des Fläschchens sich ändert und kleine Deformationen am Druckgefäß eingetreten sein können. Durch Drucksteigerung von 7 auf 200 Atm.

1) R. Ortvay, Ann. d. Phys. **36**. S. 21. 1911.

2) In meiner vorläufigen Mitteilung über Änderung der Dielektrizitätskonstante des Wassers durch Drucksteigerung in den Sitzungsber. u. Abhandl. d. naturf. Ges. Rostock, Bd. IV, 1914, ist die Paraffinölkorrektion mit einem Fehler behaftet. Es fehlte mir damals eine Einrichtung zur Messung kleiner Kapazitätsänderungen.

bei 16,3° hat ε eine Zunahme von $0{,}8_8\%$ erfahren, und es beträgt im Mittel zwischen 7—200 Atm. für Wasser: $\Delta\varepsilon = 0{,}004_6\%$ pro 1 Atm. Drucksteigerung bei 16,3° und einer Wellenlänge von 5 m.

II. Äthylalkohol.

Zu den Messungen wurde 99,8% Äthylalkohol von Kahlbaum benutzt. Die Messungen wurden mit denselben Vorsichtsmaßregeln wie bei Wasser durchgeführt. Für Äthylalkoholfüllung erwies sich ein Verschluß des Fläschchens nötig, da ohne diesen Verschluß sich die Dielektrizitätskonstante der Füllung durch Auflösen des Paraffinöls in Alkohol änderte. Der Verschluß bestand aus einer angekitteten U-förmig gebogenen Glaskapillare, in welcher sich ein Quecksilberfaden befand. Die Kapillare gab keine nachweisbare Änderung der gesamten Kapazität. Mit zwei verschiedenen Füllungen wurden wie beim Wasser Resonanzkurven bei 15 und 200 Atm. ausgeführt. Die Verschiebung des Resonanzpunktes am Sender durch Drucksteigerung betrug im Mittel $2{,}1_6$ mm wie Tab. 2 zeigt:

Tabelle 2.

Gruppe	Mikrometer-Einst. des Senders in mm bei 7 Atm. vor erhöhtem Druck	200 Atm.	15 Atm. nach erhöhtem Druck	Mittlere Differenz der Einstellungen
1	$38{,}2_5$	$40{,}4_3$	$38{,}5_0$	$2{,}0_5$
2	$39{,}7_5$	$42{,}1_7$	$40{,}0_2$	$2{,}2_5$
				Im Mittel $2{,}1_6 \pm 0{,}07$

Die Messungen sind ungenauer als wie beim Wasser, weil das Dämpfungsdekrement beträchtlich größer als beim Wasser war. Obiger Senderverlängerung von 2,16 mm entspricht eine Empfängerverlängerung von 2,20 mm. Die Eichung des Fläschchens mit Aceton-Wassergemischen mußte erneuert werden, weil der Sender nach den Messungen mit Wasserfüllung zwecks Reinigung der Funkenstrecke auseinandergenommen war. Die zur Berechnung benutzten Werte l_1, l_2 und l_3 sind in der folgenden Tabelle 3 enthalten.

Nach der cotg-Formel beträgt $\Delta\varepsilon$ unkorrigiert $= 0{,}48$ und nach Anbringung der für Äthylalkoholfüllung wie oben

Tabelle 3.

Flüssigkeit	Temperatur	Druck in Atm.	l_0	ε
100 Proz. Aceton . .	19,5	1	$l_1 = 91{,}8_7$	$26{,}4_6$
89,9 „ „ . .	19,5	1	$l_2 = 98{,}2_5$	$26{,}1_2$
Äthylalkohol	20,0	15	$l_3 = 90{,}2_5$	—

bei Wasserfüllung berechneten Paraffinölkorrektion $\Delta\varepsilon$ korrigiert $= 0{,}48$.

Die Dielektrizitätskonstante von Äthylalkohol beträgt nach der cotg-Formel aus Einstellung l_3 berechnet:

$$\varepsilon_{20^0,\,15\,\text{Atm.}} = 23{,}9_0.$$

Durch Drucksteigerung von 15 auf 200 Atm. bei 20,0° hat ε eine Zunahme von $1{,}8_0\,\%$ erfahren. Es beträgt $\Delta\varepsilon = 0{,}009_7$ pro 1 Atm. Druckdifferenz für 20,0° im Mittel zwischen 15 und 200 Atm.

III. Methylalkohol.

Zu den Messungen wurde bester Methylalkohol von Kahlbaum benutzt. Die Messungen mit vier verschiedenen Füllungen wurden unter denselben Vorsichtsmaßregeln wie oben ausgeführt. Die Einstellungen für 15 Atm. vor und nach erhöhtem Druck zeigten nichtmeßbare Unterschiede. Es wurden daher die Galvanometerausschläge und die betreffenden Einstellungen *beider* Messungsreihen zur Zeichnung *einer* Resonanzkurve benutzt. Die Änderung der Einstellung l_s am Sender durch Drucksteigerung von 15 auf 200 Atm. bei 18,0° betrug:

Tabelle 4.

Gruppe I	$3{,}1_2$ mm
„ II	$3{,}1_3$ „
„ III	$3{,}0_5$ „
„ IV . . .	$3{,}0_5$ „
Mittelwert	$3{,}0_9$ mm $\pm$ 0,04

3,09 mm Verlängerung des Senders entsprechen 2,95 mm am Empfänger. Die Mittelwerte von Einstellungen des Empfängers für verschiedene Eichflüssigkeiten enthält untenstehende Tab. 5. Die Mittelwerte dieser Tabelle und der Eichtabellen für Äthylalkohol und Aceton sind zur Zeichnung

einer Kurve Fig. 4 benutzt, welche die Abhängigkeit der Einstellung des Empfängers von der Dielektrizitätskonstante der Fläschchenfüllung zeigt.

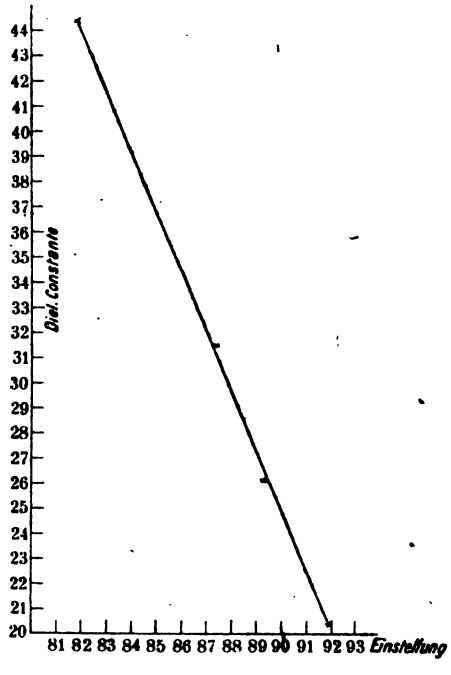


Fig. 4.

Tabelle 5.

Flüssigkeit	Temperatur	Druck in Atm.	l_ε	ε
Methylalkohol	18,0	15	$l_4 = 86{,}6$	—
80,2 Proz. Aceton . .	18,0	1	$l_2 = 87{,}4$	31,5
60,0 „ „ . .	18,0	1	$l_0 = 81{,}8_5$	44,4

Nach der cotg-Formel beträgt $\Delta\,\varepsilon$ unkorrigiert $= 0{,}67_2$ und nach Anbringung der für Methylalkoholfüllung wie vorstehend berechneten Paraffinölkorrektion

$$\Delta\,\varepsilon = 0{,}62_0\,.$$

Der aus der Kurve Fig. 4 entnommene Wert der Dielektrizitätskonstante für Methylalkohol beträgt:

$$\varepsilon_{18{,}0^\circ,\ 15\,\text{Atm.}} = 33_{,0}\,.$$

Durch Drucksteigerung von 15 auf 200 Atm. hat ε eine Zunahme von $1{,}8_8\,\%_0$ erfahren. Es beträgt:

$$\Delta\,\varepsilon = 0{,}010_2$$

pro 1 Atm. Druckdifferenz für 18,0° im Mittel zwischen 15 und 200 Atm.

IV. Aceton.

Zu den Messungen wurde Aceton von Kahlbaum benutzt. Es wurde unter Beobachtung aller oben erwähnten Vorsichtsmaßregeln Resonanzkurven für 15 und 200 Atm. bei 20,0° aufgenommen. Die Änderung der Einstellung l_s am Sender durch Drucksteigerung um 185 Atm. betrug im Mittel $2{,}9_8$, wie Tab. 6 zeigt.

Tabelle 6.

Gruppe	Mikrometer-Einst. des Senders in mm bei 15 Atm. vor erhöhtem Druck	200 Atm.	15 Atm. nach erhöhtem Druck	Mittlere Differenz der Einstellungen
1	$40{,}2_5$	$43{,}0_0$	$39{,}7_5$	$3{,}0_0$
2	$42{,}1_0$	$44{,}9_5$	$41{,}9_0$	$2{,}0_5$
			Mittelwert	$2{,}9_8 \pm 0{,}03$ [1]

$\Delta\,l = 2{,}98$ mm am Sender entspricht $\Delta\,l = 3{,}03$ mm am Empfänger. Unter der Annahme (die sich später bestätigt), daß bei Drucksteigerung ε $^4/_3$mal schneller wächst als die Dichte, beträgt nach den Drudeschen Werten die Dielektrizitätskonstante von Aceton für 1 Atm.:

$$\varepsilon_{20^0,\,15\text{ Atm.}} = 20{,}43.$$

Die zur Berechnung von $\Delta\,\varepsilon$ benutzten Einstellungen für verschiedene Eichflüssigkeiten enthält folgende Tab. 7.

Tabelle 7.

Flüssigkeit	Temperatur	Druck in Atm.	l_e	ε
100 Proz. Aceton . .	20,0	15	$l_7 = 91{,}8_8$	$20{,}4_3$
89,9 „ „ . .	19,0	1	$l_8 = 89{,}2_5$	$26{,}1_2$

1) Die zunehmende Genauigkeit der Messungen erklärt sich durch die während der Messungen gemachten Erfahrungen. Die Messungen an den verschiedenen Flüssigkeiten wurden in der Reihenfolge angestellt, in der sie beschrieben sind. Die größere Fehlergrenze für Wasser erklärt sich wohl durch ungenügenden Temperaturausgleich.

Nach der cotg-Formel beträgt $\Delta\varepsilon$ unkorrigiert $= 0{,}64_4$ und nach Anbringung der für Acetonfüllung berechneten Paraffinölkorrektion $\Delta\varepsilon$ korrigiert $= 0{,}59$.

Also hat durch die Drucksteigerung von 15 auf 200 Atm. bei 20,0° ε eine Zunahme von 2,9% erfahren. Es beträgt $\Delta\varepsilon = 0{,}016\%$ pro 1 Atm. Druckdifferenz bei 20,0° im Mittel zwischen 15 und 200 Atm.

Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante der untersuchten Flüssigkeiten von ihrer Dichte.

Die bei den Messungen benutzte Wellenlänge von 5 m kann als praktisch unendlich groß angesehen werden. Es kann daher für ∞ lange Wellen $n_\infty = \sqrt{\varepsilon}$ gesetzt werden.

In folgendem soll die Frage erörtert werden, welche der drei vielumstrittenen Refraktionsformeln $\frac{n-1}{d} = \text{konst.}$, $\frac{n^2-1}{d} = \text{konst.}$ und $\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d} = \text{konst.}$ für die untersuchten Flüssigkeiten die Abhängigkeit des Brechungsexponenten n von der Dichte d bei konstanter Temperatur am besten darstellt. Tab. 9 enthält in Spalte 7 die mit Hilfe der beobachteten Kompressibilitäten berechneten Dichten. Spalte 8 bis 10 die mit Hilfe der obengenannten drei Refraktionsformeln berechneten Dichten.

Die mittleren Kompressibilitäten für 1—7 bzw. 1—15 und 1—200 Atm. wurden aus den von Amagat[1]) und Röntgen[2]) beobachteten Werten für Wasser und Äthylalkohol berechnet, für Methylalkohol und Aceton graphisch interpoliert. Die Fehlergrenze der so berechneten Dichte von Wasser, Äthylalkohol und Methylalkohol liegt innerhalb der Fehlergrenze der beobachteten Druckkoeffizienten der Dielektrizitätskonstanten. Die für Aceton berechnete Dichte dürfte nur auf 20% genau sein, da zur graphischen Interpolation nur die Abhängigkeit der Kompressibilität vom Druck für 0° und die mittlere Kompressibilität für 8,9 bis 36,5 Atm. bei 14,2° bekannt sind. Die zur Berechnung von d benutzten Kompressibilitäten enthält Tab. 8.

---

1) Landolt und Börnstein.
2) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 44. S. 22. 1891.

Tabelle 8.

Druck in Atm.	Mittlere Kompressibilitäten = 10^{-6}			
	Wasser 16,3°	Äthylalkohol 20,0°	Methylalkohol 18,0°	Aceton 20,0°
1— 7	$49_{,4}$	—	—	—
1— 15	—	11_2	12_0	11_9?
1—200	$46_{,1}$	10_1	11_1	11_9?

Tabelle 9.

1 Flüssigkeit	2 Druck in Atm.	3 n^2	4 $\frac{n^2-1}{d}$	5 $\frac{n-1}{d}$	6 $\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$	7 d berechn. aus Kompressibilit.	8 d berechnet nach $\frac{n^2-1}{d}=c$	9 $\frac{n-1}{d}=c$	10 $\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}=c$
Wasser	7	$82,0_1$	$81,0_8$	$8,06_8$	$0,965_1$	$0,992_2$			
	200	$82,7_3$	$81,0_7$	$8,03_0$	$0,956_8$	$1,008_2$	$1,008_1$	$1,004_1$	$0,999_5$
Methylalkohol	15	$33,0_0$	$40,2_7$	$5,97_1$	$1,15_1$	$0,794_6$			
	200	$33,6_2$	$40,2_1$	$5,91_5$	$1,12_9$	$0,811_2$	$0,810_0$	$0,803_6$	$0,795_9$
Äthylalkohol	15	$23,9_0$	$28,9_6$	$4,91_9$	$1,11_8$	$0,794_6$			
	200	$24,3_5$	$28,9_6$	$4,88_1$	$1,10_0$	$0,805_6$	$0,805_6$	$0,799_5$	$0,792_9$
Aceton	15	$20,4_3$	$24,4_9$	$4,43_7$	$1,09_2$	$0,793_8$			
	200	$21,0_3$	$24,7_5$?	$4,42_7$?	$1,07_4$?	$0,809_7$?	$0,817_5$?	$0,807_9$?	$0,796_4$?

Für Wasser und beide Alkohole kann man nur von einer Konstanz des Ausdruckes $\frac{n^2-1}{d}$ reden. Ebenso zeigt für diese drei Flüssigkeiten die mit Hilfe derselben Refraktionskonstanten für 200 Atm. berechnete Dichte nur kleine, innerhalb der Fehlergrenze der Beobachtungen liegende, Abweichung. Die nach der Lorentz-Lorenzschen Refraktionsformel berechneten Dichten entsprechen am wenigsten der Wirklichkeit. Bereits Röntgen[1]) berechnete nach der Lorentz-Lorenzschen Formel, daß die Dielektrizitätskonstante von Wasser 25mal stärker beeinflußt werden müßte als die Dichte, wohingegen nach vorliegenden Messungen die Dielektrizitätskonstanten von Wasser und beider Alkohole durch Druck nahezu ebenso stark geändert werden wie die Dichten.

Die Dielektrizitätskonstante von Aceton wird durch Druck stärker beeinflußt als die der drei anderen Flüssigkeiten, doch lassen sich für Aceton sichere Schlüsse vorläufig noch nicht

1) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 44. S. 51. 1891.

ziehen, da, wie bereits oben angegeben wurde, die Kompressibilität von Aceton für die verwandten Drucke und Temperaturen nicht genau genug bekannt ist.

Zum Vergleich der von mir gefundenen Druckkoeffizienten der Dielektrizitätskonstante gebe ich folgenden Auszug aus der Tab. XIII der Röntgen-Zehnderschen[1]) Arbeit über Beeinflussung des Brechungsexponenten durch Druck für Na-Licht. In der 6. Spalte der Tab. 9 habe ich die Kompressibilität nach Angaben beider Verfasser mit Hilfe des Ausdrucks $\frac{n^2-1}{d}\cdot = \text{konst.}$ berechnet.

Tabelle 10.

Druck und Berechnungsexponent nach Röntgen.

Flüssigkeit	Temperatur	Kompressibilität · 10^{-6} beobachtet	berechnet nach $\frac{n-1}{d}=c$	berechnet nach $\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}=c$	berechnet nach $\frac{n^2-1}{d}=c$
Wasser . . .	17,95	46,2	45,7	41,5	52,3
Methylalkohol	17,60	119,5	124,4	113,0	142
Äthylalkohol	19,30	111,4	116,5	104,6	134

Die nach der Refraktionskonstante $\frac{n-1}{d}$ berechnete Kompressibilität für Wasser zeigt fast genaue Übereinstimmung mit der beobachteten Kompressibilität. Die nach $\frac{n^2-1}{d}$ berechneten Kompressibilitäten zeigen für die drei Flüssigkeiten die größte Abweichung von der beobachteten Kompressibilität.

Schließlich gebe ich einen Tabellenauszug der Ortvayschen[2]) Arbeit über „Dielektrizitätskonstante einiger Flüssigkeiten". Ortvay prüfte nur für Benzol und Äthyläther die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von der Dichte, weil bei den anderen von ihm untersuchten Flüssigkeiten die Kompressibilitäten nicht genügend bekannt sind.

Spalte 5 und 6 der Tab. 11 enthält die von mir nach Ortvayschen Angaben berechneten Refraktionskonstanten.

1) W. C. Röntgen und Zehnder. Ann. d. Phys. **44**. S. 49. 1891.
2) R. Ortvay. Ann. d. Phys. **36**. S. 12. 1911.

Tabelle 11.

Nach Ortvay für $\lambda = \infty$.

1 Flüssigkeit	2 Druck in Atm.	3 ε	4 $\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$	5 $\frac{n^2-1}{d}$	6 $\frac{n-1}{d}$
Äthyläther bei 17,4°	1	4,378	0,7379	4,707	1,522
	201	4,557	0,7327	4,805	1,533
	501	4,779	0,7283	4,937	1,549
Benzol bei 20,0°	1	2,285	0,3412	1,462	0,5821
	201	2,311	0,3396	1,464	0,5809
	501	2,345	0,3372	1,465	0,5788

Bei Benzol zeigt die Refraktionskonstante $\frac{n^2-1}{d}$ für 1—500 Atm. gute Übereinstimmung. Äthyläther zeigt im Intervall von 1—500 Atm. für alle drei Refraktionskonstanten beträchtliche Abweichungen.

Die Lorentz-Lorenzsche Formel ist abgeleitet für Körper, deren Molekeln kugelförmig und so weit voneinander entfernt sind, daß man das Feld im Innern der Kugel als homogen ansehen darf. Ich weise nun auf die grundlegende Abhandlung Otto Wieners „Zur Theorie der Refraktionskonstanten“ [1]) hin. Wiener stellte den Zusammenhang zwischen Dichte und Dielektrizitätskonstante in der die Allgemeinheit der Fälle umfassenden Form

$$\frac{1}{d}\,\frac{n^2-1}{n^2+u} = \text{Const.} \tag{1}$$

dar. Wiener nennt u die Formzahl, weil, wie Wiener und seine Mitarbeiter[2]) experimentell feststellten, die Abweichung der Größe u von 2 um so größer ist, je mehr die Form der Molekel von der Kugelform abweicht. Berechnen wir u für die hier untersuchten Flüssigkeiten nach der Gleichung

$$u = \frac{n_1^2 d_1 (n_2^2-1) - n_2^2 d_2 (n_1^2-1)}{\left[\frac{n_1^2-1}{d_1} - \frac{n_2^2-1}{d_2}\right] d_1 d_2},$$

welche aus (1) sich ergibt, wenn man

1) Otto Wiener, Berichte der Leipz. Ges. d. Wissensch., Math.-phys. Kl. **61. 62.** S. 256. 1909/10.

2) E. Ficker, Diss. Leipzig 1909; Ann. d. Phys. **81.** S. 365. 1910 und W. John, Ann. d. Phys. **55.** S. 299. 1918.

$$\frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + \bar{u}} \cdot \frac{1}{d_1} = \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + \bar{u}} \cdot \frac{1}{d_2}$$

setzt. Hier bedeutet n_1^2, n_2^2 und d_1, d_2 die Dielektrizitätskonstanten bzw. Dichten für niedrige und hohe Drucke.

Die Resultate enthält Tab. 12. Ferner enthält Tab. 12 Werte von u, welche ich nach den Meßergebnissen der bereits erwähnten Abhandlung von Ortvay berechnete. Außerdem füge ich einige von Wiener errechnete Werte von u nach den Messungen von Röntgen und Zehnder für Na-Licht derselben Tabelle zu.

Tabelle 12.

Stoff	u für Na-Licht	Beobachter	u für lange Wellen	Druck-bereich	Beob-achter
Wasser	4,96	Röntgen u. Zehnder	negativ sehr groß	7—200 Atm.	Falcken-berg
Methylalkohol	3,08	„	negativ sehr groß	15—200 „	„
Äthylalkohol	3,15	„	∞	15—200 „	„
Aceton	—	„	41?	15—200 „	„
Äthyläther . .	3,09	„	3,8	1—500 „	Ortvay
Benzol	3,17	„	27	1—500 „	„

Unendlich große Werte für u haben physikalisch keinen Sinn. Die Berechnung von u für lange Wellen ist indes sehr unsicher, da bei der geringen Größe der Änderung der Dielektrizitätskonstante die Genauigkeit der Messung für diesen Zweck nicht ausreicht. Eine Fehlerberechnung für den von mir für Wasser ermittelten Wert von $\Delta\varepsilon$ zeigt, daß für 10% (20%) größere Werte von $\Delta\varepsilon$ als beobachtet u noch den großen Wert $u = +946$ $(+441)$ annimmt. Wiener wies nun bereits auf den Zusammenhang zwischen Refraktionskonstante und Polymerisation hin. Die von mir untersuchten vier Flüssigkeiten sind mehr oder weniger stark polymerisiert.

Einen gewissen Anhalt zur Berechnung des Grades der Polymerisation bietet das Gesetz von Eötvös.[1]) Nach diesem Gesetz ist der Temperaturkoeffizient „k" der molekularen Oberflächenenergie für die Mehrzahl der Flüssigkeiten ca. 2,12.

1) R. Eötvös, Ann. d. Phys. **27**. S. 452. 1886.

Die Abweichung des Temperaturkoeffizienten vom Normalwert bietet ein gewisses Maß für den Grad der Polymerisation. Werte für k nach Ramsay und Shields[1]) für die in vorliegender Arbeit untersuchten Flüssigkeiten enthält Tab. 13.

Ein weiteres Kriterium für den Grad der Polymerisation bietet das Gesetz von Trouton.[2]) Nach diesem Gesetz schwankt der Wert für den Quotienten aus der molekularen Verdampfungswärme (M. V. W.) und der absolut gezählten Siedetemperatur (T), $\frac{M.V.W.}{T}$ für die meisten Stoffe zwischen den Zahlenwerten 20 und 22. Tab. 13 enthält die Werte von $\frac{M.V.W.}{T}$ für die untersuchten Flüssigkeiten.

Tabelle 13.

	K	$\frac{M.V.W.}{T}$
Normalwert . .	2.12	20—22
Wasser	0,89	25,90
Äthylalkohol . . .	1,08	28,34
Methylalkohol . .	0,93	24,90
Aceton	1,82	23,7
Äthyläther	2,17	21,4
Benzol	2,10	20,84

Die unmöglichen Werte von u für Wasser und die beiden Alkohole erklären sich also dadurch, daß eine wichtige Voraussetzung der Wienerschen Untersuchungen, nämlich, daß durch die Drucksteigerung keine Änderung der Molekeln eintritt, bei den drei genannten Flüssigkeiten nicht erfüllt ist. Der Wert von u für das weniger polymerisierte Aceton ist bedeutend kleiner wie für Wasser und die beiden Alkohole, jedoch lassen sich aus diesem Wert sichere Schlüsse noch nicht ziehen, weil, wie bereits bei der Berechnung der Refraktionskonstante erwähnt wurde, die Kompressibilität von Aceton nicht genau genug bekannt ist. Außerdem verweise ich auf den großen Wert von u für Benzol bei langen Wellen, obgleich Benzol offenbar nicht polymerisiert ist. Für kurze Wellen wies bereits Wiener (a. a. O.) auf dieselbe Tatsache

1) W. Ramsay und J. Shields, Zeitschr. f. physik. Chemie **12.** S. 433. 1893.

2) F. Trouton, Phil. Mag. (5) **18.** S. 54. 1884.

hin und macht in diesem Falle die Form der Molekel des Benzols dafür verantwortlich. Nach der Röntgenschen Abhandlung über „Die Konstitution des flüssigen Wassers“[1]) geht hervor, daß durch Drucksteigerung sich das Verhältnis der „Eismolekeln“ (nach seiner Bezeichnung) zu den normalen Wassermolekeln ändert. Nach der heutigen Auffassung sind die eine der beiden Arten von Molekeln die polymerisierten. Die sehr großen Werte von u für Wasser und die beiden Alkohole bestätigen die Ansicht Röntgens, daß sich das Verhältnis der polymerisierten zu den normalen Molekeln auch bei anderen Flüssigkeiten als Wasser durch Drucksteigerung ändert. Erst weitere Untersuchungen am Wasser über die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante vom Druck für verschiedene Temperaturen, welche ich mit einer empfindlichen Differentialanordnung auszuführen beabsichtige, werden wohl weitere Klärung der Röntgenschen Vermutung bringen.

Zusammenfassung.

In vorliegender Arbeit wurde der Druckkoeffizient der Dielektrizitätskonstanten von Wasser, Äthylalkohol, Methylalkohol und Aceton untersucht. Die mittlere Änderung der Dielektrizitätskonstante pro 1 Atm. Druckdifferenz im Druckbereich von 7 (bzw. 15) bei 200 Atm. betrug für $\lambda = 5$ m:

Tabelle 14.

Flüssigkeit	Temperatur	Druckintervall in Atm.	Δs pro 1 Atm. Druckdifferenz in Proz.
Wasser	16,3	7—200	$0{,}004_6$
Äthylalkohol	20,0	15—200	$0{,}009_7$
Methylalkohol	18,0	15—200	$0{,}010_2$
Aceton	20,0	15—200	0,016

Ferner wurde für 7 (bzw. 15) und 200 Atm. für obige Flüssigkeiten die Refraktionskonstanten

$$\frac{n-1}{d}, \quad \frac{n^2-1}{d} \quad \text{und} \quad \frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$$

berechnet, wenn $n = \sqrt{\varepsilon}$ der Brechungsexponent für die benutzte Welle ist. Für Wasser und beide Alkohole wurde eine

1) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. **45**. S. 91. 1892.

gute Übereinstimmung des Ausdrucks $\frac{n^2-1}{d}$ für niedrigen und hohen Druck gefunden. Für Aceton läßt sich wegen der nicht genügend genau bekannten Kompressibilität nichts Bestimmtes sagen. Aus Angaben von Ortvay wurde der Ausdruck

$$\frac{n^2-1}{d} \quad \text{und} \quad \frac{n-1}{d}$$

für Benzol und Äthyläther berechnet. Für Benzol ergab sich für 1—500 Atm. eine gute Konstanz des Ausdrucks $\frac{n^2-1}{d}$. Für Äthyläther zeigten alle drei Refraktionskonstanten im Druckbereich von 1—500 Atm. beträchtliche Abweichungen. Die sehr großen, teils negativen Werte der Wienerschen Formzahl u für Wasser und die beiden Alkohole bestätigen die Vermutung Röntgens, daß sich durch Drucksteigerung auch bei anderen Flüssigkeiten als Wasser das Verhältnis der polymerisierten zu den nichtpolymerisierten Molekeln ändert. Ferner stehen diese durch Druckänderung hervorgebrachten Änderungen des Grades der Polymerisation in Widerspruch mit einer Voraussetzung, für welche die Wienersche und auch Lorentz-Lorenzsche Refraktionskonstante berechnet wurde.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, dem Direktor des Rostocker Physikalischen Instituts, Herrn Prof. Heydweiller, für die Anregung zu obiger Arbeit und für viele wertvolle Ratschläge meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Rostock 1919, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 12. August 1919.)

3. *Eine Differentialschaltung zur Messung von Kapazitäten und Selbstinduktionen mit einer Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-8}$;*
von G. Falckenberg.

Die Verwendung der Differentialschaltung zu Kapazitäts- und Selbstinduktionsmessungen ist nichts Neues. Philip[1]) und Bädecker[2]), später Ortvay[3]) benutzten Differentialschaltungen zu Kapazitätsmessungen. Eine empfindliche Differentialschaltung wurde ferner veröffentlicht in den Mitteilungen aus dem physikalisch-technischen Laboratorium von Dr. G. Seibt, Berlin. Die Kapazitätsempfindlichkeit dieser Schaltung kann nach Angabe der Firma „so weit getrieben werden, daß schon die Annäherung der Hand an den Schwingungskreis auf 10 cm sich in einer Änderung des (Galvanometer-) Ausschlages bemerkbar macht". Neuerdings hat A. Hund[4]) eine Differentialschaltung beschrieben in seiner Abhandlung „Ein neues Verfahren zur Bestimmung der magnetischen Flußdichte und Permeabilität". In diesen Schaltungen ist jedoch keine Verstärkung verwandt worden, auch werden über die Empfindlichkeit keine Zahlen angegeben.

Die Empfindlichkeit der Differentialschaltung für Kapazitäts- und Selbstinduktionsmessungen läßt sich beträchtlich steigern durch Verwendung von hochevakuierten Röhren als Wechselstromquelle und Wellenanzeiger. Über die Verwendung von hochevakuierten Röhren für die Differentialschaltung ist meines Wissens bisher nichts veröffentlicht worden.

Die von mir benutzte Differentialschaltung ist aus untenstehender Fig. 1 zu ersehen. Ungedämpfte Schwingungen werden mit einer Vakuumröhre (Type „M") der Firma C. Lorenz, Berlin, mit Hilfe einer Schaltung erzeugt, welche dieselbe Firma

1) J. C. Philip, Zeitschr. f. physik. Chemie **24.** S. 18. 1897.
2) K. Bädecker, Zeitschr. f. physik. Chemie **36.** S. 305. 1901.
3) R. Ortvay, Ann. d. Phys. **36.** S. 1. 1911.
4) A. Hund, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. **18.** S. 462. 1919.

für die von ihr gelieferten Röhrensender benutzt. Mit dem Schwingungskreis des Röhrensenders sind zwei möglichst symmetrische Schwingungskreise lose induktiv gekoppelt. Die beiden entgegengesetzt gewickelten Selbstinduktionen IV und V heben sich in ihrer Wirkung auf den Schwingungskreis VI für den Fall auf, daß die Ströme in beiden Zweigen der Differentialschaltung gleiche Amplitude und Phase besitzen. Als Wellenindikator für den Schwingungskreis VI dient ein Galvanometer, welches in den Anodenstromkreis der zweiten Röhre eines Röhrenverstärkers[1]) eingeschaltet ist. Die im Verstärker benutzten Widerstände bestehen aus Silit.[2]) Der Wellenindikator arbeitet folgendermaßen: Die Stromstärke des Galvanometers sinkt, sowie der Schwingungskreis VI erregt wird. Maximale Stromstärke wird also vom Galvanometer für den Fall angezeigt, daß sich die beiden Differentialkreise in ihrer Wirkung auf Schwingungskreis VI völlig aufheben. Die Empfindlichkeit der Differentialschaltung kann noch gesteigert werden durch Einschaltung einer elektromotorischen Kompensationskraft in den Galvanometerkreis, wie aus der Fig. 1 ersichtlich ist. Ein Akkumulator wird mit einem regulierbaren Vorschaltwiderstand A so an die Enden des Widerstandes D angeschlossen, daß die elektromotorische Kraft bei D die elektromotorische Kraft an den Enden des Widerstandes B für maximalen Anodenstrom nahezu aufhebt. Der Nebenschluß B des Galvanometers kann durch Einführung dieser Kompensation um ein Vielfaches vergrößert werden. Die Empfindlichkeit des Wellenindikators steigt proportional der Größe des Nebenschlußwiderstandes B. Ist eine weitere Steigerung der Empfindlichkeit erwünscht, z. B. für Messungen des Druckkoeffizienten der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten, so wird zweckmäßig nicht die Stellung des geeichten Vergleichskondensators bei maximaler Stromstärke des Galvanometers (Umkehrpunkt) abgelesen, sondern

1) Diesen mit Silitwiderständen versehenen Verstärker lernte ich in meiner dienstlichen Tätigkeit Ende 1918 bei der Inspektion des Torpedowesens in Kiel kennen. Soweit mir bekannt ist, wurden Widerstände im Anodenstromkreis der Verstärker zuerst von Barkhausen benutzt.

2) Silitwiderstände wurden bezogen von der Firma Gebr. Siemens, Lichtenberg bei Berlin.

zwei Stellungen des Meßkondensators für zwei gleichgroße Galvanometerausschläge auf beiden Seiten des Resonanzpunktes. Der Mittelwert dieser beiden Stellungen ist dann die gesuchte Kapazität.

Die Empfindlichkeit oben beschriebener Anordnung für Kapazitätsmessungen soll nun an einem Beispiel gezeigt werden. Sollen kleine Änderungen der Kapazität gemessen werden, wie sie etwa durch Vergrößerung der Dielektrizitätskonstanten der

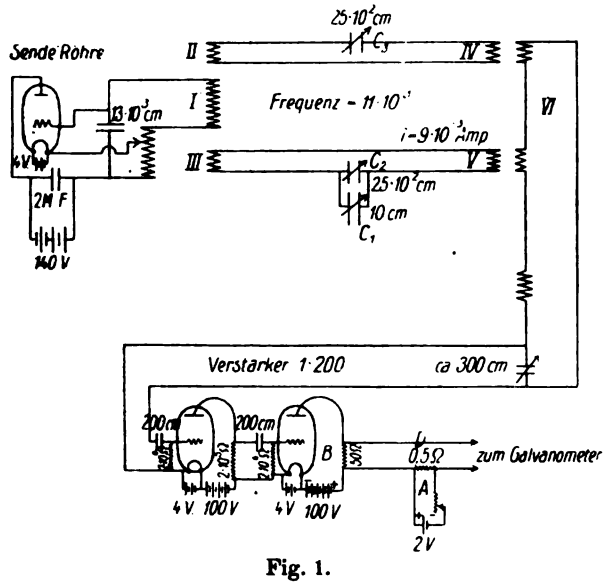


Fig. 1.

zwischen den Platten des Kondensators C_2 enthaltenen Flüssigkeit durch Drucksteigerung bedingt werden, so wird folgendermaßen verfahren. Zum Kondensator C_2 ist ein Plattenkondensator mit variablem, meßbarem Plattenabstand angebracht, der ermöglicht, die etwa durch Drucksteigerung bedingte Vergrößerung der Kapazität des Kondensators C_2 zu kompensieren. Die beiden Zweige der Differentialschaltung und Schwingungskreis VI werden auf die Eigenschwingung des Röhrensenders abgestimmt. Die Koppelung der beiden Differentialkreise mit dem Röhrensender bei II und III wird so gewählt, daß sich die induktiven Wirkungen der Spulen IV und V auf den Schwingungskreis VI aufheben, was daran erkenntlich ist, daß vom Galvanometer dieselbe Stromstärke

angezeigt wird, wie beim ausgeschalteten Sender, also, wie bereits oben erwähnt wurde, maximale Stromstärke. Wird nun die Resonanz gestört durch Vergrößerung der Kapazität C_2 durch Drucksteigerung, so sinkt der Galvanometerausschlag. C_2 muß verkleinert werden, um die Resonanz herzustellen. Die Verkleinerung der Kapazität von C_1 kann nach der bekannten Kirchhoffschen Formel aus der Änderung des Plattenabstandes errechnet werden.

Im folgenden soll nun die Gesamtkapazität des einen Differentialzweiges durch Änderung des Plattenabstandes des Meßkondensators C_1 um einen kleinen Betrag verringert werden und aus der hierdurch bedingten Änderung des Galvanometerausschlages die Empfindlichkeit der Anordnung geprüft werden.

Die Gesamtkapazität, welche sich in der Hauptsache zusammensetzt aus C_1, C_2 und den Spulenkapazitäten betrug $25 \cdot 10^2$ cm. Nun wurde der Plattenabstand des Kondensators von 5,000 mm auf 5,012 mm erhöht. Der Durchmesser der Platten des Kondensators betrug 10,0 cm, die Plattendicke 0,30 cm. Nach der Kirchhoffschen Formel beträgt für einen ungeerdeten Kondensator obiger Abmessung die Kapazität:

Plattenabstand d. Kondensators in mm	Kapazität in cm	Differenz
4,800	15,943	0,547
5,000	15,396	0,505
5,200	14,891	0,469
5,400	14,422	

Die Kapazitätsverkleinerung für obige Änderung des Plattenabstandes beträgt daher

$$\frac{0{,}52 \cdot 12}{200}\,\text{cm} = 3{,}1 \cdot 10^{-2}\,\text{cm}.$$

Der durch diese Kapazitätsverringerung bedingte Galvanometerausschlag betrug 8,1 cm.

Nun lassen sich die Galvanometerschwankungen, welche durch unkontrollierbare Vorgänge in den Röhren entstehen, für einen Beobachtungszeitraum von 10 Sekunden leicht auf 0,01 cm und darunter vermindern, falls etwa eine halbe Stunde vor der Messung die Röhren bereits eingeschaltet wurden.

Auch ungleichmäßige Wärmebestrahlung der Kondensatoren usw. etwa durch Glühlampen muß peinlichst vermieden werden. Einer noch gerade meßbaren Änderung des Galvanometerausschlages von 0,01 cm entspricht jedoch eine Kapazitätsänderung von

$$\frac{0{,}031 \cdot 0{,}01}{8{,}1} = 3{,}8 \cdot 10^{-5}.$$

(Die Änderung der Kapazität war in diesem Meßbereich nahezu proportional der Änderung der Galvanometerausschläge.) Die Empfindlichkeit der Anordnung beträgt also:

$$\frac{\text{Meßbare Kapazitätsänderung}}{\text{Gesamtkapazität}} = \frac{3{,}8 \cdot 10^{-5}}{25 \cdot 10^{3}} = 1{,}5 \cdot 10^{-8}.$$

Die angegebene Empfindlichkeit gilt für eine Frequenz von 11000 (Wellenlänge = 27000 m). Dieselbe Empfindlichkeit wurde beobachtet für Kapazitätsänderungen eines Nernstkondensators, welcher C_1 und C_2 parallel geschaltet wurde. Die Glasplatte des normalen Nernstkondensators wurde hierbei durch einen 8 mm breiten, 0,19 mm dicken Glimmerstreifen ersetzt, welcher durch eine Mikrometerschraube verschoben wurde. $^1/_{100}$ mm Verschiebung des Glimmerstreifens entspricht einer Kapazitätsänderung von $2{,}1 \cdot 10^{-4}$ cm. Diese kleine Kapazitätsänderung ergab noch gut meßbare Galvanometerausschläge.

Ein weiteres Beispiel für die große Empfindlichkeit dieser Anordnung ist folgendes: Bereits Annäherung der Hand auf etwa 2 m an einen der beiden Zweige der Differentialschaltung ergab eine meßbare Änderung des Galvanometerausschlages. Der Experimentator muß daher die Meßkondensatoren aus mindestens 2 m Entfernung, etwa durch Glasstangen bedienen, falls nicht die Differentialschaltung durch ein metallisches Gitter vor äußeren Einflüssen geschützt wird.

Für die 2300-, 4000- und 27000-m-Welle wurden *ohne* Verstärkung unter Benutzung eines Detektors nahezu gleiche Empfindlichkeiten der Differentialschaltung festgestellt. Es kann daraus wohl geschlossen werden, daß für die 2300-m-Welle bei Verwendung der beschriebenen Verstärkeranordnung nahezu die gleiche Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-8}$ erreichbar ist. Da sich mit Röhrensendern Wellenlängen bis 20 m leicht herstellen lassen, wird aller Wahrscheinlichkeit nach auch für

diese kurzen Wellen die angegebene Differentialschaltung noch hohe Empfindlichkeitsgrade geben.

Obige Anordnung eignet sich auch für genaue Permeabilitätsmessungen, z. B. stark verdünnter Lösungen. In diesem Falle wird ein Glas mit der betreffenden Flüssigkeit in die Selbstinduktion IV gebracht. Ein Maß der Größe der Permeabilität bietet die Änderung der Kapazität des Meßkondensators C_1, welche erforderlich ist, um die durch Hineinbringung des gefüllten Glases erzeugte Verstimmung rückgängig zu machen. Störend erwies sich bei diesen Messungen die Vergrößerung der Spulenkapazität infolge des Hineinbringens der gefüllten Gläser. Diese Kapazitätssteigerung wurde zum größten Teil aufgehoben durch Verwendung doppelwandiger Gefäße. Fig. 2 zeigt ein derartiges Gefäß. Das Gefäß ist starr mit der Selbstinduktion IV verbunden. Im äußeren Mantel befindet sich maximal leitende Schwefelsäure, welche als Schutzmantel gegen elektrische Kraftlinien für das innere Gefäß dient. Die Füllung des inneren Raumes mit der zu untersuchenden Flüssigkeit findet durch Hineingießen statt, die Entleerung durch den Hahn.

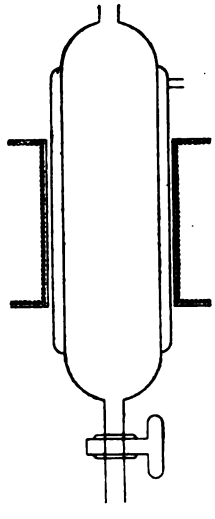


Fig. 2.

Ein Vergleich obiger Anordnung mit der von Heydweiller[1]) angegebenen Wheatstoneschen Brückenschaltung mit Zusatzwiderständen, mit welcher Philipp[2]) in seiner Abhandlung über „Untersuchungen über Magnetisierungszahlen von Salzen der Eisengruppe und die Abhängigkeit von der Konzentration" eine Empfindlichkeit von $6 \cdot 10^{-7}$ erreichte, zeigt, daß diese wohl bisher empfindlichste Anordnung zur Messung von Kapazitäten und Selbstinduktionen durch die von mir angegebene Anordnung um über das Zehnfache an Empfindlichkeit übertroffen ist.

Rostock 1919, Physikalisches Institut.

1) A. Heydweiller, Boltzmann-Festschrift S. 4. 1903.
2) Paul Philipp, Dissertation Rostock 1914.

(Eingegangen 12. August 1919.)

4. *Über zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zwischen parallelen ebenen Wänden;* *von George Jaffé.*

Versteht man unter einer Funktion $\chi(z)$ der komplexen Variablen $z = x + iy$,

$$\chi(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y),$$

das komplexe Potential einer zweidimensionalen Flüssigkeitsströmung, so ergeben sich die Strömungsgeschwindigkeiten u und v in bekannter Weise als partielle Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials φ oder der Stromfunktion ψ:

$$(1)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Soll die dargestellte Strömung an der Stelle $r = a + ib$ einen Wirbelfaden oder eine Quellinie aufweisen, so muß der Differentialquotient von $\chi(z)$,

$$\frac{d\chi(z)}{dz} = u - iv,$$

an der Stelle $z = r$ einen Pol erster Ordnung haben, und zwar mit rein imaginärem oder reellem Residuum, je nachdem es sich um Wirbel oder Quelle handelt. Damit nun $d\chi/dz$ einen solchen Pol besitzt, genügt es,

$$\chi(z) = c \lg \omega(z)$$

zu setzen, wo $\omega(z)$ bei passend bestimmter Konstante c für $z = r$ eine beliebige Nullstelle oder einen beliebigen Pol hat. Wählt man für $\omega(z)$ geeignete Funktionen, so gelangt man zu mannigfaltigen Lösungen der Strömungsgleichungen.

Im einfachsten Falle, wenn $\omega(z) = z - r$ gesetzt wird, erhält man das bekannte Potential

$$(2)\qquad \chi(z) = c \lg (z - r).$$

Es stellt die Strömung eines einzelnen Wirbelfadens oder einer Quellinie dar, und mit seiner Hilfe läßt sich die Strömung eines beliebigen Systems solcher Wirbel und Quellen im unbegrenzten Strömungsfelde zusammensetzen.

Will man eine unendliche Reihe von äquidistanten, gleichstarken Wirbelfäden oder Quellinien zusammenfassen, so braucht man für ω nur eine periodische Funktion einzusetzen. Das so gebildete Potential

$$\chi(z) = c \lg \sin (z - r) \tag{3}$$

ist von v. Kármán[1]) bei seinen Untersuchungen über den Mechanismus des Flüssigkeitswiderstandes benutzt worden, und kann, wie im folgenden gezeigt wird, mit Hilfe des Spiegelungsprinzips dazu dienen, die allgemeinste von Wirbelfäden und Quellinien herrührende zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zwischen zwei parallelen ebenen Wänden darzustellen.

Ersetzt man den sin durch die Weierstrass sche σ-Funktion, so stellt das Potential

$$\chi(z) = c \lg \sigma(z - r) \tag{4}$$

die Strömung eines sich nach zwei Richtungen ins Unendliche erstreckenden Systems von Wirbelfäden oder Quellinien dar, die in homologen Punkten des Periodenparallelogramms angeordnet sind. Dieses Potential leistet das gleiche für einen prismatischen Raum von rechteckigem Querschnitt, wie das Potential (3) für den Raum zwischen zwei parallelen Platten.

1. Wirbelströmung.

Es sei ein beliebiges System S von n isolierten Wirbelfäden A_ν von der Wirbelstärke $J_\nu (\nu = 1, 2, \ldots . n)$ zwischen zwei parallelen Wänden vom Abstande $d/2$ gegeben; es soll das Strömungsfeld berechnet werden. Wir legen das Koordinatensystem so, daß den beiden Wänden die Gleichungen $x = 0$ und $x = d/2$ zukommen, und in diesem System sei die Lage der A_ν charakterisiert durch die komplexen Zahlen

$$r_\nu = a_\nu + i b_\nu; \qquad \nu = 1, 2 \ldots . n.$$

1) Th. v. Kármán, Gött. Nachr. 1911. S. 509; 1912. S. 547; Th. v. Kármán u. H. Rubach, Phys. Zeitschr. 13. S. 49. 1912.

Um die Aufgabe zu lösen, spiegeln wir das System S an der Ebene $x = d/2$, d. h. wir nehmen ein zweites System S' von weiteren n Wirbelfäden $A_{n+\nu}$ hinzu, mit der Festsetzung

$$(5)\quad J_{n+\nu} = -J_\nu;\ a_{n+\nu} = d - a_\nu;\ b_{n+\nu} = b_\nu;\ \nu = 1, 2 \ldots . n.$$

Wird jetzt das Potential

$$(6)\qquad \chi_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_1^{2n} J_\nu \lg \sin \frac{\pi}{d}(z - r_\nu)$$

gebildet, wo die Summation über alle Wirbel von S und S' zu erstrecken ist, so erfüllt es alle Bedingungen der Aufgabe. Zunächst ist ersichtlich, daß die durch (6) dargestellte Strömung für jede der Stellen $z = r_\nu$ einen Wirbel von der Stärke J_ν besitzt; denn für kleine Werte von $z - r_\nu$ reduziert sich (6) — von einer unwesentlichen Konstante abgesehen — mit beliebiger Genauigkeit auf

$$(6')\qquad \frac{1}{2\pi i} J_\nu \lg (z - r_\nu),$$

und dieses Potential stellt einen Wirbel von der Stärke J_ν dar.

Es sind aber auch die Grenzbedingungen erfüllt, wie aus der Betrachtung des Differentialquotienten

$$(7)\qquad \frac{d\chi_1}{dz} = u - iv = \frac{1}{2di} \sum_1^{2n} J_\nu \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d}(z - r_\nu)$$

hervorgeht. Nach Trennung des Reellen und Imaginären ergibt sich

$$(8)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{1}{2d} \displaystyle\sum_1^{2n} J_\nu \dfrac{\operatorname{Sin} \frac{2\pi}{d}(y - b_\nu)}{\operatorname{Cof} \frac{2\pi}{d}(y - b_\nu) - \cos \frac{2\pi}{d}(x - a_\nu)}, \\ v = \dfrac{1}{2d} \displaystyle\sum_1^{2n} J_\nu \dfrac{\sin \frac{2\pi}{d}(x - a_\nu)}{\operatorname{Cof} \frac{2\pi}{d}(y - b_\nu) - \cos \frac{2\pi}{d}(x - a_\nu)}, \end{cases}$$

und wenn man in dem Ausdruck für u die je zwei Summanden zusammenfaßt, die von dem Wirbel A_ν und seinem Bilde $A_{n+\nu}$ herrühren, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Festsetzungen (5)

$$u = 0 \qquad \text{für } x = 0 \quad \text{und für } x = d/2,$$

womit den Grenzbedingungen genügt ist. Es muß übrigens betont werden, daß durch die Grenzbedingungen an den Wänden das Potential noch nicht eindeutig bestimmt ist, und daß eine Bedingung über das Verhalten der Strömung im Unendlichen hinzukommen muß. Fordert man, daß die Strömungsgeschwindigkeiten für unendlich große y verschwinden sollen, so genügt (6) auch dieser Bedingung, und stellt bis auf eine unwesentliche, additive Konstante die eindeutige Lösung dar.

Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion für einen bestimmten Augenblick, in dem sich die Wirbel A_ν an den Stellen r_ν befinden, ergeben sich aus (6) zu:

$$(9)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{2\pi}\sum_1^{2n} J_\nu \tau_\nu, \\ \psi_1 = -\dfrac{1}{2\pi}\sum_1^{2n} J_\nu \lg s_\nu, \end{cases}$$

mit der Bedeutung

$$(10)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg} \tau_\nu = \dfrac{\mathfrak{T}\mathfrak{g}\,\frac{\pi}{d}(y-b_\nu)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{d}(x-a_\nu)} \\ s_\nu = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{d}(x-a_\nu) + \mathfrak{Sin}^2\frac{\pi}{d}(y-b_\nu)}. \end{cases}$$

Es ist nun noch zu berücksichtigen, daß sich die Wirbelfäden selbst im Strömungsfelde bewegen. Man erhält die Bewegung des Fadens A_ν, indem man die Strömung berechnet, die sich für die Stelle r_ν aus dem Potential (6) ergibt, nachdem man davon das Potential (6'), d. h. die Wirkung des Fadens selbst, abgezogen hat. Nun ist aber

$$\lim_{(z-r_\nu)=0} \frac{d}{dz}\left[\lg \sin \frac{\pi}{d}(z-r_\nu) - \lg (z-r_\nu)\right] = 0,$$

d. h. die durch das erste Glied dargestellte unendliche Reihe von Wirbelfäden hat keine Wirkung auf einen einzelnen der Fäden, wie ja auch schon aus Symmetriegründen hervorgeht. Anstatt also das Potential des einzelnen Fadens (6') von (6) abzuziehen, kann man einfach in (6) den Summanden unterdrücken, der sich auf den betreffenden Faden bezieht. Demnach lassen sich die Bewegungsgleichungen der Wirbelfäden

in genau analoger Weise schreiben, wie es Kirchhoff für den Fall eines unbegrenzten Strömungsfeldes zuerst getan hat.[1])

Wir definieren nämlich eine Funktion W_1 durch die folgende Gleichung:

$$(11) \qquad W_1 = -\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu,\mu} J_\nu J_\mu \lg s_{\nu\mu}, \qquad \left.\begin{matrix}\nu\\ \mu\end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots 2n,$$

wobei die Summation über alle Paare von Wirbeln der Systeme S und S' zusammengenommen, und über jedes Paar nur einmal, zu erstrecken ist. Dabei hat $s_{\nu\mu}$ folgende Bedeutung:

$$(12) \qquad s_{\nu\mu} = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{d}(a_\nu - a_\mu) + \mathfrak{Sin}^2\frac{\pi}{d}(b_\nu - b_\mu)}.$$

Die Bewegungsgleichungen des Wirbelfadens A_ν lauten dann:

$$(13) \qquad \begin{cases} J_\nu \dfrac{da_\nu}{dt} = \dfrac{\partial W_1}{\partial b_\nu}, \\ J_\nu \dfrac{db_\nu}{dt} = -\dfrac{\partial W_1}{\partial a_\nu}. \end{cases} \qquad \nu = 1, 2, \ldots 2n.$$

Es ist zu beachten, daß die Koordinaten $a_{n+\nu}$, $b_{n+\nu}$ der zu S' gehörigen Wirbel $A_{n+\nu}$ in dem Ausdruck für W_1 stehen bleiben müssen und nicht nach (5) durch a_ν, b_ν ausgedrückt werden dürfen. Demgemäß sind sie auch bei den partiellen Differentiationen, welche (13) erfordert, als unabhängige Variable anzusehen; die Ersetzung von $a_{n+\nu}$, $b_{n+\nu}$ durch a_ν, b_ν darf erst nach erfolgter Differentiation geschehen.

Aus der Definitionsgleichung von W_1 folgt

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial a_\nu} = -\dfrac{\partial W_1}{\partial a_{n+\nu}}, \\ \dfrac{\partial W_1}{\partial b_\nu} = \dfrac{\partial W}{\partial b_{n+\nu}}. \end{cases}$$

Diese Beziehungen sind leicht zu verifizieren, indem man je zwei Paare von Wirbeln zusammenfaßt, die spiegelbildlich zueinander liegen, und indem man (5) berücksichtigt. Aus (13) und (14) ergibt sich dann

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{da_\nu}{dt} = -\dfrac{da_{n+\nu}}{dt}, \\ \dfrac{db_\nu}{dt} = \dfrac{db_{n+\nu}}{dt}. \end{cases}$$

1) G. Kirchhoff, Mechanik. 20. Verl. ausführlicher bei Appell. Traité de Mécanique rationelle. Deuxième édition. Paris. Gauthier-Villars. 1909. S. S. 480ff.

Durch diese Gleichungen, die schon aus Symmetriegründen zu erwarten waren, wird die Bewegung des Systems S' vollständig auf die des Systems S zurückgeführt. Integriert besagen sie, daß die Beziehungen (5) für alle Zeiten bestehen bleiben, wenn sie zu irgendeiner Zeit bestanden haben. Demnach stellt das Potential (6) nicht nur für einen bestimmten Augenblick die Strömung des Systems dar, sondern für alle Zeiten, wenn für die Koordinaten a_ν, b_ν die durch Integration der Bewegungsgleichungen (13) gewonnenen Zeitfunktionen eingesetzt werden.

In dem Falle des unendlich ausgedehnten Strömungsfeldes lassen sich aus der Kirchhoffschen Darstellung eine Anzahl von Integralen der Bewegungsgleichungen gewinnen. Diese Integrale behalten in dem vorliegenden Falle nur zum Teil ihre Bedeutung. Betrachten wir zunächst den „Schwerpunkts-Satz".

Aus den Definitionsgleichungen (11) und (12) folgt ohne weiteres

$$(16) \qquad \sum_1^{2n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial a_\nu} = 0, \qquad \sum_1^{2n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial b_\nu} = 0;$$

die zweite dieser Gleichungen ergibt mit der zweiten Gleichung (14) zusammen

$$(17) \qquad \sum_1^{n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial b_\nu} = \sum_1^{n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial b_{n+\nu}} = 0,$$

dagegen ist

$$(18) \qquad \sum_1^{n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial a_\nu} = -\sum_1^{n}{}_\nu \frac{\partial W_1}{\partial a_{n+\nu}}$$

im allgemeinen von 0 verschieden. Definieren wir nun die Koordinaten ξ, η des „Schwerpunkts" $\mathfrak{S}$ der fiktiven Massen J_ν ($\nu = 1, 2, \ldots n$) durch die Gleichungen

$$(19) \qquad \xi \sum_1^{n}{}_\nu J_\nu = \sum_1^{n}{}_\nu a_\nu J_\nu, \qquad \eta \sum_1^{n}{}_\nu J_\nu = \sum_1^{n}{}_\nu b_\nu J_\nu,$$

und entsprechend die Koordinaten ξ', η' des Schwerpunkts $\mathfrak{S}'$ für das System S' durch

$$(20)\quad \xi' \sum_1^n{}_\nu J_{n+\nu} = \sum_1^n{}_\nu a_{n+\nu} J_{n+\nu}, \quad \eta' \sum_1^n{}_\nu J_{n+\nu} = \sum_1^n{}_\nu b_{n+\nu} J_{n+\nu},$$

so ist natürlich

$$(21)\qquad \xi' = d - \xi, \qquad \eta' = \eta,$$

und aus den Bewegungsgleichungen (13) folgt für die Schwerpunktskoordinaten unter Benutzung von (17) und (18)

$$(22)\qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi'}{dt} = 0,$$

$$(23)\qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta'}{dt}.$$

Es gilt also hier nur der Satz, daß die x-Koordinate des Schwerpunkts des ursprünglich gegebenen Systems konstant bleibt; dagegen ist $\frac{d\eta}{dt}$ im allgemeinen von 0 verschieden. Existiert der Schwerpunkt nicht (d. h. ist $\sum_1^n{}_\nu J_\nu = 0$), so treten an die Stelle von (22) und (23) die Integrale

$$(24)\qquad \sum_1^n{}_\nu J_\nu a_\nu = \text{const}, \qquad \sum_1^n{}_\nu J_{n+\nu} a_{n+\nu} = \text{const},$$

$$(25)\qquad \sum_1^n{}_\nu J_\nu b_\nu + \sum_1^n{}_\nu J_{n+\nu} b_{n+\nu} = \text{const},$$

aber nur (24) enthält eine Aussage über die Systeme S und S' einzeln genommen. Die Beziehung (25) [bez. (23)] ist dagegen schon in den Gleichungen (15) enthalten.

Ebenso gelten vermöge derselben Gleichungen (15) der „Flächensatz" und der „Satz von der Erhaltung der Trägheitsmomente" bezüglich einer durch den Punkt $d/2$, 0 gehenden Achse für die Systeme S und S' zusammengenommen; sie gelten aber nicht für die beiden Systeme einzeln.

Dagegen ist das Integral

$$(26)\qquad W_1 = \text{const},$$

das sich ohne weiteres aus der Beziehung

$$\frac{dW_1}{dt} = \sum_1^{2n}{}_\nu \left(\frac{\partial W_1}{\partial a_\nu} \frac{da_\nu}{dt} + \frac{\partial W_1}{\partial b_\nu} \frac{db_\nu}{dt} \right)$$

und den Bewegungsgleichungen (13) ergibt, wieder unabhängig von den Gleichungen (15).

Als erste Anwendung der gewonnenen allgemeinen Gleichungen betrachten wir den Fall eines einzigen Wirbelfadens A von der Stärke J, und setzen also

$$J_1 = J; \quad J_2 = -J;$$
$$a_1 = a; \quad a_2 = d - a; \quad b_1 = b_2 = 0; \quad 0 < a < d/2.$$

Das Strömungsfeld berechnet sich dann aus dem Potential

$$\chi = \frac{J}{2\pi i} \lg \frac{\sin \frac{\pi}{d}[(x-a)+iy]}{\sin \frac{\pi}{d}[(x+a)+iy]},$$

und die Bewegung des Stromfadens aus

$$W = \frac{J^2}{2\pi} \lg \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{d}(a_1 - a_2)}.$$ [1])

Man findet daraus

$$\frac{da}{dt} = 0; \qquad \frac{db}{dt} = -\frac{J}{2d} \operatorname{ctg} \frac{2\pi a}{d}. \tag{27}$$

Für $a = d/4$ steht der Wirbelfaden fest; für $0 < a < d/4$ ist $\frac{db}{dt} < 0$, für $d/4 < a < d/2$ ist $\frac{db}{dt} > 0$. Je nach der Größe von a überwiegt also der Einfluß der einen oder anderen Wand. Ist a/d klein, so findet man in erster Annäherung

$$\frac{db}{dt} = -\frac{J}{4\pi a}, \tag{27'}$$

wie bei Abwesenheit der zweiten Wand.

An Stelle der Wand bei $x = d/2$ kann man sich auch bei $x = d$ eine Wand angebracht denken; man erhält dann das Strömungsfeld zweier Wirbel von entgegengesetzt gleicher Stärke, die sich beide mit der Geschwindigkeit (27) bewegen.

Als zweites Beispiel betrachten wir zwei Wirbel von gleicher Stärke in symmetrischer Anfangslage. In diesem Falle kann man setzen (vgl. Fig. 1):

1) In diesem Ausdruck müssen a_1 und a_2 stehen bleiben und bei der Differentiation wie zwei unabhängige Variable behandelt werden, sonst gelangt man zu einem fehlerhaften Resultat (vgl. S. 177).

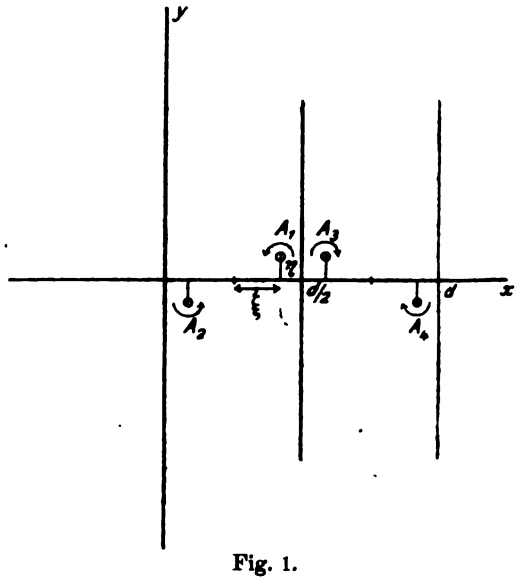


Fig. 1.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \quad J; & a_1 &= \quad d/4 + \xi; & b_1 &= \quad \eta; & & \\
J_2 &= \quad J; & a_2 &= \quad d/4 - \xi; & b_2 &= -\eta; & 0 < |\xi| &< d/4; \\
J_3 &= -J; & a_3 &= 3d/4 - \xi; & b_3 &= \quad \eta; & 0 < |\eta| &< d/4; \\
J_4 &= -J; & a_4 &= 3d/4 + \xi; & b_4 &= -\eta. & &
\end{aligned}
$$

Es ergeben sich die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$
\frac{d\xi}{dt} = -\frac{J}{2d}\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{4\pi\eta}{d}}{\operatorname{Cof}\frac{4\pi\eta}{d} - \cos\frac{4\pi\xi}{d}} - \operatorname{Tg}\frac{2\pi}{d}\eta\right],
$$

$$
\frac{d\eta}{dt} = \frac{J}{2d}\left[\frac{\sin\frac{4\pi\xi}{d}}{\operatorname{Cof}\frac{4\pi\eta}{d} - \cos\frac{4\pi\xi}{d}} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{d}\xi\right].
$$

Wir behandeln nur zwei Grenzfälle. Es seien erstens $\frac{4\pi\xi}{d}$ und $\frac{4\pi\eta}{d}$ kleine Größen, dann ist bis auf Glieder zweiter Ordnung in den genannten Größen

$$
\frac{d\xi}{dt} = -\frac{J}{4\pi}\frac{\eta}{\eta^2+\xi^2},
$$

$$
\frac{d\eta}{dt} = \frac{J}{4\pi}\frac{\xi}{\eta^2+\xi^2}.
$$

Das vollständige Integral dieser Gleichungen lautet

$$\xi = \varrho_0 \cos(\nu t + \gamma), \qquad \eta = \varrho_0 \sin(\nu t + \gamma), \qquad \nu = \frac{J}{4\pi \varrho_0^2},$$

und die beiden Wirbel rotieren also näherungsweise mit konstanter Geschwindigkeit in einem Kreise umeinander, genau wie bei Abwesenheit der Wände.

Ist andererseits $d/4 - \xi = \varepsilon$ eine kleine Zahl bei beliebigem η, so ergibt sich mit gleichem Grade der Annäherung

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0; \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{J}{4\pi\varepsilon},$$

in Übereinstimmung mit Formel (27′). Bei dem hier betrachteten Beispiel hängt es also von der Anfangslage ab, ob die beiden Wirbel in geschlossener Bahn verbleiben, oder unter dem Einflusse der Wände auseinanderlaufen.

Wir wenden uns nunmehr der Aufgabe zu, Strömungsfeld und Bewegung eines Systems von Wirbelfäden in einem prismatischen Raum von rechteckigem Querschnitt zu bestimmen. Die Gleichungen der Grenzebenen seien

$$x = 0; \qquad x = d/2; \qquad y = 0; \qquad y = d'/2.$$

Im folgenden bedeuten

$$\sigma(z), \qquad \zeta(z), \qquad \wp(z)$$

die Weierstrassschen Funktionen, welche zu den Perioden

(28) $$2\omega = d, \qquad 2\omega' = id'$$

gehören. Da ω reell und ω' rein imaginär ist, müssen die Invarianten g_2 und g_3, sowie die Wurzeln e_1, e_2, e_3 des zugehörigen Polynoms dritten Grades reell sein; die Diskriminante ist also positiv.[1]) Außer den genannten werden noch die Funktionen

$$\bar{\sigma}(z), \qquad \bar{\zeta}(z), \qquad \bar{\wp}(z)$$

Verwendung finden, die zu den Perioden

(29) $$2\bar{\omega} = \frac{2\omega'}{i}, \qquad 2\bar{\omega}' = 2i\omega$$

1) Die Bezeichnungen sind hier und im folgenden dem Werke G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques, Paris, Gauthier-Villars, 1886, entlehnt. Für die folgenden Rechnungen sei auf dieses Werk verwiesen.

gehören. Es bestehen dann die Beziehungen

$$(30)\quad \begin{cases} \sigma(iz) = \quad i\,\bar{\sigma}(z); & \zeta(iz) = -\,i\,\bar{\zeta}(z); \\ \chi(iz) = -\,\bar{\chi}(z); & \chi'(iz) = \quad i\,\bar{\chi}'(z). \end{cases}$$

Das Wirbelsystem S möge wie bisher aus n Wirbelfäden A_ν von der Stärke J_ν bestehen, und die Wirbelfäden mögen sich zu irgendeiner Zeit an den Stellen

$$r_\nu = a_\nu + i\,b_\nu, \qquad \nu = 1, 2 \ldots n$$

befinden. Wir spiegeln das System S an der Ebene $x = d/2$, wobei das System S' entstehen möge; dann spiegeln wir S und S' an der Ebene $y = d'/2$ und gelangen so zu S'' und S'''. Wir nehmen also insgesamt zu S noch drei weitere Systeme hinzu, unter folgenden Festsetzungen (vgl. Fig. 2):

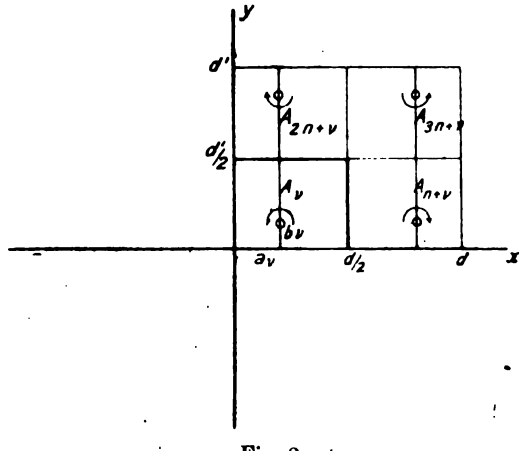


Fig. 2.

$$(31)\quad \begin{cases} \text{für } S': & J_{n+\nu} = -J_\nu; & a_{n+\nu} = d - a_\nu; & b_{n+\nu} = b_\nu \\ \text{für } S'': & J_{2n+\nu} = -J_\nu; & a_{2n+\nu} = a_\nu; & b_{2n+\nu} = d' - b_\nu \\ \text{für } S''': & J_{3n+\nu} = +J_\nu; & a_{3n+\nu} = d - a_\nu; & b_{3n+\nu} = d' - b_\nu. \end{cases}$$

Wir bilden nun das Potential

$$(32)\qquad \chi_2 = \frac{1}{2\pi i}\sum_1^{4n} J_\nu \lg \sigma(z - r_\nu),$$

wobei die Summation über alle vier Systeme zu erstrecken ist, und behaupten, daß es die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. In der Tat besitzt die durch (32) dargestellte Strömung die

vorgeschriebenen Wirbel, was sich genau so zeigen läßt, wie oben (vgl. S. 175). Die Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich aus

$$\frac{d\chi_2}{dz} = u - iv = \frac{1}{2\pi i}\sum_1^{4n} J_\nu \zeta(z - r_\nu) \tag{33}$$

nach bekannten Formeln zu

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi}\sum_1^{4n}{}_\nu \left[\bar{\zeta}(y-b_\nu) + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(y-b_\nu)}{\wp(x-a_\nu)+\bar{\wp}(y-b_\nu)}\right], \\ v &= \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4n}{}_\nu \left[\zeta(x-a_\nu) + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(x-a_\nu)}{\wp(x-a_\nu)+\bar{\wp}(y-b_\nu)}\right]. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Faßt man nun hier die je vier Summanden zusammen, die von den symmetrisch gelegenen Wirbeln A_ν, $A_{n+\nu}$, $A_{2n+\nu}$, $A_{3n+\nu}$ herrühren, so ergibt sich auf Grund der Festsetzungen (31)

$$\begin{aligned} u = 0 \quad &\text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = d/2 \quad \text{und} \\ v = 0 \quad &\text{für} \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y = d'/2, \end{aligned}$$

womit den Grenzbedingungen genügt ist. Die Lösung ist in diesem Falle eindeutig durch die Grenzbedingungen bestimmt (d. h. χ_2 bis auf eine additive Konstante festgelegt).

Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion ergeben sich aus (32) durch Trennung des reellen und imaginären Teils; man findet[1])

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4n}{}_\nu J_\nu [2\pi + \tfrac{1}{2}\Phi(x-a_\nu, y-b_\nu)], \\ \psi_2 &= -\frac{1}{2\pi}\sum_1^{4n}{}_\nu J_\nu \lg S_\nu, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

mit der Bedeutung

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(x-a_\nu, y-b_\nu) &= \int_0^{y-b_\nu} [\zeta(x-a_\nu+i(y-b_\nu)) + \zeta(x-a_\nu-i(y-b_\nu))]\,dy, \\ S_\nu &= \sigma(x-a_\nu)\,\bar{\sigma}(y-b_\nu)\sqrt{\wp(x-a_\nu)+\bar{\wp}(y-b_\nu)}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Auch in dem jetzt betrachteten Falle wirkt das durch einen einzelnen Summanden von (32) dargestellte Feld von un-

1) G. H. Halphen, 1. S. 173. 168. 151.

endlich vielen, in den Schnittpunkten eines rechteckigen Gitters angeordneten Wirbelfäden nicht auf einen dieser Wirbel. Das folgt einerseits aus Symmetriegründen, andererseits auch aus der Beziehung

$$\lim_{(z-r_\nu)=0} \frac{d}{dz} [\lg \sigma(z-r_\nu) - \lg(z-r_\nu)] = 0.$$

Man kann also zur Berechnung der Bewegung der Wirbelfäden A_ν genau so verfahren, wie oben (vgl. S. 177). Definiert man W_2 in der folgenden Weise:

$$(37) \quad \begin{cases} W_2 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu,\mu} J_\nu J_\mu \lg S_{\nu\mu}, & \left.\begin{matrix}\nu\\ \mu\end{matrix}\right\} 1, 2 \ldots 4n \\ S_{\nu\mu} = \sigma(a_\nu - a_\mu)\,\bar{\sigma}(b_\nu - b_\mu)\sqrt{\wp(a_\nu - a_\mu) + \bar{\wp}(b_\nu - b_\mu)}, \end{cases}$$

so lauten die Bewegungsgleichungen

$$(38) \quad \begin{cases} J_\nu \frac{da_\nu}{dt} = \frac{\partial W_2}{\partial b_\nu}, \\ J_\nu \frac{db_\nu}{dt} = -\frac{\partial W_2}{\partial a_\nu}. \end{cases} \qquad \nu = 1, 2 \ldots 4n$$

Die Summation in (37) ist über alle Paare zu erstrecken, die sich aus den $4n$ Wirbeln der Systeme S, S', S'', S''' bilden lassen, und die a_ν, b_ν für $\nu > n$ sind wieder als unabhängige Variable zu behandeln.

Aus (37) lassen sich genau wie oben die Relationen

$$(39) \quad \begin{cases} \frac{\partial W_2}{\partial a_\nu} = -\frac{\partial W_2}{\partial a_{n+\nu}} = \frac{\partial W_2}{\partial a_{2n+\nu}} = -\frac{\partial W_2}{\partial a_{3n+\nu}}, \\ \frac{\partial W_2}{\partial b_\nu} = \frac{\partial W_2}{\partial b_{n+\nu}} = -\frac{\partial W_2}{\partial b_{2n+\nu}} = -\frac{\partial W_2}{\partial b_{3n+\nu}} \end{cases}$$

herleiten, aus denen mit Hilfe der Bewegungsgleichungen gefolgert werden kann:

$$(40) \quad \begin{cases} \frac{da_\nu}{dt} = -\frac{da_{n+\nu}}{dt} = \frac{da_{2n+\nu}}{dt} = -\frac{da_{3n+\nu}}{dt}, \\ \frac{db_\nu}{dt} = \frac{db_{n+\nu}}{dt} = -\frac{db_{2n+\nu}}{dt} = -\frac{db_{3n+\nu}}{dt}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen besagen integriert, daß die Beziehungen (31) bei der Bewegung der Wirbelfäden erhalten bleiben, und daß demnach das Potential (32) den Strömungsvorgang als Funktion der Zeit richtig darstellt, wenn die a_ν, b_ν gemäß (38) berechnet werden.

Schwerpunkts- und Flächensatz gelten jetzt beide nicht mehr für das System S alleine betrachtet, und außer den Integralen von (40) bleibt jetzt nur noch das Integral

$$W_2 = \text{const} \tag{41}$$

bestehen.

Als Beispiel betrachten wir nur den einfachsten Fall, daß sich das System S auf einen Wirbelfaden von der Stärke J mit den Koordinaten a, b reduziert. Für diesen Fall sind Strömungsvorgang und Bewegungsgleichung schon von Greenhill[1]) angegeben worden, wenn auch in einer Form, die von der hier gegebenen abweicht. Aus den allgemeinen Gleichungen, die sich jetzt auf Summen mit vier Gliedern reduzieren [bez. bei (37) auf sechs Glieder], ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{J}{4\pi}\,\frac{\overline{\wp}'(2b)}{\wp(2a)+\wp(2b)}, \\ \frac{db}{dt} &= \frac{J}{4\pi}\,\frac{\wp'(2a)}{\wp(2a)+\overline{\wp}(2b)}. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Multipliziert man die erste der Gleichungen mit $\wp'(2a)$, die zweite mit $\overline{\wp}'(2b)$ und addiert, so gewinnt man ein erstes Integral:

$$\wp(2a)+\overline{\wp}(2b) = \text{const}. \tag{43}$$

Vermöge der bekannten Beziehung zwischen $\wp(z)$ und $\overline{\wp}'(z)$ kann man mit Hilfe von (43) das System (42) auf Quadraturen zurückführen; wir wollen uns aber damit begnügen, einen Grenzfall zu behandeln. Für $2a = d/2$ und $2b = d'/2$, d. h., wenn der Wirbel sich in der Mitte des prismatischen Raums befindet, ergibt sich $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 0$, der Wirbel ruht also dann. Wir wollen den Sonderfall betrachten, daß

$$\begin{aligned} 2a &= d/2 + \varepsilon, \\ 2b &= d'/2 + \varepsilon' \end{aligned}$$

gesetzt werden kann, wo ε und ε' kleine Größen (gegen d und d') sind. Unter dieser Annahme wird bis auf Glieder zweiter Ordnung

---

1) A. G. Greenhill, Quart. Journ. Math. 15. S. 10. 1887.

$$\wp(2a) + \bar{\wp}(2b) = e_1 - e_3 ,$$

und aus (42) wird

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{J}{\pi}(e_2 - e_3)\varepsilon' ,$$
$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{J}{\pi}(e_1 - e_3)\varepsilon .$$

Das vollständige Integral lautet

$$\varepsilon = A\cos(\lambda t + \gamma),$$
$$\varepsilon' = B\sin(\lambda t + \gamma),$$

mit den Werten

$$\lambda = \frac{J}{\pi}\sqrt{(e_2 - e_3)(e_1 - e_2)} .$$

$$A/B = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}} .$$

Der Wirbelfaden beschreibt also eine Ellipse, deren Achsenverhältnis von den Dimensionen des prismatischen Raumes abhängt [denn es ist ja $e_1 = \wp(\omega)$; $e_2 = \wp(\omega + \omega')$; $e_3 = \wp(\omega')$].

Wir wenden uns nun wieder der Betrachtung eines allgemeinen Falles zu, der in gewissem Sinne als Verallgemeinerung des zuerst behandelten Problems aufgefaßt werden kann. Spiegelt man nämlich das auf Seite 183 gekennzeichnete System S nur an der Ebene $x = d/2$ und erstreckt dementsprechend die Summe in (32) nur über die ersten $2n$ Summanden, so sind auch die Grenzbedingungen nur an den Ebenen $x = 0$ und $x = d/2$ erfüllt, und man gelangt zu einer Strömung zwischen parallelen Wänden, bei der sich das Strömungsbild jeweils im Abstande d' wiederholt. In diesem Falle muß aber noch eine Änderung an den Formeln angebracht werden. Es wurde schon auf Seite 176 darauf hingewiesen, daß durch die Grenzbedingungen für zwei parallele Wände die Lösung noch nicht eindeutig bestimmt ist, sondern daß noch eine Bedingung für das Verhalten im Unendlichen hinzutreten muß. Fordert man statt dessen hier, daß die Strömung sich in dem betrachteten Raum rein periodisch wiederholen soll, so werden dadurch einfach periodische Zusatzglieder im komplexen Potential ausgeschlossen. Dieses ist aber dadurch erst bis auf ein lineares Zusatzglied bestimmt; denn offenbar kann man stets eine beliebige konstante Geschwindigkeit in Richtung der

y-Achse hinzufügen, ohne die Grenzbedingungen zu verletzen oder die Periodizität zu stören. Um nun auch noch dieses lineare Zusatzglied festzulegen, fordern wir, daß sich für $y = \infty$ die Geschwindigkeit 0 ergibt, wenn man den Abstand d' (d. h. die imaginäre Periode) unendlich groß werden läßt.

Diesen Bedingungen kann man nicht genügen, wenn man von (4) als partikulärem Potential ausgeht, sondern man muß statt dessen die Funktion

$$\chi(z) = c\left(\lg\sigma(z-r) - \frac{\eta}{2\omega}(z-r)^2\right) \tag{44}$$

zugrunde legen, wobei wie üblich $\eta = \zeta(\omega)$ gesetzt ist. Mathematisch bedeutet das, von einem unwesentlichen Faktor abgesehen, den Ersatz der Weierstrassschen Funktion $\sigma(z)$ durch die Jacobi-Hermitesche Funktion $H(z)$, welche dieselben Nullstellen besitzt wie $\sigma(z)$, aber eine Periode (4ω) hat.

Nun unterscheidet sich (44) durch ein quadratisches Glied von (4), und das widerspricht scheinbar dem oben Gesagten. Es ist aber zu berücksichtigen, daß weder (4) noch (44) zu Strömungen führen, die den Bedingungen des Problems genügen, sondern erst die nach dem Spiegelungsprinzip gebildeten Differenzen

$$c\left(\lg\sigma(z-r_\nu) - \lg\sigma(z-r_{n+\nu})\right),$$

beziehungsweise

$$c\left[\left(\lg\sigma(z-r_\nu) - \frac{\eta}{2\omega}(z-r_\nu)^2\right) - \left(\lg\sigma(z-r_{n+\nu}) - \frac{\eta}{2\omega}(z-r_{n+\nu})^2\right)\right],$$

und diese zwei Ausdrücke unterscheiden sich nur um ein lineares Glied.

Bilden wir nun unter den Festsetzungen (5) das Potential

$$\chi_3 = \frac{1}{2\pi i}\sum_1^{2n} J_\nu\left[\lg\sigma(z-r_\nu) - \frac{\eta}{2\omega}(z-r_\nu)^2\right], \tag{45}$$

so genügt es allen oben aufgestellten Bedingungen. Die Strömungsgeschwindigkeiten berechnen sich nämlich aus

$$\frac{d\chi_3}{dz} = u - iv = \frac{1}{2\pi i}\sum_1^{2n} J_\nu\left[\zeta(z-r_\nu) - \frac{\eta}{\omega}(z-r_\nu)\right] \tag{46}$$

in genau derselben Weise, wie (34) aus (33), nur daß noch

lineare Zusatzglieder auftreten, und man überzeugt sich leicht, daß die Grenzbedingungen

$$u = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = d/2$$

erfüllt sind. Ferner ist (46) doppeltperiodisch (wegen $J_{n+\nu} = -J_\nu$), und für $d' = \frac{2\omega'}{i} = \infty$ wird (46) identisch mit (7), so daß auch der zuletzt ausgesprochenen Forderung auf S. 188 genügt ist.

Die Bewegung der Wirbelfäden berechnet sich aus

$$(47) \quad \left\{ W_3 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu,\mu} J_\nu J_\mu \left[\lg S_{\nu\mu} - \frac{\eta}{2\omega} ((a_\nu - a_\mu)^2 - (b_\nu - b_\mu)^2) \right], \right. \qquad \left. \begin{matrix} \nu \\ \mu \end{matrix} \right\} 1, 2 \ldots 2n$$

wo $S_{\nu\mu}$ die gleiche Bedeutung hat, wie in (37), und die Summation über alle Paare von S und S' zu erstrecken ist; auch die Bemerkung nach den Formeln (13) ist wieder zu beachten. Die Bewegungsgleichungen werden übereinstimmend mit (13), wenn man darin W_1 durch W_3 ersetzt.

Als erstes Beispiel betrachten wir den einfachen Fall, daß S nur aus einem Wirbel besteht, und setzen demgemäß

$$J_1 = J; \quad J_2 = -J; \quad a_1 = a; \quad a_2 = d - a; \quad b_1 = b_2 = 0; \quad 0 < a < d/2.$$

Aus den Bewegungsgleichungen findet man

$$(48) \qquad \frac{da}{dt} = 0; \qquad \frac{db}{dt} = -\frac{J}{2\pi} [\zeta(2a) - \frac{\eta}{\omega} 2a].$$

Die Strömung wird in diesem Falle aus einer unbegrenzten Reihe von gleichen Wirbeln gebildet, die sich im Abstande d' voneinander zwischen zwei ebenen Wänden durchbewegen. Für $a = d/4 = \omega/2$ wird $\frac{db}{dt} = 0$, und das System steht also dann fest. Läßt man d' unendlich werden, so gelangt man zu dem ersten Beispiel auf S. 180 zurück, und (48) geht in (27) über.

Denkt man sich die Wand bei $x = d/2$ beseitigt und durch eine andere Wand bei $x = d$ ersetzt, so wird aus der einfachen Wirbelreihe eine Doppelreihe, bei der die Wirbel der einen Reihe entgegengesetzten Rotationssinn haben, wie die der anderen. Läßt man nun hier die reelle Periode $d = 2\omega$ unendlich werden, so ergibt sich aus (48)

$$\frac{db}{dt} = -\frac{J}{2d'} \operatorname{Ctg} \frac{\pi}{d'} 2a,$$

und man erhält den ersten der beiden von v. Kármán untersuchten Fälle, der allerdings unstabil ist.

Als zweites Beispiel lassen wir S aus zwei gleichen, entgegengesetzt rotierenden Wirbelfäden bestehen, in einer Anordnung, die aus Fig. 3 hervorgeht. Wir setzen

$$\begin{array}{lll} J_1 = J; & a_1 = a; & b_1 = 0 \\ J_2 = -J; & a_2 = d/2 - a; & b_2 = d'/2 \\ J_3 = -J; & a_3 = d - a; & b_3 = 0 \\ J_4 = J; & a_4 = d/2 + a; & b_4 = d'/2. \end{array} \qquad 0 < a < d/4.$$

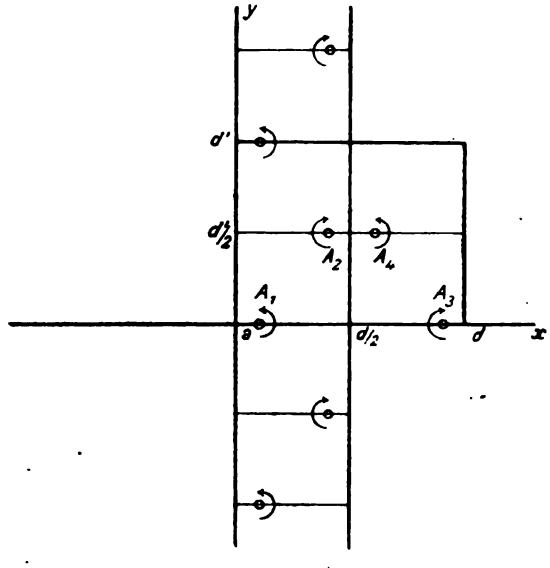


Fig. 3.

Die allgemeinen Formeln liefern dann nach einiger Umrechnung

$$(49) \quad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = 0, \\ \dfrac{db}{dt} = \dfrac{J}{2\pi}\left[2\zeta(2\delta) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'(2\delta)}{\wp(2\delta) - e_3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'(2\delta)}{\wp(2\delta) - e_1} - \dfrac{\eta}{\omega} 4\delta\right], \end{cases}$$

wobei

$$d/4 - a = \delta$$

gesetzt ist. Läßt man nun hier die reelle Periode d unendlich werden, jedoch so, daß δ endlich bleibt, so gelangt man

zu dem zweiten v. Kármánschen Fall, der für ein bestimmtes Verhältnis von δ zu d' eine stabile Strömung darstellt. In dem angegebenen Grenzfall wird aus (49)

$$\frac{db}{dt} = \frac{J}{2d'} \operatorname{Tg}\left(\frac{\pi}{d'} 2\delta\right), \tag{49'}$$

in Übereinstimmung mit dem v. Kármánschen Resultat.

Die beiden zuletzt gegebenen Beispiele, wie überhaupt die durch (45) dargestellten Strömungen sind interessant als Fälle von nichtlaminarer, fortschreitender Wirbelströmung zwischen ebenen Wänden. Möglicherweise kann man aus den hier gegebenen Entwicklungen einen Ansatz für den Widerstand gewinnen, den eine Flüssigkeit bei nichtlaminarer Strömung zwischen zwei Wänden erfährt. Dafür muß aber zunächst die Stabilität der Gebilde untersucht werden.

2. Quellenströmung.

Multipliziert man das komplexe Potential einer zweidimensionalen Wirbelströmung mit der imaginären Einheit i, so vertauschen Geschwindigkeitspotential φ und Stromfunktion ψ ihre Rolle, und aus jedem Wirbelfaden A_ν von der Stärke J_ν wird eine Quellinie von der Ergiebigkeit J_ν. Dabei werden aus den Grenzflächen Äquipotentialflächen; die Potentiale (6), (32) und (45) stellen also nach der Multiplikation mit i Lösungen der entsprechenden elektrostatischen Probleme dar. Will man dagegen zu Quellenströmungen gelangen, bei denen wie bisher die Grenze eine Strömungsfläche ist, so muß man bei der Spiegelung so verfahren, daß das Bild einer Quelle gleiche Ergiebigkeit hat, wie diese. Hier tritt dann die neue Bedingung hinzu, daß die Gesamtergiebigkeit des betrachteten Systems 0 sein muß, wenn die Strömung bei geschlossener Begrenzung überhaupt möglich sein, und bei nicht geschlossener Begrenzung sich nicht ins Unendliche erstrecken soll.

Wir betrachten also jetzt ein System S, das aus k Quellinien (bez. Senken) $B_\varkappa$ von der Ergiebigkeit $M_\varkappa$ besteht ($\varkappa = 1, 2, \ldots k$) mit der einschränkenden Bedingung

$$\sum_1^k{}_\varkappa M_\varkappa = 0. \tag{50}$$

Das Strömungsfeld sei durch die Ebenen $x = 0$ und $x = d/2$ begrenzt, und die Quellen mögen sich unbeweglich an den Stellen

$$\varrho_\varkappa = \alpha_\varkappa + i\beta_\varkappa, \qquad \varkappa = 1, 2 \ldots k$$

befinden.

Nehmen wir nun das gespiegelte System S' hinzu durch die Festsetzungen

$$M_{k+\varkappa} = M_\varkappa; \qquad \alpha_{k+\varkappa} = d - \alpha_\varkappa; \qquad \beta_{k+\varkappa} = \beta_\varkappa, \tag{51}$$

so löst das Potential

$$\chi'_1 = \varphi'_1 + i\psi'_1 = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{2k} M_\varkappa \lg \sin\frac{\pi}{d}(z - \varrho_\varkappa) \tag{52}$$

die Bedingungen der Aufgabe. Denn es hat die vorgeschriebenen Quellen, und aus

$$\frac{d\chi'_1}{dz} = u - iv = \frac{1}{2d}\sum_1^{2k} M_\varkappa \operatorname{ctg}\frac{\pi}{d}(z - \varrho_\varkappa) \tag{53}$$

ergeben sich für die Strömungsgeschwindigkeiten die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{2d}\sum_1^{2k} M_\varkappa \frac{\sin\frac{2\pi}{d}(x - \alpha_\varkappa)}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi}{d}(y - \beta_\varkappa) - \cos\frac{2\pi}{d}(x - \alpha_\varkappa)}, \\ v &= \frac{1}{2d}\sum_1^{2k} M_\varkappa \frac{\mathfrak{Sin}\frac{2\pi}{d}(y - \beta_\varkappa)}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi}{d}(y - \beta_\varkappa) - \cos\frac{2\pi}{d}(x - \alpha_\varkappa)}, \end{aligned}\right. \tag{54}$$

aus denen sich für $x = 0$ und $x = d/2$ die Grenzbedingung $u = 0$ als erfüllt ergibt. Außerdem ist für $y = \infty$

$$u = 0 \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2d}\sum_1^{2k} M_\varkappa = 0.$$

Geschwindigkeitspotential φ' und Stromfunktion ψ' findet man aus (52) analog wie oben (S. 176):

$$\left\{\begin{aligned} \varphi'_1 &= \frac{1}{2\pi}\sum_1^{2k} M_\varkappa \lg s'_\varkappa, \\ \psi'_1 &= \frac{1}{2\pi}\sum_1^{2k} M_\varkappa \tau'_\varkappa, \end{aligned}\right. \tag{55}$$

mit der Bedeutung

$$(56)\quad \begin{cases} s'_\varkappa = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{d}(x-\alpha_\varkappa) + \operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{d}(y-\beta_\varkappa)}, \\ \operatorname{tg}\tau'_\varkappa = \dfrac{\operatorname{Tg}\frac{\pi}{d}(y-\beta_\varkappa)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{d}(x-\alpha_\varkappa)}. \end{cases}$$

Gehen wir nun zu dem Fall des prismatischen Raumes über, wie er auf S. 182 charakterisiert ist, so muß man zu dem System S drei weitere gespiegelte Systeme S', S'' und S''' hinzunehmen. Wir treffen also folgende Festsetzungen (vgl. Fig. 2):

$$(57)\quad \begin{cases} \text{für } S': & M_{k+\varkappa} = M_\varkappa; & \alpha_{k+\varkappa} = d-\alpha_\varkappa; & \beta_{k+\varkappa} = \beta_\varkappa; \\ \text{für } S'': & M_{2k+\varkappa} = M_\varkappa; & \alpha_{2k+\varkappa} = \alpha_\varkappa; & \beta_{2k+\varkappa} = d'-\beta_\varkappa; \\ \text{für } S''': & M_{3k+\varkappa} = M_\varkappa; & \alpha_{3k+\varkappa} = d-\alpha_\varkappa; & \beta_{3k+\varkappa} = d'-\beta_\varkappa; \end{cases}$$

und bilden das Potential

$$(58)\quad \chi'_2 = \varphi'_2 + i\psi'_2 = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa \lg\sigma(z-\varrho_\varkappa).$$

Unter der Voraussetzung (50) löst dieses Potential die Aufgabe. Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion sind in diesem Falle

$$(59)\quad \begin{cases} \varphi'_2 = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa \lg\sigma(x-\alpha_\varkappa)\,\bar{\sigma}(y-\beta_\varkappa)\sqrt{\wp(x-\alpha_\varkappa)+\bar{\wp}} - \\ \psi'_2 = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa [2\pi + \tfrac{1}{2}\Phi(x-\alpha_\varkappa,\ y-\beta_\varkappa)], \end{cases}$$

und aus dem Differentialquotienten von χ'_2

$$(60)\quad \frac{d\chi'_2}{dz} = u - iv = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa \zeta(z-\varrho_\varkappa),$$

findet man für die Geschwindigkeiten

$$(61)\quad \begin{cases} u = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa\left[\zeta(x-\alpha_\varkappa) + \frac{1}{2}\dfrac{\wp'(x-\alpha_\varkappa)}{\wp(x-\alpha_\varkappa)+\bar{\wp}(y-\beta_\varkappa)}\right], \\ v = \frac{1}{2\pi}\sum_1^{4k} M_\varkappa\left[\bar{\zeta}(y-\beta_\varkappa) + \frac{1}{2}\dfrac{\bar{\wp}'(y-\beta_\varkappa)}{\wp(x-\alpha_\varkappa)+\bar{\wp}(y-\beta_\varkappa)}\right]. \end{cases}$$

Beschränkt man sich auf den Fall einer Quelle und einer gleich starken Senke, d. h., setzt man in den Formeln (57) bis,

(61) $k = 2$, so lösen diese Gleichungen das Problem der Elektrizitätsleitung in einer rechteckigen Platte mit beliebig gestellten Elektroden.

Aus der Superposition von (6) mit (52), oder von (32) mit (58) erhält man die allgemeinste zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zwischen parallelen Platten, bez. in einem rechteckigprismatischen Raum, soweit dieselbe von isolierten Wirbelfäden und Quellinien herrührt. Dabei ist natürlich noch zu berücksichtigen, daß — bei festgehaltenen Quellen — die Wirbel sich nicht nur unter ihrem gegenseitigen Einfluß, sondern auch durch die Wirkung der Quellen bewegen. Dieser Wirkung ist leicht mit Hilfe der Funktionen (55) bez. (59) Rechnung zu tragen, so daß von einer Aufstelluug der Gleichungen abgesehen werden kann. Auch der Übergang zu kontinuierlich ausgedehnten Wirbel- und Quellgebieten begegnet keiner prinzipiellen Schwierigkeit.

Leipzig, im August 1919.

(Eingegangen 14. August 1919.)

5. *Versuch einer einheitlichen Erklärung der Erscheinungen der atmosphärischen Polarisation;* von *Marie Anna Schirmann.*

§ 1. Einleitung.

Die Probleme der normalen atmosphärischen Polarisation gehören in jenes Gebiet der meteorologisch-optischen Phänomene, in welchem die Atmosphäre die Rolle eines trüben Mediums spielt, in der als der Trägerin kleiner, bereits mit der Lichtwellenlänge vergleichbarer und noch kleinerer Teilchen die einfallenden Wellen an den Störungszentren gebeugt und somit die primäre Strahlung zum Teil diffus zerstreut wird.

Da man nach dem heutigen Stande der Kosmophysik noch immer nicht mit Sicherheit weiß, welcher Art die trübenden Partikel in der Atmosphäre sind und welches das für die Größe der Teilchen geltende Verteilungsgesetz ist, so haftet den Theorien zur Erklärung dieser optischen Erscheinungen noch immer eine gewisse Unsicherheit und Uneinheitlichkeit an.

Dies hat auch nicht zum geringsten Teil darin seinen Grund, daß man Theorie, Beobachtung und Experiment vor allem der Extinktion und Absorption des direkten Lichtes einerseits, der Intensität und Farbe des diffusen Lichtes andererseits zuwandte, während man die zweifellos *empfindlichste* Erscheinung der *Polarisation* bis nun nicht kritisch untersuchte.

Im Folgenden soll nun versucht werden, auf Grund der Ergebnisse meiner Arbeit über „*Polarisiertes Licht am Einzelteilchen*“[1]) bloß für Fremdkörperpartikel in der Atmosphäre aus deren Größe und optischem Verhalten unter Ausschaltung jeglicher Sekundärdiffusion des Lichtes die Gesamtheit der Phänomene der atmosphärischen Polarisation in qualitativer Hinsicht einheitlich zu erklären.

1) M. A. Schirmann, Ann. d. Phys. 59. S. 493. 1919.

Die Frage, inwieweit die Gase durch atomistische Natur, spontan eintretende Dichteschwankungen infolge der Molekularbewegung und Richtungsschwankungen[1]) infolge der Anisotropie gewisser Molekeln als Trübungen im „Äther" einen Anteil an den *einfachsten* dieser Erscheinungen haben, ist für die gestellte Aufgabe nicht entscheidend, da eine quantitative Lösung der optisch-atmosphärischen Probleme wegen der Kompliziertheit der Konsistenz der Atmosphäre ohnedies kaum möglich sein wird.

§ 2. Die Polarisation des diffusen Lichtes in trüben Medien und in der Atmosphäre.

Die erste Stütze für die Berechtigung der Annahme, daß die Atmosphäre ein natürliches trübes Medium wäre, war die rohe Übereinstimmung der Farben- und Polarisationserscheinungen in dieser mit denen in künstlichen trüben Medien.

Wäre die damals noch sehr unvollkommene Theorie der Optik der Atmosphäre als trübes Medium bei Deutung der komplizierten Polarisationsverhältnisse nicht von größerem Einfluß gewesen als das Experiment, so hätte man bei jenen Versuchen auch Analoga zu den differenzierteren Polarisationseffekten gefunden und wäre natürlicherweise auf die in vorliegender Studie versuchte einheitliche Erklärungsweise durch eine in Hinsicht auf Größe und optische Konstanten der Partikel allgemeine elektromagnetische Beugungstheorie gekommen. Diese in der meteorologischen Optik vielfach als optische Anomalien gedeutete differenziertere Polarisationserscheinungen sind: Die partielle Polarisation im Maximum der Polarisation, die spektrale Polarisation, die negative Polarisation und die durch den stetigen Übergang von positiver zu negativer Polarisation bedingten sogenannten neutralen Punkte mit natürlichem Licht.

Ich habe nun in einem diesbezüglichen Artikel in der Meteorologischen Zeitschrift[2]) auf die Existenz analoger Erscheinungen bei Experimenten mit verschiedenen Suspensionen in Gasen und Flüssigkeiten ausführlich hingewiesen. Diese schon durch die Verschiedenheit der Partikel unter-

1) M. Born, Verh. d. Deutschen Phys. Ges. **19.** S. 243. 1917; **20.** S. 16. 1918.

2) M. A. Schirmann, Met. Zeitschr. wird demnächst erscheinen.

einander nicht mehr ganz berechtigte Parallele reicht jedoch streng genommen nur so weit, als die Atmosphäre durch die in ihr suspendierten Nebeltröpfchen, Staubteilchen, ferner gasförmigen und flüssigen, durch ultraviolettes Licht erzeugten Kondensationskerne luftfremder hygroskopischer Substanzen[1]) charakteristisch ist.

Eine gewisse Korrektur dazu bringt die Berücksichtigung der Gestalt der Atmosphäre, der Partikel in ihr und des Beobachtungsstandpunktes auf dem ringsum von der Atmosphäre umschlossenen Erdkörpers.

Nicht uninteressant ist eine diesen letzten Punkt betreffende Erscheinung: Neben den außerordentlichen neutralen Punkten (wahrscheinlich Superpositionspunkten zufällig gleicher positiver und negativer Polarisationsgrößen an derselben Stelle, da ihr Zustandekommen an einen außerordentlichen Zustand der Atmosphäre geknüpft ist) existieren oberhalb der Sonne und ihres Gegenpunktes der Babinetsche und der Aragosche Punkt, unterhalb der Sonne der Brewstersche Punkt. Wegen der Symmetrie der Beleuchtung ober- und unterhalb der Sonne müßte auch ein dem Aragoschen Punkt entsprechender neutraler Punkt unterhalb des Gegenpunktes der Sonne existieren. Bei den Meteorologen herrscht die Ansicht, daß dieser Punkt — aus der Sekundärdiffusion gedeutet — bloß wegen der Lichtschwäche nicht zur Beobachtung kommt, da hierzu die Sonne ziemlich tief unter dem Horizont stehen müßte. Diese Deutung ist unwahrscheinlich, da sie auf der im gegebenen Fall unendlich verdünnter Suspensionen (in der Atmosphäre) kaum möglichen Sekundärdiffusion (d. i. Zerstreuung des bereits einmal zerstreuten Lichtes an den Partikeln) beruht, und wird durch die Tatsache überflüssig, daß die anvisierte Stelle nicht primär diffus zerstreut, weil sie durch das Hindernis der Erde kein direktes Licht erhält. Auf das Kriterium für das Auftreten sekundärer Diffusion wird noch im folgenden Paragraph hingewiesen werden.

§ 8. Folgerungen aus der Theorie.

Die Rayleighsche Theorie, die ursprünglich für trübende Fremdkörperpartikel gedacht war, gibt in ihrer ersten Fassung

1) A. Wigand, Met. Zeitschr. **30.** S. 10. 1913; W. Bieber, Met. Zeitschr. **31.** S. 358. 1914.

für Partikel, die unendlich klein gegen die Lichtwellenlänge sind und deren Dielektrizitätskonstante ε sich von 1 nur um eine differentiale Größe unterscheidet, bloß die durch die bekannte Gleichung

$$P(\gamma) = \frac{\sin^2\gamma}{1 + \cos^2\gamma}$$

(Polarisationsgröße als Funktion des Winkels gegen die Einfallsstrahlen) schematisierten einfachsten Polarisationsverhältnisse. Über partielle Polarisation im Maximum, über spektrale Polarisation und über das stetige Übergehen von positiver in negative Polarisation wird nichts ausgesagt.

Die Erweiterung der ursprünglichen Theorie Rayleighs für größere Kügelchen von der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon > 1$ läßt schon folgende Schlüsse zu: 1. Daß weißes einfallendes Licht in keiner Richtung vollständig polarisiert wird, da die totalpolarisierten Strahlen für die verschiedenen Farben nebeneinander liegen und sich den partiell polarisierten anderer Farben superponieren. 2. Daß monochromatisches einfallendes Licht bei verschiedenen großen Partikeln auch in keiner Richtung vollständig polarisiert wird, da eine bestimmte Wellenlänge relativ zur Teilchengröße kleiner oder größer ist, ja nachdem die Teilchen größer oder kleiner sind. Daraus folgt eine Aussage über spektrale Polarisation und daraus wieder eine über partielle Polarisation im Maximum; jedoch nur bei weißem einfallendem Licht bei gleich großen und um so eher bei ungleich großen Partikeln und bei monochromatischem Licht bei verschieden großen Partikeln. Die Erklärung negativer Polarisation und neutraler Punkte ist die Rayleighsche Theorie schuldig geblieben.

Soret und später Hurion bauen dann auf Grund der Annahme einer zusätzlichen sekundären Diffusion unter gewisser Berücksichtigung der Gestalt der Atmosphäre und der Partikelverteilung in ihr die Rayleighsche Theorie weiter aus, so daß sie die partielle Polarisation im Maximum, die negative Polarisation und die neutralen Punkte und schließlich unter Berücksichtigung spektraler Extinktion für die Sekundärdiffusion[1]) die spektrale Polarisation zwischen Sonne

1) H. Dember u. M. Uibe, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. **69.** S. 149. 1917.

bzw. antisolaren Punkt und den neutralen Spektralbändern erklären könnte. Diese Erklärungsweise ist aber einseitig, da sie bloß aus atmosphärischen Eigenheiten die Erscheinungen der negativen Polarisation und der neutralen Punkte erklärt, während diese Phänomene schon bei Versuchen mit künstlichen trüben Medien auftreten; sie ist unnatürlich, da beträchtliche sekundäre Diffusion zugrunde gelegt ist, die aber nur dort in Erscheinung tritt, wo die Partikeln sehr eng beisammen liegen, wie eine Berechnung von Maxwell-Garnett[1]) auf Grund der Theorie von L. Lorenz[2]) für sehr kleine Partikel erweist; schließlich ist sie unvollständig, da die Erklärungsweise für die spektrale Polarisation für kleine Teilchen — eine Erscheinung, die tatsächlich im ganzen Gebiet zwischen Sonne und Gegenpunkt der Sonne vorhanden ist — sich nur auf die kleinen Gebiete von 0° bzw. 180° zur Einfallsstrahlenrichtung bis zum neutralen Streifen bei Sonne und Gegensonne beschränkt.

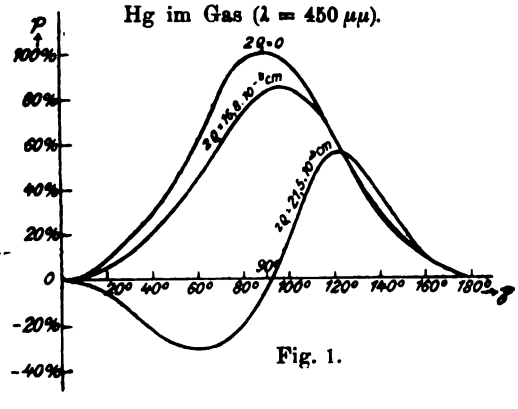


Fig. 1.

Da sich doch die Existenz größerer, stets in der Atmosphäre vorhandener Partikel[3]) und der ihnen eigentümlichen optischen Konstanten — wenn auch über die Art der Teilchen zurzeit noch nichts sicheres feststeht — bei allen optischen Phänomenen der Atmosphäre als trübes Medium nicht nur quantitativ, sondern ganz besonders *qualitativ* von Einfluß zeigen muß, so liegt es doch nahe, diese natürlichen Voraussetzungen auch für die *differenzierteren* Polarisationsphänomene verantwortlich zu machen; und zwar um so eher, als diese eine verläßliche experimentelle Stütze haben, während die

1) J. C. Maxwell-Garnett, Phil. Trans. **203.** S. 385. 1904; **205.** S. 237. 1906.

2) L. Lorenz, Wied. Ann. **11.** S. 70. 1880.

3) H. Schmidt, Met. Zeitschr. **35.** S. 105. 1918.

sekundäre Diffusion bei den in der Atmosphäre gegebenen Verhältnissen noch einer sicheren Grundlage entbehrt.

In meiner bereits einmal zitierten Arbeit habe ich nun durch eingehendes theoretisches Studium der Polarisation am *Einzelteilchen* für einige absorbierende und dielektrische Medien nicht nur die in diesen beiden Fällen bezüglich der Richtung verschiedene Abhängigkeit der Polarisationsgröße vom Partikelradius bei monochromatischem Licht (Fig. 1 und 2) nachgewiesen, sondern auch die in den genannten Fällen bezüglich der Richtung verschiedene spektrale Polarisation[1]) für Partikel bestimmten Materials und bestimmter Größe.

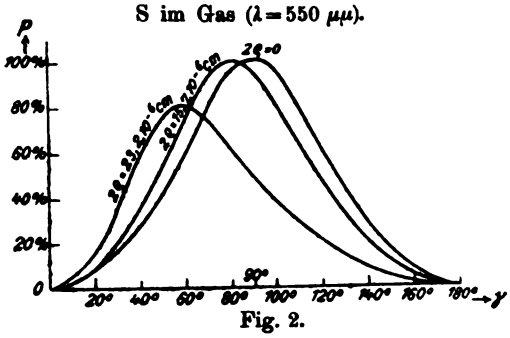


Fig. 2.

Ferner ergeben die Untersuchungen stets partielle Polarisation im Maximum, dann unter gewissen Voraussetzungen negative Polarisation und einen oder zwei neutrale Punkte.

§ 4. Zusammenfassung.

Auf Grund der eben angeführten theoretischen Resultate läßt sich behaupten: Die elektromagnetische Beugungstheorie ist imstande, die Gesamtheit der Probleme der atmosphärischen Polarisation aus der Größe und dem optischen Verhalten der trübenden Partikelchen der Atmosphäre *einheitlich* zu erklären.

Eine qualitative Lösung aller Probleme der meteorologischen Optik, bei denen die Atmosphäre die Rolle eines trüben Mediums spielt, wäre nur dann möglich, wenn das Problem der Diffusion und Absorption für die speziellen Arten der Partikel in der Atmosphäre (Wassertröpfchen, Staubpartikel usw.) numerisch durchgerechnet würde.

Wien. I. phys. Institut d. Universität.

1) M. A. Schirmann, a. a. O., S. 17—19 u. 29. 30.

(Eingegangen 14. August 1919.)

6. *Läßt sich ein Einfluß der Kristallstruktur auf α-Strahlen nachweisen?*

von Karl Heil.

(Freiburger Dissertation.)

Einleitung.

Schon lange vermutete man, daß der bestimmten Regelmäßigkeit der Kristalle in der Gestalt auch eine solche in der Anordnung ihrer kleinsten Teile entspreche. Bravais stellte schon 1850 eine Theorie auf, nach der die Atome der Kristalle in Raumgittern angeordnet sind. Aber erst die Entdeckung der Röntgenstrahlen und der radioaktiven Strahlen machten eine Nachprüfung dieser Theorie möglich. Laue, Friedrich und Knipping gelang mit der bekannten Arbeit der Nachweis derartiger Raumgitter. Es folgten viele andere Arbeiten, die u. a. den Aufbau solcher Gitter für verschiedene Kristalle zeigten.[1 u. 2]) Hupka und Steinhaus[3]) und W. H. Bragg und W. L. Bragg[4]) erklärten die Resultate ihrer Untersuchungen aus der schichtenweise Anordnung der Moleküle.

Die regelmäßige Anordnung der Kristallmoleküle ist also nicht zu bestreiten. Die erwähnten Resultate wurden mit Hilfe der Röntgenstrahlen gewonnen.

Nun hat N. Bohr[5]) aus der Bremswirkung und der Streuung der Materie auf die korpuskularen α-Strahlen eine Abhängigkeit ihrer Reichweite und Richtung von den Schwingungen der Elektronen der durchsetzten Materie abgeleitet. Er kommt dabei zu der Auffassung, daß das Atom aus einem positiven

---

1) P. P. Ewald, Ann. d. Phys. 44. S. 257. 1914.

2) A. Johnson, Phys. Zeitschr. 15. S. 712. 1914.

3) E. Hupka u. W. Steinhaus, Verh. d. phys. Ges. 15. S. 712. 1914.

4) W. H. Bragg und W. L. Bragg, Proc. of the Roy. Soc. 88. S. 428. 1913.

5) N. Bohr, Phil. Mag. 25. S. 10. 1913.

Zentralkern besteht, der von Elektronen umgeben ist. Zu ähnlichen Resultaten waren auch E. Rutherford[1]) und andere gekommen.

Nun lag es nahe, zu untersuchen, ob nicht die in einem Kristall so regelmäßig angeordneten Atome, auf die den Kristall durchdringenden α-Strahlen je nach der Richtung, in der dies geschieht, einen wechselnden Einfluß ausüben. Man kann zwar bei korpuskularen Strahlen nicht die gleichen Erscheinungen erwarten, wie bei einer Wellenbewegung im Falle der Röntgenstrahlen, doch ließe sich einerseits vermuten, daß die in Kristallen in Vorzugsrichtungen schwingenden Elektronen auf das von dem α-Teilchen mitgeführte, elektrische Feld verschiedene Wirkung haben, je nach dem Winkel, unter dem dies an den Atomen vorbeigeht. Andererseits kann man an besondere Durchgangskanäle oder -Schichten denken, wie sie früher einmal von Stark[2]) zur Erklärung der Wirkung von Röntgenstrahlen angenommen worden waren.

Auf Veranlassung von Hrn. Prof. M. Reinganum unternahm ich es in den Jahren 1913 und 1914 im physikalischen Institut der Universität Freiburg i. Br., dahingehende Untersuchungen anzustellen, deren Ergebnisse ich in Nachstehendem wiedergebe.

Ein Einfluß der Kristallstruktur auf α-Strahlen kann sich äußern:

1. in der Reichweite,
2. in der Streuung.

Ich untersuchte zunächst den Einfluß auf die Reichweite.

1. Einfluß auf die Reichweite.

Der Einfluß auf die Reichweite wurde nach zwei Methoden untersucht, einer photographischen und einer elektrometrischen.

a) Photographische Methode.

Gehen von einem Punkte dicht über einer photographischen Platte α-Strahlen aus, so treffen sie die Platte innerhalb einer Kreisfläche, deren Durchmesser von dem Abstand des Präparates und von der Reichweite der α-Strahlen in Luft abhängig ist.

1) E. Rutherford, Phil. Mag. 21. S. 669. 1911.
2) J. Stark, Phys. Zeitschr. 13. S. 973. 1913.

Befindet sich nun zwischen Präparat und Platte eine sehr dünne Kristallplatte, so wird der Fleck zunächst bedeutend kleiner, da die schräger einfallenden Strahlen infolge der Bremswirkung des Kristallplättchens nicht mehr durchdringen. Ist diese Bremswirkung in den einzelnen Richtungen verschieden, so ist es auch der entsprechende Einfallswinkel der äußersten noch durchdringenden Strahlen, d. h. es tritt eine Veränderung der Kreisfigur des Fleckes ein.

Unter Umständen könnte die Wirkung auch nur darin bestehen, daß das Aussehen der Bahnen der α-Teilchen auf der photographischen Platte an der Peripherie des Kreises in verschiedenen Richtungen verschieden ist. Es sei hier bemerkt, daß nach den Untersuchungen von Kinoshita[1]) die Schwärzung der Platte vom Anfang bis zum Ende der Bahn des α-Teilchens in der lichtempfindlichen Schicht konstant bleibt und dann plötzlich auf Null herabsinkt. Auch meine Aufnahmen bestätigen das. Es steht dies in bemerkenswertem Gegensatz zur Ionisation.

Zu allen Untersuchungen wurden die α-Strahlen des RaF (Polonium) verwendet. Um brauchbare Resultate zu erzielen, mußte die Strahlungsquelle möglichst punktförmig sein. Zu diesem Zweck wurde ein starkes Poloniumpräparat mit einer Nadelspitze berührt. Es wurden möglichst feine Nähnadeln benutzt. Die Spitze wurde unter dem Mikroskop geprüft und eventuell nachher von seitlich ansitzenden Körnchen befreit. Sie durfte nur vorne einen schwarzen Punkt haben. Um ein Abfallen des Körnchens zu verhindern, war die Nadelspitze vor dem Polonisieren mit einer Spur Zaponlack versehen worden.

Es ist leicht zu sehen, daß bei größerem Abstand der Nadelspitze von dem Kristallplättchen die Figur des Fleckes immer weniger von der Kreisform abweichen, der gesuchte Effekt sich immer weniger bemerkbar machen wird. Die Abweichung muß um so größer sein, je dichter sich die Nadelspitze über der Platte befindet. Dagegen hat die Entfernung des Kristallplättchens von der photographischen Platte keinen Einfluß darauf. Da aber die Reichweite der α-Strahlen durch den Durchgang durch den Kristall schon erheblich vermindert

1) S. Kinoshita, Proc. of the Roy. Soc. A 83. S. 432. 1910.

wird, empfahl es sich, das Kristallplättchen direkt auf die photographische Platte zu legen.

Gemäß den Ergebnissen von M. Reinganum[1]), sowie den sich anschließenden Untersuchungen von Michl[2]) und Fr. Mayer[3]) wurden photomechanische Platten (von R. Jahr in Dresden) verwandt. Für eine schleierfreie Entwicklung ergab Hydrochinonentwickler in der Verdünnung 1:5 die besten Resultate.

Untersucht wurden dünne Kristallplättchen aus hellem Glimmer (Muscovit), der in der üblichen Weise gespalten wurde, ferner aus Gips und Quarz, die von Fuess in Berlin-Steglitz in einer Dicke von nur 10 μ bezogen worden waren. Leider gelang es der Firma nicht, diesen äußerst dünnen Plättchen eine spiegelglatte Oberfläche zu geben, sondern sie hatten, besonders das Gipsplättchen, eine etwas gekräuselte Oberfläche, wie unter dem Mikroskop deutlich zu erkennen war. Dies beeinträchtigte naturgemäß die Sicherheit meiner Versuche, da gerade bei diesen Kristallen, wenn wenigstens die optische Analogie soweit Gültigkeit hat, ein größerer Effekt zu erwarten ist, als bei Glimmer, dessen in die Spaltfläche fallenden Achsen sich optisch sehr wenig voneinander unterscheiden.

Der Quarz war parallel zur optischen Achse geschliffen. Das Gipsplättchen war ein Spaltplättchen, also war seine Fläche parallel der Ebene zweier Elastizitätsachsen. Die Plättchen durften wegen ihrer starken Bremswirkung nicht dicker sein.

Zur Aufnahme wurde die Nadel mit dem stumpfen Ende in eine größere Korkscheibe gesteckt und mit ihrer Hilfe senkrecht auf die Kristallplatte gestellt. Um eine Beschädigung der zerbrechlichen Kristallplättchen zu verhüten, war die Nadel von einem weiteren Glasröhrchen umgeben, das etwas über die Spitze hinausragte und am anderen Ende fest mit der Nadel verkittet war. Die Kristallplatte lag ihrerseits auf der photographischen Platte.

Glimmer wurde in größeren Stückchen ohne weiteres aufgelegt, die Quarz- und Gipsplättchen waren über 4 mm große

1) M. Reinganum, Phys. Zeitschr. 12. S. 1076. 1911.

2) W. Michl, Wien. Ber. IIa. 121. S. 1431. 1912.

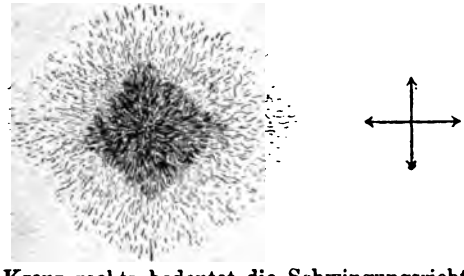
3) Fr. Mayer, Über die Zerstreuung der α-Strahlen. Freiburger Dissertation, s. auch Ann. d. Phys. 41. S. 931, 1913.

Offnungen auf Glasplatten gekittet. Eine solche Größe der Plättchen genügte, da die Ausdehnung des Fleckes nur 1 bis 2 mm betrug. Die Apparatur wurde lichtdicht an einem erschütterungsfreiem Ort 5—14 Stunden stehen gelassen. Die Expositionszeiten waren durch die geringen Poloniummengen an der Nadelspitze bedingt.

Die Untersuchungen der Flecke wurden unter dem Mikroskop ausgeführt, meist mit direkter Beleuchtung, teilweise mit Dunkelfeldbeleuchtung.

Die Versuche mit Glimmerplättchen (Dicke unter 10 μ) ergaben keinen bemerkbaren Unterschied. Die Flecke sind symmetrisch und ihre Dichte nimmt gleichmäßig nach außen ab. Während der innerste, der Nadelspitze direkt gegenüberliegende Teil aus unregelmäßig und dicht gelegenen Punkten besteht, haben die mehr peripheren Teile strahlenförmiges Aussehen, entsprechend den radial verlaufenden Bahnen der α-Teilchen.

Die mit den Gips- und Quarzplättchen erhaltenen Flecken sind im allgemeinen kleiner, entsprechend der größeren Dicke der Plättchen. Sehr starke Abweichungen von der Kreisform sind jedenfalls nicht vorhanden.



Das Kreuz rechts bedeutet die Schwingungsrichtungen im Kristallplättchen.
Fig. 1.

Eine Aufnahme mit Gips, und zwar die am störungsfreisten entwickelte, weicht jedoch in ihrem inneren Teile deutlich von der Kreisform ab. Der innere Teil dieses Fleckes ist nämlich dichter und deutlich rautenförmig. Die Ecken der Raute weisen nach den Schwingungsrichtungen, so daß also die Reichweite in Richtung der beiden Achsen vergrößert erscheint. (Vgl. Fig. 1.)

Die rautenförmige Figur war größer, als daß sie durch Unregelmäßigkeiten der Nadelspitze verursacht sein konnte. Die Diagonalen sind 1,4 und 1,5, die Kanten 1,2 und 1,3 mm lang. Sie setzt sich jedoch nach außen in einen schwächeren Fleck fort, an dem man keine Abweichung von der Kreisform feststellen konnte.

Von Gips war dies die bestgelungene Aufnahme. Insofern möchte ich das Resultat als wahrscheinlich reell hinstellen. Eine Reihe von Aufnahmen mißlangen aus verschiedenen Gründen (Platte verschleiert, Bruch der sehr empfindlichen Kristallplättchen usw.).

Bei Quarz, mit dem allerdings keine sehr gute Aufnahme gelang, war nichts zu bemerken.

Abzählen der Zahl der Punktreihen an verschiedenen Stellen der Peripherie der Flecke und der Anzahl der Punkte in einer Reihe in einem bestimmten Abstand vom Mittelpunkt des Fleckes ergab keine Anhaltspunkte für besondere Bevorzugung bestimmter Richtungen, trotzdem bei diesen mühsamen Auswertungen der Platten sehr starke Vergrößerungen angewandt wurden.

b) Elektrometrische Methode.

Ich suchte ferner einen Einfluß der Orientierung von Kristallplatten auf die Reichweite durch eine elektrometrische Methode zu finden, entsprechend derjenigen, die sich früher zur Messung kleiner Reichweiteänderungen bewährt hatte.[1])

Die Vorversuche hierzu waren von den Herren J. Koenigsberger und M. Reinganum begonnen.

Da man nicht aus einem Kristall zwei sehr dünne Plättchen von verschiedener Orientierung, aber genügend genau gleicher Dicke schneiden kann, wurde folgendes Verfahren eingeschlagen.

Es wurde eine Kristallplatte parallel zur Ebene zweier Elastizitätsachsen verwandt, und diese in schräger Richtung von den α-Strahlen durchsetzt. Wird nun die Platte in ihrer eigenen Ebene gedreht, so ist klar, daß sich der Winkel, den die Strahlen mit den Elastizitätsachsen im Kristall bilden, verändern muß.

---

1) M. Reinganum, Veränderung der Reichweite von α-Strahlen durch elektrische Potentiale. Ann. d. Phys. 33. S. 134. 1910.

Die Bahn der α-Teilchen in der schräg durchsetzten Kristallplatte läßt sich nämlich geometrisch aus zwei Komponenten zusammengesetzt denken, von denen die eine in die Normale der Platte fällt und gleich deren Dicke ist, während die andere in der Ebene der Platte liegt. Dreht man nun die Platte in ihrer eigenen Ebene, so ändern sich die Winkel, die die Elastizitätsachsen im Kristall mit dieser letzten Komponentenrichtung bilden. Einerseits muß es natürlich günstig sein, die Platte möglichst schräg gegen die Richtung der Strahlen zu stellen. Andererseits ist dem jedoch eine Grenze dadurch gesetzt, daß der Weg in der Platte kleiner als die Reichweite der α-Strahlen in dem betreffenden Material bleiben muß. Praktisch empfahl es sich, einen Winkel von 45° zwischen Plattennormale und Bahnrichtung der α-Teilchen nicht zu sehr zu überschreiten.

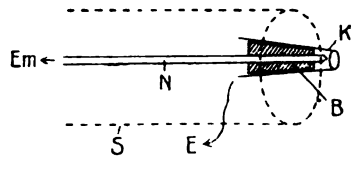
Die vorher erwähnte Methode, kleine Reichweitenänderungen zu messen, bestand darin, daß der an der Grenze der Reichweite im Gebiet des stärksten Abfalls der Ionisation erzeugte Ionisationstrom durch die zeitliche Entladung eines Elektrometers gemessen wurde, sodann nach Änderung der Reichweite (damals durch Anlegen elektrischer Potentiale an das Präparat) der Abstand des Präparates so geändert wurde, daß die Entladegeschwindigkeit wieder dieselbe wurde. Bei meinen jetzigen Untersuchungen wurden die Reichweiteänderungen, die durch Drehen der Platte entstanden, nicht durch Änderung des Präparatabstandes kompensiert, sondern ich beobachtete nur die Änderungen der Entladungsgeschwindigkeiten bei Drehung der Platte in ihrer Ebene.

Versuchsanordnung.

Das Elektrometer war das von Wulff angegebene. Die Entladezeiten zwischen bestimmten Teilstrichen wurden nur an einem der beiden Fäden abgelesen.

Die Ionisationskammer war in folgender Weise hergestellt. Durch einen etwas konischen Bernsteinpfropfen von einem mittleren Durchmesser von 4 mm und einer Länge von 15 mm war eine 12 cm lange und 2 mm dicke Stahlnadel so durchgesteckt, daß ihr eines Ende 4 mm über das spitzere Ende des Pfropfens herausragte. Das andere Ende war mit dem

Elektrometer verbunden. Die Nadel lag horizontal und war, soweit sie aus dem Elektrometer herausragte, statisch geschützt. Auf den Bernstein war ein kleiner Metallkonus aus Silberfolie übergestülpt, der um Bruchteile eines Millimeters über das etwas dünner gefeilte Ende der Nadel herausragte und dort einen freien Durchmesser von 1,8 mm hatte.



Em Elektrometer
N Stahlnadel
B Bernstein
K Ionisationskammer
E Erde
S Schutzhülle

Fig. 2.

Der äußere Metallkonus war geerdet, das Elektrometer samt der im Konus befindlichen Stahlnadel geladen. Die α-Strahlen traten parallel der Nadel in den kleinen Luftraum ein und riefen hier einen Ionisationsstrom hervor. Die α-Strahlenquelle war so weit entfernt, daß sich die Ionisationskammer ganz am Ende der Reichweite befand. Bei einem Teil der Versuche war die Ionisationskammer vorne noch durch eine sehr dünne, auf das Konusende geklebte Goldfolie verschlossen, doch erwies sich dieser Schutz als unnötig und wurde später wieder fortgelassen.

Die zwischen Ionisationskammer und α-Strahlenquelle befindliche Kristallplatte war im Zentrum eines bei mineralogischen Untersuchungen gebräuchlichen Teilkreisstatives befestigt und konnte damit, wie erforderlich, in ihrer eigenen Ebene um ablesbare Winkel gedreht werden. Ebenso konnte ihre Neigung gegen die Horizontale an einem zweiten Teilkreis verändert und abgelesen werden.

Die Strahlungsquelle bestand aus einem an der Stirnseite mit Polonium versehenen Kupferdraht von 1 mm Dicke. Dieser Draht war an der Säule eines Funkenmikrometers befestigt und konnte so um kleine genau meßbare Strecken horizontal verschoben werden.

Für feste Aufstellung aller Teile war Sorge getragen. Alle Vorrichtungen waren innerhalb eines vorne offenen Drahtkäfigs aufgestellt.

Gang der Versuche.

Besondere Sorgfalt mußte darauf gelegt werden, daß bei einer Drehung des Teilkreises die Kristallplatte nur in ihrer eigenen Ebene sich drehte. Mit anderen Worten, es muß die Platte der Ebene des Drehkreises genau parallel sein, sonst bleibt die von den α-Teilchen in der Platte durchsetzte Strecke nicht konstant, sondern geht bei einer Drehung um 360° durch ein Maximum und ein Minimum. Eine solche Störung konnte den gesuchten Effekt überdecken.

Die Justierung geschah mit Hilfe eines parallelen, scharfen Lichtbündels, das von der Platte nach der Decke reflektiert wurde. Die das Kristallplättchen tragende Glasplatte wurde mit Klebwachs so aufgekittet, daß der Lichtfleck bei einer Drehung des Kreises so unbeweglich blieb, als es der schon erwähnte Mangel absoluter Planheit der dünnen Plättchen erlaubte. Das Elektrometer wurde auf 65 Volt geladen und die Abfallszeiten zwischen den bestimmten Teilstrichen, die meistens einem Abfall von ca. 60 Volt auf 40 Volt entsprachen, gemessen. Befand sich das Präparat nahe bei der Ionisationskammer, so fand die Entladung in wenigen Sekunden statt. Zu den Messungen wurde eine Entfernung gewählt, die eine Abfallzeit zwischen 20—60 Sekunden erzeugte, also an der Grenze der Reichweite lag. Die Platte wurde meist von 30° zu 30° gedreht. Daß keine Störungen beim Drehen vorkamen, wurde dadurch kontrolliert, daß die Ausgangsstellung nachher wieder dieselbe Zeit ergab.

Resultate.

Messungen wurden ausgeführt mit drei Glimmerplättchen von verschiedener Dicke und dem vorher benutzten Gipsplättchen von der Dicke 10 μ.

Ich gebe in folgenden 2 Beobachtungsreihen als Beispiele. Die erste Horizontalreihe enthält die Stellungen der Platte, darunter stehen die in diesen Stellungen gemessenen Abfallszeiten. Die in einer Vertikalen stehenden Zeiten sind direkt hintereinander gemessen. Die letzte Reihe enthält die Mittelwerte der Messungen. α ist der Winkel der Platte gegen die Bahn der α-Strahlen.

Tabelle 1.

Glimmerplatte, $\alpha = 45°$.

	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
t_1	33,1	34,4	32,5	37,1	34,0	34,0	36,5	35,0	37,0	31,0	34,0	37,0	32,5
t_2	32,5	35,0	35,0	33,0	38,0	35,0	34,2	33,0	36,0	33,0	35,0	38,0	32,0
t_3	31,9	35,0	33,6	36,0	39,0	36,5	33,8	36,0	35,0	—	—	33,0	—
Mittel	32,5	34,8	33,7	35,1	37,0	35,2	34,8	34,7	36,0	32,0	34,5	34,2	32,2

Tabelle 2.

Gipsplättchen, $\alpha = 45°$.

	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
t_1	29,9	30,2	31,8	31,2	30,1	29,3	29,9	31,6	30,8	28,3	29,4	29,9	29,9
t_2	30,2	29,8	31,8	31,5	29,6	29,0	30,0	31,4	30,0	29,0	29,7	29,6	30,1
Mittel	30,0	30,0	31,8	31,3	29,8	29,2	30,0	31,5	30,4	28,7	29,5	29,7	30,0

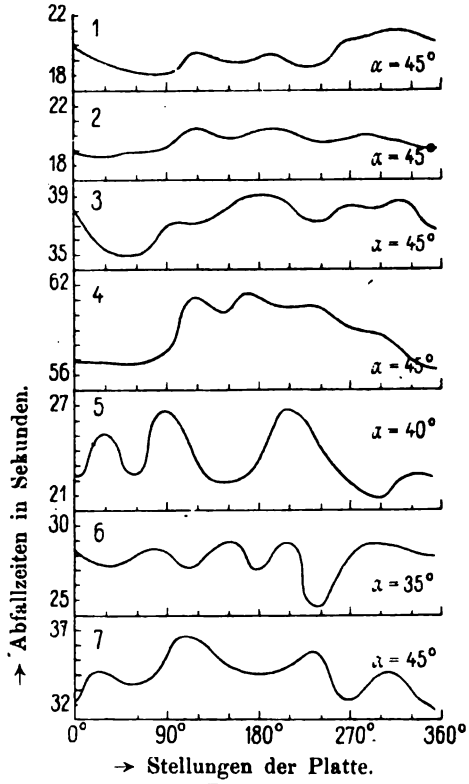


Fig. 3.

Die übrigen Versuchsresultate gebe ich in Kurven an. Ich lasse diejenigen weg, die bei einer Drehung um 360° eine besonders stark ausgeprägte, einfache Periode zeigen. Ein solches Verhalten ist, wie schon vorher erwähnt, durch ungenügende Parallelität der Kristallplatte mit dem Teilkreis oder durch sonstige Unsymmetrien bedingt.

Es beziehen sich die Kurven 1—7 auf Glimmer, 8—12 auf Gips.

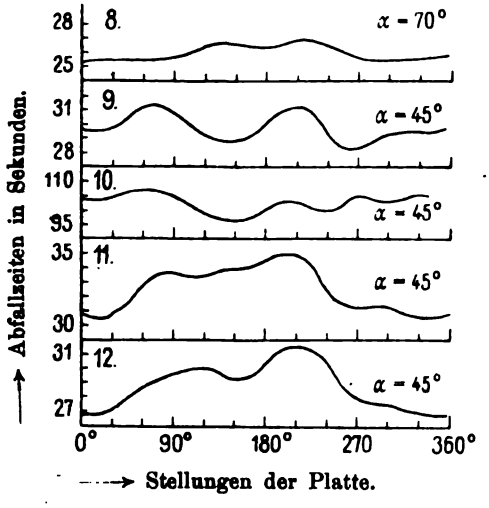


Fig. 4.

Bei allen Kurven zeigen sich außer einer manchmal hervortretenden einfachen Sinuskurve mehr oder weniger deutlich noch mehrere Maxima oder Minima. Daß diese Schwankungen außerhalb der Beobachtungsfehler liegen, zeigt der Umstand, daß die Kurven fast durchweg genau in dem Punkte enden, mit dem sie beginnen.

Die Abstände der Maxima und Minima betragen häufig bei Glimmer 90°, bei Gips 60° oder ein Vielfaches davon.

Die verschiedene absolute Lage der einzelnen Maxima und Minima in den einzelnen Kurven erklärt sich daraus, daß die Platte meistens neu justiert wurde, und dabei ihre Stellung zum Teilkreis verändert wurde.

Im Anschluß daran wurde an den gleichen Spaltplättchen die Änderung der Bremswirkung mit abnehmender Neigung der Plättchen gegen die Bahn der α-Strahlen untersucht. Auch hierbei können Einflüsse der Kristallstruktur zutage treten, da sich die Richtung, in der die Strahlen den Kristall durchsetzen, ändert. Es wurde die Luftstrecke gemessen, deren Bremswirkung der Änderung der Bremswirkung des Kristallplättchens äquivalent war. Dabei wurde so verfahren, daß bei verändertem Neigungswinkel α der Abstand des Präparates von der Ionisierungskammer so lange verändert wurde, bis wieder der gleiche Ionisationsstrom erhalten wurde.

Ich ging bei der nachstehend angeführten Versuchsreihe von einer Entfernung Präparat-Ionisationskammer von 7,3 mm aus, der bei einer Neigung des Glimmerplättchens von 40° ein Spannungsabfall von 60 auf 40 Volt innerhalb 25 Sek. entsprach. Bei einer Entfernungsänderung ist nun zu berücksichtigen, daß nur ein Teil der ursprünglichen Strahlen auf die Ionisationskammer auftrifft, der im umgekehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernung abnimmt. Ich muß demnach, um vergleichbare Werte zu erhalten, bei größerem Abstand des Präparates in der größeren Zeit

$$t_2 = t_1 \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

den gleichen Spannungsabfall erhalten. Ist nun nochmals eine Verschiebung λ nötig, so muß ich

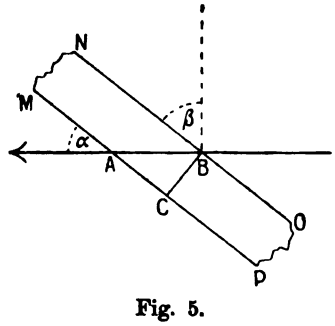


Fig. 5.

$$(1) \qquad t_2' = t_2 \cdot \frac{(r_2 + \lambda)^2}{r_2^2}$$

nehmen.

Weitere Korrekturen können vernachlässigt werden.

Im allgemeinen ist die Bremswirkung von der Länge der Strecke abhängig, die das α-Teilchen im Kristall zu durchlaufen hat. In Fig. 5 bedeutet *M N O P* einen Querschnitt durch das Plättchen, der Pfeil gibt die Richtung der α-Strahlen an.

Nenne ich die Dicke des Plättchens $BC = d$ und die von den Strahlen durchsetzte Strecke $AB = D$, so ist

$$D = \frac{d}{\cos \beta} = \frac{d}{\sin \alpha},$$

folglich

$$D - d = D(1 - \sin \alpha)$$

$$= \frac{d(1 - \sin \alpha)}{\sin \alpha}.$$

$D - d$ ist der für die Änderung der Bremswirkung in Betracht kommende Teil der Strecke D. Mit ihm ändert sich gleichzeitig die Strecke $r_{90} - r_\alpha$, wobei r_{90} den Abstand der Strahlenquelle bei senkrecht stehender, r_α den Abstand bei um α Grad gegen die Strahlenbahn geneigter Kristallplatte bezeichnet. Beide Strecken müssen, zeigen sich nicht infolge der Kristallstruktur Sonderheiten, in konstantem Verhältnis zueinander stehen.

$$\frac{D - d}{r_{90} - r_\alpha} = c$$

oder $D - d$ von oben eingesetzt:

$$\frac{d(1 - \sin \alpha)}{\sin \alpha (r_{90} - r_\alpha)} = c,$$

$$\frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha (r_{90} - r_\alpha)} = \frac{c}{d} = c'.$$

Nachstehende Tabelle gibt eine Versuchsreihe mit dem Glimmerplättchen wieder. Die erste Horizontalreihe enthält die Neigungswinkel α, die zweite die nach Formel (1) berechneten und dann der betreffenden Messung zugrunde gelegten Zeiten, die dritte den Abstand des Präparates von der Ionisationskammer, bei dem in der Zeit t ein Spannungsabfall von 60 auf 40 Volt stattfand, in Millimetern (die Werte stellen Mittelwerte aus mehreren Beobachtungen dar) die vierte die einer Neigungsänderung von 10 zu 10° entsprechende Änderung der Bremswirkung, die letzte die Werte für c'.

Das Glimmerplättchen hatte bei senkrechtem Durchgang eine Bremswirkung gleich der einer Luftstrecke von 28 mm, der Abstand des Mittelpunktes des Plättchens von der Ionisationkammer blieb immer 4 mm.

Tabelle III.

α	40°	50°	60°	70°	80°	90°
t	25″	35″	65″	78″	86″	88″
r	7,3	9,45	12,5	14,05	14,86	15,00
$r_{\alpha_2} - r_{\alpha_1}$		2,15	3,05	1,55	0,81	0,14
c'		0,07	0,06	0,06	0,07	0,11

Die Konstante c' bleibt von derselben Größenordnung, die Änderung der Bremswirkung nimmt mit wachsendem Neigungswinkel ungefähr wie die reziproken Werte des Sinus ab, entsprechend der Formel. Eine Ausnahme macht der Wert zwischen $\alpha = 40°$ und $50°$, die aber wahrscheinlich auf die schwierige Beobachtung bei der stark geneigten Platte zurückzuführen ist. Ein Einfluß der Kristallstruktur trat bei dieser Versuchsanordnung nicht hervor.

2. Einfluß auf die Streuung.

Durchsetzt ein durch eine runde Blende scharf begrenztes Bündel α-Strahlen eine streuende Materie, so wird ein senkrecht in ihren Weg gestellter Schirm nicht mehr in der Größe eines Fleckes getroffen, der dem geometrischen Bilde der Blende entspricht, sondern ein Teil der Strahlen geht über den Rand des Fleckes hinaus, da er gestreut, d. h. aus der ursprünglichen Bahn abgelenkt worden ist. Findet dabei in einer Richtung eine besonders starke Streuung statt, so macht sich dies an dem Fleck durch besondere Vergrößerung in dieser Richtung bemerkbar.

Ich ließ demnach ein ausgeblendetes Bündel α-Strahlen verschiedene Kristallplättchen senkrecht durchdringen und untersuchte die Streuungsbilder, die auf einer Sidotblende oder einer photographischen Platte entstanden. Es geschah dies einerseits durch Zählen der Szintillationen auf der Sidotblende, andererseits durch Ausmessen des Schwärzungsfleckes auf der photographischen Platte. Es wurden hierbei Kristallplättchen benutzt, die in gleicher Weise wie vorher erhalten waren.

Versuchsanordnung.

Eine 11 cm lange und 6 cm weite Glasglocke G war am einen Ende durch einen Glasstöpsel zu verschließen. Am an-

deren Ende war sie glatt abgeschliffen, so daß sie hier durch eine Glasplatte *Pl* luftdicht abgeschlossen werden konnte. Auf diese Platte war ein Messingrohr *R* von 4 cm Länge und 3 cm Weite aufgekittet, das am anderen Ende durch eine Messingplatte verschlossen war. In der Mitte der Messingplatte befand sich eine runde Öffnung von 1 cm Durchmesser, über der das Kristallplättchen befestigt wurde. Auf das Messingrohr konnte ein Deckel *D* aufgeschoben werden, der ebenfalls in der Mitte durchbohrt war. Auf diese Öffnung wurde die Blende geklebt. Die Innenseite der Glasplatte wurde mit Klebstoff bepinselt, auf den eine dünne Schicht Sidotblende gestreut wurde. Um einen gleichmäßigen, feinkörnigen Überzug zu erhalten, wurde sie durch ein Tuchbeutelchen aufgestäubt. Als Strahlenquelle wurde ein an der Stirnseite mit Polonium überzogener Kupferdraht *Po* von 1 mm Durchmesser benutzt, der an dem Glasstöpsel befestigt wurde. Fig. 6 gibt einen Längsschnitt durch den Apparat.

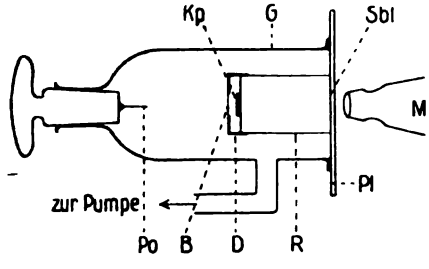


Fig. 6.

Die Entfernung des Präparates von der Blende betrug 3,5 cm, der Blende von dem Kristallplättchen *Kp* 0,5 cm und des Kristallplättchens von der Sidotblende 4 cm. Auf diese Weise wurde aus dem vom Präparat ausgehenden Strahlenkegel ein kleines Bündel ausgeblendet, das das Kristallplättchen durchsetzte und dann die Sidotblende traf. Um die Bremswirkung und Streuung der Luft zu beseitigen, mußte der Apparat luftleer gemacht werden. Zu diesem Zwecke war seitlich an der Glocke ein Fortsatz angebracht, der zur Gaedepumpe und einem Manometer nach Mc Leod führte. Der Apparat wurde wagerecht aufgestellt. Vor der Glasplatte befand sich ein Mikroskop mit etwa 50facher Vergrößerung, das mittels Schlitten-

führung um genau ablesbare Strecken senkrecht und wagerecht verschoben werden konnte, wodurch jeder Punkt der Platte ins Gesichtsfeld gebracht werden konnte. Um eine Streuung durch den Rand der Blende zu vermeiden, mußte diese aus Material von niederem Atomgewicht bestehen. Ich verwendete bei allen Versuchen Pergamentpapier, das mit einer runden Nadel durchstochen wurde. Es kam darauf an, daß die Öffnung möglichst gleichmäßig rund war. Ihre Form wurde unter dem Mikroskop nachgeprüft. Der Durchmesser betrug bei den verschiedenen Versuchen 0,7, 0,45 und 0,46 mm.

Gang der Versuche.

Alle Versuche mußten bei vollständiger Dunkelheit vorgenommen werden. Das Mikroskop wurde auf die Körnchen der Sidotblende eingestellt und so justiert, daß bei allen Verschiebungen die Einstellung scharf erhalten blieb. Um dem Auge in der Dunkelheit einen Anhaltspunkt zu geben, wurde der Rand des Gesichtsfeldes im Okular durch einen Ring von schwach leuchtender Balmainscher Leuchtfarbe bezeichnet. Die Ablesungen der Noniusstellungen des Schlittens, der Stoppuhr und die Aufzeichnungen geschahen im roten Lichte einer Taschenlampe, das die Empfindlichkeit des Auges für die Szintillationsblitze nicht beeinträchtigte.

Im Apparat wurde ein genügend hohes Vakuum (schon bei $^1/_{100}$ mm Druck ist die Streuung durch die Luftreste unmerklich geworden) hergestellt, dessen Konstanz von Zeit zu Zeit am Manometer kontrolliert wurde. Während der Dauer eines Versuches blieb die Pumpe immer in Tätigkeit.

Nachem sich das Auge im Dunkeln ausgeruht hatte, wurde mit den Beobachtungen begonnen. Es wurde mit der Stoppuhr die Zeit gemessen, in der eine bestimmte Anzahl Szintillationen im Gesichtsfelde erfolgten. Mit der ersten wurde die Uhr in Tätigkeit, mit der letzten gezählten außer Tätigkeit gesetzt. Solche Beobachtungen wurden so lange wiederholt, bis ein genügend sicherer Mittelwert festgestellt werden konnte.

Dann wurde das Mikroskop um eine bestimmte Strecke (meist 0,5—1 mm) verschoben und dort das Verfahren wiederholt.

Auf diese Weise erhielt ich ein Bild von der Verteilung der Szintillationen auf der ganzen Fläche. Die Mittelwerte

der Beobachtungsreihen für jeden Punkt wurden in einer Tabelle eingetragen, deren erste Horizontalreihe die Stellungen des wagerechten Nonius l und deren erste Vertikalreihe die Stellungen des senkrechten Nonius h, beide in Millimetern, enthält. In die zwischenliegenden Felder wurden die Werte für den betreffenden Ort eingetragen.

Resultate.

Brauchbare Beobachtungen konnten nur mit Glimmerplättchen erhalten werden, da nur diese genügend dünn gespaltet werden konnten. Ohne streuendes Kristallplättchen erhielt ich ein ziemlich scharf begrenztes, geometrisches Bild der Blende, das bei einem Blendendurchmesser von 0,7 mm ungefähr 3,6 mm Durchmesser hatte. Befindet sich ein Kristallplättchen hinter der Blende im Wege der α-Strahlen, so ist der Fleck größer, die Grenze weniger scharf. Zugleich weicht seine Gestalt bei fast allen Versuchen etwas von der Kreisform ab. Tabelle IV und V geben zwei Versuchsreihen mit Glimmerplättchen wieder, aus denen dies deutlich wird. Die Werte geben die Zahl der Sekunden an, in der jedesmal 10 Szintillationen erfolgten.

Tabelle IV.

Blendendurchmesser 0,45 mm.

l =	129,0	128,0	127,5	127,0	126,5	126,0	125,6	125,0	124,5	124,0
h = 31,0	—	—	—	—	—	1800	—	—	—	—
30,2	—	—	1500	—	—	—	—	—	—	—
30,0	—	—	—	—	—	—	—	1200	—	—
29,6	—	—	—	—	—	—	363	—	1200	—
29,0	—	1800	—	200	—	—	—	132	—	1800
28,5	—	—	—	—	79	—	—	—	—	—
28,0	1800	700	—	70	—	—	—	141	—	900
27,5	—	—	—	—	53	—	—	—	—	—
27,0	1400	700	—	331	—	158	—	325	—	—
26,5	—	—	630	—	263	—	—	—	—	1800
26,0	—	1200	—	—	—	1800	—	—	—	—

Tabelle V.

Blendendurchmesser 0,46 mm.

l =	130	129	128	127	126	125
h = 33	—	—	—	725	—	—
32	—	700	200	196	450	—
31	—	287	62	27	101	> 900
30	>1000	95	28	20	60	625
29	—	270	62	34	80	>1000
28	—	800	248	370	550	—

Trägt man die Werte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen X-Achse dem wagerechten und dessen Y-Achse dem vertikalen Nonius entspricht, und verbindet die gleichen Werte miteinander, so erhält man die Kurven gleicher Häufigkeit, die uns ein Bild von der Gestalt des Fleckes und von der Verteilung der Streuung geben. Fig. 7 und 8 zeigen in vergrößertem Maßstab solche Kurven, die aus den Werten der Tabellen IV und V hervorgegangen sind. Das Kreuz rechts

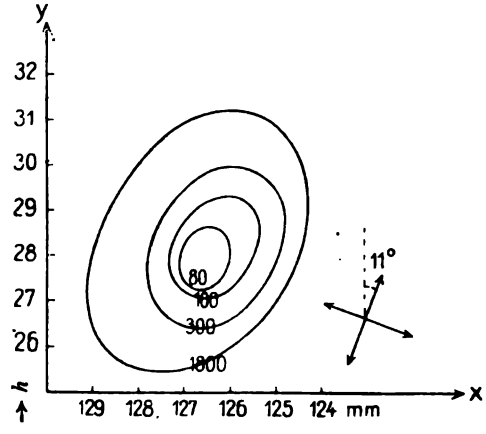


Fig. 7 (Tab. IV).

daneben bedeutet die Lage der Elastizitätsachsen in dem Kristallplättchen, die nach dem betreffenden Versuch festgestellt wurden. Bei Fig. 7 bildete die eine mit der Vertikalen einen Winkel von 11°, bei Fig. 8 einen Winkel von 40°.

In Fig. 7 sind die Kurven für die Punkte mit 80, 100, 300 und 1800 Sek., in Fig. 8 die für die Punkte mit 60, 100 und 200 Sek. eingezeichnet.

Die Blenden erwiesen sich auch bei der Kontrolle nach den Versuchen als gleichmäßig rund. Wie aus den Kurven hervorgeht, ist der Szintillationsfleck nach einer Richtung, die jedesmal einer der beiden Achsen im Kristall parallel ist, stärker verlängert. Es spricht dies für eine vorzugsweise Streuung der α-Strahlen in Richtung einer Elastizitätsachse.

Schließlich wurden an die Stelle der Sidotblende photomechanische Platten, wie sie auch bei den eingangs beschrie-

benen Versuchen benutzt wurden, gebracht. Nach mehrstündiger Exposition wurden sie wie oben entwickelt, und der Fleck mit dem Mikroskop untersucht und ausgemessen. Ohne Kristallplatte gab es wieder einen kleinen ziemlich scharfbegrenzten Fleck von der Größe des geometrischen Blendenbildes. Einige Aufnahmen mit Glimmerplättchen zeigten Strichelung, die nach einer Richtung besonders ausgesprochen war. Eine Drehung des Kristalls änderte diese Richtung nicht, dagegen eine Drehung des Poloniumpräparates. Vermutlich war also die Lage von

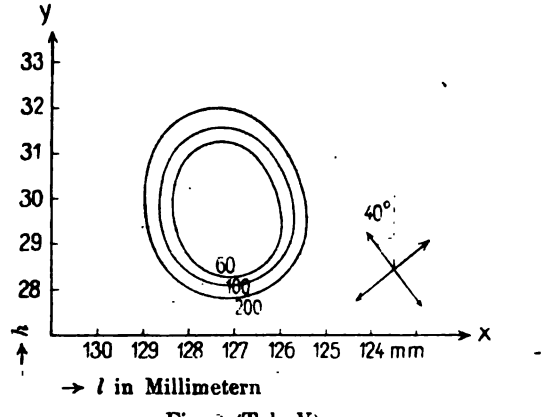


Fig. 8 (Tab. V).

Präparat und Blenden zueinander die Ursache. Der Rand des Fleckes ist sehr unscharf, die Gestalt daher schwer zu bestimmen, wenigstens ist keine besondere Verlängerung in irgend einer Richtung zu erkennen. Aufnahmen mit Gipsplättchen gaben nur ganz schwache Flecke, die nicht zu verwenden waren, und andere Plättchen aus Quarz, Topas und anderen Kristallen konnten nicht dünn genug hergestellt werden, um eine solche Anzahl α-Strahlen durchzulassen, daß überhaupt eine Schwärzung der photographischen Platte erreicht wurde.

8. Zusammenfassung.

Es wurde der Einfluß der Kristallstruktur von Glimmer und Gips auf die Reichweite und die Streuung von α-Strahlen untersucht. Die Ergebnisse der photographischen und vor allem der elektrometrischen Methode weisen auf einen Einfluß

auf die Reichweite in dem Sinne hin, daß die α-Strahlen in Richtung der Elastizitätsachsen den geringsten Widerstand finden.

Die Streuungsversuche ergeben, daß auch für die Streuung mit großer Wahrscheinlichkeit Vorzugsrichtungen existieren.

Daß der Einfluß der Kristallstruktur nur sehr schwach hervortritt, liegt wohl u. a. daran, daß die α-Teilchen bei ihrer verhältnismäßig großen Masse und Geschwindigkeit zum Teil im Kristall Zerstörungen ausüben.

Aus den Resultaten kann man entnehmen, daß die α-Teilchen, die parallel mit einer Molekülschicht einen Kristall durchsetzen, den geringsten Widerstand finden, und daß bei der Streuung die Teilchen die größte lebendige Kraft (also auch Reichweite) nach Verlassen des Kristalls haben, deren Bahn nach der Ablenkung aus der ursprünglichen Richtung parallel mit den Schichten der Kristallmoleküle läuft, da dann kein weiterer Energieverlust durch neue Zusammenstöße stattfindet.

Es war meine Absicht, die Versuche noch fortzusetzen. Durch die Einberufung zum Heeresdienst während des Krieges und meine, nach Absolvierung des Staatsexamens, jetzt erfolgte Verwendung an einer höheren Schule ist mir das leider unmöglich gemacht worden.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, in dankbarer Erinnerung meines allzu früh verstorbenen Lehrers, Hrn. Prof. Dr. Max Reinganum, zu gedenken. In liebenswürdigster Weise förderte er die Arbeit jederzeit durch Rat und Tat. Es war ihm nicht vergönnt, ihre Vollendung zu erleben. Bei Ausbruch des Krieges eilte er zu den Waffen und fiel im September 1914 auf dem Schlachtfelde in Lothringen.

Hrn. Geheimrat Himstedt bin ich für Überlassung von Apparaten des Instituts, der Freiburger Wissenschaftlichen Gesellschaft für ihre Bereitstellung von Mitteln zu Dank verpflichtet.

Physikalisches Institut zu Freiburg i. Br. und
Offenbach a. M., im Juni 1919.

(Eingegangen 25. August 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 3.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Zur Hochvakuumentladung;* *von J. E. Lilienfeld.*

Inhaltsübersicht: I. Der Anlaß. — II. Allgemeines über die Untersuchungsmethode. — III. Lineare Verteilung des Gefälles längs der Achse. — IV. Temperaturmessung an der Anode. — V. Rohr mit zwei Anoden im nämlichen zylindrischen Teil. — VI. Die Charakteristiken. — VII. Der Grenzwert des Gefälles. — VIII. Charakteristiken eines Hochvakuumventils. — IX. Isolatoren und Hochvakuumentladung. — X. Zusammenfassung. — XI. Tabellen.

I. Der Anlaß.

Geschichtliches.

§ 1. Die Entladungserscheinungen im höchsten erreichbaren Vakuum sind zum ersten Male von mir unter Benutzung von Glühkathoden hergestellt und untersucht worden. Meine ersten Arbeiten datieren vom Jahre 1907. Daran anschließend folgt eine Reihe von Untersuchungen, über die in zusammenfassender Form in den Annalen der Physik im Jahre 1910 (1) und 1914 (2) berichtet wurde. Ein ähnlicher Bericht über die nach dem Jahre 1914 veröffentlichten Untersuchungen liegt noch nicht vor. Sofern diese Untersuchungen in das Gebiet der Röntgenstrahlenerzeugung spielen, werden sie demnächst im „Jahrbuch für Radioaktivität und Elektronik" zusammengefaßt erscheinen.

Die Erscheinung, welche den Anlaß bot, mich mit dem Gebiete der Hochvakuumentladung zu befassen, war die Tatsache, daß die zur Durchleitung einer gewissen Stromstärke erforderliche Klemmenspannung mit fortschreitender Gasverdünnung ansteigt, wenn erst einmal eine bestimmte Gasdichte unterschritten ist. Schon in meinen ersten Arbeiten[1]) führte ich die Zunahme des Spannungsabfalles auf die Ab-

1) Es erscheint erforderlich zu betonen, daß ich *von allem Anfang an diese Auffassung* vertreten habe in Anbetracht einer Anzahl späterer vom Jahre 1913 an veröffentlichter Arbeiten anderer Forscher, in denen diese Deutung der Beobachtungen als etwas überraschend Neues dargestellt wird.

wesenheit hinreichender Ionenbildung in den Gasresten und auf das infolgedessen stattfindende Auftreten einer von den Elektronen herrührenden *Raumladung* zurück. Dieser mein Standpunkt befand sich im Gegensatz zu einer kurz darauf von Soddy (3) vertretenen Auffassung, derzufolge die gedachte Spannungszunahme daher rühren sollte, daß die Glühkathode im höchsten Vakuum ihre Wirksamkeit verliert. Nachdem meine Entgegnung (4) auf die Soddysche Arbeit veröffentlicht war, gelang es mir, nachzuweisen, daß bei weiter fortgesetzter Gasverdünnung die gesamten Entladungsvorgänge letzten Endes *vom Gasdrucke unabhängig* werden. Damit war die Erkenntnis gegeben, auf welcher sich die Hochvakuumtechnik (Röntgenröhren, Ventilröhren usw.) in den darauf folgenden Jahren aufbaute. Ich persönlich zog die Konsequenz für die Röntgentechnik bereits im Herbst 1911 (5).

Das quadratische und dreihalbe Gesetz.

§ 2. Gleichzeitig mit der Beobachtung, daß bei Unterschreitung einer bestimmten Gasdichte die Klemmenspannung an der Röhre zu wachsen beginnt und schließlich vom Gasdrucke unabhängig wird, stellte ich fest, daß die *Entladungscharakteristik* im Hochvakuum einen Anstieg des Gefälles mit der Stromzunahme aufweist. In meinen daran anschließenden Arbeiten wurde dargetan, daß zwischen dem Strom und einer Potenz des Gefälles in der Regel eine lineare Abhängigkeit besteht. Für den Exponenten dieser Potenz wurden von mir verschiedene Werte beobachtet; als interessante Fälle erörterte ich ganz besonders in ihrer Beziehung zur Raumladung den Wert 2 sowie den Wert 3/2. Hauptsächlich gefesselt wurde meine Aufmerksamkeit durch das erstgenannte quadratische Gesetz; denn die Versuche, insbesondere Messungen des Potentialgefälles längs der Entladungsachse erwiesen, daß in dem Gültigkeitsbereiche dieses Gesetzes eine Raumladung nicht besteht. Es ist einleuchtend, daß vom grundsätzlich naturwissenschaftlichen Standpunkte die Tatsache, daß die Raumladung ohne irgendwie erhebliche Ionisation der Gasreste zu verschwinden imstande ist, sehr viel wichtiger erscheinen mußte, als die Untersuchung desjenigen Gebietes, in welchem die von vornherein zu erwartende, keinesfalls überraschende, von den Elektronen verursachte Raumladung vorhanden ist.

Die Arbeitsteilung.

§ 3. Im Gegensatz zu der meinerseits unternommenen Durchforschung des raumladungs*losen* Entladungsgebildes befaßten sich seit dem Jahre 1913 zahlreiche andere Forscher mit denjenigen Erscheinungen, bei denen das Bestehen einer Raumladung zu beobachten ist. Es trat eine Arbeitsteilung in dem Sinne ein, daß außer in meinen Arbeiten das raumladungslose Gebilde von keiner anderen Seite einer Untersuchung unterworfen wurde. Die Folge davon ist, daß zurzeit von einer Anzahl Fachgenossen, hauptsächlich aber in der Industrie und in der Patentliteratur die Meinung vertreten wird, es sei die Gültigkeit des Dreihalbegesetzes geradezu das notwendige, aber auch das hinreichende Kriterium für das Bestehen eines Hochvakuums.

Erster Einwand: Ungenügendes Vakuum.

§ 4. Die Forscher, welche diese Meinung vertreten, pflegen zweierlei Argumente meinen Arbeiten entgegen zu setzen. Das *erste* dieser Argumente wurde von Langmuir in seiner ursprünglichen Publikation (6) gebracht, sonderbarerweise aber nicht in seiner späteren deutschen (7) Veröffentlichung wiedergegeben [vgl. auch meine Erwiderungen (8, 9)]. Langmuir meint, meinen Untersuchungen hätte überhaupt kein genügend hohes Vakuum zugrunde gelegen, da es mir sonst mit keiner technisch herstellbaren Spannung hätte gelingen können, in den engen, mit mehreren Knicken versehenen Entladungsröhren eine Entladung zu erzeugen. Dieses Argument kann nicht anders widerlegt werden, als indem man irgendeine der von mir beschriebenen Röhren oder eine der Formgebung nach gleichwertige Modifikation derselben beliebig lange an den besten heute bekannten Hochvakuumpumpen, gegebenenfalls unter Kühlung der Glaswände in flüssiger Luft [1]), zu betreiben versucht. Auf diesem und nur auf diesem Wege kann sich jedermann mit Leichtigkeit überzeugen, daß der Langmuirsche Einwand gegenstandslos ist und daß Spannungen von der Größenordnung von einigen wenigen Kilovolt vollauf genügen, um die von mir beschriebene, mit einer weiteren Abnahme der Gasdichte sich nicht mehr ändernde Charakteristik aufzunehmen.

1) Diese Kühlung wurde zum Zwecke des Herabminderns der Gasdichte im Hochvakuum von mir zuerst noch vor 1910 angewandt (1).

Zweiter Einwand: Unzuverlässigkeit der Sondenmessung.

§ 5. Die *zweite* der mir entgegengebrachten Einwendungen ist — soviel ich heute sehen kann — die bei weitem häufigere. Wenn sie auch in der Literatur nur bedingterweise ausgesprochen sich vorfindet, so habe ich persönlichen Äußerungen entnommen, daß sie doch einen gewissen Kreis von Anhängern hat. Es ist dies die Ansicht, daß meine Meßresultate durch die Benutzung der Sondenmeßmethode getrübt sind. Von Rechts wegen liegt freilich die Sache so, daß die Berechtigung der Sondenmessung in einem Entladungsgebilde, welches einen linearen Potentialverlauf aufweist, über jeden Zweifel erhaben sein müßte, besonders da das Vorhandensein einer hochwertigen Isolation der Sonden von mir stets besonders betont wurde.

Gegenstand vorliegender Arbeit.

§ 6. Ich habe mich nichtsdestoweniger entschlossen, meine Untersuchungen nach Möglichkeit ohne Benutzung einer Sondenmessung zu wiederholen. Nicht etwa, weil ich mir eine größere Genauigkeit davon versprach — tatsächlich ist eine jede andere Messung bedeutend ungenauer als gerade die Sondenmessung — sondern um der gegen diese Methode nun einmal bestehenden Voreingenommenheit zu begegnen.

II. Allgemeines über die Untersuchungsmethode.

Beschränkung der Untersuchung auf zylindrische Röhren.

§ 7. Wenn man sich für die Bestimmung des Potentialgefälles nicht einer Sondenanordnung bedienen will, so liegt der Gedanke am nächsten, es zu versuchen, mit der Messung der *gesamten* Spannung auszukommen, indem man einfach an die Klemmen der Entladungsröhre ein passendes Voltmeter anschließt. Bekanntlich sind aber die Erscheinungen längs der Entladungsbahn nicht so einheitlicher Natur, daß eine solche Messung ohne weiteres die gewünschten Aufschlüsse zu bringen geeignet wäre.

Zunächst ist es bekannt, daß im allgemeinen an den Elektroden andere Vorgänge stattzufinden pflegen als in der eigentlichen Entladungsbahn. Diese Vorgänge machen sich dadurch bemerkbar, daß sie einen besonderen Anoden- bzw. Kathodenfall verursachen. Wird z. B. eine Glühkathode benutzt, dann können je nach ihrer Beschaffenheit, ihrer

Temperatur, aber auch infolge der Eigenart, in welcher Elektronen an ihr freigemacht werden, Komplikationen auftreten. Es ist in der Tat einfacher, den Einfluß der Elektroden mit Hilfe der Sondenmessung zu eliminieren, als — einen besonders günstigen Fall vorausgesetzt — nachzuweisen zu versuchen, daß kein erheblicher Fehler begangen wird, wenn das Gefälle in der näheren und weiteren Umgebung der Elektroden mitgemessen wird.

Die Hauptursache aber, weshalb ich meine bisherigen Arbeiten nicht auf die Messung des gesamten Spannungsabfalls in der Röhre aufgebaut habe, ist die folgende. Schon der bloße Anblick einer Hochvakuumentladung lehrt, daß in weiten Röhrenteilen und bei geringen Stromdichten andere Vorgänge sich abspielen als in engen Röhrenteilen und bei großen Stromdichten. Das wird von der Messung bestätigt. Im ersten Falle hat man es mit Gebilden zu tun, welche einen größeren oder geringeren Betrag an Raumladung aufweisen und häufig (wenn auch nicht immer) dem Dreihalbegesetz folgen. Im zweiten Falle hat man es mit Raumladungsfreiheit und mit dem quadratischen Gesetz zu tun.

Besonders verwickelt wird das Bild durch den sich mit der Röhrenform von Fall zu Fall ändernden Einfluß der den weiten Röhrenteil mit dem engen zylindrischen verbindenden Verjüngung. Der Erfahrung gemäß pflegen sich die Glaswände dieser Verjüngung negativ aufzuladen und nach Art einer eigenen Kathode[1]) einen Kathodenstrahl zu bilden, ähnlich wie man ihn bei der gewöhnlichen Gasentladung als „Striktions"-Kathodenstrahl zu beobachten Gelegenheit hat. Die geordnete Bewegung eines solchen Striktionskathodenstrahles pflanzt sich längs der Achse des zylindrischen Röhrenteiles fort bis zu einer Tiefe, welche durch die Fähigkeit des hier bestehenden raumladungslosen Gebildes, langsame Kathodenstrahlen zu zerstreuen (10) begrenzt ist. Diese Eindringungstiefe beträgt — je nach der Form der Verjüngung — den gelegentlich vorliegender Untersuchungen gewonnenen Erfahrungen zufolge für einen zylindrischen Querschnitt von etwa 20 mm Durchmesser reichlich 5 cm bis zu

1) Über die Größe des hier stattfindenden, von der Form der Einengung weitgehend abhängigen Spannungsabfalles wolle man Abschnitt VII, § 29, vergleichen.

10 cm von dem Anfange des zylindrischen Teiles an gemessen. Außer dem Striktionsstrahl kommen im erweiterten Röhrenteil noch andere Umstände hinzu, von denen einige bereits angedeutet wurden und welche die Sachlage noch verwickelter gestalten.

Die Sondenmessung und Möglichkeiten sie durch Klemmspannungsmessung zu ersetzen.

§ 8. All das sind neue Gründe, welche sich zu dem im Abschnitt I genannten hinzugesellen und mich veranlaßt haben, meine weiteren Untersuchungen auf das Gebiet von Entladungen bei *gleicher Stromdichte*, also in *zylindrischen Röhren* zuzuspitzen. Nach der vorausgegangenen Auseinandersetzung wird es auch erneut verständlich erscheinen, weshalb ich stets darauf hinwies, daß die Messungen in einer praktisch unendlichen Entfernung von den Elektroden innerhalb der zylindrischen Bahn auszuführen sind, und weshalb ich dementsprechend den kurzen, nur 30 mm langen Sondenmeßbereich in der Mitte eines zylindrischen Rohres anzuordnen pflegte, welches bis zu 30 cm lang war und 10—11 mm lichte Weite besaß. Es ist schließlich klar, daß, wenn ohne Sondenmessung, einfach unter Zugrundelegung der Bestimmung der Klemmenspannung gearbeitet werden soll, der Beitrag, den der an den Elektroden und bis zur Verjüngung stattfindende Spannungsabfall zur Gesamtspannung liefert, irgendwie ausgeschaltet werden muß.

Am einfachsten würde — falls der Abfall an den Elektroden vernachlässigt werden könnte — eine Röhre mit einer von Kathode zu Anode gleichbleibenden lichten Weite es ermöglichen, mit einer einzigen Klemmspannungsmessung auszukommen. Solche Röhren können aber aus rein technischen Gründen kaum hergestellt werden, besonders aber dann nicht, wenn eine Glühkathode angewandt werden soll. Denn die Glühkathode kann nicht den vollen Querschnitt des Rohres ausfüllen. Sie besteht in der Regel aus Drahtwindungen und muß in einer kugelförmigen Erweiterung untergebracht werden, so daß die Röhren die charakteristische, aus den Figg. 1, 2 und 3 ersichtliche Form erhalten.

Ein zweiter naheliegender Gedanke ist der, den zylindrischen Röhrenteil außerordentlich lang und nicht allzu

weit zu gestalten, so daß auf ihn ein bei weitem überwiegender Teil des gesamten Spannungsabfalls entfällt. Wäre man in der Lage, die Länge dieses Teiles und somit den gesamten Spannungsabfall an den Rohrklemmen auf jedes erforderliche Maß zu bringen, dann könnte tatsächlich der Einfluß der Vorgänge an den Elektroden und in der Verjüngung beliebig herabgesetzt werden. In der Praxis besteht eine solche Möglichkeit aber nicht, und zwar allein schon deshalb nicht, weil die im Leipziger Institut verfügbare, stehende Gleichspannung unserer Hochspannungsdynamos nicht viel mehr als 10000 Volt beträgt, wobei noch ein erheblicher Teil in einem Vorschaltwiderstand zum Zwecke der Stabilisierung der Vorgänge verbraucht wird. Andererseits ist die glastechnische Herstellung und die Handhabung, besonders aber die Entgasung sehr langer Röhren nicht einfach. Auch begegnet das Zünden der Entladung in sehr engen und sehr langen Röhren Schwierigkeiten.

Aus allen diesen Gründen ist zurzeit die obere Grenze der Länge bei allerhöchstens 1 m erreicht für Röhren von ungefähr 20 mm lichter Weite. Die längste, im folgenden beschriebene, zylindrische Entladungsbahn betrug aber 63 cm. Bei dieser Entladungsbahn findet für die Stromstärke von 10 M.A. ein gesamter Spannungsabfall von etwa 6500 Volt statt. Davon entfallen auf den weiten Teil von der Glühlampe bis 25 mm jenseits der Einengung etwa 2600 Volt, also rund 40 Proz. der Gesamtspannung. Man sieht aus diesen Angaben, daß es unmöglich sein dürfte, durch Verlängerung des Rohres den störenden Spannungsabfall unterhalb einer erträglichen Fehlergrenze herabzudrücken. Angesichts dessen ist es sehr beachtenswert, daß bereits bei den hier benutzten Längen und Querschnitten die an den Rohrklemmen aufgenommene Charakteristik sich um so mehr dem quadratischen Gesetze nähert, je länger und enger das Rohr ist. So betrug der Exponent bei dem genannten 63 cm langen Rohre bereits 2∞, wie aus Diagramm Fig. 6 ersichtlich.

Aber selbst wenn die Benutzung hinreichend langer Röhren sich praktisch ermöglichen ließe, würde man nicht alle Fragen mit ihrer Hilfe beantworten können. So würde die für den Nachweis der Raumladungsfreiheit unentbehrliche Feststellung der Verteilung des Gefälles längs der Entladungsachse an einer solchen Röhre nicht ausgeführt werden können.

Die Subtraktionsmethoden — Voraussetzungen ihrer Anwendbarkeit und ihre Mängel.

§ 9. Aus all diesen Gründen ist es unumgänglich nötig, entweder die klassische Methode der längs der Achse verschiebbaren Elektroden zu benutzen, also eine Röhre von der in der Fig. 1 (S. 231) dargestellten und beschriebenen Form. Oder aber Röhren mit mehreren Anoden. Entweder solche mit unbeweglichen Anoden und mehreren, voneinander verschiedenen zylindrischen Entladungsbahnen nach Fig. 2 (S. 237) oder solche mit einer einzigen zylindrischen Entladungsbahn und mindestens zwei Anoden, von denen die eine während der Messung je nach Bedarf in die Entladungsbahn hineingebracht und benutzt oder aus ihr entfernt und beiseite geschafft werden kann (vgl. Fig. 3, S. 240).

Die Anordnungen nach Fig. 1, 2 und 3 seien zusammenfassend „Subtraktionsmethoden" genannt. Und zwar deshalb, weil die Charakteristik des zylindrischen Entladungsteiles durch Subtraktion der Spannungen zweier Meßreihen gewonnen wird, von denen die eine mit der Anode in der Nahlage, die andere mit der Anode in der Fernlage gemacht wird. Durch die Subtraktion heben sich die Vorgänge an den Elektroden heraus, freilich unter verschiedenen Voraussetzungen, die durchaus nicht in selbstverständlicher Weise erfüllt zu sein brauchen.

Erstens müssen die beiden, bei verschiedenen Lagen der Anode zeitlich nacheinander vorgenommenen Meßreihen sich auf den nämlichen Zustand beziehen. Das ist der größte Nachteil der Subtraktionsmethoden gegenüber der Sondenmessung, die in einer einzigen Meßreihe die Charakteristik wiedergibt. Das Wort „Zustand" ist dabei im weitesten Sinne zu verstehen. Es bezieht sich auf den Abfall an den Elektroden, die Aufladung der Rohrwand in dem sich verjüngenden Teile, auf den Gasdruck, und für den Fall, daß verschiedene Entladungsäste koexistieren, auch darauf, daß in beiden Fällen auf dem nämlichen Aste der Charakteristik gemessen wird.

Zweitens ist für den Fall, daß Meßreihen an verschieden langen Rohransätzen des nämlichen Rohres, wie in Fig. 2, miteinander verglichen werden, unumgängliche Voraussetzung,

daß die Formgebung sämtlicher Verjüngungsstellen genau die gleiche sei, und auch ihre Oberflächenbeschaffenheit die gleiche (§ 29), damit die unter „Erstens" genannten Bedingungen erfüllt werden können.

Drittens muß aber die Anode bereits in der Nahlage so weit von der Einschnürung entfernt sein, daß die wenig übersichtlichen Vorgänge in den erweiterten Röhrenteilen keinerlei Störungen der eigentlichen, zylindrischen Meßbahn mitteilen können.

Es ist einleuchtend, daß, wenn irgendeine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, — was sehr wohl eintreten kann — durch die Subtraktion der in beiden Anodenlagen gemessenen Spannungen keinesfalls der Einfluß der Elektroden herausgehoben wird, so daß der Spannungsabfall im zylindrischen Teile als Differenz übrigbleibt, sondern es geht dann aus der Rechnung etwas physikalisch Undefiniertes hervor.

Einer der größten Mängel der Subtraktionsmethoden ist aber, daß durch ihre Anwendung die Fehlergrenzen nicht nur absolut, sondern erst recht prozentuell erweitert werden. Deshalb ist es erwünscht, den Spannungsabfall in der Nahlage möglichst gering, den in der Fernlage möglichst groß zu halten. Es ist daher verständlich, daß ich bestrebt war die Nahlage der Anode nicht weiter als unbedingt erforderlich in den zylindrischen Teil hereinzurücken.

Die Erwägungen dieses Paragraphes lassen es jedenfalls wiederholt klar hervortreten, wie sehr eine Sondenmessung allen anderen Methoden überlegen ist, so daß für genaue Bestimmungen nichts anderes als eine Sondenanordnung in Frage kommen kann.

Gemeinsame Fehler der benutzten Röhrenexemplare.

§ 10. Eine richtige Vorstellung von der Ausdehnung des Bereiches der bereits in großen Zügen besprochenen, vom erweiterten Teile in die zylindrische Meßbahn hineingreifenden Unregelmäßigkeiten habe ich erst im Laufe der vorliegenden Messungen gewonnen. Am einwandfreiesten in dieser Hinsicht war die Anordnung gemäß Fig. 2, wenn auch hier die naheliegende Anode mit ihrer Entfernung von 5 cm gegenüber der Erweiterung noch nicht weit genug in den zylin-

drischen Teil zurückgezogen war. Ich schätze den erforderlichen Mindestabstand bei der lichten Weite von 18—20 mm auf 8—10 cm.

Hingegen ist die Röhre mit der verschiebbaren Anode nach Fig. 1 aus dem gleichen Grunde zwar genügend, um die Linearität des Potentialgefälles längs der Achse innerhalb erträglicher Fehlergrenzen nachzuweisen; für die Bestimmung der Entladungscharakteristik im zylindrischen Teile ist das zurzeit vorliegende Röhrenexemplar aber wenig brauchbar. Zu dem letzteren Zwecke müßte das Rohr sehr viel länger gemacht werden, was jedoch aus den weiter unten auseinandergesetzten technischen Gründen nicht — wenigstens nicht ohne große Kosten — ausführbar ist.

Auch das vorhandene Exemplar der Röhre nach Fig. 3 besitzt eine viel zu nahe an der Erweiterung sitzende Anode. Die an der Röhre angestellten Messungen sind hauptsächlich deshalb interessant, weil bereits die einfache Messung der Klemmenspannung mit großer Annäherung das quadratische Gesetz ergab. Eine Bestimmung der Charakteristik durch Subtraktion der Spannungen ist jedoch an Hand der vorliegenden Versuchsreihen noch nicht angängig.

Da sich aber bereits aus den gegenwärtig vorliegenden Messungen vollkommen sichergestellte Folgerungen allgemeiner Tragweite — Linearität des Gefälles längs der Achse, Unabhängigkeit der Anodentemperatur von der Länge der zylindrischen Bahn — ergeben, berichte ich hierüber im folgenden. Gleichzeitig wird die Herstellung ergänzender Meßreihen angestrebt. So sind Arbeiten, um die Röhren nach Figg. 2 u. 3 durch tieferes Einrücken der Nahlage der Anode in den zylindrischen Teil von dem Einfluß der Vorgänge im weiten Röhrenteil zu befreien, im Gange. Ich hoffe, in einer zweiten Mitteilung demnächst darüber berichten zu können.

III. Die lineare Verteilung des Potentialgefälles längs der Achse.

Wichtigkeit des Nachweises.

§ 11. An dieser Stelle interessiert in allererster Linie der Nachweis, daß in den zylindrischen Teilen der Entladungsbahn selbst im höchsten Vakuum das Gefälle längs der Achse linear verteilt ist. Denn ein solcher Nachweis genügt, um

die Zulässigkeit der Sondenmessung aufs Neue einwandfrei zu beweisen und somit meinen früheren Arbeiten eine neue Stütze zu geben. Außerdem ist der lineare Verlauf die Hauptgrundlage, aus der auf die naturwissenschaftlich wichtigste Folgerung meiner Untersuchungen, nämlich auf die Raumladungsfreiheit, geschlossen wird.

Die Röhre.

§ 12. Für die Messung des Potentialverlaufes wurde die klassische Methode einer verschiebbaren Anode benutzt. Die Anordnung ist in Fig. 1 dargestellt. Die Anode *A* ist mit

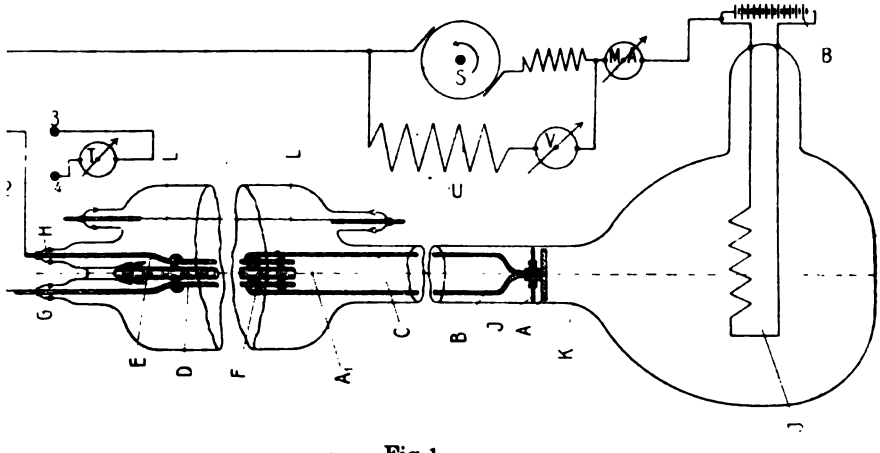


Fig 1.

zwei parallel verlaufenden Drähten *B* und *C* fest verbunden. Diese Drähte gleiten längs einem aus ebensolchen Drähten *D* und *E* bestehenden Schlitten, welcher an einem Quarzstabe *F* befestigt ist. Die Drähte *D* und *E* sind an den Stellen *G* und *H* mit Hilfe der üblichen Platinkontakte nach außen geführt, so daß sie leitend an die Meßanordnung angeschlossen werden können. Hinter der Anode *A*, welche mit einem Spielraum von 1 mm in dem zylindrischen Teile des Entladungsrohres angeordnet ist, befindet sich ein Quarzteller *J*, welcher die ganze lichte Weite des Rohres ausfüllt und zu einer genau zentrischen Führung der Anode *A* dient. Die lichte Weite des zylindrischen Rohrteiles beträgt etwa 23 mm, seine Gesamtlänge 230 mm. Die Messungen werden in drei Stellungen

der Anode A ausgeführt. Diejenige Stellung von A, welche der schematisch angedeuteten Glühlampe H am nächsten liegt, ist um 25—30 mm[1]) gegen die Erweiterung K in das zylindrische Rohr zurückgezogen. Eine zweite, am weitesten von H entfernte Stellung von A ist von der genannten vordersten Stellung von A um 157 mm entfernt. Schließlich wird eine dritte Lage der Anode tunlich genau in der Mitte zwischen ihrer vorderen und hinteren Lage eingestellt, also in einem Abstand von je 77—78 mm von den erstgenannten Lagen. Die Verschiebung der Anode erfolgt einfach durch Schütteln der Röhre.

Lediglich zur Evakuierung dient der Tantaldraht L, von welchem aus die Drähte B, C, D und E mit Elektronen beworfen und so zum Glühen gebracht werden. Das Pumpen der Röhre geschieht deshalb in vertikaler Lage, so daß die ebenfalls aus Tantal bestehende Glühlampe J oben, das mit G und H bezeichnete Ende unten sich befindet. Die Anode liegt also beim Pumpen in der mit A_1 bezeichneten Stellung und wird durch eine von der Glühlampe J aus eingeleitete Entladung bis nahe an den Schmelzpunkt des Kupfers, aus welchem sie besteht, erhitzt. So gelingt es, zum Teile von J, zum Teile von L aus das gesamte in der Röhre enthaltene Metall während des Pumpprozesses auf eine hohe Temperatur zu erhitzen.

Die Betriebs- und Meßanordnung.

§ 13. Die elektrische Anordnung ist ebenfalls aus der Zeichnung ersichtlich. Die Glühlampe J wird von der Akkumulatorenbatterie B geheizt. Die Entladung wird von zwei hintereinander geschalteten Gleichstromhochspannungsdynamos S der Siemens-Schuckert-Werke aufrechterhalten, welche insgesamt bis zu 10000 Volt liefern. Der Strom wird durch Änderung der Erregung geregelt, er geht über einen bis zu 0,5 Megohm betragenden variablen Vorschaltwiderstand T und über das Milliamperemeter MA (ein in Spitzen gelagertes Zeigerinstrument von Siemens & Halske) durch die Röhre. Die Spannungsmessung erfolgt ebenfalls mit Hilfe eines Galvanometers V. Es ist dies ein Millivoltmeter mit aufgehängtem

1) Diese Entfernung ist sehr wahrscheinlich viel zu gering, vgl. Abschnitt II, § 10.

System von Siemens & Halske, wie es für thermoelektrische Messungen benutzt zu werden pflegt. Dieses Instrument wird in Reihe mit einem Hochspannungswiderstand U benutzt, der bis zu 200 Megohm beträgt und aus Widerstandselementen besteht, welche ich an einer anderen Stelle demnächst zu beschreiben gedenke.

Die Messung. — Beschränkung ihres Bereiches.

§ 14. Vor der Ausführung der Messung wurde das Rohr durch einen mehrstündigen Betrieb auf eine befriedigende Konstanz gebracht; die Messung selbst wurde so gemacht, daß in jeder Stellung der Anode die Meßreihe solange hin- und zurück wiederholt wurde, bis eine Übereinstimmung vorlag. Aus der wiedergegebenen Tabelle 1a, S. 258, ist ersichtlich, daß das in einem befriedigenden Maße erreicht werden konnte. Die Tabelle enthält die einzelnen Ablesungen in derjenigen Reihenfolge, in welcher sie tatsächlich angestellt waren. Ich fing mit der hinteren Stellung der Anode A an, nahm daraufhin der Reihe nach die vordere und mittlere Stellung vor und kehrte dann wieder zu der hinteren Stellung zurück. Auch das wurde so lange wiederholt, bis die erste Beobachtungsreihe befriedigend mit der letzten übereinstimmte. Die vier in der Tabelle wiedergegebenen Meßreihen konnten, nachdem das Rohr sich eingelaufen hatte, glatt ohne Fehlmessung etwa im Laufe einer Stunde erledigt werden.

Die Strombelastung der Röhre, welche in der ersten Kolonne Tabelle 1b auf Milliamperes umgerechnet ist, ist sowohl nach den großen wie auch nach den geringen Stromstärken zu begrenzt. Nach den großen Stromstärken zu infolge der durch die Erhitzung verursachten Gasabgabe, welche sich dahin äußert, daß das Gefälle abzunehmen beginnt. Ein Beispiel dafür sieht man in der zweiten Reihe; nachdem eine Stromstärke von 21,6 M.-A. durch das Rohr gegangen war, stellt sich für 18,0 M.-A. nicht mehr die sonstige konstante Ablesung 102, sondern nur der Wert 100 ein.

Nach den geringen Stromstärken zu ist aber die Messung begrenzt infolge des Auftretens von labilen Kurvenästen, wie ich sie schon vor Jahren beschrieben habe. Und zwar tritt im vorliegenden Falle die Labilität am ehesten — bereits bei einer Stromstärke von 10,8 M.-A. — bei der vorderen Anodenlage auf.

Das Meßergebnis.

§ 15. Zwischen den beiden genannten — sämtlichen in vorliegender Arbeit beschriebenen Versuchen gemeinsamen — Grenzen findet sich aber die lineare Verteilung des Gefälles längs der Achse so genau bestätigt, wie das bei dieser verhältnismäßig ungenauen Anordnung überhaupt erwartet werden kann. Tab. 2 enthält in der ersten Kolonne die Stromstärken, in der zweiten Kolonne die für die mittlere Anodenlage berechnete Spannung. Dabei ist die Berechnung so ausgeführt, daß die Spannung der vorderen Anodenstellung jedesmal von derjenigen der hinteren Anodenstellung abgezogen, dann halbiert und zu der Spannung der vorderen Anodenstellung addiert ist. Die dritte Kolonne enthält die tatsächlich beobachtete Spannung in der mittleren Stellung. Die Übereinstimmung zwischen den beiden letztgenannten Kolonnen ist befriedigend.

Ist die Anordnung verbesserungsfähig?

§ 16. Der Anwendung verschiebbarer Anoden im Hochvakuum sind leider infolge mehrerer Umstände ziemlich enge Grenzen gezogen. Zur Erzielung größerer Genauigkeit wäre vor allem die Vergrößerung der äußersten Anodenabstände erforderlich. Das begegnet aber erheblichen Schwierigkeiten, da dann die Röhre nicht nur glasbläserisch schwer herstellbar, sondern auch unhandlich werden würde. Bereits bei der von mir verwirklichten Länge läßt es sich nicht vermeiden, daß die Anode sich gelegentlich festklemmt und ihre Fortbewegung die größte Anforderung an die Geduld stellt.

Die Messung mit der verschiebbaren Anode ist selbstverständlich den in Abschnitt II, § 9, erörterten, sämtlichen Subtraktionsmethoden gemeinsamen Fehlern ausgesetzt. Eine besondere, nur der verschiebbaren Anode eigene Fehlerquelle ist aber die, daß bei dem zur Verschiebung der Anode erforderlichen Schütteln und Klopfen der Röhre unvermeidliche Staubteilchen in die Entladungsbahn geraten und eine zwar geringe, aber doch die Messung störende Gasabgabe verursachen. Aus allen diesen Gründen reichen die hier wiedergegebenen Meßreihen zwar hin, um den linearen Spannungsverlauf innerhalb erträglicher Fehlergrenzen nachzuweisen; für weitergehende Ansprüche an Genauigkeit dürfte man ohne die Anwendung von Sonden kaum auskommen.

IV. Temperaturmessung an der Anode.

Das Problem.

§ 17. Die Frage nach der Temperatur der Anode, besonders der Vergleich derjenigen Temperaturen, welche einer bestimmten gegebenen Strombelastung des Rohres, aber verschiedenen Stellungen der verschiebbaren Anode entsprechen, ist von einem grundsätzlichen Interesse. Ist nämlich einmal — beispielsweise an Hand der vorausgegangenen Messungen — erwiesen, daß das Gefälle linear längs der Entladungsachse verteilt ist, und hat man dann daraus sowie aus den früher von mir publizierten Messungen den Schluß gezogen (1, 2), daß in dem Entladungsgebilde eine Raumladung nicht besteht, so ist der weitere Schluß unvermeidlich, daß man es hier mit einer Elektrizitätsleitung zu tun hat wie sie in einem jeden raumladungsfreien dissoziierten Medium oder noch besser — angesichts der Abwesenheit einer elektrolytischen Abscheidung an den Elektroden — im Metall vorliegt. Ich habe schon im Jahre 1914 darauf hingewiesen (1), daß die gesamte, hier sehr erhebliche, in einem Querschnitt frei werdende Energie in Form von Wärme an die Gefäßwand im nämlichen Querschnitte abgegeben wird ähnlich wie die Joulesche in einem stromdurchflossenen Drahte erzeugte Wärme sich an der Drahtoberfläche der umgebenden Luft mitteilt. Schon die oberflächliche Betrachtung einer möglichst langen Entladungsröhre (es sind solche bis zu 1 m Länge hergestellt worden) lehrt in der Tat, daß eine durchaus gleichmäßige Erwärmung der Glaswand auf der ganzen Länge des Rohres auftritt. Die in dem Entladungsgebilde bestehende Bewegung ist also als eine durchaus ungeordnete aufzufassen, der sich die den Elektrizitätstransport besorgende Bewegung überlagert. Schneidet man einen beliebigen Teil der Entladungsbahn aus, indem man zwei beliebige Schnitte quer zur Röhrenachse legt, so wird dem herausgegriffenen Volumen an dem einen Querschnitte der gleiche Energiebetrag zugeführt, der an dem anderen Querschnitte abgeführt wird. Mit anderen Worten: es iet — ungeachtet des zwischen den genannten Querschnitten bestehenden recht erheblichen Gefälles — die durch den einen Querschnitt dem Volumen zugehende Energie der *geordneten* stromtransportierenden Bewegung gleich der am anderen Querschnitte in der gleichen

Form abgegebenen Energie. Diese Überlegung zeigt, daß die Erhitzung der Anode bei gleicher Strombelastung des Rohres vollständig unabhängig sein muß von der Länge der Entladungsbahn, und von der gesamten an der Röhre anliegenden Spannung, also beispielsweise von der Stellung, welche von einer verschiebbaren Anode in einer beliebig langen zylindrischen Bahn eingenommen wird.

Der experimentelle Nachweis, daß diese Schlußfolgerung zutrifft, würde aber auch umgekehrt einen hinreichenden Beweis für die Richtigkeit der Voraussetzungen bieten, aus welchem die Schlußfolgerung abgeleitet wurde. Also u. a. einen indirekten Beweis für den linearen Verlauf des Potentialgefälles, für die Raumladungsfreiheit, für die ungeordnete Bewegung im Entladungsgebilde und eine metallähnliche Leitung.

Die Anordnung.

§ 18. Das in Fig. 1 (S. 231) abgebildete Rohr enthält eine — im vorausgegangenen Abschnitt noch nicht erörterte — Anordnung zur Messung der Anodentemperatur. Der eine der beiden 2 mm starken zur Anode führenden Drähte *B* besteht ebenso wie derjenige Draht, auf welchem *B* gleitet, nämlich *D*, aus Konstantan, die entsprechenden Drähte *C* und *E* sind aus Kupfer. Die mit den Zahlen 1—6 bezeichnete Wippe ermöglicht es, die Anode entweder mit der Hochspannungsquelle *S* oder mit einem Voltmeter *T* von der für thermoelektrische Messungen üblichen Art zu verbinden, so daß jeden Augenblick die Entladung unterbrochen und die jeweils erreichte Anodentemperatur abgelesen werden kann.

Am Rohre der Fig. 1 konnte ein solcher Nachweis nicht erbracht werden. Es stellte sich nämlich heraus, daß die Wärmeleitung längs der Drähte *B*, *C*, *D*, *E* von der Anode *A* nach außen viel größer ist, wenn die Anode sich in einer größeren Entfernung von der Lampe befindet, als wenn sie näher daran liegt. Das war verursacht durch den in der erstgenannten Stellung bedeutend besser wärmeleitenden Kontakt zwischen den längs des Schlittens gleitenden Drähten und dem Schlitten selbst. So konnte beobachtet werden, daß die Abklingungszeit, welche zwischen zwei gegebenen Temperaturen verlief, in der hinteren Anodenlage zwei- bis dreimal kürzer war, als bei der vorderen Anodenlage. Demgemäß war auch die bei einer gewissen Stromstärke eintretende Erwärmung der Anode

in der der Lampe näheren Lage, also bei einer kürzeren Entladungsbahn, ganz erheblich größer als bei einer längeren Entladungsbahn. Nebenbei sei bemerkt, daß die Wärmestrahlung der Glühlampe auf die Anode zu vernachlässigen war, da die Glühlampe ebenso wie in Fig. 2 gezeichnet ausgeführt und so gestellt war, daß die Anode vom breiten Kupferrahmen der Lampe vollständig abgeschattet wurde.

Nachdem es sich erwiesen hatte, daß eine verschiebbare Anode für die Temperaturmessung nicht geeignet ist, wurde eine andere Versuchsanordnung zu diesem Zwecke ausgeführt. Die Röhre ist in der Fig. 2 dargestellt, während die elektrische

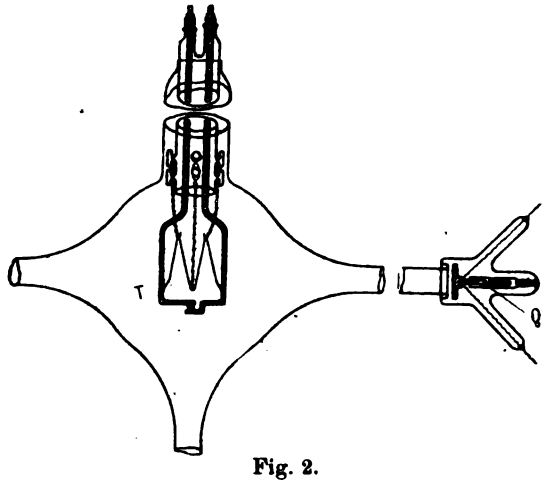


Fig. 2.

Anordnung genau dieselbe wie in Fig. 1 blieb. Die Röhre besteht aus einer Glaskugel, in deren Mitte die aus der Figur ohne weiteres ersichtliche Tantallampe T angeordnet ist. Die Glaskugel besitzt außerdem drei Verjüngungen, die mit größter Sorgfalt schlank verlaufend und so ausgeführt sind, daß ihre Gestalt möglichst gleich ist. An diese Verjüngungen sind drei zylindrische Glasröhren von gleicher Weite (18 mm) angeschlossen. Diese Röhren besitzen verschiedene Längen und tragen an ihren entgegengesetzten Enden je eine Anode. Die drei Anoden haben absolut gleiche Form. Ihre Stiele stecken in Quarzzwischenstücken Q, damit die Befestigungsstellen im Glas beim Ausglühen der Platten nicht gefährdet

werden. An den Anodenplatten sind in der aus der Figur ohne weiteres ersichtlichen Weise die für die Temperaturmessung bestimmten Kupfer- und Konstantandrähte befestigt.

Am kürzesten Ansatz ist die Anodenplatte um 50 mm von der Kugelerweiterung entfernt, so daß also der zylindrische Teil des Rohres zwischen Platte und Kugelkörper die genannte Länge hat. Am zweiten Ansatz beträgt diese Länge 255 mm. Am dritten, längsten Teil aber 530 mm.

Es war ursprünglich geplant, mit Hilfe der drei verschiedenen Längen die Verteilung des Potentialgefälles längs der Achse auch mit dieser Methode nachzuprüfen. Doch konnte wegen einer bei der Herstellung des Rohres untergelaufenen Versehens der längste Röhrenteil nicht in Betrieb genommen werden. Ich hoffe, in einer zweiten Publikation über derartige Messungen berichten zu können. Vor der Hand wurde nur an den zwei ersten kürzeren Röhren gemessen. Tab. 3a enthält die an diesen zwei Teilen vorgenommenen Ablesungen, während Tab. 3b die umgerechneten Werte sowie die mit Hilfe der Subtraktion der Spannungen bestimmte Charakteristik des zylindrischen Teiles bringt. Über die Zulässigkeit der Subtraktion in diesem Spezialfalle vergleiche man Abschnitt VI.

Die Meßergebnisse.

§ 19. Die Messungen der Temperatur der beiden Platten wurden bei drei verschiedenen Milliamperebelastungen des Rohres vorgenommen; nachstehende Tabelle A enthält die Ergebnisse. In der ersten Kolonne ist die Stromstärke in Milliamperes, in der zweiten die gesamte Voltzahl, in der dritten die nach erreichtem stationären Temperaturzustand am Millivoltmeter gemessenen Millivolts des Thermoelementes angegeben.

Tabelle A.

Milliampere	Kürzeres Rohr		Längeres Rohr	
	Volt	Millivolt	Volt	Millivolt
10,0	2070	20,0	3960	18,6
13,4	2500	23,6	4620	22,0
15,0	2600	25,4	4970	23,8

Zur Orientierung über die Temperaturen selbst diene die Angabe, daß

13_6	Millivolt	300° C
19_4	„	400 „
25_8	„	500 „
31_9	„	600 „

entsprechen.

Aus der Tabelle ist zu entnehmen, daß die Erwärmung bei gleichen Milliamperezahlen mit Rücksicht auf die Fehlerquellen in beiden Fällen sehr nahe gleich genannt werden kann. Da das lange Rohr beinahe den doppelten Energiebetrag bei der Entladung verbraucht wie das kurze Rohr, so unterliegt es gar keinem Zweifel, daß das Plus an Energie im langen Rohre einfach in Form ungeordneter Bewegung an die Glaswand abgegeben wird.

Die vorhandene Abweichung der bei gleichen Strombelastungen beobachteten Temperaturen liegt insofern im umgekehrten Sinne, als die Anode im kürzeren, weniger Energie verbrauchenden Rohre sich etwas mehr erhitzt als in dem längeren, mehr Energie verbrauchenden. Das kann zum Teil an der Abschnitt II, § 10 erörterten, noch immer nicht genügend in den zylindrischen Teil zurückgezogenen Stellung der Anode liegen, wodurch sie dem Striktionskathodenstrahl oder der Wärmeübertragung seitens der besonders hoch erhitzten Glaswand der Verjüngung ausgesetzt ist. Zum Teil kann die geringe Differenz aber auch von einer kleinen, unvermeidlichen individuellen Abweichung in der Anordnung beider Anoden herrühren. Daß ein solcher Unterschied vorhanden war, ist aus der Bestimmung der Abklingungszeiten zu ersehen. Während die Zeit, welche erforderlich war, um einen Rückgang der Spannung des Thermoelementes von 23,6 auf 19,6 Millivolt zu verursachen, beim längeren Rohre 45 Sekunden betrug, dauerte die Abklingung zwischen den nämlichen Temperaturgrenzen beim kürzeren Rohre 49 Sekunden. Dieser kleine Unterschied ist jedenfalls für einen Teil der in der Tabelle A enthaltenen Abweichungen verantwortlich.

V. Rohr mit zwei Anoden im nämlichen zylindrischen Teil.

Die Anordnung.

§ 20. Diese Möglichkeit, die Subtraktionsmethode zu verwirklichen, ist in Fig. 3 dargestellt. Das Rohr besteht,

wie immer, aus einem weiten, kugelförmigen, die Tantallampe *T* enthaltenden Teile *K* und einem zylindrischen Teile *Z*, der in diesem Falle 22 mm weit ist und an seinem Ende die ein für allemal festgemachte, plattenförmige Nickelanode *A* enthält, die so befestigt ist, daß sie beim Entgasen auf helle Rotglut erhitzt werden kann.

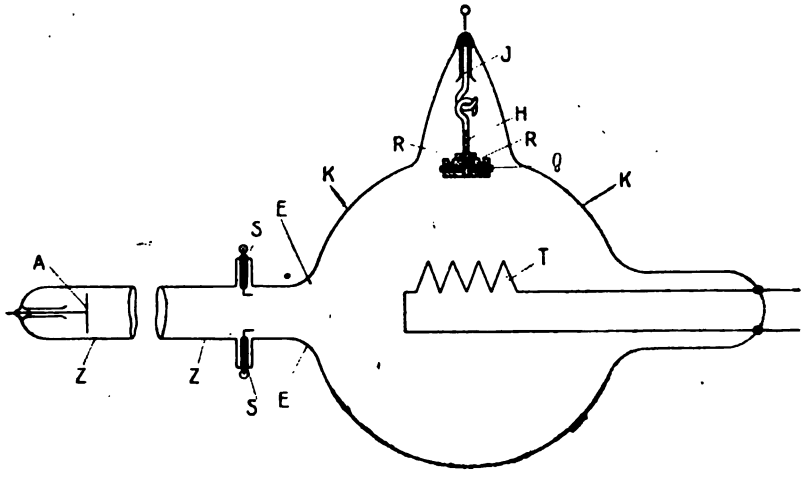


Fig. 3.

Das Eigenartige an diesem Rohre ist, daß unweit der Stelle, an welcher die Kugel in den zylindrischen Teil übergeht, in dem mit *SS* bezeichneten Querschnitt durch passendes Bewegen des Rohres eine lose Hilfsanode je nach Bedarf angeordnet oder entfernt werden kann. Diese Hilfsanode *H* ist während des Pumpprozesses an einem für diesen Zweck besonders vorgesehenen Haken *I* so aufgehängt, daß sie in die Lampenkugel hineinragt, also bei der Entladung mit Elektronen beworfen und so ausgeglüht werden kann. Nachdem die Röhre von der Pumpe abgeschmolzen ist, wird die lose Anode durch Neigen der Röhre vom Haken abgehängt und kann nun nach Belieben entweder, wenn die feste Anode *A* benutzt wird, irgendwo in der Lampenkugel liegen bleiben. Oder aber sie kann durch passendes Bewegen der Röhre so in ihren zylindrischen Teil *Z* hineingesenkt werden, daß die aus dünnem Platindraht bestehenden 15 mm von der Erweiterung zur Kugel angebrachten Häkchen *S* in die kreisförmige

Rille *R* der Hilfsanode hineingreifen. Diese Rille und der überstehende Rand der Quarzplatte *Q* gewährleisten eine gut zentrierte Stellung der Hilfsanode im Rohre *Z*. Die Entfernung der beiden Anoden beträgt dabei 595 mm.

Vorzüge und Mängel der Anordnung.

§ 21. Diese Art, die Subtraktionsmethode zu verwirklichen, teilt mit der Methode der verschiebbaren Anode nach Fig. 1 den Vorteil, daß nur eine einzige, allen Strombahnen gemeinsame Verjüngung vorhanden ist (§ 29), besitzt aber nicht manche ihrer Nachteile. Denn man ist hier durch keinerlei technische Schwierigkeiten darin beschränkt, dem zylindrischen Rohrteil eine beliebige Länge zu geben. Auch leidet man in diesem Falle nicht unter den Stäubchen, die bei der umständlichen Anordnung der Fig. 1 besonders dann in die Entladungsbahn geraten, wenn die Anode sich festklemmt und das Rohr geschüttelt werden muß, um sie fortzubewegen. Freilich gestattet es diese Methode nicht, die Messung innerhalb eines einzigen zylindrischen Teiles in drei verschiedenen Anodenstellungen auszuführen und somit die Verteilung des Gefälles zu messen. Für diesen Zweck müßte die Methode noch weiter ausgebaut werden, oder aber man müßte sie durch Messungen an zwei verschiedenen Ansätzen ähnlich der Fig. 2, S. 237, ergänzen.

Als Fehlerquelle der Anordnung nach Fig. 3 ist hingegen der Umstand hervorzuheben, daß das aus drei Platindrähten bestehende Gerüst *S S* in der Strombahn liegt und möglicherweise als Einengung oder durch seine Aufladung dahin wirkt, daß der Spannungsabfall sich erhöht. Irgendwelche Anzeichen in Form von Fluoreszenz oder Erhitzung, daß an dieser Stelle tatsächlich ein bedeutender Abfall stattfindet, fehlen aber.

Die Meßergebnisse.

§ 22. An dem ersten gegenwärtig vorliegenden Exemplar der Röhre nach Fig. 3 war die Subtraktionsmethode nicht anwendbar, weil die Einengung *E* zu eckig verläuft. Ferner, weil die vordere, durch die Platinhäkchen *S* gegebene Lage der Hilfsanode — wie in Abschnitt II erörtert — zu nahe an der Einengung liegt. Dessen ungeachtet sind die mit diesem Rohr vorgenommenen Messungen von Interesse. Denn die einfache Klemmspannungsmessung an der festen Anode in der Fern-

lage, wie sie in Tab. 4 wiedergegeben ist, liefert bei dem zurzeit benutzten Rohrexemplar das quadratische Gesetz. Es werden hier die an beiden Anoden gewonnenen Meßreihen mitgeteilt; sie sollen demnächst durch Beobachtungen an einer verbesserten Form des Rohres ergänzt werden.

VI. Die Charakteristiken.

Darstellungsweise der Diagramme.

§ 23. In den Diagrammen der Figg. 4, 5, 6 und 8 sind die an den verschiedenen vorbeschriebenen Röhren beobachteten Funktionen so dargestellt, daß auf der Abszissenachse die Logarithmen der abgelesenen (nicht der in Milliampere umgerechneten!) Stromstärke, auf der Ordinatenachse die Logarithmen der Spannung aufgetragen sind. Die Werte auf der Abszissenachse sind für alle Kurven des nämlichen Diagramms dieselben. Hingegen sind die Kurven um willkürliche Beträge parallel zur Ordinatenachse verschoben. Es kommt hier ausschließlich auf die Kurvenform und nicht auf die Lage der Kurve im Koordinatensystem an; die gewählte Anordnung war erforderlich, um zueinandergehörende Kurven in einer gemeinsamen Figur so unterbringen zu können, daß ihr Vergleich auf den ersten Blick möglich ist.

Das Gesetz.

§ 24. Die Logarithmierung der beiden Variablen wurde in der Voraussetzung ausgeführt, daß — gemäß meinen älteren Erfahrungen — die Stromstärke im allgemeinen eine lineare Funktion einer Potenz der Spannung ist

$$i = a \cdot v^n + b ,$$

wobei b bei einigermaßen bedeutenden Werten der Variablen vernachlässigt werden kann. Manchmal besitzt die Charakteristik verschiedene Zweige, die mit einem scharfen Knick ineinander übergehen, so daß einem jeden der Zweige ein anderer Wert des n entspricht.

Aus verschiedenen, bereits erwähnten Gründen ist der mit Hilfe der Subtraktionsmethode sich erforschen lassende Bereich erheblich beschränkter als der der Sondenmessung zugängliche. Es ist aber bemerkenswert, daß, soweit der enge Meßbereich es zu beurteilen gestattet, die Kurven tatsächlich sich der angegebenen Gesetzmäßigkeit fügen. Der

Exponent n jeder einzelnen Kurve ist auf zwei Dezimalen genau neben der Kurvennummer direkt über jedem einzelnen Linienzuge angegeben.

Aus meinen gesamten Erfahrungen folgt, daß dieser Exponent sich um so mehr dem Wert 2 nähert, je sorgfältiger das Vakuum hergestellt wird. Ferner, je einwandfreier die Röhrenform ist. Das heißt, für direkt gemessene, nicht durch Subtraktion korrigierte Charakteristiken wird der Wert 2 mit einer um so größeren Annäherung erreicht, einen je größeren Teil der Gesamtspannung die zylindrische Entladungsbahn aufnimmt, also — gleichen Querschnitt vorausgesetzt — je länger der zylindrische Röhrenteil ist. Unter Anwendung der Subtraktionsmethode aber ist eine um so größere Annäherung an den Wert 2 zu erwarten, je tiefer die Nahlage der Anode in dem zylindrischen Teile angeordnet ist und selbstverständlich wieder je länger dieser zylindrische Teil ist.

Diskussion der Diagramme.
Rohr Fig. 1.

§ 25. In der Fig. 4 sind die Charakteristiken des Rohres mit verschiebbarer Anode nach Fig. 1 dargestellt. Die Kurve I

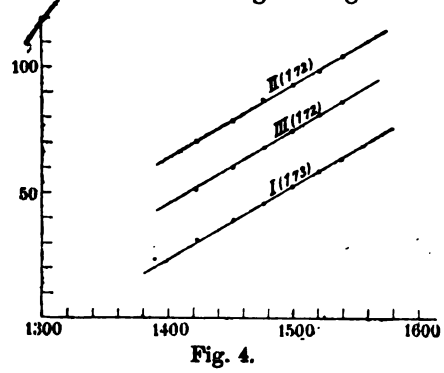


Fig. 4.

entspricht der Nahlage, II der Fernlage, III der mittleren Lage der Anode. III und II verlaufen durchweg geradlinig, während bei I entsprechend der unmittelbaren Nachbarschaft der Einengung die Punkte geringerer Stromstärken von der Geraden abweichen. Der Exponent n ist in allen drei Fällen 1_{72}—1_{73}. Wegen der verhältnismäßig geringen Länge des Rohres dürfte eine größere, Ausführung der Subtraktion ermöglichende Genauigkeit nicht gefordert werden.

Rohr Fig. 2.

Fig. 5 bringt die Charakteristiken des Rohres mit mehreren zylindrischen Ansätzen nach Fig. 2. Es entspricht hier Kurve I der weiter entfernten, Kurve II der näher gelegenen Anode. An diesem Rohre habe ich die Subtraktion ausgeführt. Die naheliegende Anode steckt ziemlich weit im zylindrischen Teile und insoweit erscheint die Subtraktion berechtigt. Freilich weiß man nicht, ob die einzelnen Verjüngungsstellen nicht doch — ungeachtet tunlich gleicher Formgebung — Unter-

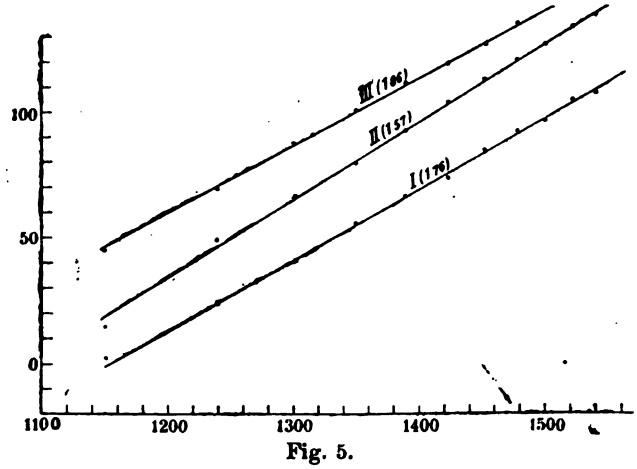


Fig. 5.

schiede im Spannungsabfall bedingen, welche die Subtraktion unzulässig machen (vgl. hierüber Abschnitt VII, § 29). Läßt man das zunächst dahingestellt sein, so sieht man, daß die durch die Subtraktionsmethode gewonnene, mit III bezeichnete Charakteristik des zylindrischen Teiles mit ihrem Exponenten von 1,86 sich erheblich mehr der zu erwartenden quadratischen Funktion nähert, als die Kurven der Fig. 4. Es sei hier wiederholt darauf hingewiesen, daß dieses Rohr schon unter Berücksichtigung neuerer Erfahrungen gebaut wurde und besonders die Verjüngung eine möglichst schlank verlaufende Form in der in Fig. 2 angedeuteten Weise erhalten hat. Das prägt sich hauptsächlich in einem verhältnismäßig geringen Spannungsabfall bei der Nahlage (vgl. § 29) aus.

Rohr Fig. 3.

In Fig. 6 ist die Charakteristik des Rohres mit einer festen und einer frei bewegten Anode nach Fig. 3 wiedergegeben.

I gibt die Charakteristik der vollen Rohrlänge, welche in diesem Falle *genau eine quadratische Funktion* ist. Die Nahlage der Anode ist bei diesem Modell, wie bereits hervorgehoben, zu wenig in den zylindrischen Röhrenteil zurückgezogen; außerdem ist die Form der Einengung eine sehr

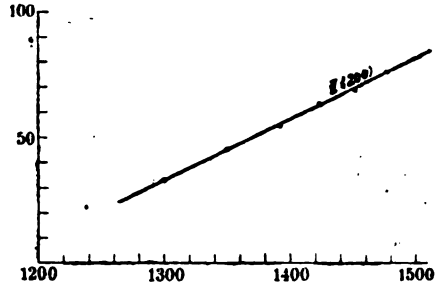


Fig. 6.

eckige. Diese beiden Umstände verhindern die Gewinnung glatt reproduzierbarer Messungen bei der Nahlage der Anode, während im Gegenteil in der Fernlage befriedigende Übereinstimmungen erzielt werden. In der Tab. 4 sind die Grenzen angegeben, zwischen denen die Meßreihen der Spannung sich zu bewegen pflegen. Von den Aufzeichnungen einer logarithmischen Charakteristik für die Nahlage ist naturgemäß abgesehen worden, folglich auch von der Anwendung der Subtraktionsmethode zwecks Gewinnung der Charakteristik des zylindrischen Teiles. Ich bin aber der Meinung, daß — geeignete Ausführung vorausgesetzt — diese Konstruktion eine besonders vorteilhafte Anwendung der Subtraktionsmethode ermöglichen wird.

VII. Der Grenswert des Gefälles.

Vergleichende Zusammenstellung der Zahlen.

§ 26. Ich habe im Jahre 1910 (1) sowie 1914 (2) ein umfangreiches Beobachtungsmaterial zusammengestellt, aus welchem hervorging, daß die für die Aufrechterhaltung einer bestimmten Strom*dichte* erforderliche Spannung von der Gestalt und Weite der Röhren unabhängig ist und sich mit fortschreitender Luftleere einem Grenzwerte zustrebt, welcher in dem mit technisch zugänglichen Mitteln herstellbaren Hochvakuum bereits mit großer Annäherung erreicht ist. Aus den damals angegebenen

Zahlen läßt sich das Gefälle berechnen, welches in dem gedachten Grenzfalle für eine bestimmte Strom*stärke* in den hier beschriebenen Röhren stattzufinden hätte. Es wurde seinerzeit gefunden, daß für 10 M.-A. in einem Rohre, dessen lichte Weite etwa 10.5 mm war, zwischen zwei um 30 mm voneinander entfernten Sonden ein Spannungsabfall von 405 Volt bestand. Beachtet man die lineare Verteilung des Potentialgefälles längs der Achse und die von mir 1910 angegebene und experimentell bestätigte Beziehung[1]), daß bei gleicher Stromstärke das Gefälle umgekehrt proportional der lichten Weite ist, so ergibt sich zunächst, daß bei einer Stromstärke von 10 M.-A. das Gefälle in einem Rohre von 10 mm lichter Weite auf die Länge von 10 mm 405 Volt beträgt. Die Rechnung liefert ferner für die in vorliegender Arbeit benutzten lichten Weiten die in der dritten Kolonne der folgenden Tabelle B angeführten Werte des Spannungsabfalles für je 10 mm Rohrlänge. Die vierte und fünfte Kolonne enthält die entsprechenden, tatsächlich beobachteten Werte des Gefälles, wobei unter „*alt*" die zur Zeit der Fertigstellung vorliegender Veröffentlichung beobachteten Werte, unter „*neu*" die an verbesserten Röhrenformen in der Zeitspanne zwischen der Abfassung der Publikation und ihrer Korrektur gefundenen Zahlen aufgeführt sind.

Tabelle B.

Rohrtype	Lichte Weite mm	$\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ berechnet	$\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ beobachtet alt	neu
Fig. 2	18	78	94	—
„ 3	22—23	64—60	69—70	55,5
„ 1	28	60	51,5	—

Bemerkungen zu der Tabelle B.

§ 27. Es ist vor allem zu beachten, daß die Bestimmung der lichten Weite langer, von freier Hand gezogener Glasröhren von vornherein einem Fehler von etwa 5 Proz. — in ungünstigen Fällen mehr — unterworfen ist. Ferner, daß die früheren

1) Diese Beziehung ist eine einfache Folgerung aus der Tatsache, daß die Charakteristik lediglich durch die Strom*dichte* bestimmt ist und der anderen Tatsache, daß die Stromstärke dem Quadrat der Spannung proportional ist (§ 24).

Messungen, aus welchen die in der zweiten Kolonne angegebenen Werte berechnet wurden, vermutlich bei einem höheren Vakuum als die Messungen dieser Arbeit ausgeführt waren. Während ich gegenwärtig an von der Pumpe abgetrennten, in Luft frei aufgehängten Röhren arbeitete, sind die Werte der früheren Publikationen in Verbindung mit Luftpumpe und mit in flüssiger Luft beziehungsweise flüssigem oder festem Wasserstoff tauchendem Absorptionskohlegefäß gemacht worden, vielfach, indem die Wände der Entladungsbahn ebenfalls in flüssiger Luft gekühlt waren. Demgemäß wäre zu erwarten gewesen, daß die Spannungswerte vorliegender Arbeit bedeutend geringer ausfallen würden als diejenigen der früheren Untersuchungen. Wenn das zum Teil nicht zutrifft, so liegt es wohl an den bereits erwähnten Mängeln der ersten hier benutzten Röhrenexemplare.

Es ist beispielsweise in dem Rohr nach Fig. 2 eine Fehlerquelle darin enthalten, daß die zu den verschiedenen Anoden führenden Verjüngungsstellen nicht in genau der gleichen Form geblasen werden können und auch darin, daß man keine Gewähr dafür hat, daß die Aufladung der Glasoberfläche an jeder Verjüngungsstelle sich in der gleichen Weise ausbildet.

Ferner ist am Rohre Fig. 3 beim alten Exemplar die Anode in der Nahlage dicht an der sehr ungünstig geformten, weil steil verlaufenden Verjüngungsstelle angebracht gewesen (vgl. §§ 20 und 22), was den in § 10 erörterten Mangel bedingt. In der Tat ist an einem neuen Rohrexemplar dieser Type, bei welchem die Nahlage der Anode erheblich weiter (um 10 cm) von der diesmal sehr allmählich verlaufenden Erweiterung der Kugel entfernt war und die Entfernung der beiden Anoden 60 cm betrug, der unter „neu" wiedergegebene Wert beobachtet worden. Die an diesem neuen Rohr gefundenen Beobachtungsreihen selbst sind der bei der Korrektur nachgefügten Tab. 6 zu entnehmen. Man sieht, daß an dieser Röhrentype tatsächlich — wie erwartet — niedrigere Gefälle gemessen wurden. Diese Röhrentype verkörpert wohl die beste Art und Weise, die Subtraktionsmethode zu verwirklichen.

Vergleich der Werte der Tabelle B.

§ 28. Obwohl von einer Übereinstimmung der beobachteten Werte mit den berechneten im eigentlichen Sinne des Wortes nicht gesprochen werden kann, so ist doch bemerkenswert, daß alle beobachteten Werte in naher Umgebung um die be-

rechneten herumliegen. Vergegenwärtigt man sich ferner, daß die Versuchsbedingungen — besonders diejenigen der Herstellung des Vakuums — die im vorigen Paragraphen angeführten Unterschiede aufwiesen, daß die Meßmethoden grundverschieden waren und daß man einen Teil der in vorliegender Arbeit beobachteten Werte als durch nebensächliche Umstände (§ 10) zu hoch gegriffen bezeichnen kann, so ist mit großer Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß die Subtraktionsmethoden in ihrem weiteren Ausbau das Vorhandensein des mit der Sondenmessung im Jahre 1910 und 1914 ermittelten Grenzwertes und auch die quadratische Charakteristik mit einer größeren als der bei diesen ersten Versuchen erreichten Genauigkeit zu bestätigen imstande sein werden. Die kurz vor der Korrektur vorgenommene, unter „neu" angeführte Messung sowie Tab. 6 lassen diese Vermutung gerechtfertigt erscheinen. Es wird also voraussichtlich auch mit Hilfe der Subtraktionsmethoden möglich sein, die durch den Grenzwert des Gefälles gegebene Naturkonstante als vorhanden nachzuweisen und wenigstens in erster Annäherung zu bestimmen. Insofern ist es wünschenswert, daß diese Methoden weiter ausgebaut werden, wenn ich auch nach wie vor der Ansicht bin, daß die genaue und vollständig befriedigende Bestimmung des Grenzwertes des Gefälles nicht anders als mit Hilfe der Sondenmessung in der in meinen früheren Publikationen beschriebenen Weise ausgeführt werden kann.

Spannungsabfall an Verjüngungen verschiedener Form.

§ 29. Besonders für die Beurteilung, inwiefern die Ausführung der Subtraktionsmethode an einem Rohr gemäß Fig. 3 zulässig ist, aber auch, um sich ein Urteil über die Subtraktionsmethoden überhaupt zu bilden, ist es von Interesse, auf den an Verjüngungen verschiedener Form auftretenden, von Fall zu Fall recht verschiedenen Spannungsabfall näher einzugehen.

Im allgemeinen ist der Spannungsabfall um so größer, je steiler die Übergangsstelle geformt ist. Diese Formgebung war in ausgeprägtestem Maße bei dem Rohre nach Fig. 3 in seiner ersten Ausführung verwirklicht; hier war der Spannungsabfall bis zur Nahlage der Anode bei 10 M.-A. 2970—3100 Volt. Im Gegensatze dazu war bei dem Rohre nach Fig. 2 die Gestalt der Verjüngung eine besonders günstige schlanke. Entsprechend betrug der Abfall bei 10 M.-A. nur 1980 Volt, trotz-

dem bei diesem Rohre die lichte Weite von 18 mm geringer war als diejenige des Rohres nach Fig. 3 (22—23 mm) und ferner trotzdem im Rohre nach Fig. 2 die Anode in der Nahlage erheblich weiter von der Verjüngungsstelle entfernt war (50 mm) als im Rohre nach Fig. 3 (25 mm). Der Einfluß der Formgebung ist eben sehr viel größer als derjenige der anderen, immerhin schon recht nennenswerten Abweichungen. Schließlich ist beim Rohr nach Fig. 1, das seiner Gestalt nach die Mitte zwischen den beiden vorgenannten Röhren hält, der Abfall bis zur Nahlage der Anode bei 10 M.-A. 1920 Volt, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß die lichte Weite größer und die Entfernung der Anode in der Nahlage bedeutend geringer war als bei dem Rohre nach Fig. 2.

VIII. Charakteristiken einer Hochvakuum-Ventilröhre.

Die Fragestellung.

§ 30. Im Gegensatz zu meinen, die Erkenntnis der Vorgänge in unendlicher Entfernung von der Anode innerhalb der zylindrischen Bahn anstrebenden Versuchen führen zahlreiche Arbeiten anderer Forscher Messungen zwischen Glühdraht und einer nahe ihm gegenüber gelegenen Anode aus. Es ist von Interesse, darauf einzugehen, wie die Frage der Charakteristik und der Konstanz bei solchen Anordnungen liegt, denn erst ein derartiger Einblick macht es möglich, sich ein Urteil über die hier mitgeteilten Resultate zu bilden.

Gegenwärtig scheint von vielen Seiten die Physik der Hochvakuumladung kurz und bündig dahin verstanden zu werden, daß das Dreihalbegesetz ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für das Vorhandensein höchsten Entlüftungsgrades sei. Und zwar gemäß den ersten Arbeiten von Langmuir unabhängig von jeder besonderen Röhren- und Elektrodenform.

Demgegenüber ist zunächst einmal — ohne auf die theoretische Berechtigung der Langmuirschen Behauptung einzugehen — an Hand der vorliegenden Literatur folgendes zu betonen. Nur in den ersten Langmuirschen Veröffentlichungen (6) sind Messungen zu finden, die an einer anderen Anordnung angestellt worden sind als an dem aus theoretischen Gründen klassischen Falle, bei welchem die Anode ein Zylinder ist, in dessen Achse der Glühdraht ausgespannt ist. Während

nun aber in diesem klassischen Falle tatsächlich auch meiner Erfahrung nach das Dreihalbegesetz sich meistens bestätigt findet, und zwar bereits bei Entlüftungsgraden, die noch bei weitem nicht dem höchsten erreichbaren Vakuum entsprechen, hat Langmuir bei einer wesentlich von der klassischen abweichenden Anordnung ein Ergebnis erhalten, welches *nicht* als Bestätigung des Dreihalbegesetzes angesprochen werden kann. Langmuir führt seine abweichende Beobachtung auf den zufälligen Mangel an genügendem Vakuum zurück. Er und seine Mitarbeiter haben aber seit jener Zeit meines Wissens andere Ergebnisse als die mit der konaxialen Anordnung erlangten nicht veröffentlicht.

Nun liegen aber die Dinge meiner Erfahrung nach so, daß, wenn man die Elektronen von der Glühkathode aus nicht entweder divergieren oder parallel verlaufen läßt, das Dreihalbegesetz durchaus nicht immer erfüllt ist. Es erscheint mir deshalb sicher unzulässig, einen jeden Mißerfolg das Dreihalbegesetz bei anderen als bei den Langmuirschen Anordnungen bestätigt zu finden, einfach damit abzutun, daß sekundäre Umstände (z. B. ungenügendes Vakuum) daran schuld seien.

Im folgenden werden Messungen mitgeteilt, aus denen sich klar ergibt, daß das Dreihalbegesetz und extremes Hochvakuum keinesfalls unbedingt miteinander verkettet sind. Es gelingt in ein und derselben Anordnung, das Dreihalbegesetz zu beobachten bei einem nicht sehr weit vorgeschrittenen Vakuum, dann aber nach Erreichung des höchsten Entlüftungsgrades eine davon recht abweichende Charakteristik. Während das quadratische Gesetz mit einer um so größeren Annäherung erfüllt ist, je höher das Vakuum, trifft das für das Dreihalbegesetz durchaus nicht bei jeder beliebigen Anordnung zu.

Die Röhre.

§ 31. Die Messungen, die ich zum Nachweis dieses Sachverhaltes hier anführen will, sind an einem Rohre gemäß Fig. 7 vorgenommen.[1]) Es ist dies ein Ventilrohr, wie es für die Verriegelung höchster Spannungen von mir in mehreren

1) Die Messungen wurden nicht besonders für den Zweck der vorliegenden Publikation ausgeführt, sondern sie geben Beobachtungen wieder, die ich im Laufe der Zeit für mehr technische Studienzwecke

Exemplaren hergestellt wurde. Der ursprüngliche Anwendungszweck des Rohres war, die Glühlampentemperatur auf einen derartigen Wert einzustellen, daß unabhängig von der Spannung stets ein vorgegebener Sättigungsstrom durch die Röhre floß. Dementsprechend mußten die Anoden in der aus der Figur ohne weiteres verständlichen Weise mit dicken, wärmeableitenden Kupferstäben und Radiatoren ausgestattet werden, um die beträchtlichen freiwerdenden Wärmemengen abführen

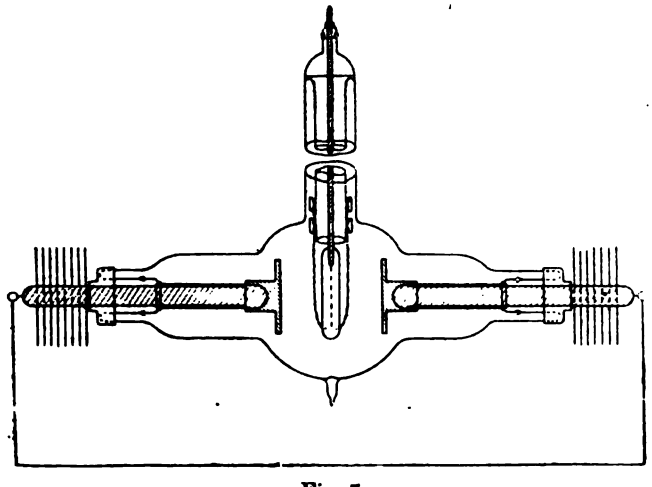


Fig. 7.

zu können. Die Anodenplatten haben einen Durchmesser von 50 mm. Die Glühdrahtwindungen liegen in der Symmetrieebene zwischen den Anoden, damit der Draht von einer statischen Beeinflussung nicht zerrissen werden kann, Deshalb ist die Glühlampe in Fig. 7 nur im Profil zu sehen. ihre Ausführung ist aber genau dieselbe wie die aus der Aufsicht Fig. 2 ersichtliche. Der Glühlampenhals ist entsprechend den hohen, zu verriegelnden Spannungen 400 mm lang. Das Rohr arbeitet vollständig befriedigend und verriegelt effektive Wechselspannungen von 80—100 Kilovolt auf die Dauer vollständig. Es ist 1500 Stunden in Betrieb gewesen, ohne daß die geringste

ausgeführt habe. Daraus erklärt sich, daß nicht immer in denselben Stromstärkegebieten gearbeitet wurde, sondern daß die Meßgebiete nur zum Teil ineinandergreifen. Für die Beurteilung der Gesetze ist das aber ohne jeden Belang.

Änderung (Zerstäubung!) aufgetreten wäre. Daraus ist zu ersehen, daß das Vakuum als ein sehr hohes bezeichnet werden kann.

Die Charakteristiken.

§ 32. Bei den Versuchen wurde der Glühdraht so hoch geheizt, daß der Sättigungsstrom weit über 100 Milliampere lag. Die mit dem Rohr an stehender Gleichspannung aufgenommenen Charakteristiken sind aus den Tabellen 5a und 5b zu ersehen. Sie sind in der nämlichen Weise wie die in Abschnitt VI behandelten Charakteristiken logarithmiert in Fig. 8

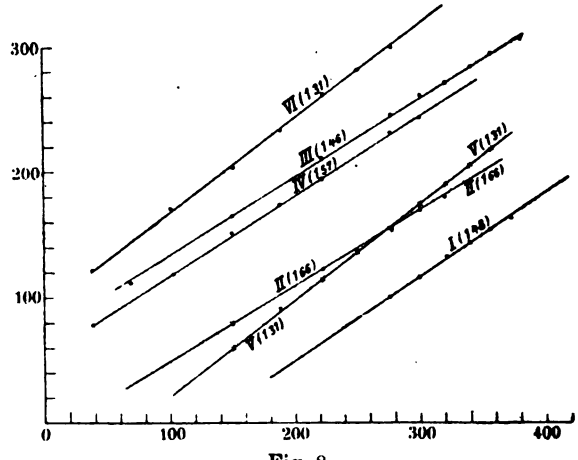


Fig. 8.

wiedergegeben. Diagramm I ist nach der ersten Evakuierung der Röhre aufgenommen, nach welcher die Röhre bereits vollständig befriedigend als Ventil arbeitete, also vom Gesichtspunkte des Kriteriums der Undurchlässigkeit des Vakuums für die Hochspannung als hochevakuiert bezeichnet werden konnte. Man sieht, daß das Dreihalbegesetz mit großer Annäherung ($n = 1{,}48$) erfüllt ist. Die absoluten Werte der Spannungen sind aber, wie aus der Tabelle entnommen werden kann, im Vergleich mit den späteren Messungen, niedrig.

Das nämliche Rohr wurde nun zum zweiten Male evakuiert, da erfahrungsgemäß nach einer wiederholten Evakuierung ein höheres Vakuum sich einzustellen pflegt. Alle übrigen Diagramme sind mit der Röhre in diesem Zustande aufgenommen. Zuerst das Diagramm II, welches ungeachtet des bedeutend besseren Vakuums mit seinem Exponenten $n = 1{,}66$ weit

mehr vom quadratischen Gesetz abweicht, als das Diagramm I. Das im Vergleich mit I höhere Vakuum ist hauptsächlich daran zu erkennen, daß bei II die der nämlichen Stromstärke entsprechenden Spannungen ungefähr das Doppelte betragen.

Diagramm III enthält die mehrere Wochen später aufgenommene Charakteristik bei höheren Stromwerten, der Exponent $n = 1{,}46$.

Mehrere Tage später wurde das Diagramm IV aufgenommen. Die absoluten Werte der Spannung sind merklich größer als im Diagramm III, wenn auch der Unterschied bedeutend geringer ist als zwischen I und III. Demnach ist das Vakuum auf keinen Fall schlechter geworden, sondern wahrscheinlich besser. Der Exponent n ist in diesem Falle aber 1,57, weicht also vom Dreihalbegesetze bedeutend mehr ab als der von dem sicher bei viel schlechterem Vakuum aufgenommenen Diagramm I und auch mehr als der des Diagramms III, obwohl auch bei letzterem das Vakuum eher schlechter als besser war.

Auffallenderweise war die unter IV gegebene Charakteristik nicht die einzige, welche beobachtet werden konnte. Es stellte sich ebenso häufig in Zeitabständen von wenigen Sekunden beim Aus- und Einschalten des Rohres eine andere Charakteristik ein, die durch die Grade V mit dem Exponenten 1,31 wiedergegeben ist. War eine der beiden Charakteristiken aber einmal eingestellt, dann konnten in beiden Fällen gleich gut übereinstimmende Meßreihen erzielt werden. Ich nehme mit großer Wahrscheinlichkeit an, daß der Unterschied der beiden Charakteristiken dadurch bedingt war, daß es bei dem Rohr Fig. 7 der Entladung freigestellt ist, verschiedene Bahnen zu wählen. Vermutlich liegt die Sache so, daß bei der einen der Charakteristiken die Entladung ziemlich direkt von der Glühlampe nach den Anoden übergeht und gar nicht oder verhältnismäßig wenig die Glaswände berührt. Bei der anderen Charakteristik nimmt die Entladung aber einen größeren Querschnitt ein, so daß sie ausgiebig die Glaswände bespült. Je nachdem, wie die Aufladung der Glaswand zufällig stattfindet, wird die eine oder die andere Charakteristik von der Entladung befolgt. Gestützt wird diese Auffassung durch einen durch die Gerade VI dargestellten Versuch, bei welchem die eine Anodenplatte entweder vollständig ohne Zuleitung gelassen oder mit der Glüh-

lampe verbunden wurde, so daß nur eine Platte als Anode wirksam war. Bei einer solchen Arbeitsweise ist es unvermeidlich, daß die Entladung ausgiebig mit der Glaswand in Berührung kommt. Es stellt sich hier tatsächlich für den Exponenten genau der nämliche Wert ein wie bei V, nämlich 1,31.

Allgemeine Folgerung.

§ 33. Daraus ergibt sich in absolut einwandfreier Weise, daß im nämlichen, wenn auch extrem hohen Vakuum je nach der Beschaffenheit der Entladungsbahn ganz verschiedene Gesetzmäßigkeiten bestehen können. Man erkennt auch hieraus, wie berechtigt das in meinen Arbeiten verfolgte Bestreben ist, nur in „unendlicher Entfernung von den Elektroden" und nur in einer definierten zylindrischen Bahn zu beobachten. Es ist in der Tat nicht möglich, den Gegenstand der Untersuchung anders als in dieser Weise eindeutig zu definieren.

Bedenkt man ferner, daß das Dreihalbegesetz mit größter Annäherung im Falle I, also bei verhältnismäßig schlechtestem Vakuum erfüllt war, so sieht man ein: *Das Dreihalbegesetz ist keineswegs ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für das Bestehen höchster Entlüftungsgrade.* Es gibt eine ganze Anzahl von Werten für den Exponenten der Spannung, die sich in Wirklichkeit zum mindesten nicht weniger häufig als das Dreihalbegesetz einzustellen pflegen. Nur ein besonderer Fall, in welchem meine Erfahrungen aber nicht weit genug reichen, könnte hiervon ausgenommen sein. Nämlich die Langmuirsche konaxiale Anordnung, als deren Spezialausführung vielleicht der Versuch von Germershausen (11) angesehen werden kann, bei welchem die Elektronenbahnen parallel verlaufen. Für derartige Anordnungen geht meine Kenntnis nur so weit, daß ich mit Bestimmtheit angeben kann, daß hier das Dreihalbegesetz schon bei verhältnismäßig hohem Gasdrucke in großer Annäherung besteht.

IX. Isolatoren und Hochvakuumentladung.[1])

Bekannte Beobachtungen.

§ 34. Dem Verhalten von Isolatoren unter dem Aufprall von Elektronen im Hochvakuum ist bisher wenig Beachtung

1) Es ist für alle geschilderten Beobachtungen unerläßliche Bedingung, daß die Entladungsbahn von Isolatoren umgeben sei, Metallbelege — beispielsweise solche, die sich durch Zerstäubungen zu bilden pflegen — bringen außerordentliche Fehlerquellen mit sich und stören die Beobachtungen aufs empfindlichste.

geschenkt worden. Tatsächlich kann in jedem, noch so hoch evakuierten Glühkathodenrohr, wenn es die geometrische Anordnung nur irgendwie zuläßt, die Glaswand durch Elektronenaufprall nicht nur zur intensiven grünen Fluoreszenz erregt, sondern auch bis auf Schmelztemperatur erhitzt werden. Die nämliche Glaswand fluoresziert rot (1), nach Ermüdung blauviolett, wenn sie mit dem raumladungslosen Entladungsgebilde in Berührung gebracht wird. Es tritt auch dabei eine intensive Erhitzung des Glases ein. Das Hochvakuum verhindert es also keinesfalls, daß der Isolator die ihm zugeführte Ladung irgendwie abgibt, ganz ohne daß eine Ionisation sich bei dem Ausgleich der Ladungen beteiligen würde. Ich habe seit Anfang 1914 des öfteren (12, 13, 14) auf diesen Umstand hingewiesen und darauf aufmerksam gemacht, daß eine Aufladung der Glaswand keinesfalls an der Abwesenheit der grünen Fluoreszenz gegenüber dem Brennfleck der Hochvakuum-Röntgenröhren verantwortlich gemacht werden kann, wie das wiederholt von Coolidge und seinen Mitarbeitern mit einer gewissen Selbstverständlichkeit behauptet wird.[1])

Ein neuer Versuch.

§ 35. Ein hübscher Versuch, der es beweist, daß selbst der beste, hitzebeständige Isolator, nämlich Quarz, sich nicht annähernd auf ein Potential aufladen läßt, welches den weiteren Aufprall der Elektronen verhindern würde, ist in Fig. 9 dargestellt. Es ist dies nichts anderes als eine Röntgenröhre meiner Konstruktion, bei welcher an Stelle der Antikathode eine auf langem Quarzstiel isoliert befestigte Quarzplatte an-

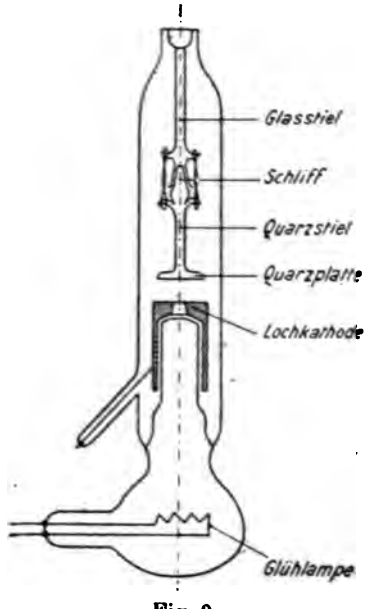


Fig. 9.

1) Auf diesem Wege ist von mir Anfang 1914 zum ersten Male auf das Vorhandensein einer Doppelschicht im Brennfleck von Röntgenröhren geschlossen worden.

geordnet ist. Es ist selbst im höchsten herstellbaren Vakuum möglich, diese Quarzplatte auf jede beliebige Temperatur zu erhitzen, wenn zwischen Glühlampe G und Lochkathode K eine Entladung eingeleitet wird. Dem bestehenden Sprachgebrauch nach würde man die Erscheinung so beschreiben, daß in der Öffnung der Lochkathode ein Striktionskathodenstrahl entsteht, welcher auf den Quarz aufprallt. Daß aber die Quarzplatte sich nicht im ersten Moment der Entladung auflädt und dann die nachfolgenden Elektronen abstößt, das ist eine Tatsache, die nur durch die Annahme einer positiven, die negative Aufladung ausgleichenden Ladung erklärt werden kann.

Die Beziehung zum Hauptthema.

§ 36. Jedenfalls verdienen die in der vorliegenden Arbeit behandelten Erscheinungen im zylindrischen Teile von Glasröhren auch von dem Gesichtspunkte des Verhaltens der Isolatoren im Hochvakuum aus behandelt zu werden. Tatsächlich bringt der Versuch mit der Quarzplatte den Beobachter auf den Gedankengang (§ 4), demzufolge Langmuir meinen Versuchen ein hinreichendes Vakuum absprechen wollte. Und es sind sicherlich nicht die Gasreste dafür verantwortlich, wenn die von mir verwendeten engen Glasröhren sich selbst im Bade flüssiger Luft, bei deren Temperatur sie besonders gut isolieren, nicht aufladen und einen ferneren Entladungsdurchgang nicht versperren, wenn ferner in der Hochvakuumröntgenröhre eine Aufladung der Glaskugel und in dem Versuch mit der Quarzplatte eine Aufladung der letzteren nicht stattfindet.

X. Zusammenfassung.

A. Es wird für die Untersuchung der Hochvakuumentladung in zylindrischen Entladungsbahnen an Stelle der früher von mir benutzten Sondenmessung die Subtraktionsmethode in drei verschiedenen konstruktiven Ausführungen an von der Pumpe abgeschmolzenen Röhren angewandt. Nach gegenwärtigem Stande der Ergebnisse kann das Gesetz der linearen Verteilung des Potentialgefälles längs der Entladungsachse als durch die Subtraktionsmethode neu erwiesen angesehen werden.

B. Die neuen Versuche ergeben eine erhebliche Annäherung an das quadratische Gesetz, obwohl die Apparate für die Aufnahme ganz genauer Charakteristiken nach der Subtraktions-

methode noch verbessert werden müssen. Bei einer der Versuchsröhren liefert aber bereits *die direkt an den Röhrenklemmen vorgenommene Messung der Spannung das quadratische Gesetz.*

C. Durch Temperaturmessungen an den Anoden wird das Vorhandensein einer absolut ungeordneten Bewegung und einer Elektrizitätsleitung nach Art der metallischen innerhalb des Entladungsgebildes erneut nachgewiesen. Außerdem folgt aus diesen Messungen in unabhängiger Weise ein Rückschluß auf die Raumladungsfreiheit und somit auf die lineare Verteilung des Potentialgefälles im Entladungsgebilde.[1])

D. Durch Versuche an einem besonderen Hochvakuumventil wird erwiesen, daß dem Dreihalbegesetz nur eine beschränkte Gültigkeit zukommt und es keinesfalls im allgemeinen Falle ein notwendiges, um so weniger ein hinreichendes Kriterium für das Bestehen höchster Vakua ist. Es werden Versuche mitgeteilt, bei denen in einem verhältnismäßig schlechten Vakuum das Dreihalbegesetz gilt, bei einer vollkommeneren Entlüftung des nämlichen Rohres aber sich eine erhebliche Abweichung von ihm einstellt.

F. Um die Tatsache, daß durch enge, lange Rohre selbst im höchsten Vakuum mit Spannungen von der Größenordnung von nur 1000 Volt erhebliche Stromstärken durchgeschickt werden können, verständlich zu machen, wird auf anderweitige Erfahrungen und einen neuen, besonderen Versuch hingewiesen, denen zufolge selbst die besten Isolatoren (Quarz, in flüssiger Luft gekühltes Glas) unter dem Anprall der Elektronen im Hochvakuum sich nicht annähernd auf das der Elektronengeschwindigkeit entsprechende Potential aufladen.

G. Die Versuche verdienen es, an den Erfahrungen gemäß umkonstruierten Röhren hauptsächlich in der Richtung fortgesetzt zu werden, ob mit Hilfe der Subtraktionsmethoden das quadratische Gesetz mit voller Genauigkeit zuverlässig reproduzierbar gezeigt werden kann. Besonders aber, ob in von der Pumpe abgeschmolzenen freihängenden Röhren ein

1) Diese Tatsachen habe ich in meinen früheren Arbeiten mit den Worten zusammengefaßt, daß selbst im höchsten Vakuum ein Entladungsgebilde bestehen kann, das alle Merkmale der bei höherer Gasdichte bekannten positiven Lichtsäule trägt.

genügendes Vakuum verwirklicht werden kann, um dieses Gesetz sowie den in meinen früheren Arbeiten mit Hilfe von Sondenmessungen ermittelten Grenzwert des Gefälles mit noch größerer Annäherung wiederzufinden.

XI. Tabellen.

In den folgenden Tabellen werden die Versuchsergebnisse des öfteren doppelt wiedergegeben, wobei die zusammengehörenden Reihen mit der gleichen Zahl, aber entsprechend mit dem Buchstaben a oder b bezeichnet sind. Die mit a bezeichneten Reihen enthalten die Ablesungen genau in derselben Reihenfolge, in welcher sie gewonnen wurden, damit man Einblick habe in die jedesmal erzielte Übereinstimmung. Die Reihen unter b geben aber die in Milliamperes und Volts umgerechneten Ablesungen in der Reihenfolge der wachsenden Zahlen.

Abgewichen von diesem System wurde nur in wenigen Fällen, so im Falle von Tab. 4a und 4b, welche die Werte enthält, zwischen denen die hier wenig konstanten Beobachtungsreihen zu schwanken pflegten.

Tabelle 1a.

Rohr mit verschiebbarer Anode.

Hint. Stellung Anfangsmsssung		Vordere Stellung		Mittlere Stellung		Hintere Stellung Schlußmessung	
i	*v*	*i*	*v*	*i*	*v*	*i*	*v*
100	149	100	102	60	93	60	110,5
60	110	60	78	70	101,5	70	120,5
70	121	70	84	80	109,5	80	130,5
80	130	80	90	90	118	90	140,5
90	140	90	96,5	100	125,5	100	149,5
100	149	100	102	60	93.5	60	110,5
60	110	60	78	70	101	70	120,5
70	120	70	84	80	109	80	130,8
80	130	80	90	90	118	90	140,5
90	140	90	96	100	125,5	100	149,5
100	149	100	102	110	133	110	158
110	157	110	108,5	120	140	120	166,5
120	165,5	120	113,5	100	125	20	86
100	147	100	100	20	80	30	96
		20	73	30	88.5	40	102
		30	82,5	40	91	50	100
		40	65	50	103	60	110
		50	83	60	93	70	121
		60	93,5	70	102	100	149,5
		70	84	100	126		
		100	102				

Tabelle 1b.

Milliampere	Vordere Stellung Volt	Mittlere Stellung Volt	Hintere Stellung Volt
10,8	2070	2460	2920
12,3	2250	2680	3210
14,4	2370	2900	3450
16,2	2550	3150	3700
18,0	2700	3320	3950
19,8	2870	3520	4160
21,6	3000	3710	4370

Diese Tabelle enthält die Umrechnung der unter 1a verzeichneten Werte außer denjenigen, welche der Stromablesung 50 sowie kleineren Stromstärken entsprechen, weil bei diesen geringeren Stromstärken andere labile, hier nicht interessierende Kurvenäste bestehen.

Tabelle 2.

Rohr mit verschiebbarer Anode,
Nachweis der linearen Verteilung des Potentialgefälles
aus der Tabelle 1a.

i	$B - A$ v	$A + \frac{B-A}{2}$ (= C berechnet) v	C (beobachtet) v
100	47	125,3	125
60	32,5	94,0	93
70	36,5	102,2	101,5
80	40,5	110,3	109,5
90	44	118,7	118
110	48,5	157,3	158
120	53	166,5	166,5

Die *erste* Kolonne enthält die Stromablesung; die *zweite* die Differenz $B - A$ der der betreffenden Stromstärke entsprechenden Spannungsablesungen in der hinteren und vorderen Lage; die *dritte* die Spannung in der vorderen Lage, vermehrt um die Hälfte der gedachten Differenz, also $A + \frac{B-A}{2}$, die *vierte* schließlich die Spannung C, welche in der mittleren Lage der Anode beobachtet wurde.

Tabelle 3a.

Rohr mit verschiedenen Anodenansätzen gemäß Fig. 2.

Kürzerer Ansatz		Längerer Ansatz	
i	v	i	v
30	30	80	105
40	35	90	113
50	40	100	118
60	45	110	124
70	49,5	80	105
80	54	70	97
90	58	60	88,5
100	62	50	80
110	66	40	70
120	69	30	60
80	54	20	49
30	30	80	105
40	35	100	118
50	40	20	49
60	45	30	60
70	49,5	40	70
80	54	50	80
30	30	60	90
20	25	70	97,5
80	54	80	105,5
		90	113
		100	118
		110	127
		120	130
		80	105
		90	112,5
		80	105

Tabelle 3b.

Umrechnung von 3a.

Milliampere	Kürzerer Ansatz Volt	Längerer Ansatz Volt	Differenz Volt
3,3	1060	2150	1090
5,0	1320	2640	1320
6,7	1540	3080	1540
8,3	1760	3510	1750
10,0	1980	3910	1930
11,7	2180	4270	2090
13,4	2380	4640	2260
15,0	2550	4960	2410
16,7	2720	5200	
18,4	2900	5590	
20,0	3040	5710	

Die Differenzen der drei letzten Zahlen sind infolge der jedenfalls durch die große Stromstärke verursachten großen Erhitzung nicht mehr gut brauchbar.

Tabelle 4a.

Rohr mit zwei Anoden gemäß Fig. 3.

Gesamtlänge mit fester Anode		Entfernbare Anode (in Nahlage)	
i	*v*	*i*	*v*
70	112	30	labil
80	119	40	40—43
90	126,5	60	43—45
70	112	70	47—49
60	104	80	48—51
50	95	90	51—53
40	85		
30	77,5		
50	96		
60	104		
70	113		
80	119		
90	127		
80	119		
40	85,5		
80	119		
70	112		
60	104		
50	96		
40	86		
80	119		
90	127		
80	119,5		

Tabelle 4b.

(Entspricht Tab. 4a umgerechnet.)

Milliampere	Gesamtlänge mit fester Anode Volt	Entfernbare Anode in Nahlage Volt	Differenzen Volt
5,0	5350	labil	—
6,7	5900	2790—2820	3080—3110
8,3	6600	2790—2970	3630—3810
10,0	7190	2970—3100	4090—4220
11,7	7800	3270—3380	4420—4530
13,3	8150	3350—3520	4630—4800
15,0	8750	3520—3680	5070—5230

Tabelle 5a.

Die Beobachtungsreihen dieser Tabelle sind übereinstimmend mit den Kurven des Diagramms Fig. 8 numeriert.

I		II		III		IV		V		VI	
i	*v*	*i*	*v*	*i*	*v*	*i*	*v*	*i*	*v*	*i*	*v*
90	64	90	130	130	155	60	89	80	47	80	92
100	68	50	91	110	139	50	80	60	38	70	83
		70	111	90	123	40	69	70	42,5	60	74
110	73	90	129	70	105	80	107	80	47	30	43,5
		110	144	50	85	90	115	90	51	40	55
120	77	130	159	130	155	70	98	100	56	50	65
130	81	30	67	120	148	60	89	110	60	60	74
140	84	50	90	100	132	90	115	120	64,5	70	83
80	labil	110	145	60	95	70	98	130	68	80	92
100	68	100	137	70	105	40	69	110	60	30	44
80	labil					90	115	100	55,5	40	55
140	84					100	122	60	38	50	64,5
130	80					90	115	70	42,5	60	74
120	76					70	98	80	47	70	84
110	72					40	69	90	51	80	92
100	67					30	57	110	60	90	101
90	63					20	45	100	55,5	80	92
						60	89	120	64,5	50	64
						80	107	130	68	30	44
						90	115	60	38	20	33
						100	121	50	33		
						Nach		41	29		
						längerer		60	38		
						Belastung		120	64,5		
						mit 100:					
						90	130				

Tabelle 5b.

(Umrechnung von 5 a.)

I		II		III		IV		V		VI	
M.A.	V.	M.A.	V.	M.A.	V.	M.A.	V.	M.A.	V.	M.A.	V.
15,0	845	8,3	1200	20,9	1740	11,3	1420	28,3	1040	17,0	1380
16,7	898	11,7	1460	26,0	1950	17,0	1790	34,0	1200	22,7	1730
18,4	963	15,0	1700	29,2	2150	22,7	2170	39,7	1340	28,3	2040
20,1	1020	16,7	1810	37,5	2520	28,3	2520	45,3	1480	34,0	2330
21,7	1070	18,4	1900	41,7	2710	34,0	2800	51,0	1610	39,7	2650
23,4	1110			45,9	2850	39,7	3090	56,7	1750	45,3	2900
				50,0	3060	45,3	3370	62,3	1890	51,0	3180
				54,2	3180	51,0	3630	68,0	2040		
						56,7	3850	73,7	2140		

Tabelle 6.

(Bei den Korrekturen nachgetragen, vgl. § 26 und 27.)

Rohr mit zwei Anoden gemäß Fig. 3, verbesserte Ausführung.

Milliampere	Gesamtlänge mit fester Anode Volt	Entfernbare Anode in Nahlage Volt	Differenzen Volt
5,00	4820	3000	1820
6,67	4640	2030	2610
8,35	5220	2260	2960
10,00	5740	2410	3330
11,70	6250	2590	3660
13,38	6750	2790	3960
15,00	7250	3000	4250
16,70	7710	3200	4510
18,40	8150	3370	4780
20,00	8620	3550	5070
21,70	8980	3700	5280

Literaturverzeichnis.

1. J. E. Lilienfeld, Ann. d. Phys. **32.** S. 673–738. 1910.
2. J. E. Lilienfeld, Ann. d. Phys. **43.** S. 24—46. 1914.
3. F. Soddy, Phys. Zeitschr. **9.** S. 1. 1908.
4. Lilienfeld, ebenda, **9.** S. 193. 1908.
5. Lilienfeld u. Rosenthal, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **18.** 4. S. 256—261. 1912; vgl. auch D.R.P. 256534 (1911).
6. Langmuir, Physic. Review (2) **2.** S. 450. 1913.
7. Langmuir, Phys. Zeitschr. **15.** S. 348. 1914.
8. Lilienfeld, Physic. Review **3.** S. 364—365. 1914.
9. Lilienfeld, Phys. Zeitschr. **15.** S. 744—746. 1914.
10. Lilienfeld, Ber. d. math.-phys. Klasse d. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig, **64.** S. 420ff. 1912.
11. Germershausen, Ann. d. Phys. **51.** S. 705ff., 847ff. 1916.
12. Lilienfeld, Sächs. Ges. d. Wiss. **66.** S. 76—79. Leipzig, Febr. 1914.
13. Lilienfeld, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **23.** S. 383 1915.
14. Lilienfeld, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. **69.** S. 45—56. Leipzig 1917.

(Eingegangen 11. August 1919.)

2. *Die Dampfspannung des festen Broms*[1]*; von Teófilo Isnardi.*

(Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans.)

§ 1. Im Laufe einer Untersuchung über die Dissoziation des Broms bekam ich den Verdacht, daß die von Ramsay und Young gemessenen Werte der Dampfspannung des festen Broms nicht richtig seien, sondern daß die wahren Werte größer sein müßten.

Deshalb beschloß ich, in einer besonderen Arbeit diese Frage zu studieren.

Über die Dampfspannung des Broms bestehen, soviel ich weiß, drei experimentelle Arbeiten.

Roozeboom[2]) hat 1884 die Dampfspannung des flüssigen Broms zwischen 0^0 und 60^0, d. h. also bis zum Siedepunkt gemessen. Die von ihm gefundenen Werte finden sich in der weiter unten gezeichneten Kurve (Fig. 3); sie wurde 1886 von Ramsay und Young[3]) genauer bestimmt, deren Angaben bis heute als richtig gelten.

Aus ihren Beobachtungen, die sich nur bis auf einige Grade unter den Schmelzpunkt des Broms erstrecken, hat Tsuruta[4]) thermodynamisch die Temperatur des Tripelpunktes ($-7{,}1^0$) und die Sublimationswärme berechnet. Die nach seinen Daten (d. h. also nach den Beobachtungen von Ramsay und Young) ermittelte Dampfspannungskurve ist auch in unsere Fig. 3 aufgenommen und bis -21^0 verlängert worden unter der Annahme, daß sie einer Beziehung der Form

$$\log p = \frac{a}{T} b \log T + c \tag{1}$$

1) Vgl. auch Contribución al estudio de las ciencias. Univ. Nacional de La Plata, **1.** S. 419. 1916.

2) C. W. B. Roozeboom, Rec. Trat. Chim. Pays Bas, **3.** S. 29, 59, 73, 84. 1884.

3) W. Ramsay u. S. Young, Journ. Chem. Soc. **49.** S. 453. 1886. Die Beschreibung der Methode befindet sich ibid. **47.** S. 48. 1885.

4) K. Tsuruta, Phys. Zeitschr. **1.** S. 417. 1900.

genügt, die sich aus der Clausiusschen Gleichung unter der Voraussetzung konstanter spezifischer Wärmen ableitet.

Die neueste experimentelle Arbeit über die Dampfspannung des Broms stammt von Cl. und M. Cuthbertson[1]); sie gingen bei ihren Beobachtungen bis -80.0^0 hinunter.

Ihre Methode war eine optische. Mittels des Jaminschen Differentialrefraktometers wurde der Brechungsexponent n des Dampfes bestimmt und die Dichte d nach der Formel

$$\frac{n-1}{d} = \text{const}$$

berechnet. Sie bestimmten die Konstante dieser Beziehung, indem sie die Dampfspannung für den Schmelzpunkt des Broms ($p = 44{,}5$ mm Hg) gemäß den Messungen von Ramsay und Young als richtig annahmen. Sie haben in Wahrheit also nur relative Messungen gemacht. Diese sind, wie wir sehen werden, sehr gut, fallen aber alle zu klein aus, weil der Dampfdruck bei der Schmelztemperatur von Ramsay und Young zu niedrig gemessen worden ist.

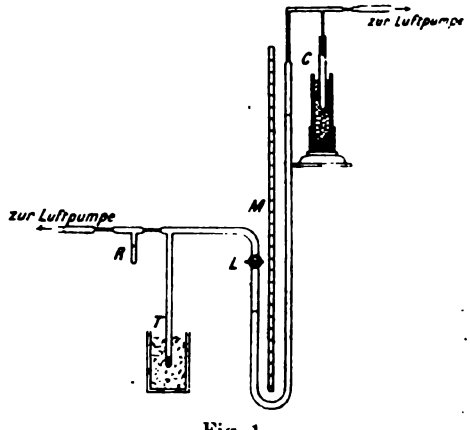


Fig. 1.

Die Werte dieser Beobachtungen finden sich auch in unserer Fig. 3 eingezeichnet und zeigen, daß dieselben in dem Intervalle, in welchem Ramsay und Young gemessen haben, größer sind als die Zahlen dieser Forscher.

Wegen der erwähnten Abweichungen schien es mir von Interesse, die Dampfspannung des Broms von Neuem zu messen, und zwar tat ich das nach zwei verschiedenen Methoden.

§ 2. *Erste Methode.* Der eine Schenkel eines Ölmanometers *M* (Fig. 1) befand sich in Verbindung mit dem Glasrohr *T*, welches mit Brom der Firma Poulenc beschickt war.

1) Cl. u. M. Cuthbertson, Proc. Roy. Soc. (A) 85. S. 306. 1911.

Von dort gelangt man zu dem mit konzentrierter Schwefelsäure gefüllten Gefäß *R*, das zur Absorption von Wasserdampf diente, und weiter zur Luftpumpe. Zwischen dem Manometer *M* und dem Rohre *T* war ein gut schließender Hahn *L* eingeschaltet.

Der andere Manometerschenkel von über 1 m Höhe war in Verbindung mit einem Rohre *C* aus schwer schmelzbarem Glase, in dem sich Kokusnußkohle befand; dieses Rohr konnte zur Absorption der letzten Luftreste mittels flüssiger Luft abgekühlt werden.

Bei der Konstruktion des Manometers wurde die im Öl befindliche Luft durch vorsichtiges Erwärmen unter gleichzeitigem Pumpen entfernt. Die letzten Reste wurden von der Kohle absorbiert.

Zur Messung wurde das mit Brom beschickte Rohr in eine Kältemischung getaucht und im Gleichgewichtszustand das Manometer mittels des Maßstabes *M* abgelesen.

Vorher war der ganze Apparat evakuiert worden, während das Rohr *T* sich in flüssiger Luft befand.

Während der ganzen Dauer der Messungen blieb das Rohr mit Kokusnußkohle in flüssiger Luft.

Nach jeder Messung überzeugte ich mich durch Kondensation des Broms mit flüssiger Luft, daß sich im Apparat keine Luft befand.

Nachträglich wurde das spezifische Gewicht des Öls durch Wägung mit dem Pyknometer bestimmt, und zwar wurden aus beiden Manometerschenkeln Proben entnommen, weil auf der linken Seite das Öl ein wenig Brom absorbiert hatte; jedoch gaben beide Bestimmungen merklich dasselbe Resultat.

Die benutzten eutektischen Kältemischungen waren die folgenden: 1. Eis und NaCl, 2. Eis und NH_4Cl, 3. Eis und KCl, 4. Eis und Wasser; sie wurden in wärmeisoliertem Gefäß angesetzt und zwar in so großer Menge, daß die Temperatur eine Stunde lang konstant blieb.

Die Temperaturen dieser Mischungen wurden mit einem von der physikalisch-technischen Reichsanstalt geeichten Platinwiderstandsthermometer gemessen, welches vorher bei 0^0 und 100^0 kontrolliert worden war.

Man erhielt so die Temperaturen:

1. Eis und NaCl	$-21{,}1^0$
2. Eis und NH_4Cl	$-15{,}5^0$
3. Eis und KCl	$-10{,}9^0$
4. Eis und H_2O	$0{,}0^0$

Die Temperaturen der Mischungen 2. und 3. weichen ein wenig von den Angaben in den Tabellen von Landolt-Börnstein ($-15{,}8^0$ bzw. $-11{,}1^0$) ab.

Zweite Methode. Die zweite, mir von Hrn. Prof. Gans vorgeschlagene Meßmethode war die folgende. Ein Ballon B (Fig. 2) von mehr als 1 Liter Inhalt befand sich unter Zwischenschaltung eines mit $CaCl_2$ gefüllten Trockenrohres S in Verbindung mit dem Rohre T, welches 1—2 g Brom enthielt. Auf der anderen Seite kommunizierte der Ballon mit einem kleinen Kondensationsrohr C von 3—4 cm^3 Inhalt und mit der Pumpe.

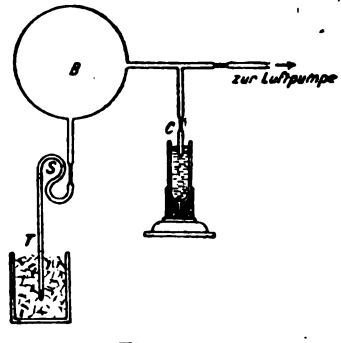


Fig. 2.

Zuerst wurde der Apparat vollkommen evakuiert, während das Rohr T mit dem Brom sich in flüssiger Luft befand, und dann die Verbindung mit der Pumpe an der Lampe zugeschmolzen. Darauf tauchte man das Rohr T in eine der oben erwähnten Kältemischungen und wartete eine Stunde.

Nach Ablauf dieser Zeit wurde die Verbindung zwischen dem Ballon und dem Trockenrohr zugeschmolzen und die Temperatur der Umgebung gemessen.

Dann kondensierte man mittels flüssiger Luft alles Brom im Kondensationsrohr C und schmolz dieses ab.

Die Brommenge in C bestimmte man schließlich durch Wägung, das Volumen des Ballons durch Auswägen mit Wasser.

Kennt man die Masse des Broms sowie sein Molekulargewicht, also auch die Anzahl Mole n, die im Volumen V des Ballons bei der absoluten Temperatur T der Umgebung enthalten waren, so berechnet man den Druck (die Dampfspannung) nach dem Gasgesetz $pV = n\,R\,T$ mit $R = 0{,}08207$.[1]) Dazu

1) W. Nernst, Theor. Chemie, 7. Aufl. S. 42.

ist man berechtigt nach den Untersuchungen von Perman und Atkinson[1]), welche die Dichte des Broms bis 300° C normal fanden.

Das Atomgewicht wurde zu 79,92 angenommen.[2])

§ 3. *Resultate.* Die Ergebnisse der Messungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 1.

Temp.	Dampfspannung in mm Hg 1. Meth.	2. Meth.	Angenommener Wert in mm Hg
− 21,1°	18,06	15,867	
		15,682	15,76[3])
		15,716	
− 15,5	24,93	24,97	24,95
− 10,9	35,49	35,29	35,37[4])
0	65,82	65,84	65,83

Die ersten drei Werte sind Dampfspannungen des festen Broms. Aus ihnen berechnen sich die Konstanten der Formel (1)

$$\log p = \frac{a}{T} + b \log T + c \qquad (1)$$

zu

$$a = -7109{,}142;\ b = -43{,}3319^{5});\ c = 133{,}46929,$$

wenn man p in *mm* Hg annimmt und log den Logarithmus zur Basis 10 bedeutet.

1) Perman u. Atkinson, Proc. Roy. Soc. **48.** S. 45; **66.** S. 10. 1900.

2) Abegg, Handb. d. anorg. Chemie, 4, 2. S. 215.

3) Der nach der ersten Methode erhaltene Wert war sicherlich falsch und wurde deshalb beim Mittel nicht berücksichtigt.

4) Der angenommene Wert wurde näher an der nach der zweiten Methode erhaltenen Zahl gewählt.

5) Der Koeffizient b müßte eigentlich gleich der Differenz der Molekularwärmen des festen und dampfförmigen Broms, dividiert durch die Gaskonstante $R = 1{,}985$ cal sein. Der gefundene Wert weicht sehr vom theoretischen ab, aber das hat nur äußerst geringen Einfluß auf die Kurvenform, weil der Term mit b nur eine kleine Korrektion bedeutet (Änderung der Sublimationswärme mit der Temperatur). Nimmt man $b = 0$ an, und berechnet man a und c so, daß sie den Beobachtungen bei − 21,1° und bei − 10,9° genügen, so wäre der für $t = -15{,}5°$ berechnete p-Wert nur um 0,1 mm kleiner als der gemessene, und der für $t = -41{,}3°$ wäre nur um 0,05 mm größer als der, welcher sich mit den im Text angegebenen Konstanten a, b, c ergibt.

Formel (1) ist auch mit den obigen Konstanten in die Fig 3 eingezeichnet, und zwar sind die beobachteten Punkte durch ein Kreuz markiert. Wie man sieht, stimmt die bis -41.3^0 extrapolierte Kurve in ihrem extrapolierten Teil gut mit den Beobachtungen von Cuthbertson, aber nicht mit der Ramsay-Youngschen Kurve überein.

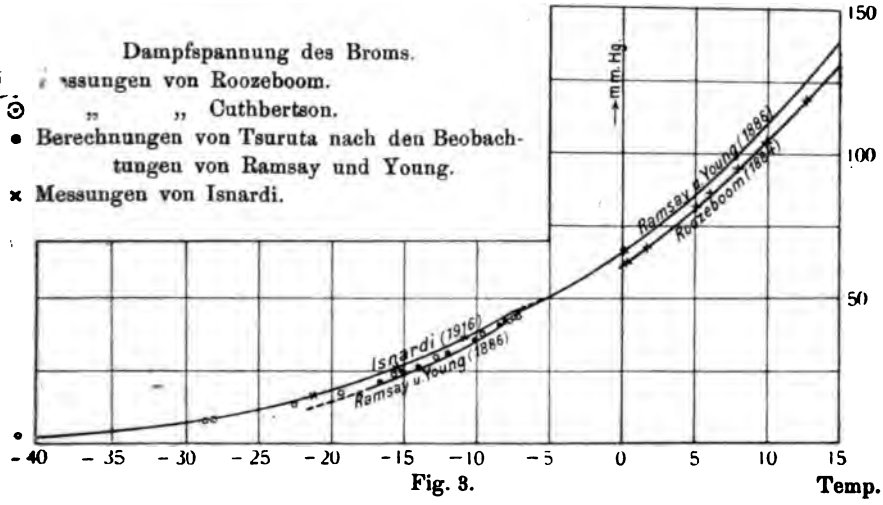


Fig. 3.

Tsuruta berechnete nach den Ramsay-Youngschen Werten die Dampfspannung des Broms bei 0^0 und fand $p = 66.4$ mm, während der von mir gemessene Wert um 1 Proz. niedriger ist.

Mittels der oben angegebenen Konstanten a, b. c haben wir folgende Tabelle der Dampfspannung des festen Broms berechnet (vgl. auch Fig. 3).

Tabelle 2.

t in ° C	p in mm Hg		t in ° C.	p in mm Hg	
	Isnardi	Ramsay u. Young		Isnardi	Ramsay u. Young
− 7,32	46,2	—	− 15,5	24,95	—
− 8,0	43,5	42,0	− 16.0	23,8	20,8
− 10,0	37,5	35,5	− 18,0	20,4	—
− 10,9	35,37	—	− 20,0	17,4	—
− 12,0	32,6	29,8	− 21,1	15,75	12,9 (extrapol.)
− 14,0	28,0	24,8	− 25,0	11.2	—

§ 4. *Der Tripelpunkt.* Tsuruta berechnete mittels der Ramsay-Youngschen Werte die Schmelztemperatur, d. h. die Temperatur des Tripelpunktes zu $-7{,}1^0$. Für diese Temperatur ist nach der von ihm gezeichneten Kurve die Dampfspannung

$$t = -7{,}1^0;\ p = 45.5 \text{ mm}.$$

Ramsay und Young[1]) haben für den Schmelzpunkt $p = 44{,}5$ mm gefunden.

Die direkt gemessenen Werte der Schmelztemperatur des Broms sind aber im allgemeinen etwas niedriger gefunden worden, als der Wert von Tsuruta. So fand Regnault[2]) $-7{,}32^0$; Philipp[3]), van der Plaats[4]) und Terwogt[5]) $-7{,}3^0$. (Schon vorher hatte Pierre Zahlen zwischen $-7{,}5^0$ und -8^0 gefunden.)

Wir können also als Temperatur des Tripelpunktes den Wert

$$t = -7{,}3^0$$

annehmen und mit ihm aus unserer Formel die ihm entsprechende Dampfspannung berechnen. So finden wir

$$p = 46{,}4 \text{ mm Hg},$$

ein Wert, der um etwas mehr als 1.5 Proz. von dem von Tsuruta berechneten abweicht.

Unsere Formel gibt für $t = -7{,}3^0$ den Wert

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{-7{,}3^0} = 3{,}202 \text{ mm Hg}, \tag{2}$$

während Tsuruta 3.7 mm findet.

Für andere Temperaturen gilt

$$\frac{dp}{dT} = p\left(\frac{b}{T} - \frac{a}{0{,}43425\,T^2}\right), \tag{3}$$

wo a und b die oben angegebenen Konstanten bedeuten.

1) Ramsay u. Young, Journ. Chem. Soc. **49.** S. 453. 1886.

2) Regnault, Ann. de Chim. et de Phys. **22.** S. 268. 1849; vgl. auch Abegg, Handbuch der anorganischen Chemie **4**, 2. S. 222.

3) J. Philipp, Ber. Deutsch. chem. Ges. **12.** S. 1424. 1879.

4) J. D. van der Plaats, Rec. Trav. Chim. Pays Bas. **5.** S. 34. 1888; vgl. auch Abegg, a. a. O.

5) P. C. E. Meerum Terwogt, Z. anorg. Chem. **47.** S. 203. 1905.

§ 5. *Sublimationswärme.* Mittels des Wertes (2) kann man die Sublimationswärme eines Mols nach der Formel[1])

$$S = 1{,}985\, T^2 \frac{1}{p} \frac{dp}{dT}$$

berechnen. Dividiert man dann durch das Molekulargewicht ($2 \cdot 79.9 = 159.8$), so erhält man die Sublimationswärme eines Grammes.

Für den Tripelpunkt $t = -7.3^0$ ergibt sich so

(4) $$s = 60{,}7 \text{ cal}.$$

Diesen Wert kann man mit der Summe der Verdampfungs- und Schmelzwärme für dieselbe Temperatur vergleichen.

Regnault[2]) fand für die Schmelzwärme des Broms

$$l = 16{,}185 \text{ cal}.$$

Die Verdampfungswärme r läßt sich auch aus seinen Messungen ableiten. Er fand für die Wärme, die nötig ist, um 1 g Flüssigkeit von 0^0 bis zur Siedetemperatur zu erwärmen und dann zu verdampfen, 50,95 cal.

Mittels des Wertes für die spezifische Wärme des flüssigen Broms (0,108 cal zwischen $-6{,}3^0$ und $+58^0$ nach Regnault) und der spezifischen Wärme des Dampfes bei konstantem Druck ($c_p = 0{,}0555$; vgl. Abegg, a. a. O., S. 236) findet man

$$r = 46{,}8 \text{ cal},$$

so daß

$$s = l + r = 63{,}0 \text{ cal}.$$

Dieser auf sehr indirektem Wege bestimmte Wert weicht nicht stark von dem in (4) berechneten ab.

Die von Tsuruta aus den Ramsay-Youngschen Zahlen berechnete Dampfspannungskurve würde $s = 73.1$ cal geben, d. h. einen Wert, der von dem experimentell bestimmten über viermal so viel abweicht, wie der aus unserer Kurve berechnete.

§ 6. *Zusammenfassung.* 1. Die Dampfspannung des festen Broms wurde gemessen, und es ergaben sich merklich höhere Werte als die von Ramsay und Young bestimmten.

2. Die Extrapolation der Kurve bis -41.3^0 stimmt in dem extrapolierten Teile innerhalb der Meßgenauigkeit mit den optisch ermittelten Werten von Cuthbertson überein.

1) W. Nernst, Theoretische Chemie, S. 61.

2) Regnault, a. a. O.

3. Aus der gemessenen Dampfspannungskurve lassen sich die Koordinaten des Tripelpunktes und die Sublimationswärme berechnen; die Resultate stimmen befriedigend mit den experimentellen Werten überein.

4. Es wurde für verschiedene Temperaturen die Dampfspannung des festen Broms berechnet (vgl. § 3, Tab. 2).

5. Der von uns für 0° gemessene Dampfdruck liegt dem von Ramsay und Young bestimmten sehr nahe, so daß die Annahme berechtigt ist, daß die von diesen Forschern für flüssiges Brom ermittelten Werte richtig sind.

La Plata, 25. August 1916, Instituto de Fisica.

(Eingegangen 23. September 1919.)

3. *Die Dicke der Kapillarschicht zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes, insbesondere von Kohlensäure; von G. Bakker.*

§ 1.

In meiner Arbeit vom 5. Nov. 1917 fand ich mit Hilfe der klassischen Theorie des stetigen Agens für die Dicke der Kapillarschicht in Berührung mit ihrem gesättigten Dampf die folgende Formel (wenigstens für niedrige Temperaturen):

$$\zeta = \gamma \frac{H}{a(\varrho_1 - \varrho_2)^2} \cdot \quad (1)$$ [1])

Hierin ist γ eine Zahl zwischen 15 und 17. H bedeutet die Oberflächenspannung, a ist der Koeffizient in dem Ausdruck der Kohäsion oder des sogenannten Molekulardruckes, ζ ist die Dicke der Kapillarschicht und ϱ_1, ϱ_2 stellen die Densitäten der Flüssigkeit bzw. des Dampfes dar. Mit Hilfe dieser Formel findet man für die Dicke ζ der Kapillarschicht in der Nähe des Schmelzpunktes $\zeta = 1{,}5$ bis 2 Millimikron. Ist $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht, so gehört zu diesem Wert von ζ ein Wert von $\mathfrak{N} = 3$ bis 4.

Die *rein thermodynamisch* abgeleitete Relation:

$$\varepsilon - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \left(H - T\frac{dH}{dt}\right) S + \left(v - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) \frac{r_i}{u} \quad (2)$$ [2]),

wo ε die Energie der Kapillarschicht, ε_1 und ε_2 die Energien der Flüssigkeit bzw. des Dampfes, S die Oberfläche und v das spez. Volumen der Kapillarschicht darstellen (alles pro Einheit der Maße), während v_1 und v_2 die spez. Volumina der Flüssigkeit bzw. des Dampfes, $u = v_2 - v_1$ und r_i die innere Verdampfungswärme bedeuten, gab nun weiter im Anschluß des Wertes $\mathfrak{N} = 3$ bis 4, gefunden für Temperaturen in der Nähe

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 54. S. 254. 1918. Vgl. Ztschr. f. phys. Chemie 86. S. 145. 1913.

2) Ebenda S. 258.

des Schmelzpunktes, daß die Zahl $\mathfrak{N}$ der Molekelschichten in der Kapillarschicht mit zunehmender Temperatur nur sehr langsam wächst. Bei Temperaturen von $0{,}7\,T_k$ bis $0{,}8\,T_k$ wird diese Zahl von der Ordnung 5 bis 6. Nur in der Nähe der kritischen Temperatur berechneten wir für die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht größere Werte; für $T = 0{,}97\,T_k$ bis $T = 0{,}99\,T_k$ haben wir nämlich 12 bis 15 erhalten. *Allein in der unmittelbaren Nähe* der kritischen Temperatur fanden wir beträchtlich größere Werte. Bei Äther z. B. kann für $T = 0{,}997\,T_k$ die Zahl $\mathfrak{N}$ zwischen 27 und 92 liegen und für Kohlensäure bei $T = 0{,}999\,T_k$ liegt der Wert von $\mathfrak{N}$ zwischen 300 und 1800.

In der besagten Arbeit gab ich eine zweite Methode, die sich auf die folgende Eigenschaft *des Druckes in der Längsrichtung* der Kapillarschicht gründet.

Wenn für eine *homogene* Phase ε die Energie, η die Entropie, T die absolute Temperatur, v das spez. Volumen und p den Druck darstellen, so nennt man bekanntlich den Ausdruck:

$$\varepsilon - T\eta + pv$$

das thermodynamische Potential dieser Phase. Wir setzen:

$$\varepsilon - T\eta + pv = \mu.$$

In Fig. 1 ist ein Teil der Isotherme dargestellt. Geben die Punkte H und K durch ihre Lage den Zustand (Druck und spez. Volumen) einer flüssigen bzw. einer dampfförmigen Phase für einen Körper bei einer bestimmten Temperatur an und sind diese Phasen miteinander im Gleichgewicht, so ist für diese Phasen der Wert des thermodynamischen Potentials gleich groß. Nennen wir die Werte dieses Potentials in den Punkten H und K bzw. μ_{fl} und μ_{df}, so ist also: $\mu_{fl} = \mu_{df}$.

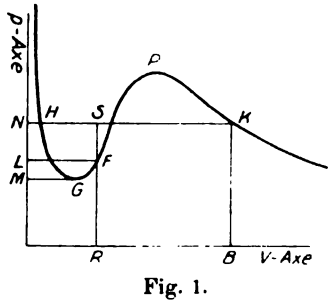


Fig. 1.

Es gibt nun aber noch einen dritten Punkt F auf dem labilen Teil der Isotherme, wo wieder das thermodynamische Potential denselben Wert hat wie H und K, und wofür man also hat:

$$\text{Fläche } NHGMN = \text{Fläche } LFGML.$$

Die beiden *homogenen* Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes (Punkte H und K) berühren einander nicht unmittelbar, sind aber getrennt durch eine äußerst dünne Übergangsschicht, die Kapillarschicht. Die Größe des Druckes in dieser Kapillarschicht in einer Richtung *parallel ihrer Oberfläche*, und die wir durch p_T [1]) darstellen wollen, *kann nun angegeben werden durch die Ordinate des Punktes F*, also durch RF.[2]) Der Druck in der Kapillarschicht *senkrecht* zu ihrer Oberfläche ist dagegen dem Dampfdruck p_N [3]) gleich und wird also angegeben durch die Ordinate von H oder K. Da nun weiter die Oberflächenspannung H als die Abweichung von dem Gesetz von Pascal betrachtet werden kann[4]), so erhält man für H:

$$H = (p_N - p_T)\zeta, \tag{3}$$

wo ζ die Dicke der Kapillarschicht darstellt. Man kann auch wie folgt reden.[5]) Bedeutet p_T den mittleren Druck in der Richtung *parallel der Oberfläche* der Kapillarschicht, und ist ζ ihre Dicke, so ist die Zunahme der freien Energie bei der Vergrößerung der Oberfläche *um eine Einheit* gegeben durch den Ausdruck:

$$-p_T\zeta.$$ [6])

Bei der Bildung der Kapillarschicht aus den homogenen Phasen (Flüssigkeit und Dampf) ohne Volumänderung ist aber andererseits eine Quantität freie Energie:

$$-p_N\zeta$$

verloren gegangen. Es findet also im ganzen eine Zunahme der freien Energie statt, die gegeben ist durch den Ausdruck:

$$(p_N - p_T)\zeta.$$

Stellen wir deshalb die Kapillarenergie (numerisch = Oberflächenspannung) durch H dar, so ist also:

$$H = (p_N - p_T)\zeta.$$

---

1) Da p_T selbstverständlich ein Mittelwert ist, schrieb ich in vorhergehenden Arbeiten p_T.

2) G. Bakker, Ztschr. f. physik. Chemie **48**. S. 36. 1904 und Ann. d. Phys. **20**. S. 52. 1906.

3) G. Bakker, Ann. d. Phys. **20**. S. 40. 1906 und Ztschr. f. physik. Chemie **33**. S. 483. 1900.

4) Ebenda, S. 41 bzw. S. 483.

5) Statt der Betrachtungen a. a. O.

6) Pro Einheit der Oberfläche ist nämlich ζ numerisch das Volumen.

Die Dicke der Kapillarschicht wird deshalb gegeben durch (Fig. 1):

$$\zeta = \frac{H}{p_N - p_T} = \frac{H}{KB - FR} = \frac{H}{FS}. \tag{4}$$

Auf diese Weise kann man mit Hilfe der Zustandsgleichung die Dicke der Kapillarschicht berechnen. Für Kohlensäure findet man mit Hilfe der Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes[1]):

$t =$	0	10	20	25
$\zeta =$	1,6 $\mu\mu$	1,5 $\mu\mu$	2,5 $\mu\mu$	7,06 $\mu\mu$.

Da Kamerlingh Onnes die Gleichung für 25° nicht unmittelbar gibt und die Berechnung der Virialkoeffizienten sehr mühsam ist, habe ich für die Berechnung von ζ bei 25° die Gleichung von Sarrau benutzt. Für die Oberflächenspannung benutzte ich die Daten von Verschaffelt.

Eine dritte Methode war rein thermodynamisch, also ganz ohne Hilfe des klassischen Agens und stützte sich allein auf die thermodynamische Relation (2) oben. Auf diese Weise fand ich wieder, daß die Dicke ζ der Kapillarschicht für Temperaturen unterhalb $\vartheta = 0{,}9$ (reduzierte Temperatur) von der Ordnung 1,5 $\mu\mu$ ist. Allein in der Nähe der kritischen Temperatur wird die Dicke größer. So berechnete ich z. B. für Kohlensäure:

Tabelle 1.

$t =$	− 25°	− 10°	0°	10°	20°	28°	30°	31,12°
$\frac{T}{T_k} =$	0,815	0,864	0,897	0,920	0,963	0,989	0,995	0,999
$\mathfrak{N}$ zwischen	3,2	3,4	3,6	4,9	7,07	13,5	27	348
	3,8	3,9	4	5,3	7,4	13,77	27,2	348
ζ zwischen	1,07	1,107	1,23	1,63	2,39	4,6	10,8	176 $\mu\mu$
	1,97	1,91	2,03	2,64	3,83	7,13	16,52	211 $\mu\mu$

Indessen ist bei dieser Methode zur Vereinfachung eine Vernachlässigung begangen, die wir unten betrachten wollen; die obigen Zahlen für die Dicke der Kapillarschicht und für die Zahl ihrer Molekelschichten sind dadurch ein wenig zu klein.[2]) Wir wollen darum trotz der Mühseligkeit der Methode

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 54. S. 293.

2) Wenn wir also in der Tabelle für ζ bei − 25° einen Wert finden zwischen 1,07 und 1,97 $\mu\mu$, so müssen wir uns diese beiden Zahlen ein wenig größer denken.

die Berechnung aufs neue durchführen, aber nun ohne Vernachlässigung.

Wie schon oben bemerkt, habe ich die Gleichung (2) rein thermodynamisch abgeleitet. *In dieser Relation wird also keine einzige Annahme über das Wesen der Kapillarschicht gemacht.* Sie hat weiter ebensogut Geltung für eine gekrümmte wie für eine ebene Kapillarschicht. Immer stellen ε, S und v die Energie, Oberfläche bzw. das Volumen der Kapillarschicht *pro Einheit der Maße* dar; ε_1 und ε_2 sind die Energien der Flüssigkeit bzw. des Dampfes, r_i ist die innere Verdampfungswärme und $u = v_2 - v_1$ ist die Differenz der spez. Volumina von Dampf und Flüssigkeit, während H die Oberflächenspannung darstellt. Hierbei denken wir uns die Flüssigkeit in Berührung mit ihrem gesättigtem Dampf, oder genauer ausgedrückt: wir denken uns die Flüssigkeit und Dampf getrennt durch die Kapillarschicht. Wir konstruierten nun in der Kapillarschicht eine Fläche konstanter Dichte; eine Fläche also, die durch Punkte geht, wo die mittlere Dichte denselben Wert hat. Weiter wurde diese Fläche so gelegt, daß, wenn die Kapillarschicht weggenommen würde und die homogenen Phasen (Flüssigkeit und Dampf) bis zu der besagten Fläche fortgesetzt würden, die Gesamtmaße der Materie sich nicht änderte. Ich habe die hier definierte Fläche Teilfläche genannt. Wir können das zum Ausdruck bringen, indem wir sagen: Die Kapillarschicht hat sich aus den homogenen Phasen von Flüssigkeit und Dampf ohne Änderung der Gesamtmaße und das Gesamtvolumen der Materie gebildet. Ist die Kapillarschicht eben bzw. kugelförmig, so ist die Teilfläche ebenso eben bzw. kugelförmig. Wir wollen uns in dieser Arbeit auf eine *ebene* Kapillarschicht beschränken. Durch zwei Ebenen in der homogenen Phase (Flüssigkeit und Dampf) parallel der Teilfläche haben wir endlich die Kapillarschicht begrenzt.

Die Relation (2) hat nun immer Geltung; wir legen aber selbstverständlich die Grenzflächen derart, daß keine Molekeln, die sich durch ihre Lage von denen der homogenen Phasen unterscheiden, vernachlässigt werden. Wählen wir die Grenzflächen der Kapillarschicht auf gleiche Abstände von der Teilfläche, so wird die mittlere Dichte der Kapillarschicht die halbe Summe der Dichte von Flüssigkeit und Dampf. Ist ϱ diese mittlere

Dichte und stellen ϱ_1 und ϱ_2 die Dichten von Flüssigkeit bzw Dampf dar, so wird also:

$$\varrho = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2},$$

und für das spez. Volumen erhalten wir:

$$v = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Wir betrachten also die Sache, als ob die Kapillarschicht geformt wird aus zwei gleich dicken Molekelschichten der Flüssigkeit bzw. des Dampfes, so daß diese Schichten gerade die Kapillarschicht ausfüllen können.[1]) Wir nennen die Materie dieser Schichten die Materie, durch welche die Kapillarschicht gebildet ist. Stellt ζ die Dicke der Kapillarschicht dar, so ist selbstverständlich $v = \zeta S$ [2]) oder:

$$\zeta = \frac{v}{S} = \frac{2}{(\varrho_1 + \varrho_2) S},$$

und die Relation (2) erhält die Form:

$$(5) \qquad \frac{2\left(H - T\frac{dH}{dt}\right)}{\varrho_1 + \varrho_2} \cdot \frac{1}{\zeta} = \varepsilon - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{1}{2}\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} p_i.$$

In dieser Relation sind H (Oberflächenspannung) ϱ_1, ϱ_2 und r_i durch das Experiment zu finden. Kennen wir aber die Zustandsgleichung des betrachteten Körpers, so können wir weiter ε_1 und ε_2 *berechnen*. Wäre z. B. die Zustandsgleichung von der allgemeinen Form:

$$(I) \qquad p = Tf(v) - \frac{\psi(t)}{(v + \beta)^2}$$

mit β = Konstante, so wird:

$$(II) \qquad \varepsilon_1 = \psi(t) - \frac{A}{v_1 + \beta} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \psi(t) - \frac{A}{v_2 + \beta},$$

wobei nun $\psi(t)$ und A Temperaturfunktionen sind. Es bleibt also noch übrig die Bestimmung von ε.

Die Differentiation von (2) gibt:

$$d\varepsilon - T d p_i + p_i d v = H\left\{dS - \frac{S dr}{r} - \frac{1}{R}\left(dw - \frac{w dv}{r}\right)\right\}$$ [3])

1) Diese Auffassung bleibt möglich, selbst wenn die Kapillarschicht aus einer einzelnen Doppelschicht besteht.

2) S = Oberfläche der Kapillarschicht pro Einheit der Maße. Vgl. oben!

3) G. Bakker, Ann. d. Phys. 48. S. 778. 1915.

wo p_T den mittleren Druck in der Kapillarschicht parallel ihrer Oberfläche darstellt, während R der Radius der Kapillarschicht ist.[1]) Weiter ist

$$w = \frac{2v_1 v_2}{r_2 - v_1} - v\frac{r_1 + v_2}{r_2 - v_1}.$$

Für die *ebene* Kapillarschicht ist aber $R = \infty$ und $\zeta S = v$; deshalb in diesem Falle:

$$T d\eta = d\varepsilon + p_T dv - Hv\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\zeta}\right\} dt. \tag{6}$$

Für den Druck p_T in der Längsrichtung der Kapillarschicht haben wir oben schon bemerkt, daß er durch die Ordinate RF des Punktes F in der Fig. 1 dargestellt werden kann. Wenn die Zustandsgleichung für einen bestimmten Körper theoretisch vollkommen streng abgeleitet wäre, so könnten wir für solch einen Körper die verschiedenen thermodynamischen Größen, wie Energie, Entropie, thermodynamisches Potential usw., berechnen. So finden wir z. B. unter Annahme der Zustandsgleichung (I), wovon die van der Waalssche Gleichung und die von Clausius und Sarrau besondere Fälle sind, für die Energie den Ausdruck (II) oben:

$$\varepsilon = \psi(t) - \frac{A}{v + \beta} \qquad \begin{cases} A = \text{Temperaturfunktion}, \\ \beta = \text{Konstante}. \end{cases}$$

Substituieren wir nun in diesem Ausdruck für v einen Wert zwischen den Abszissen von G und P in Fig. 1, so wollen wir, obgleich die Phasen zwischen G und P labil sind, dennoch von ε sprechen als von der Energie dieser Phasen. Jedem Punkt des labilen Teiles der theoretischen Isotherme ist also in diesem Sinne ein Wert von ε, η usw. zugeordnet. Markieren wir insbesondere die Größen für den Punkt F[2]) durch den Index 3, so hat man die bekannte Relation:

$$d\mu_3 = -\eta_3 dt + v_3 dp_3, \tag{7}$$

wo μ_3 das thermodynamische Potential für den Punkt F bedeutet.

Ist μ das thermodynamische Potential für die Kapillarschicht, so findet man mit Hilfe von (6):

$$d\mu = -\eta dt + v dp_T + Hv\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right) dt; \tag{8}$$

1) R stellt den Radius der Teilfläche dar und ist in meinen Arbeiten über die kugelschalenförmige Kapillarschicht scharf definiert.

2) Auf *jeder* Isotherme unterhalb der kritischen Temperatur denken wir uns den Punkt F angegeben. Fig. 1 zeigt also nur eine.

denn:

$$\mu = \varepsilon - T\eta + p_T v .$$

Nun ist $\mu = \mu_3$ [1]; deshalb:

$$(9) \qquad (\eta_3 - \eta)\,dt = v_3\,dp_3 - v\,dp_T - Hv\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right)dt .$$

Obgleich für keinen einzigen Körper eine Zustandsgleichung hinreichend genau theoretisch abgeleitet ist, kennen wir jedoch empirische Formeln, welche die Daten des Experiments genügend befriedigen. An erster Stelle nennen wir die Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes.[2])

Für CO_2 sind selbst für vier Temperaturen *in dem Sättigungsgebiet* die Koeffizienten dieser Gleichung berechnet. Berechnet man nun die Abszisse des Punktes F, so findet man, daß innerhalb der Fehler des Experiments, der reziproke Wert dieser Abszisse, also „die Dichte des Punktes F", die halbe Summe der Dichten von Flüssigkeit bzw. Dampf ist.[3]) In diesem Falle aber ist gleichzeitig: $p_T = p_3$ und $v = v_3$ und die Relation (9) gibt:

$$(10) \quad (\eta_3 - \eta)\,dt = -Hv\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right)dt \text{ oder } \eta_3 - \eta = -Hv\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right) .$$

Nun war: $\mu = \mu_3$ oder $\varepsilon - T\eta + p_T v = \varepsilon_3 - T\eta_3 + p_3 v$ und weiter ist $p_T v = p_3 v_3$, also:

$$\varepsilon - T\eta = \varepsilon_3 - T\eta_3 ,$$

und aus (10) erhält man deshalb:

$$\varepsilon = \varepsilon_3 + HTv\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right) .$$

Substituieren wir diesen Ausdruck für die Energie der Kapillarschicht in (5), so finden wir für die Dicke ζ der Kapillarschicht die Differentialgleichung:

$$(5\,a) \quad \frac{2\left(H - T\frac{dH}{dt}\right)}{\varrho_1 + \varrho_2}\cdot\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2}\,\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}\,r_i + \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + HTv\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

1) G. Bakker, Ann. d. Phys. 48. S. 780. 1915 und 54. S. 288. 1918.

2) H. Kamerling-Onnes und W. H. Keesom, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Art. V, 10. S. 728 usw.

3) G. Bakker, Ann. d. Phys. 54. S. 287. 1918.

oder da $v = \frac{1}{\varrho} = \frac{2}{\varrho_1 + \varrho_2}$ (vgl. oben!):

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2\left(H - T\dfrac{dH}{dt}\right)}{(\varrho_1+\varrho_2) r_i} \cdot \dfrac{1}{\zeta} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2} - \dfrac{\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} - \varepsilon_3}{r_i} \\ \qquad\qquad + \dfrac{2HT}{(\varrho_1+\varrho_2) r_i}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\zeta}\right), \end{array} \right.$$

oder kürzer:

$$(12)\quad -\frac{2T^2}{\varrho_1+\varrho_2}\frac{d\left\{\frac{H}{\zeta T}\right\}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2} r_i + \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}.$$

Stellen wir die Densität der Energie ε/v durch E dar, und markieren wir die flüssige, die dampfförmige Phase und die des Punktes F (Fig. 1) wieder durch die Indizes 1, 2 bzw. 3, so läßt sich (12) schreiben:

$$(12a)\quad T^2\frac{d\left\{\frac{H}{\zeta T}\right\}}{dt} = \frac{E_1+E_2}{2} - E_3.$$

Hierin ist nun, um es noch einmal zu wiederholen, H die Oberflächenspannung, ζ die Dicke der Kapillarschicht, T die absolute Temperatur und sind E_1, E_2 und E_3 die Energiedensitäten der flüssigen, dampfförmigen Phase, bzw. die der Phase F (Fig. 1).

Wie schon oben bemerkt, habe ich nun in einer vorherigen Arbeit die Dicke ζ der Kapillarschicht berechnet unter Vernachlässigung des letzten Gliedes in (11).[1]) Da nun $d\zeta/dt$ positiv ist, und also: $\frac{d\frac{1}{\zeta}}{dt}$ negativ, sind daher die früher berechneten *zu klein*. Setzen wir:

$$\frac{1}{2}\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2} - \frac{\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-\varepsilon_3}{r_i} = A \text{ und } \frac{2HT}{(\varrho_1+\varrho_2) r_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -B,$$

so müssen wir die früher berechneten Werte durch: $\frac{A}{A-B}$ multiplizieren.

A. a. O. habe ich meine Berechnungen für CO_2, Äther und Benzol gemacht unter Benutzung von zwei Formeln für

1) Ann. d. Phys. 54. S. 289—293. 1918.

die Energie. Erstens benutzte ich die Gauss- van der Waalssche Formel:

(I) $$\varepsilon = -a\varrho + f(t)$$

und zweitens die Formel von Mills:

(II) $$\varepsilon = -A\sqrt[3]{\varrho} + F(t).$$

In (I) ist a eine Temperaturfunktion, in (II) ist A eine Konstante; $f(t)$ und $F(t)$ sind Temperaturfunktionen. Auf diese Weise fand ich für Kohlensäure, wie schon oben in einer Tabelle für CO_2 angegeben ist:

Tabelle 2.

$t =$	$-25°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$28°$	$30°$	$31{,}12°$
$\zeta_I =$	1,07	1,107	1,26[1])	1,63	2,39	4,6	10,8	176 $\mu\mu$
$\zeta_{II} =$	1,97	1,91	2,48[1])	2,64	3,83	7,13	16,52	211 $\mu\mu$
Im Mittel also:								
$\zeta =$	1,52	1,51	1,87	2,13	3,11	5,86	13,66	193 $\mu\mu$

Wäre die Zustandsgleichung von der Form:

$$p = Tf(v) - \frac{\varphi(t)}{(v+\beta)^2},$$

wovon die van der Waalssche Gleichung und die von Clausius und Sarrau besondere Fälle sind, so wird aber (vgl. oben):

$$\varepsilon = \psi(t) - \frac{A}{v+\beta} \quad \{A = \text{Temperaturfunktion}\}$$

und der Ausdruck

$$\frac{\frac{s_1+s_2}{2} - s_3}{r_t} \text{ wird: } \tfrac{1}{2}\beta\frac{\varrho_1-\varrho_2}{2+\beta(\varrho_1+\varrho_2)}, \text{ da } \varrho_3 = \frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}.$$ [2])

Unter Vernachlässigung des letzten Gliedes von (11) erhalten wir also:

(13) $$\zeta = \frac{4\left(H - T\frac{dH}{dt}\right)}{r_t(\varrho_1-\varrho_2)} \cdot \frac{2+\beta(\varrho_1+\varrho_2)}{2}.$$

Entnimmt man nun der Gleichung von Sarrau für CO_2 die Konstante $\beta = 0{,}357$, so findet man:

$t =$	$-25°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$25°$	$28°$	$30°$	$31{,}12°$
$\zeta =$	1,27	1,30	1,49	1,91	2,79	3,21	5,33	12,53	200,64

1) In meiner vorherigen Arbeit war $\zeta_I = 1{,}23$ und $\zeta_{II} = 2{,}03$. Infolge des verbesserten Wertes für die Oberflächenspannung H fallen sie hier größer aus.

2) G. Bakker, Ann. d. Phys. 54. S. 288. 1918.

Diese Zahlen schließen sich deshalb sehr gut den Werten von $\frac{\zeta}{\zeta_I}$ und $\frac{\zeta}{\zeta_{II}}$ an, denn sie liegen gerade zwischen ihnen. Wir wollen darum diese Zahlen als erste angenäherte Werte der Dicke der Kapillarschicht betrachten und mit ihnen die Term $-B$ berechnen.

Zwischen $-25°$ und $-10°$ findet man:

$$-\frac{d\frac{1}{\zeta}}{dt}\frac{\frac{1}{1,27}-\frac{1}{1,30}}{15\,\mu\mu}=\frac{0,03\cdot10^7}{24,76\cdot15}=800\,(\mathrm{cm}^{-1})$$

und zwischen $-10°$ und $0°$:

$$-\frac{d\frac{1}{\zeta}}{dt}\frac{\frac{1}{1,3}-\frac{1}{1,49}}{10\,\mu\mu}=0,00981\cdot10^7=98100\,(\mathrm{cm}^{-1}).$$

Für $-10°$ nehmen wir deshalb:

$$-\frac{d\frac{1}{\zeta}}{dt}=49450\,(\mathrm{cm}^{-1}).$$

Benutzen wir für die Oberflächenspannung (H), die Verdampfungswärme (r_i) und die Densitäten der Flüssigkeit und des Dampfes wieder ebenso wie in vorhergehenden Arbeiten die Daten nach Verschaffelt, Regnault-Zeuner, Kuenen, Amagat und Mathias, so berechnen wir für B:

$$B=\frac{2\cdot6,49\cdot263\cdot49,45\cdot10^3}{0,973\cdot228,1\cdot10^7}=0,07606.$$

Für A können wir schreiben:

$$A=\frac{1}{2}\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}-\frac{1}{2}\beta\frac{\varrho_1-\varrho_2}{2+\beta(\varrho_1+\varrho_2)}=\frac{\varrho_1-\varrho_2}{(\varrho_1+\varrho_2)\,[2+\beta(\varrho_1+\varrho_2)]}.$$

Mit Hilfe des schon früher berechneten Wertes von $\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}$ [1]) finden wir:

$A=0{,}362$ und also:

$$\frac{\zeta}{\zeta}=\frac{A}{A-B}\cdot1,3=\frac{0,362}{0,362-0,07606}\cdot1,3=1,26\cdot1,3=1.64.$$

Indessen haben wir bei der Berechnung von $-\frac{d\frac{1}{\zeta}}{dt}\zeta$ zu klein genommen. Der berechnete Wert dieses Differential-

1) G. Bakker. Ann. d. Phys. 54. S. 276. 1918.

quotienten ist deshalb *zu groß* und ebenso B. Korrigieren wir nun B durch Multiplikation durch $\frac{1{,}30}{1.64}$, so erhalten wir:

$$\zeta = \frac{0{,}362}{0{,}362 - 0{,}0604} \times 1{,}3 = 1{,}2 \cdot 1{,}30 = 1{,}56\ \mu\mu.$$

Da bei der letzten Berechnung B nun wieder ein wenig zu *klein* genommen ist, liegt der wirkliche Wert zwischen 1,64 und 1,56. Wir nehmen deshalb als Wert der Dicke der Kapillarschicht von CO_2: $\zeta = \frac{1{,}64 + 1{,}56}{2} = 1{,}6\ \mu\mu$.

Auch für 0, 10, 20, 25, 28 und 30° habe ich die Berechnung durchgeführt. Stellt B den erst berechneten Wert und B' die korrigierten, sind ζ' und ζ'' der erste und zweite berechnete Wert der Dicke der Kapillarschicht und ist $\zeta = \frac{\zeta' + \zeta''}{2}$ = Dicke der Kapillarschicht, so finde ich folgende Tabelle:

t	$-d\frac{1}{\zeta}/dt$	A	B	ζ'	B'	ζ''	$\zeta = \frac{\zeta' + \zeta''}{2}$
− 10°	494,5·10²	0,362	0,07606	1,64	0,0604	1,56	1,6
0°	123,05·10³	0,343	0,1457	2,59	0,084	1,98	1,78
10°	144,10³	0,3104	0,130	3,28	0.076	2,54	2,91
20°	108,10³	0,256	0,0602	3,63	0,046	3,40	3,51

Die Werte *oberhalb* 20° für ζ' und ζ'' haben eine zu große Differenz, um die halbe Summe als Wert für die Dicke ζ der Kapillarschicht betrachten zu können, und ich habe sie deshalb nicht in die Tabelle aufgenommen. Es war eine Folge des großen Wertes von $\frac{\Delta \frac{1}{\zeta}}{\Delta t}$, daß B und B' oberhalb 20° eine zu große Differenz zeigten.

Es gibt aber noch eine andere Weise, um ζ zu berechnen, wenigstens wenn die Formel für die Energie bekannt ist. Benutzen wir für die Energie die Formel:

$$\varepsilon = \psi(t) - \frac{A}{v + \beta}$$

als Folge der Zustandsgleichung von Clausius oder Sarrau, und setzen wir der Kürze halber $\frac{H}{\zeta T} = z$, so wird die Differentialgleichung (12) oben:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2}\,\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2 + \beta(\varrho_1 + \varrho_2)}\cdot\frac{r_1}{T^2}. \tag{14}$$

Berechnet man mit Hilfe der schon früher benutzten Daten mit $\beta = 0{,}357$ nach Sarrau für Kohlensäure den absoluten Wert des rechten Gliedes, so findet man:

$t =$	0°	10°	20°	30°	31,12°
$-\frac{dz}{dt} =$	4787,7	3299,7	1792,7	251,9	7,736

Mit Hilfe der bekannten Interpolationsformel von Lagrange finden wir folgendes Polynom, das diesen Werten genügt:

$$-\frac{dz}{dt} = 4787{,}1 - 97{,}752\,t - 9{,}2812\,t^2 + 0{,}50242\,t^3 - 0{,}0084132\,t^4.$$

Für $t = 31{,}115$ wird der Ausdruck Null. Die Integration gibt:

$$z = -\,4787{,}1\,t + 48{,}876\,t^2 + 3{,}0937\,t^3 - 0{,}125605\,t^4 + 0{,}0016826\,t^5 + \text{Konstante}.$$

Nun ist:

$$z = \frac{H}{zT}$$

und können wir weiter die Oberflächenspannung H auffassen als die totale Abweichung von dem Gesetz von Pascal, d. h.: $H = (p_N - p_T)\zeta$, wenn p_N den Dampfdruck und p_T den Druck in der Längsrichtung der Kapillarschicht darstellt.[1])

Wir haben also:

$$z = \frac{p_N - p_T}{T}.$$

und

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{T}\left(\frac{dp_N}{dt} - \frac{dp_T}{dt}\right) - \frac{p_N - p_T}{T^2}.$$

Nun wird bei der kritischen Temperatur: $p_N = p_T$ aber auch:

$$\frac{dp_N}{dt} = \frac{dp_T}{dt}\,^{2})$$

deshalb:

$$\frac{dz}{dt} = 0, \text{ für } t = t_k.$$

---

1) G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chemie **33**. S. 483. Vgl. auch oben! (Formel 3).

2) Ebenda **51**. S. 362. 1905: p_T ist a. a. O. durch p'_2 angegeben.

Für diese Temperatur, wobei also $\frac{dz}{dt} = 0$, fanden wir nach obiger Formel für $\frac{dz}{dt} : t = 31{,}115$. (Nach **Amagat** $t_x = 31{,}35$). Hieraus finden wir für die Konstante der Formel für z: Konstante = 77172. Also:

$$(15)\left\{ z = \frac{H}{\zeta T} = 77172 - 4787{,}1\,t + 48{,}876\,t^2 + 3{,}0937\,t^3 - 0{,}125685\,t^4 + 0{,}0016826\,t^5 . \right.$$

Für $t = 0$ wird deshalb:

$$\frac{H}{\zeta T} = 77172 .$$

Mit $H = 4{,}5$ [1]) (dyne, cm) erhalten wir also:

$$\zeta = \frac{4{,}5}{77172 \cdot 273} = 2{,}1 \cdot 10^{-7} = 21\,\mu\mu .$$

Für $t = 10$ wird: $\frac{H}{\zeta} = 36193{,}7 \cdot 283 = 1{,}0243 \cdot 10^7$ oder $\zeta = \frac{1{,}712}{1{,}0234} \cdot 10^{-7} = 1{,}67\ \mu\mu$. Auf derselben Weise habe ich ζ für $t = 20^0$ und 30^0 berechnet und finde ich resümierend:

$t =$	0^0	10^0	20^0	30^0
$\zeta =$	2,1	1,67	3,55	26,1 $\mu\mu$.

Da die Formel (15) durch Integration einer empirischen Relation entstanden ist, können wir nicht erwarten, daß die Werte für ζ völlig genau sind. *Der Größenordnung* nach schließen sich aber die Werte von ζ gut an die Werte mit Hilfe der vorletzten Methode gefundenen, nämlich:

$t =$	-10^0	0^0	10^0	20^0
$\zeta =$	1,6	1,78	2,91	3,51 $\mu\mu$.

Um auch für tiefere Temperaturen den Wert von ζ zu finden, habe ich den Wert von $-\frac{dz}{dt}$ auch für -30^0 und -10^0 berechnet. Für $t = -30^0$ findet man:

$$-\frac{dz}{dt} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2 + \beta(\varrho_1 + \varrho_2)} \cdot \frac{r_i}{2T^2} = \frac{2{,}0744}{2{,}39727} \cdot \frac{59{,}98 \cdot 4{,}2 \cdot 10^7}{4 \cdot 243^2} = 9229{,}1 .$$

1) $H = 4{,}5$ ist genauer als der früher durch mich benutzte Wert: $H = 4{,}41$.

Für $t = -10^0$ findet man: $-\frac{dz}{dt} = 6417{,}94$. Für 0, 10, 20 und 30° ist der Differentialquotient schon oben berechnet. Statt 251,9 bei 30° muß es aber heißen: 254,9. Ich fand es aber nicht nötig, die obige Rechnung zu wiederholen, da 1,5% in dem Wert für $-\frac{dz}{dt}$ bei 30° keine nennenswerte Änderung in dem Wert von ζ veranlaßt.[1]) Wir erhalten also:

$t =$	-30^0	10^0	10^0	20^0	30^0
$-\frac{dz}{dt} =$	9229,1	6417,94	3299,7	1792,7	254,9

Die Interpolationsformel von Lagrange gibt:

$$-\frac{dz}{dt} = 4843{,}97 - 156{,}678\,t + 0{,}1793\,t^2 + 0{,}00782\,t^3 - 0{,}00033\,t^4.$$

Integration gibt:

$$\frac{H}{\zeta T} = -4843{,}97\,t + 78{,}339\,t^2 - 0{,}0598\,t^3 - 0{,}001955\,t^4 + 0{,}000065\,t^5 + \text{Konstante}.$$

Nehmen wir als kritische Temperatur $t_k = 31{,}35$ (Amagat), so wird die Konstante: 76626,75, und wir erhalten:

$$\frac{H}{\zeta T} = 76626{,}75 - 4843{,}97\,t + 78{,}339\,t^2 - 0{,}0598\,t^3 - 0{,}001955\,t^4 + 0{,}000065\,t^5.$$ [2])

Hieraus finden wir für die Dicke ζ der Kapillarschicht von Kohlensäure die folgende Berechnung:

$t =$	-30^0	-10^0	0^0	10^0	20^0
$\frac{H}{\zeta T} =$	290902,5	132934,1	76626,75	35935,1	10500
$\zeta =$	1,46	1,85	2,15	2,66	3,97

Die Berechnung von ζ bei 30° gibt:

$$\frac{H}{\zeta T} = 76626{,}7 - 145319{,}1 + 70505{,}1 - 1614{,}6 - 1583{,}55 + 1579{,}5 = 194.1.$$

Die Zahl 194,1 kommt also gegenüber den Gliedern 76626,7, 145319,1 und 70505,1 nicht in Betracht und die Berechnung wird unzuverlässig.

1) Überdies sind die experimentellen Daten über die Verdampfungswärme nur bis auf einzelne Prozente genau bekannt.

2) Oben fanden wir für die Konstante in Formel (15): 77172. Die Differenz ist deshalb noch kein Prozent.

Geben wir nun die gefundenen Werte für die Dicke (ζ) der Kapillarschicht durch die Indizes I, II, III bzw. IV an, derart, daß ζ_I der Wert ist nach Formel (13), korrigiert mit Hilfe der Werte für $\frac{d\frac{1}{\zeta}}{dt}$, ζ_{II} der Wert erhalten durch Integration von (14) zwischen 0° und 30°, ζ_{III} der Wert erhalten durch dieselbe Integration zwischen $-30°$ und $+30°$, während ζ_{IV} den Wert darstellt nach Formel: $\zeta = \frac{H}{p_N - p_T}$, so haben wir resümierend[1]):

Tabelle 3.

t =	$-30°$	$-10°$	0°	10°	20°	25°	30°
ζ_I =		1,6	1,78	2,91	3,51 $\mu\mu$		
ζ_{II} =			2,1	1,67	3,55		26,1 $\mu\mu$
ζ_{III} =	1,46	1,85	2,15	2,66	3,97 $\mu\mu$		
ζ_{IV} =			1,6	1,5 *K. Onnes* 1,6 *Sarrau*	2,5	7,06 $\mu\mu$	

Die Differenzen, die wir hier zwischen den Werten von ζ bei derselben Temperatur finden, beweisen nichts gegen die Richtigkeit meiner Theorie, sind aber eine Folge der Verschiedenheit der gefolgten Methoden und benutzten Formeln.

Daß die Berechnung mit Hilfe der Integration von (14) auf dasselbe hinausläuft als die Benutzung der Formel: $\zeta = \frac{H}{p_N - p_T}$, sehen wir sofort. Markieren wir wieder die Größen der flüssigen, dampfförmigen Phasen und die der Phase F (Fig. 1) mit den Indizes 1, 2 bzw. 3, so hat man:

$$-\eta_3\,dt + v_3\,dp_3 = d\mu_3, \quad -\eta_1\,dt + v_1\,dp_N = d\mu_1 \quad \text{und:}$$
$$-\eta_2\,dt + v_2\,dp_N = d\mu_2,$$

wo nun p_N den Dampfdruck darstellt; p_N ist deshalb der Druck in der Kapillarschicht, in einer Richtung senkrecht zu ihrer Oberfläche.

Also:

$$\eta_3 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = v_3 \frac{dp_3}{dt} - \frac{v_1 + v_2}{2}\frac{dp_N}{dt}.$$

1) Hierbei ist p_T die Ordinate RF des Punktes F in der Fig. 1, und ist bei der Berechnung von RF die Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes benutzt. Für 10° ist auch Sarraus Gleichung benutzt.

Weiter ist:

$$\varepsilon_3 - T\eta_3 + p_3 v_3 = \mu_3 = \varepsilon_1 - T\eta_1 + p_1 v_1 = \mu_1 = \varepsilon_2 - T\eta_2 + p_2 v_2 = \mu_2$$

und deshalb:

$$\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - v_3\left(T\frac{dp_3}{dt} - p_3\right) + \frac{v_1 + v_2}{2}\left(T\frac{dp_N}{dt} - p_N\right) = 0$$

oder:

$$\left(T\frac{dp_3}{dt} - p_3\right) v_3 = \frac{1}{2}\frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} r_i + \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \tag{16}$$

Wir können diese Gleichung auch in der folgenden Form schreiben:

$$\left(T\frac{dp_3}{dt} - p_3\right) = \varepsilon_3 - \frac{r_1\varepsilon_2 - r_2\varepsilon_1}{r_2 - r_1}. \text{ [1]} \tag{16a}$$

Nun fanden wir, wenigstens für Kohlensäure, für die Dichte in dem Punkt F: $\varrho = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$, und das ist in unserer Theorie der Kapillarschicht auch der Wert ihrer mittleren Dichte; also $v_3 = v = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$. Die Relation (16) können wir also schreiben:

$$\frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}\left(T\frac{dp_3}{dt} - p_3\right) = \frac{1}{2}\frac{r_1 + r_2}{v_2 - v_1} r_i + \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}.$$

Schreiben wir die Clapeyron-Clausiussche Formel in der Gestalt:

$$\frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}\left(T\frac{dp_N}{dt} - p_N\right) = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}\cdot\frac{r_i}{v_2 - v_1},$$

und ziehen wir die letzten Gleichungen voneinander ab, so finden wir:

$$-\frac{2T^2}{\varrho_1 + \varrho_2}\frac{d\frac{p_N - p_3}{T}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} r_i + \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \tag{17}$$

Setzen wir deshalb $p_3 = p_T$ [2] und bedenken wir, daß:

$$\zeta = \frac{H}{p_N - p_T} \quad \text{oder} \quad p_N - p_T = \frac{H}{\zeta},$$

so finden wir in (17) wieder Gleichung (14) zurück.

Nehmen wir für die Temperaturen, wo verschiedene Werte von ζ berechnet sind, ihre Mittelwerte, so erhalten wir nach

---

1) Diese Relation ist das Gegenstück von der Gleichung Clapeyron-Clausius, denn sie leistet für den Punkt F in der Fig. 1 dasselbe wie die Clapeyron-Clausiussche Gleichung für die Punkte H und K.

2) Zeitschr. f. phys. Chemie 48. S. 36. 194. Vgl. oben!

obiger Tabelle für die Dicke der Kapillarschicht von Kohlensäure:

$t =$	$-30°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$25°$	$30°$
$\zeta =$	1,46	1,72	1,91	2,21	3,51	7,06	26,1 $\mu\mu$

während wir in einer vorhergehenden Arbeit (vgl. oben) fanden:

$t =$	$-25°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$28°$	$30°$	31,12	
ζ zwischen	1,07	1,12	1,26	1,63	2,39	4,6	10,8	176 $\mu\mu$	(a)
	1,97	1,91	2,48	2,64	3,83	7,13	16,52	211 $\mu\mu$	(b)
Mittelwerte:	1,52	1,51	1,87	2,13	3,11	5,86	13,66	193 $\mu\mu$	

Wie schon oben bemerkt, sind alle diese Zahlen sub (a) und sub (b) zu klein zufolge der Vernachlässigung der Änderung von ζ mit der Temperatur; in der Nähe der kritischen Temperatur muß dieser Einfluß am größten werden, und das ist gerade, was wir sehen.

§ 2.

Ich möchte hier nun eine dritte Methode angeben und verwerten, die zwar nicht so genau ist als die, welche in § 1 durch mich auf Kohlensäure angewendet wurde, welche aber den Gegenstand *von einer ganz anderen Seite beleuchtet* und wenigstens der Größenordnung nach die Dicke der Kapillarschicht richtig angibt.

Wenn nämlich Θ in einem Punkte der Kapillarschicht den kinetischen Druck[1]) darstellt und S_N und S_T sind die Kohäsionen in einer Richtung senkrecht bzw. parallel zu der Oberfläche der Kapillarschicht, so ist, da θ unabhängig von der Richtung ist:

$$p_N - p_T = \Theta - S_N - (\theta - S_T) = S_T - S_N.$$

Wenn wir also der Kürze halber die Mittelwerte von S_T und S_N ohne Striche schreiben, so ist deshalb nach (3) § 1:

$$\zeta = \frac{H}{p_N - p_T} = \frac{H}{S_T - S_N}. \tag{18}$$

Nehmen wir vorläufig an, daß die Kohäsionen in der Flüssigkeit bzw. in dem Dampf durch die Laplaceschen Formeln $a\varrho_1^2$ und $a\varrho_2^2$ gegeben werden, so würde in dem Falle, daß der Übergang zwischen Flüssigkeit und Dampf völlig diskontinuierlich wäre, die Kohäsion S_N durch den Ausdruck

1) Druck = kinetischer Druck − Kohäsion.

$a\,\varrho_1\,\varrho_2$ dargestellt werden.[1]) Auf diese Weise würden wir für die Oberflächenspannung nach (18) erhalten:

$$H = \zeta(\delta_T - \delta_N) = \zeta\left\{a\,\varrho_1\,\varrho_2 - \frac{a(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)}{2}\right\} = \tfrac{1}{2}\,a\,\zeta(\varrho_1 - \varrho_2)^2.$$

Ist der Übergang aber *nicht* völlig diskontinuierlich, so gibt eine analoge Betrachtung wie a. a. O., jedesmal auf zwei aufeinanderfolgende Molekularschichten angewandt, als Ausdruck für die Oberflächenspannung H statt ein *einziges* Glied, eine *Summe* von Gliedern wie $\frac{1}{2}\,a\,\zeta(\varrho_1 - \varrho_2)^2$. Wir wollen nun annehmen, daß die mittlere Dichte in einer Molekelschicht die halbe Summe ist der mittleren Dichten in den anliegenden Schichten, so daß die Differenz der Dichten von zwei aufeinanderfolgenden Schichten gegeben ist durch:

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}},$$

wo $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht darstellt.

Für die Oberflächenspannung erhält man also:

$$H = \sum_1^n \tfrac{1}{2}\,a\,\zeta_p\left\{\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}}\right\}^2$$

oder, da $\sum_1^n \zeta_p = \zeta$ = totale Dicke der Kapillarschicht:

$$H = \tfrac{1}{2}\,a\,\zeta\left\{\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}}\right\}^2. \tag{19}$$

Ist N die Zahl der Molekeln in einem g-Molekel (Avogadrosche Konstante) und M das Molekulargewicht, so ist der mittlere Abstand zwischen zwei Molekeln der Flüssigkeit bzw. des Dampfes:

$$\sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_1}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_2}}.$$

Wenn also die Flüssigkeit und der Dampf, bzw. n_1 und n_2 Molekelschichten zur Bildung der Kapillarschicht „beigetragen" haben[2]), so wird die Dicke der Kapillarschicht gegeben durch den Ausdruck:

$$n_1\sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_1}} + n_2\sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_2}}.$$

---

1) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chemie **93**. S. 167. 1918.

2) Vgl. oben! (§ 1).

Da wir, wie gewöhnlich, die Grenzflächen der Kapillarschicht auf gleiche Abstände der Teilfläche legen wollen, ist:

$$n_1 \sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_1}} = n_2 \sqrt[3]{\frac{M}{N\varrho_2}}.$$

Stellen wir die Gesamtzahl $n_1 + n_2$ der Molekelschichten, welche die Kapillarschicht bilden sollen, durch n dar, so erhalten wir (Kraft der Lage der Teilfläche) also für ihre Dicke ζ:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta = \frac{2n_1}{\sqrt[3]{\varrho_1}} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} = \frac{2n_2}{\sqrt[3]{\varrho_2}} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} &= \frac{2(n_1 + n_2)}{\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} \\ &= \frac{2n}{\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}} \sqrt[3]{\frac{M}{N}}. \end{aligned} \right.$$

Die Zahlen $\mathfrak{N}$ und n sind selbstverständlich von derselben Größenordnung. (Wie immer denken wir uns, daß die Teilfläche so gelegt wird, daß, wenn die Kapillarschicht weggenommen würde und die homogenen Phasen (Flüssigkeit und Dampf) bis zu der besagten Fläche fortgesetzt würden, die Gesamtmaße und das Gesamtvolumen der Materie sich nicht änderte. Wir haben das oben in § 1 zum Ausdruck gebracht, indem wir sagten: Die Kapillarschicht hat sich aus den homogenen Phasen von Flüssigkeit und Dampf ohne Änderung der Gesamtmaße und des Gesamtvolumens der Materie gebildet.

Bei der Bildung der Kapillarschicht schicken sich die n-Molekelschichten zu $\mathfrak{N}$ neue Schichten. Wir setzen:

$$(21) \qquad \mathfrak{N} = q\,n$$

und wollen zeigen, daß für Temperaturen in der Nähe des Schmelzpunktes q für Kohlensäure zwischen 1 und 1,5 liegt; bei höheren Temperaturen kommt q immer höher an 1. Denken wir uns nämlich erstens eine *homogene* Phase, welche dieselbe Dichte hat als die mittlere Dichte $\varrho = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$ der Kapillarschicht. Der mittlere Abstand zwischen zwei Molekeln ist in diesem Falle gegeben durch:

$$\sqrt[3]{\frac{M}{N\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}}}.$$

Wir würden also als Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht erhalten:

$$n' = \frac{\sqrt[3]{M}}{\sqrt[3]{N \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}}}.$$

Im Zusammenhang mit (20) erhalten wir also:

$$n' = \frac{\sqrt[3]{\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}}}{\sqrt[3]{\varrho_1 + \frac{1}{2}\varrho_2}} n.$$

Wir setzen: $n' = q' n$.

In einer vorhergehenden Arbeit habe ich schon die Zahl q' nicht allein für Kohlensäure, sondern auch für Benzol und Äther berechnet und benutzt. Ich fand[1]):

Tabelle 4.

Benzol.

t =	5,4°	20°	50	80	100	150	200	250	275
q' =	1,59	1,48	1,43	1,38	1,35	1,26	1,17	1,09	1,04

Äther.

t =	0°	20°	50	80	120	150	170	190	193
q' =	1,440	1,398	1,33	1,27	1,18	1,12	1,07	1,02	1,01

Kohlensäure.

t =	− 25°	− 10°	0	10	20	28	30	31,12
q' =	1,2	1,14	1,11	1,09	1,05	1,02	1,009	1,001

oder resümierend, wenn wir q' in ihrer Abhängigkeit zu der *reduzierten* Temperatur ϑ angeben:

	C_6H_6	C_6H_6	Äther	Äther	C_6H_6	C_6H_6	Äther	C_6H_6
ϑ =	0,498	0,575	0,584	0,627	0,629	0,664	0,691	0,753
q' =	1,59	1,43	1,44	1,398	1,38	1,35	1,33	1,26
	Äther	CO_2	Äther	C_6H_6	CO_2	CO_2	Äther	CO_2
ϑ =	0,755	0,815	0,841	0,842	0,864	0,897	0,905	0,929
q' =	1,27	1,2	1,18	1,17	1,14	1,11	1,12	1,09
	C_6H_6	Äther	CO_2	C_6H_6	CO_2	Äther	CO_2	Äther	CO_2
ϑ =	0,981	0,948	0,963	0,976	0,989	0,990	0,995	0,997	0,999
q' =	1,09	1,07	1,05	1,01	1,02	1,02	1,009	1,01	1,001

1) G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chemie **91**. S. 582—585. 1916.

Da nun der wirkliche Wert $\mathfrak{N}$ der Molekelschichten der Kapillarschicht zwischen n und n' liegt, nehmen wir $q = \frac{1+q'}{2}$ und finden:

	C_6H_6	C_6H_6	Äther	Äther	C_6H_6	C_6H_6	Äther	C_6H_6
$\vartheta =$	0,493	0,575	0,584	0,627	0,629	0,664	0,691	0,753
$q =$	1,3	1,21	1,22	1,2	1,19	1,17	1,16	1,13
	Äther	CO_2	Äther	C_6H_6	CO_2	CO_2	Äther	CO_2
$\vartheta =$	0,755	0,815	0,841	0,842	0,864	0,897	0,905	0,929
$q =$	1,13	1,1	1,09	1,08	1,07	1,05	1,06	1,04
	C_6H_6	Äther	CO_2	C_6H_6	CO_2	Äther	CO_2	Äther	CO_2
$\vartheta =$	0,931	0,948	0,963	0,976	0,989	0,990	0,995	0,997	0,999
$q =$	1,04	1,03	1,02	1,01	1,01	1,01	1,004	1,005	1,005

Da nun $\vartheta = 0{,}493$ für Benzol den Schmelzpunkt (5,4°) angibt, sehen wir also, daß der Koeffizient q in (21) vom Schmelzpunkt bis zu der kritischen Temperatur von 1,3 bis 1 abnimmt.

Elimination von ζ und n zwischen (19), (20) und (21) gibt für $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{N} = \frac{a(\varrho_1 - \varrho_2)^2}{q\left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}\right) H} \sqrt[3]{\frac{M}{N}}. \tag{22}$$

Indessen haben wir bei dieser Betrachtung als Formel für den Molekulardruck den Laplaceschen Ausdruck: $a\varrho^2$ gewählt. Wollen wir aber unsere Ergebnisse vergleichen mit denen in § 1 oben, so müssen wir in Formel (22) $\varrho_1 - \varrho_2$ ersetzen durch $\frac{1}{v_1 + \beta} - \frac{1}{v_2 + \beta}$, da wir oben für die *homogene* Phase von CO_2 die Zustandsgleichung:

$$p = Tf(v) - \frac{a}{(v+\beta)^2}$$

benutzt haben. Da aus der letzten Gleichung für die innere Verdampfungswärme r_i folgt:

$$r_i = \left(a - T\frac{da}{dt}\right)\left(\frac{1}{v_1 + \beta} - \frac{1}{v_2 + \beta}\right),$$

so erhalten wir für $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{q\left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}\right)} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} \cdot \frac{r_i(\varrho_1 - \varrho_2)}{\left(1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt}\right)(1 + \beta\varrho_1)(1 + \beta\varrho_2) H}. \tag{23}$$

Nach Sarrau ist für Kohlensäure

$$\beta = 0{,}357 \text{ und } a = 4317{,}7 \cdot 10^6 \cdot 1{,}00285^{-T}.$$

Mit Hilfe dieser Werte berechnen wir[1]):

Kohlensäure.

$t =$	$-25°$	$-10°$	0	10	20	28	30
$1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt} =$	1,71	1,749	1,778	1,806	1,835	1,858	1,863
$(1+\beta\varrho_1)(1+\beta\varrho_2) =$	1,382	1,385	1,372	1,367	1,360	1,357	1,361

Weiter wird:

$$\sqrt[3]{\frac{M}{N}} = 10^{-7}\sqrt[3]{\frac{44}{620}} = 0{,}414 \cdot 10^{-7}$$

und deshalb nach (20):

$$\zeta = \frac{0{,}828 \cdot 10^{-7}\, n}{\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}}.$$

Benutzen wir für r_i die Werte nach Regnault-Zeuner (bei 30° nach Mollier), während die Werte für die Oberflächenspannung nach den Angaben von Verschaffelt berechnet sind, so finden wir nach (23), (21) und (20):

I

$t =$	$-25°$	$-10°$	0	10	20	28	30
$\mathfrak{R} =$	3	3,6	4,2	5,1	7	11,4	26
$n =$	2,7	3,4	4	4,9	6,9	11,3	26
$\zeta =$	1,6	2	2,3	2,8	3,2	6,1	14 $\mu\mu$

Unter Vernachlässigung der *Änderung* der Dicke ζ der Kapillarschicht mit der Temperatur, d. h. wenn wir die Term

$$H v T \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

in (5a)[2]) weglassen, *wodurch die Werte von ζ zu klein ausfallen*, fanden wir nach (13), § 1:

II

$t =$	$-25°$	$-10°$	0	10	20	28	30
$\zeta =$	1,27	1,3	1,49	1,91	2,79	5,33	12,53 $\mu\mu$

Wenn wir Reihe I mit Reihe II vergleichen, sehen wir, daß auch wirklich die Zahlen sub I größer sind, wie die Zahlen sub II.

Tabelle 3, § 1, gibt eine Zusammenfassung der Werte für die Dicke der Kapillarschicht, nach verschiedenen Methoden gefunden. Bei der Berechnung von ζ_I, ζ_{II} und ζ_{III} ist zur Bestimmung

1) Die Werte von ϱ_1 und ϱ_2 sind nach Amagat.

2) Diese Relation befindet sich zwischen (10) und (11).

der Energie die Gleichung von Sarrau benutzt, ebenso wie hier. Allein bei 30° haben wir dort einen anderen Wert für r_i adoptiert. (Nach Mathias statt nach Mollier.) Die Mittelwerte von ζ_I, ζ_{II} und ζ_{III} von Tabelle 3, § 1, sind deshalb bis 20° vergleichbar mit denen, berechnet in diesem Paragraph nach I. Wir erhalten als Mittelwerte von ζ_I, ζ_{II} und ζ_{III}:

III

$t =$	$-30°$	$-10°$	0	10	20
$\zeta =$	1;46	1,7	2	2,6	3,6

Wie wir sehen, sind die Werte von ζ nach II und III genügend im Einklang miteinander, wenigstens wenn wir den großen Unterschied in den gefolgten Methoden beachten. Weiter bemerken wir, daß in der hier befolgten Methode die Dicke ζ der Kapillarschicht berechnet ist durch Formeln, wo die innere Verdampfungswärme r_i in dem Zähler steht, während die Oberflächenspannung H sich in dem Nenner befindet, *im Gegensatz zu den Formeln*, benutzt in § 1, wo gerade die innere Verdampfungswärme (r_i) in dem Nenner, bzw. die Oberflächenenergie $\left(H - T\frac{dH}{dt}\right)$ in dem Zähler steht.

Außerhalb Kohlensäure gibt es leider wenige Körper, wofür die Daten, nötig für die obigen Berechnungen, über ein genügend ausgedehntes Temperaturgebiet gegeben sind. Wir müssen uns auf Benzol und Äther beschränken. Für den ersten Körper kennen wir die Oberflächenspannung (H) und die Densitäten ϱ_1 und ϱ_2 vom Schmelzpunkt bis 280°, also bis einzelne Grade unterhalb der kritischen Temperaturen (288,5° nach Young), während die innere Verdampfungswärme über demselben Temperaturgebiet durch mich berechnet ist.[1]) Eine genügend exakte Zustandsgleichung gibt es aber für diesen Körper nicht; ebensowenig für Äther, wofür wir die übrigen nötigen Daten zwischen 0° und 193° (krit. Temp. nach Amagat: 194,4°) kennen. Aus Mangel an einer besseren Zustandsgleichung wollen wir für Benzol und Äther die van der Waalssche Zustandsgleichung benutzten. Weiter können wir dann nach unserer Theorie die Zahl der Molekelschichten der Kapillarschicht und ihre Dicke ζ berechnen.

1) G. Bakker, Zeitschr. f. physik. Chemie 90. S. 99—104. 1905. und Ann. d. Phys. 54. S. 275. 1918.

Benzol.[1])

Für Benzol ist bei 5,4° (Schmelzpunkt) die innere Verdampfungswärme $r_i = 346{,}6 \cdot 10^7$ erg., $\varrho_1 = 0{,}894$, $\sqrt[3]{\varrho_1} = 0{,}9633$, während ϱ_2 gegen ϱ_1 vernachlässigt werden kann. Weiter ist M (Molekulargewicht) $= 78$ und für N (Avogadrosche Konstante oder Zahl der Molekeln in einem g-Molekel) nehmen wir: $6{,}2 \cdot 10^{23}$. Das gibt $\sqrt[3]{\frac{M}{N}} = 0{,}50107 \cdot 10^{-7}$. Bei Benutzung der Formel von Clausius für a wird $1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt} = 2$ und deshalb hat man für die Zahl $\mathfrak{N}$ der Molekelschichten nach Formel (23) ($\beta = 0$):

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{q\left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}\right)} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} \cdot \frac{r_i(\varrho_1 - \varrho_2)}{\left(1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt}\right) H}$$

$$= \frac{1}{1{,}29} \cdot 0{,}50107 \, \frac{346{,}6 \cdot 0{,}894}{2 \cdot 31{,}31} = 2{,}2$$

Nach der van der Waalschen Formel von a (in seiner Zustandsgleichung) wird $1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt} = \frac{T + T_\varkappa}{T_\varkappa} = 1{,}49$ und das würde geben $\mathfrak{N} = 2{,}7$. Im Mittel wird also: $\mathfrak{N} = 2{,}4$ bei $t = 5{,}4$ (Schmelzpunkt.)

Nach Ramsay und Shields ist die Oberflächenspannung H gegeben durch:

$$H = 2{,}1043\,(t_\varkappa - t - 6{,}5)\,\varrho_1^{4/3} \cdot M^{-1/3}.$$

Bei 50° können wir ϱ_2 gegen ϱ_1 vernachlässigen und erhalten mit $q = 1{,}21$ (Tabelle IV)[3]):

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{1{,}21\sqrt[3]{\varrho_1}} \sqrt[3]{\frac{M}{N}} \frac{r_i \varrho_1}{2} \frac{\sqrt[3]{M^2}}{2{,}1043\,(t_\varkappa - t - 6{,}5)\,\varrho_1^{4/3}}$$

$$= \frac{1}{1{,}21} \cdot 0{,}5017 \, \frac{391{,}39 \cdot 78^{2/3}}{2 \cdot 2{,}1043 \cdot 282} = 3.$$

1) Wir benutzen im folgenden die Daten derselben Forscher wie in den vorhergehenden Arbeiten.

2) $q = \frac{1 + q'}{2}$ und nach Tabelle IV ist $q' = 1{,}59$.

3) $t = 50° = \vartheta = 0{,}575$.

Mit der van der Waalsschen Formel für a wird

$$1 - \frac{T}{a}\frac{da}{dt} = 1{,}57 \quad \text{und hieraus} \quad \mathfrak{N} = 3 \cdot \frac{2}{1{,}57} = 3{,}8.$$

Im Mittel ist also $\mathfrak{N} = 3{,}4$.

Auch für 80, 100, 150, 200, 250, 275 und 280° habe ich die Berechnung durchgeführt und im Mittel (halbe Summe der beiden Werte) gefunden (resümierend):

$t = 5{,}4°$	50	80	100	150	200	250	275	280 [1])
$\mathfrak{N} = 2{,}4$	3	3,2	3,4	3,5	4	6,4	10,8	16

Indessen haben wir bei der Ableitung von Formel (19) als Ausdruck für die Differenz der Dichten von zwei aufeinanderfolgenden Schichten den Ausdruck $\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}}$ benutzt, während man doch oberflächlich meinen könnte, daß es heißen muß: $\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N} - 1}$. Da $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht darstellt, so gibt es allerdings $\mathfrak{N} - 1$ Abstände zwischen den äußersten Schichten; es ist aber nicht rational, als Dicke der Kapillarschicht einfach den Abstand zwischen den äußersten Molekelschichten zu nehmen, denn exakter ist es bei diesem Abstand noch hinzuzufügen einen *halben* Molekelabstand, sowohl der flüssigen als der dampfförmigen Phase. Der richtige Ausdruck für die Differenz der Dichten von zwei aufeinanderfolgenden Schichten ist deshalb: $\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}}$.

In einer Arbeit von 1915 [2]) fand ich schon für die Zahl der Molekelschichten, die „die Kapillarschicht geformt haben“:

$t = 20°$	50	80	100	150	200	250	275
$n = 3{,}7$	3—4	3—5	3,5—5	3,5—5	4—6	6—8	9—12

Äther.

Ganz auf dieselbe Weise wie oben habe ich die Berechnung zwischen 0 und 193° (krit. Temp. 194,5°) für Äther durchgeführt und berechnet:

$t = 0°$	20	50	80	120	170	190	193
$\mathfrak{N} = 2{,}3$	3,3	3,3	4,2	5	7,8	16,5	21,5

1) Für $t = 280°$ ist q' in Tabelle IV nicht berechnet. Wir finden $q' = 1{,}014$ und deshalb $q = 1{,}007$.

2) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chemie **90**. 105. 1915; vgl. Ann. d. Phys. **54**. S. 277. 1918.

Mit Hilfe der Theorie des klassischen Agens fand ich früher[1]):

$n =$ 3,7	4,7	3—5	4—6	6,5	10,6	10—16	27

Zusammenfassung.

In § 1 ist auf zwei Weisen die folgende thermodynamische Gleichung abgeleitet:

$$T^2 \frac{d\left\{\frac{H}{\zeta T}\right\}}{dt} = \frac{E_1 - E_2}{2} - E_3 .$$

Hierin ist H die Oberflächenspannung, ζ die Dicke der Kapillarschicht, T die absolute Temperatur und sind E_1, E_2 und E_3 die Energiedensitäten der flüssigen, dampfförmigen Phase bzw. die der Phase F (Fig. 1).[2])

In F hat das thermodynamische Potential denselben Wert wie für die homogene Phase der Flüssigkeit und des Dampfes.

Durch Entwicklung von (I) entsteht links ein Glied, das den Differentialquotient $\frac{d\zeta}{dt}$ enthält. Vernachlässigt man dieses Glied, so erhält man eine vereinfachte Relation, welche die Dicke ζ der Kapillarschicht ein wenig *zu klein* angibt. Die Größenordnung ist aber richtig. Diese Berechnung habe ich in einer vorhergehenden Arbeit für Kohlensäure, Äther und Benzol durchgeführt.

Für die Energie ε der homogenen Phase benutzte ich erstens die Gauss-van der Waalssche Formel:

(II) $$\varepsilon = -a\varrho + f(t)$$

und zweitens die Formel von Mills:

III) $$\varepsilon = -A\sqrt[3]{\varrho} + F(t).$$

In (II) ist a eine Temperaturfunktion und in (III) ist A eine Konstante; $f(t)$ und $F(t)$ sind Temperaturfunktionen. Als Mittel der zwei Berechnungen fand ich:

IV)

$t =$	$-25°$	-10	0	10	20	28	30	31,12
$\zeta =$	1,52	1,51	1,87	2,13	3,11	5,86	13,66	193 $\mu\mu$

1) G. Bakker, Zeitschr. f. phys. Chemie **90**. S. 118. 1915; vgl. Ann. d. Phys. **54**. S. 279. 1918.

2) Energiedensität = Energie der Volumeinheit. Ist für eine Phase ε die Energie pro Einheit der Maße und v das spez. Volumen, so ist also: $E = \frac{\varepsilon}{v}$.

In *dieser* Arbeit habe ich nun für die Energie ε die Formel benutzt, wie sie aus der Zustandsgleichung von Clausius[1]) folgt, nämlich:

$$\varepsilon = \psi(t) - \frac{A}{v + \beta}.$$

wo β eine Konstante und A eine unbekannte Temperaturfunktion darstellt. Ebenso ist $\psi(t)$ eine unbekannte Temperaturfunktion.

Mit $\beta = 0{,}357$ nach Sarrau finde ich für CO_2 in § 1:

(V)

$t =$	-25^0	-10	0	10	20	25	28	30	31,12
$\zeta =$	1,27	1,30	1,49	1,91	2,79	3,21	5,33	12,5	200.6 $\mu\mu$.

Diese Zahlen schließen sich deshalb sehr gut den Werten nach (IV) an. In dieser Arbeit habe ich darum diese Zahlen als erste angenäherte Werte für die Dicke der Kapillarschicht von CO_2 betrachtet. Durch ein Annäherungsverfahren wurde nun weiter mit Hilfe der *vollständigen* Relation (I) für ζ berechnet:

(VI)

$t =$	-10^0	0	10	20
$\zeta =$	1,6	1,78	2,91	3,51 $\mu\mu$.

Auch durch Integration von (I), sowohl zwischen 0^0 und 30^0 als zwischen -30 und $+30$ wird ζ berechnet.

Die Mittelwerte von ζ, die nach dieser verschiedenen Weise hier für Kohlensäure gefunden sind:

(VII)

$t =$	-30^0	-10	0	10	20
$\zeta =$	1,46	1,7	2	2,6	3,6

Wie es sein muß, sind die Werte nach (V) kleiner wie die nach (VII).

In § 2 wurde *auf ganz andere Weise* die Dicke ζ der Kapillarschicht bestimmt. Stellen wir nämlich wieder die Kapillarenergie[2]) (numerisch = Oberflächenspannung) durch H dar und sind p_N und p_T die Drucke in einer Richtung senkrecht, bzw. parallel der Oberfläche der Kapillarschicht, so ist:

(VIII) $$H = (p_N - p_T)\zeta \quad \text{oder} \quad \zeta = \frac{H}{p_N - p_T}.$$

---

1) In ihrer verallgemeinerten Form: $p = Tf(v) - \frac{\varphi(t)}{(v + \beta)^2}$.

2) Exakter: Die *Änderung* der *Freien* Energie bei der Bildung der Kapillarschicht.

Wenn S_N und S_T die Kohäsionen in den besagten Richtungen darstellen, so ist also, da der kinetische Druck ***unabhängig*** von der Richtung ist:

$$p_N - p_T = S_T - S_N.$$

Wenn wir deshalb der Kürze halber die Mittelwerte von S_T ohne Strich schreiben, so ist nach (VIII):

$$\text{(IX)} \qquad \zeta = \frac{H}{S_T - S_N}.$$

Ist $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht, so finden wir mit Hilfe von (IX):

$$H = \zeta (S_T - S_N) = \tfrac{1}{2} a \zeta \left\{ \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\mathfrak{N}} \right\}^2,$$

wobei wir vorläufig angenommen haben, daß die Kohäsionen in der Flüssigkeit bzw. in den Dampf durch die Laplaceschen Formeln $a\varrho_1^2$ und $a\varrho_2^2$ gegeben werden.

Setzt man weiter:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}}}{\frac{\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2}}{2}} = q' \quad \text{und} \quad \frac{q' + 1}{2} = q,$$

so findet man für die Zahl $\mathfrak{N}$ der Molekelschichten in der Kapillarschicht:

$$\text{(X)} \qquad \mathfrak{N} = \frac{a (\varrho_1 - \varrho_2)^2}{q \left(\sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{\varrho_2} \right)^2 H} \sqrt[3]{\frac{M}{N}},$$

wo N die Zahl der Molekeln in einem Grammolekel (Avogadrosche Konstante) und M das Molekulargewicht darstellt.

Wollen wir aber unsere Ergebnisse für Kohlensäure in § 2 vergleichen mit denen in § 1, so müssen wir den Ausdruck $a\varrho^2$ oder a/v^2 ersetzen durch den Ausdruck $\frac{a}{(v+\beta)^2}$ von Clausius und Sarrau. Mit Hilfe der Werte von β und a nach Sarrau finde ich für CO_2 mit Hilfe der auf diese Weise korrigierten Formel (X):

$$\text{(XI)} \qquad \begin{cases} t = & -25^\circ & -10 & 0 & 10 & 20 & 28 \\ \mathfrak{N} = & 3 & 3{,}6 & 4{,}2 & 5{,}1 & 7 & 11{,}4 \\ n = & 2{,}7 & 3{,}4 & 4 & 4{,}9 & 6{,}9 & 11{,}3 \\ \zeta = & 1{,}6 & 2 & 2{,}3 & 2{,}8 & 3{,}2 & 6{,}1\ \mu\mu. \end{cases}$$

Wie wir sehen, sind die Werte nach (XI) *sehr gut im Einklang mit den Werten* (VII) *in § 1, nach einer ganz anderen Methode gefunden.*

Außerhalb Kohlensäure gibt es nur zwei Körper, wofür die Daten, nötig für meine Berechnungen, gegeben sind. Wir müssen uns auf Benzol und Äther beschränken. Aus Mangel an einer besseren Zustandsgleichung haben wir weiter für diesen Körper die van der Waalssche Zustandsgleichung benutzt. Auf diese Weise fand ich nach meiner Theorie für die Zahl der Molekelschichten in der Kapillarschicht von

Benzol[1])

$t = 5{,}4°$	50	80	100	150	200	250	275	280
$\mathfrak{N} = 2{,}4$	3	3,2	3,4	3,5	4	6,4	10,8	16

Auf ähnliche Weise habe ich für Äther berechnet:

Äther[2])

$t = 0°$	20	50	80	120	170	190	193
$\mathfrak{N} = 2{,}4$	3,3	3,3	4,2	5	7,8	16,4	21,5

1) Schmelzpunkt: 5,4°. Kritische Temperatur: 288,5°.
2) Schmelzpunkt: — 117,5°. Kritische Temperatur: 194,5°.

(Eingegangen 3. September 1919).

4. *Bewegung und Ladung kleiner Teilchen im ionisierten elektrischen Feld;*

von F. v. Hauer.

Gelegentlich von Versuchen[1]) über den Einfluß von α-Strahlung auf die Bewegung ultramikroskopischer, in einem luftgefüllten Kondensator schwebender Teilchen (Zigarettenrauch, Öltröpfchen usw.) wurde beobachtet, daß diese Teilchen völlig andere Bewegungserscheinungen zeigen, wenn der Kondensatorraum mit α-Strahlung erfüllt ist, als ohne diese.

Normalerweise (d. h. ohne α-Strahlung) zeigen solche Teilchen, wie bei den bekannten Versuchen von Ehrenhaft, Millikan u. a., ohne elektrisches Feld neben starker Brownscher Bewegung eine mehr oder weniger ausgeprägte Fallbewegung. Bei Einschalten eines elektrischen Feldes wird der Bewegungszustand eines Teiles der Teilchen nicht geändert (ungeladene), während ein anderer Teil, je nach dem Sinne der elektrischen Ladung der Teilchen, einen Geschwindigkeitszuwachs in der Richtung des elektrischen Feldes oder gegen diese erfährt. Man sieht dabei deutlich, wie die offenbar teils positiv, teils negativ geladenen Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit aneinander vorbeischwebend der negativen bzw. positiven Kondensatorplatte zueilen.

Ist der Raum zwischen den Kondensatorplatten jedoch stark ionisiert, so ändert sich das Bild völlig. Beim Einschalten des elektrischen Feldes wandern die Teilchen nicht aneinander vorbei, sondern es bildet sich ungefähr in der Mitte des Kondensators eine Grenzfläche aus und alles, was ober dieser Grenzfläche ist, wandert gegen die obere Kondensatorplatte,

1) Die ursprüngliche Absicht war, den Stoß und die Umladung durch das α-Teilchen zu beobachten und so zu Ehrenhafts „elektrischer Wage" mit Hilfe der bekannten Ladung des α-Teilchens gleichsam „elektrische Gewichte" zu schaffen.

alles, was unterhalb ist, gegen die untere Platte. Die Geschwindigkeit eines einzelnen Teilchens bleibt längs seines Weges nicht konstant, sondern wird mit abnehmender Entfernung von der Platte, auf welche das Teilchen zueilt, stets größer. Da die gleiche Erscheinung, wie ich annehme, auch bei dem von Przibram[1]) angegebenen Versuch zur Demonstration der Reichweite der α-Strahlen auftritt und möglicherweise auch den Wanderungssinn kolloider Teilchen bei der Elektrolyse beeinflußt, sei es mir gestattet, hierauf etwas näher einzugehen.

Als Ursache für das erwähnte Verhalten müssen wir die durch das Anlegen des elektrischen Feldes gestörte Ionenverteilung ansehen, die einerseits durch Ausbildung einer entgegengesetzt geladenen Ionenschicht an jeder Elektrode die Feldstärke ändert, andererseits die in dieser Schicht befindlichen ultramikroskopischen Teilchen durch Ionenadsorption auflädet.

Um Ionenverteilung und Verlauf der Feldstärke im Kondensator zu berechnen, schreiben wir[2]):

$$n_1 - n_2 = \frac{1}{4\pi e}\,\frac{dX}{dx},$$

$$n_1 e c_1 X + n_2 e c_2 X = i,$$

$$q - \alpha n_1 n_2 = c_1 \frac{d}{dx}(n_1 X),$$

$$q - \alpha n_1 n_2 = - c_2 \frac{d}{dx}(n_2 X).$$

Dabei bedeuten n_1 und n_2 die Ionendichten (Anzahl in einem bestimmten Volumen, dividiert durch dieses Volumen) der positiven bzw. negativen Ionen, e die Ladung des Elementarquantums ($= -4{,}7 \cdot 10^{-10}$ elst. E.), X die elektrische Kraft in der x-Richtung, d. h. senkrecht zu den Kondensatorplatten; c_1 und c_2 die Beweglichkeiten der positiven bzw. negativen Ionen, i die Stromdichte im Kondensator, q die Zahl der im cm^3 pro Sekunde erzeugten Ionen jedes Vorzeichens und α den Wiedervereinigungskoeffizienten.

---

1) Karl Przibram, Wien. Ber. 121. II A. S. 221. 1912 und Elster-Geitel-Festschrift.

2) Vgl. J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, S. 65.

Setzen wir näherungsweise $c_1 = c_2 = c$ und $\alpha = 0$ (Sättigungsstrom), so ergeben die obigen Gleichungen

$$n_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{ec}\,\frac{1}{X} + \frac{1}{4\pi e}\,\frac{dX}{dx}\right)$$

und

$$q = c\,\frac{d}{dx}\left(\frac{i}{ec} + \frac{1}{4\pi e}\,X\,\frac{dX}{dx}\right) = \frac{c}{4\pi e}\,\frac{d}{dx}\left(X\,\frac{dX}{dx}\right);$$

daraus erhalten wir durch Integration

$$X\frac{dX}{dx} = X_0\left(\frac{dX}{dx}\right)_0 + \frac{4\pi e q}{c}\,x$$

(Index 0 für die entsprechenden Werte an der in $x = 0$ befindlichen Kondensatorplatte) und durch nochmalige Integration

$$X^2 = \frac{4\pi e q}{c}\,x^2 + 2\,X_0\left(\frac{dX}{dx}\right)_0 x + X_0^2$$

oder da

$$X_0^2 = X_d^2$$

(Index d für die entsprechenden Werte an der zweiten in $x = d$ befindlichen Platte) ergibt sich

$$2\,X_0\left(\frac{dX}{dx}\right)_0 = -\frac{4\pi e q}{c}\,d$$

und daher schließlich

(A) $$X^2 = \frac{4\pi e q}{c}\,(x^2 - x\,d) + X_0^2.$$

Setzen wir den hieraus abzuleitenden Ausdruck für $X\frac{dX}{dx}$ in die Gleichung für n_1 ein, so erhalten wir

(B) $$n_1 = \frac{1}{2X}\left[\frac{i}{cc} + \frac{q}{2}(2x - d)\right]$$

und aus den Ausgangsgleichungen

(C) $$n_1 - n_2 = \frac{q}{c}\,\frac{1}{X}\,(2x - d).$$

Die Gleichungen (A) bis (C) geben uns den Verlauf der elektrischen Feldstärke, der Ionendichte und des aus der ungleichen Ionenverteilung resultierenden Ladungsüberschusses als Funktion der Entfernung von der einen Platte. Die elektrische Feldstärke hat ihren maximalen Wert X_0 an den Kondensatorplatten ($x = 0$ und $x = d$) und nimmt gegen die Mitte zu ab bis zum kleinsten Wert ($X_{\min}$) in $x = d/2$, wo

$$X^2 = X^2_{\min} = X_0^2 - \frac{\pi e q}{c}\,d^2.$$

Die positiven Ionen sind vor der negativen Kondensatorplatte und die negativen Ionen vor der anderen Platte stark verdichtet, so daß sich vor jeder Kondensatorplatte eine Ionenatmosphäre mit einer Raumladung von entgegengesetztem Vorzeichen befindet. Die Dichte dieser Raumladung ist durch Gleichung (C) gegeben.

Denken wir uns nun in diesen Kondensatorraum ein kleines Teilchen (etwa Zigarettenrauch) eingeführt, so kann dieses aus verschiedenen Ursachen einen Bewegungsantrieb erfahren. Die Influenz kann, da das elektrische Feld jetzt nicht homogen ist, eine Bewegung zur näherstehenden Kondensatorplatte veranlassen oder es kann das Teilchen infolge einer wahren elektrischen Ladung gezwungen sein, dem Felde zu folgen. Diese wahren elektrischen Ladungen müssen (abgesehen von den schon bei der Erzeugung der Teilchen entstandenen Ladungen, die ja zu andern schon eingangs beschriebenen Bewegungen führen) der das Teilchen umgebenden Ionenatmosphäre entstammen. Es werden aus diesen Ionen beiderlei Vorzeichens gegen das Teilchen durch das elektrische Feld des Kondensators geführt, und zwar, wenn das Teilchen näher der positiven Platte ist, mehr negative Ionen als positive, da der Raum zwischen dem Teilchen und der negativen Platte, aus dem alle negativen Ionen zum Teilchen wandern, größer ist, als der zwischen der positiven Platte und dem Teilchen, aus dem alle positiven Ionen gegen das Teilchen geführt werden. Es resultiert somit aus diesem Ionenstrome eine elektrische Aufladung des Teilchens, die das entgegengesetzte Vorzeichen hat, wie die näherstehende Kondensatorplatte und somit eine Anziehung gegen diese. Endlich können die molekularen Stöße der Wärmebewegung oder, wenn man so sagen will, der Gasdruck Ionen gegen das Teilchen treiben, wobei dann das Teilchen natürlich eine Ladung des gleichen Vorzeichens wie die umgebende Ionenatmosphäre erhalten muß, woraus ebenfalls eine Anziehung gegen die näherstehende Platte resultiert.

Um nun diese verschiedenen Ursachen quantitativ zu überblicken, betrachten wir einen speziellen Fall, der ungefähr den von mir realisierten Versuchsbedingungen entspricht. Wir setzen nämlich

$$c = 1{,}4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \Big/ \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}, \quad q = 6{,}10^7, \quad d = 0{,}1 \text{ cm}$$

und die an den Kondensator angelegte Potentialdifferenz gleich 100 Volt ($=\frac{1}{3}$ der absoluten Einheit). Es wäre demnach die elektrische Feldstärke im nichtionisierten Kondensator

$$\bar{X} = \frac{10}{3} \text{ abs. E.}$$

und es wird

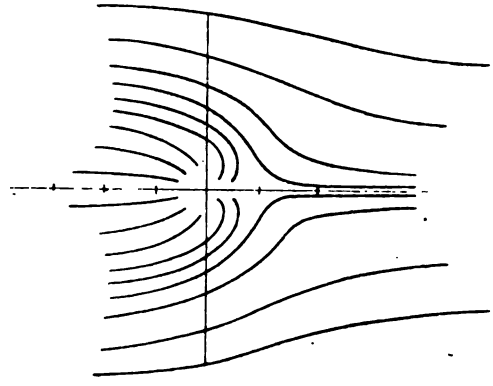
$$X_0^2 - X^2_{\min} = \frac{\pi e q}{c} d^2 = 2{,}10^{-6}.$$

(Alles in abs. st. Einh. ausgedrückt.)

Die Differenz zwischen maximalem und minimalem Wert der Feldstärke ist also so klein, daß das Feld praktisch doch als homogen angesehen werden kann. Die Wirkung dieser geringen Inhomogenität auf die Influenzladungen kleinerer Teilchen (Radius $r = 10^{-4}$ bis 10^{-5} cm) ist zu vernachlässigen; denn man sieht leicht, daß diese Influenzladungen von der Größenordnung $r^2 X$ sind und, da ihr Abstand ungefähr gleich r und sehr klein, ist die auf das Teilchen wegen der Influenz ausgeübte Kraft von der Größenordnung $r^3 X \frac{dX}{dx}$, was nach Gleichung (A) zu Kräften von 10^{-17} Dyn führt, die gegen die Schwerkraft schon zu vernachlässigen sind, die beobachteten Kräfte aber sind wesentlich größer als die auf die Teilchen wirkende Schwerkraft.

Wir haben es demnach mit einer wahren Ladung des Teilchens zu tun, wie dies auch durch einen weiter unten angegebenen Versuch mit einem größeren Probekörper bestätigt wird. Wir haben nun zu untersuchen, inwieweit diese Ladung durch den oben erwähnten Ionenstrom hervorgerufen sein kann. Auf das ungeladene Teilchen (mit dem Radius r) in der Entfernung x müssen durch das Feld alle Ionen eines Vorzeichens, die in dem Zylinder mit der Grundfläche $r^2\pi$ und der Höhe x erzeugt werden, getrieben werden, also in der Sekunde $r^2 \pi x q$ Ionen. Vom entgegengesetzten Vorzeichen werden in der Sekunde $r^2 \pi (d - x) q$ Ionen gegen des Teilchen getrieben, also erhält es pro Sekunde eine Ladung von $r^2 \pi (d - 2x) q$ Ionen, d. h. mit unseren Zahlenwerten höchstens 0,2 Ionen pro Sekunde. Dies reicht nicht hin, um die beobachteten Bewegungserscheinungen zu erklären, denn innerhalb einiger Sekunden wird ein Teilchen dabei unter wachsender Geschwindigkeit an die

Platte bewegt; es muß also in dieser Zeit eine ganze Anzahl von Ionenladungen übernommen haben, was durch diesen Ionenstrom um so weniger bewirkt werden kann, als eine auf dem Teilchen vorhandene geringe Ladung bereits das Feld in der nächsten Umgebung so deformiert, daß weitere Aufladung durch Ausweichen des Ionenstromes verhindert wird (vgl. Fig. 1, wobei jedoch der Dichte der Kraftlinien keine Bedeutung zukommt.)



Störung des elektrischen Feldes um eine Ladung von 70 e (1 Sekt. = 10^{-4} cm).

Fig. 1.

Als weiterer Grund zur Ausbildung einer elektrischen Ladung wurde der Zusammenstoß mit Ionen infolge der Wärmebewegung derselben genannt. Gleichung (C) ergibt unmittelbar an der Platte einen Überschuß von $5{,}10^3$ Ionen (pro cm^3) eines Vorzeichens nach Einsetzen der angegebenen Zahlenwerte. Behandeln wir nun die Ionen wie gewöhnliche Gasmolekel, so wird durch den Stoß dieser Ionen gegen das Teilchen, wenn N die Zahl der Gasmolekel im cm^3, ν die Zahl der Stöße gegen ein cm^2 der Wand bedeutet, in der Sekunde die Ladung von $4 r^2 \pi \nu \frac{n_1}{N}$ Ionen dem Teilchen mitgeteilt, das ist mit $\nu = 1{,}6 \cdot 10^{23}$, $N = 2{,}10^{19}$ die Ladung von einem Ion pro Sekunde. Dabei ist noch zu bedenken, daß eine bereits vorhandene Ladung des Teilchens abstoßend wirkt, während andererseits die durch das Ion selbst auf dem Teilchen hervorgerufene Influenz es gegen das Teilchen treibt. Der erste

Umstand kann aber die Aufladung nur wenig behindern, da die gesamte Arbeit, die nötig ist, um ein Ion (Ladung e) auf ein Teilchen mit der Ladung von etwa $10\,e$ zu bringen, nur $\frac{10\,e^2}{r}$ Erg beträgt, also mit $r = 10^{-4}$ cm gleich $2{,}10^{-14}$ ist, während die mittlere lebendige Kraft eines Gasmolekels bei Zimmertemperatur etwa dreimal so groß ist. Dieser letztgenannte Grund kann demnach im Verein mit dem vorher genannten die Ladung mehrerer Ionen auf ein kleines Teilchen bringen, und damit eine Bewegung desselben zur näherstehenden Kondensatorplatte verursachen.

Die experimentelle Beobachtung der erwähnten Erscheinung wurde in folgender Weise durchgeführt. Auf einen Objektträger wurden zwei etwa 1 mm dicke und 3 mm breite Messing-

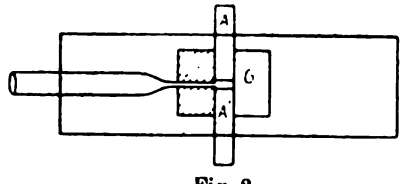


Fig. 2.

streifen ($A\,A'$) im Abstand von 1 mm aufgeklebt, rechts davon ein ebenso dickes Glasplättchen (G) und links eine Schicht Pizein, in der ein feines Kapillarröhrchen einen Luftzugang in den so gebildeten Hohlraum gestattete. Der Hohlraum wurde noch durch ein darüber gelegtes eingefettetes Deckgläschen geschlossen. Diese Kammer wurde nun vor das horizontal stehende Mikroskop gebracht und von rechts durch das Glasplättchen (G) mit dem konzentrierten Lichtkegel einer Bogenlampe beleuchtet. Bläst man durch die Kapillare Tabaksrauch usw. ein, so beobachtet man in diesem Dunkelfeld die Brownsche Bewegung der Teilchen und schaltet man an $A\,A'$ eine Potentialdifferenz, so sieht man die Trennung der Teilchen in positiv und negativ geladene, wie sie von Ehrenhaft und anderen beschrieben wurde. Nun wurden die durch die Messingplättchen gebildeten Teile der Kammerwände mit zwei Platinblechen (1×3 mm) überdeckt, auf denen ca. $14{,}10^{-10}$ g Po niedergeschlagen war. Um ungefähr die Stärke der durch die Po-Strahlung hervorgerufenen Ionisierung angeben zu können,

wurde angenommen, daß in dem Volumen der Kammer (v) der Bruchteil $\frac{v}{V} J$ Ionen erzeugt werde, wobei J die gesamte von dieser Po-Menge pro Sekunde erzeugte Ionenmenge und V das Volumen einer Kugel bedeutet, deren Radius gleich ist der Reichweite der Po-Strahlung. (Der Fehler, der in dem Umstande liegt, daß die Dichte der α-Strahlung mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt, wird teilweise dadurch korrigiert, daß die Zahl der erzeugten Ionen längs des Strahles mit der Entfernung zunimmt.) So wurde die oben verwendete Zahl q berechnet. Durch das (nach unten weitere) Kapillarröhrchen konnte leicht Tabaksqualm eingeblasen werden. Da man es dabei aber mit einer schlecht definierten Substanz zu tun hat, nahm ich auch Na-, Hg- und Öldampf; von diesen wurde ein Tröpfchen in einem in der Mitte erweiterten Glasröhrchen kräftig erwärmt und ihr Dampf durch die ausgezogene Spitze des Glasröhrchens in die Kapillare geblasen. Ohne α-Strahlung waren die Öltröpfchen fast alle ungeladen, bei Anwesenheit der Strahlung aber zeigten alle genannten Substanzen das gleiche Verhalten: Beim Einschalten des elektrischen Feldes wurden alle Teilchen mit wachsender Geschwindigkeit gegen die näherstehende Kondensatorplatte befördert (gegen A und A').

Um auch noch den experimentellen Beweis zu führen, daß in einem ionisierten elektrischen Feld suspendierte Teilchen eine wahre elektrische Ladung erhalten, bediente ich mich folgender Anordnung: In einem Glasröhrchen von 20 cm Länge war an einem Kokonfaden ein Klümpchen Klebwachs aufgehängt; zu beiden Seiten desselben waren innerhalb des Röhrchens zwei Blechstreifen, die mit den Polen einer Akkumulatorenbatterie (130 Volt) verbunden werden konnten. Unterhalb des Glasröhrchens wurde ein Ra-Präparat gelegt (dasselbe war mit einem Deckgläschen zugedeckt, so daß hier keine α-Strahlen, sondern nur β- und γ-Strahlen wirkten); auf der Vorderseite des Röhrchens war ein Fensterchen (ein Deckgläschen) angebracht, durch welches mit einem schwach vergrößerndem Mikroskop die Ablenkungen des Kokonfadens, d. h. des Wachsklümpchens beobachtet werden konnten. Durch Ein- und Ausschalten des elektrischen Feldes bzw. der Strahlung war es leicht möglich, sich zu überzeugen, daß dieses grobe Teilchen

sich qualitativ gleich verhält, wie die kleinen und daß die Ursache hiervon eine wahre Ladung ist, die auch nach Entfernung des Ra auf dem Teilchen bleibt, aber rasch verschwindet, wenn die Ra-Strahlung ohne Gegenwart des elektrischen Feldes ionisiert. Die Aufladung des Teilchens ging hier ganz allmählich vor sich, die positive langsamer als die negative. In dieser Weise sollen die Versuche noch weiter fortgesetzt werden.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß die beschriebene Erscheinung eine Fehlerquelle bei Potentialmessungen in ionisierten Gasräumen mit Hilfe von Sonden darstellt. Die Voraussetzung bei diesen Messungen ist, daß die eingeführte Sonde, abgesehen von der durch ihre Ausdehnung hervorgerufenen Störung, das Potential der Stelle, an der sie sich befindet, annimmt, so wie es vor Einführung der Sonde war. Eine *isolierte* Sonde müßte dies natürlich ohne Ladungsaufnahme tun, die Elektrizitätsaufnahme ist nur nötig, wenn mit der Sonde noch andere Körper (Elektrometerblättchen, Zuleitung) verbunden sind und daher ebenfalls auf das Potential der Sonde gebracht werden müssen. Nimmt aber, wie aus obigem hervorgeht, auch eine isolierte Sonde Ladung auf, so hat sie nicht das Potential, das an der betreffenden Stelle vor ihrer Einführung herrschte, und ein mit ihr verbundener Elektrometer ebensowenig.

Zusammenfassung.

In einem ionisierten elektrischen Feld suspendierte Teilchen nehmen aus der sie umgebenden Ionenatmosphäre eine elektrische Ladung auf, deren Vorzeichen durch die Lage des Teilchens im Feld bestimmt ist. Die Ursache hiervon dürfte in der Hauptsache in der Ausbildung von einseitig geladenen Ionenschichten durch die Wirkung des Feldes und der Adsorption bzw. Entladung dieser Ionen an dem suspendierten Teilchen bestehen. Um neben der Wärmebewegung und der elektrostatischen Anziehung der Ionen gegen das durch die Ladung des Ions influenzierte Teilchen noch andere besondere Adsorptionskräfte anzunehmen, liegt hierbei keine Notwendigkeit vor.

Die gleiche Erscheinung liegt dem Przibramschen Kondensator zur Demonstration der Reichweite der α-Strahlen zugrunde. Sie muß ferner die Ladung suspendierter Teilchen in Flüssigkeiten beeinflussen und ist wohl die Ursache, daß manche Kolloide bei der Elektrolyse nach beiden Elektroden wandern; sie muß bei der Ladung sehr großer Ionen in Luft mitspielen und Potentialmessungen in ionisierten Feldern stören.

Freiburg im Uechtland, September 1919.

(Eingegangen 9. September 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes; von H. Dember und M. Uibe.*

(Abdruck aus den Berichten der Mathemat.-Phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 69, 31. Juli 1917.)

Sechster Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.

§ 1.

Der unbedeckte Taghimmel und der sternenklare Nachthimmel werden als mehr oder weniger flaches Gewölbe und nicht als vollkommene Halbkugel gesehen. Im allgemeinen ist die Form des Gewölbes mit großer Annäherung eine Kugelkalotte.[1]) Die Mehrzahl der Wege, diese Erscheinung zu erklären, welche nach Ptolemäus für uns „eine feste, stetige und unveränderbare Vorstellung" bildet[2]), ist von alters her psychologischer Art gewesen. Aristoteles und Ptolemäus haben die Theorie der Luftperspektive geschaffen, die in den dichteren lichtabsorbierenden Luftschichten des Horizonts die Ursache sieht, welche uns die Objekte lichtschwach und dadurch fern erscheinen läßt. Malebranche und Wallis erklären die weitere Entfernung des Horizonts gegenüber dem Zenit dadurch, daß in der horizontalen Blickrichtung eine große Anzahl von Objekten gesehen wird, deren Distanzen bekannt sind und daß, mit Hilfe der Kenntnis dieser, unbewußt Entfernungsschätzungen vorgenommen werden, die wegen des Vorhandenseins der Merkmale in der Horizontalen größer ausfallen als in der Richtung zum Zenit, wo die Zwischenzeichen fehlen. Mit dieser Theorie verwandt ist diejenige Alhazens. Er setzt an die Stelle des unbewußten Vergleichs von Ent-

1) H. Dember und M. Uibe, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. **69**. S. 139—148. 1917. Ann. d. Phys. **55**. S. 387. 1918.

2) Pernter-Exner, Meteorolog. Optik, 1910, Abschnitt 1 von J. M. Pernter.

fernungen den Vergleich der Größe von Gegenständen: Zwischen uns und dem Horizont sehen wir eine große Anzahl von Gegenständen, die uns der Größe nach bekannt sind. Am Horizont, wo der Himmel die Erde scheinbar berührt, erscheinen sie uns sehr klein und wir schätzen daher die Entfernung sehr groß ein, während wir in der vertikalen Blickrichtung durch das Fehlen von vergleichbaren Objekten getäuscht werden und den Zenit für nahe halten. In neuerer Zeit hat Helmholtz[1]) diese Theorie in Verbindung mit der Luftperspektive vertreten.

Alle diese Vorstellungen[2]) haben den großen Mangel, daß sie wohl erklären können, warum der Horizont weiter erscheint als der Zenit oder der Himmel in einer anderen Richtung, aber daß sie versagen bei einem Vergleich zweier Entfernungen in Richtungen, die beide zwischen Horizont und Zenit liegen, wo nun bei beiden die vergleichbaren Distanzen oder Gegenstände fehlen. Von diesem Mangel frei ist die Gausssche Blickrichtungstheorie, die behauptet, daß infolge physiologischer Bedingungen des menschlichen Sehapparates, Winkel, mit stirnwärts gedrehten Augen bei normaler Kopfhaltung beobachtet, kleiner erscheinen als in horizontaler Blickrichtung. Ein eifriger Verfechter dieser Theorie ist J. M. Pernter. In einem vorangehenden Bericht konnte gezeigt werden, daß sich die Blickrichtungstheorie mit den Beobachtungen schwerlich vereinbaren läßt. Die Hauptgründe, die gegen ihre Grundlagen und Anwendbarkeit sprechen, sind die große Verschiedenheit der Höhe von Tag- und Nachthimmel, der Einfluß der Himmelshelligkeit und meteorologischer Faktoren, sowie die Tatsache, daß man bei sternenklarer Nacht Himmelsgewölbe beobachten kann mit einem geschätzten Halbierungswert von 42,9°, also nur wenig verschieden vom Halbierungswert einer Halbkugel (45°).

Den psychologisch-physiologischen Theorien, von denen die Blickrichtungstheorie heute das größte Ansehen genießt, stehen

1) H. von Helmholtz, Physiologische Optik, 2. Auflage. 1896.

2) Die drei vorangehenden Theorien sind von ihren Schöpfern gerade so wie die Blickrichtungstheorie, ursprünglich ausgedacht worden, um die scheinbare Vergrößerung von Sonne und Mond in der Nähe des Horizontes zu erklären. Man hat dieses Problem mit dem von der Gestalt des Himmelsgewölbes schon frühzeitig verquickt, obgleich die experimentellen Grundlagen dazu so gut wie vollständig fehlen.

zwei gegenüber, welche das Gewölbe als nicht scheinbar oder durch „Täuschung" hervorgerufen ansehen, sondern es, durch physikalische Umstände bedingt, als reell vorhanden erklären.

Die Atmosphäre bildet um die Erde eine konzentrische Hülle, deren Höhe man, soweit es sich um optische Vorgänge handelt, nach den neuesten photogrammetrischen Aufnahmen[1]) der Nordlichtstrahlen zu 250 km ansetzen kann. Nimmt man mit Hobbes an, daß die wirkliche Grenze der Atmosphäre auch die uns sichtbare ist, so errechnet sich, bei Zugrundelegung der Form einer Kugelkalotte, ein Gewölbe mit einem zu schätzenden Halbierungswert des Bogens Horizont-Zenit von rund 12°; ein Wert, der weit unterhalb aller beobachteten liegt. Das klare Himmelsgewölbe Hobbes müßte viel flacher gesehen werden, als es bisher beobachtet worden ist.

Eine zweite physikalische Anschauung, die von Reimann geäußert worden ist, sieht die Luft als feinen Nebel an und faßt das Himmelsgewölbe auf als die „sichtbare Grenze im nicht absolut durchsichtigen Medium" Luft. Wir entnehmen über die Reimannsche Vorstellung der Meteorologischen Optik von Pernter-Exner folgende Sätze, da uns die Arbeit selbst nicht zugänglich ist: Reimann „führt die Erscheinung, daß uns im Nebel in einer gewissen Entfernung eine weiße Wand erscheint, die jeden weiteren Blick abschneidet, auf die Luft über, die eben nur wie ein sehr dünner Nebel wirke. Es ist wohl nur ein quid pro quo, wenn diese Auffassung nicht zu einem im Zenit vertieften statt gedrückten Gewölbe führen soll — abgesehen von allen sonstigen dagegensprechenden Momenten."

Die Hauptfolgerung Pernters ist richtig, aber trotzdem hat die Ansicht Reimanns einen tauglichen Kern. Sieht man nämlich die Luft nicht nur als feinen Nebel an, sondern beachtet man außerdem, daß im Sinne der Rayleighschen Theorie vom Blau des Himmels jede einzelne Luftmolekel tagsüber ein Lichtzentrum ist und jeder anderen Luftmolekel sowie dem Beobachter Licht zusendet, d. h. also, berücksichtigt man die Helligkeit des Himmels, so gelangt man zu einer einfachen geometrischen Darstellung der Himmelsform aus Zahlen,

1) L. Vegard u. O. Krogness, Ann. d. Phys. 51. S. 4

die mit Hilfe ganz unabhängig von diesen Betrachtungen ausgeführter photometrischer Messungen der Himmelshelligkeit erhalten worden sind.

§ 2.

Die Entfernung eines Punktes in der Atmosphäre, von dem aus eine leuchtende Luftmolekel gerade so viel Energie ins Auge des Beobachters schickt, daß eine Lichtempfindung zustande kommt, sei die maximale Sichtweite. Die maximale Sichtweite mißt daher die Entfernung, bis zu welcher sich die für uns sichtbare Atmosphöre erstreckt. Außer von der optischen Beschaffenheit der Luft ist die maximale Sichtweite noch von der Empfindlichkeit des einzelnen Auges abhängig und sie ist beim Tageshimmel für das Auge mit derjenigen Entfernung identisch, in welcher sich eine Lichtquelle (leuchtende Molekel) nicht mehr von der hellen Umgebung abhebt. Die letztere Distanz, die „kritische" Sichtweite könnte man sie nennen, bewirkt, daß wir in dem ihr gleichen Abstand in der Atmosphäre eine unterschiedslose Grenze erblicken, die von der leuchtenden Luft des Tageshimmels gebildet wird.

Besitzt eine leuchtende Luftmolekel m im Innern einer großen Luftmasse die Lichtintensität J_1, so ist die Intensität in einem Abstande s davon unter Berücksichtigung der Rayleighschen Extinktion durch die auf der Strecke s liegenden Molekeln und der unendlich vielfachen Zurückstrahlung, welche diese Molekeln durch die Umgebung erleiden

$$J_s = \frac{J_1}{s^2} \cdot e^{-hs} + \frac{J_1}{s^2} \cdot A. \tag{1}$$

Hierin bedeutet h den Extinktionskoeffizienten und A den durch Zustrahlung auf der Strecke s gewonnenen Bruchteil. In einer gleichmäßig hellen Luftmasse, deren Gesamtintensität sich in einem endlichen Intervall nicht ändert, ist der durch Extinktion auf der Strecke s verlorene Bruchteil $(1 - e^{-hs})$ von J_1 gleich dem Bruchteil A.

$1 - e^{-hs} = A$, woraus, in (1) eingesetzt, die geometrische Beziehung folgt

$$J_s = \frac{J_1}{s^2}.$$

Für eine zweite Luftmasse, in welcher jede einzelne Molekel die Lichtintensität J_2 besitzt, bekommen wir gleicherweise im Abstande r die Intensität $J_r = \frac{J_2}{r^2}$. Sind nun $J_S = J_R$ gerade diejenigen Minimalintensitäten in den Abständen S und R von der Molekel m, welche im Auge gerade eine Lichtempfindung hervorrufen können, so ist $J_1 : S^2 = J_2 : R^2$ und

$$S : R = \sqrt{J_1} : \sqrt{J_2},$$

wo S und R die maximalen Sichtweiten in den beiden verschiedenen Luftmassen bedeuten.

Die mit den Photometer meßbaren Helligkeiten H_1 und H_2, der leuchtenden Luftmassen sind den Intensitäten J_1 und J_2 direkt proportional, so daß gilt

(2) $$S : R = \sqrt{H_1} : \sqrt{H_2}.$$

§ 3.

Die Beziehung (2) erlaubt, mit Hilfe von Messungen der Himmelshelligkeiten das zur Zeit der Messung *sichtbare* Himmelsgewölbe zu konstruieren und zu berechnen.

Tabelle 1 gibt eine Meßreihe von Himmelshelligkeiten wieder, die, wie die folgenden auf Teneriffa ausgeführten, zum Teil[1]) einer systematischen Untersuchung der Himmelshelligkeiten entnommen werden, die der eine von uns (Uibe) auf Anregung von Hrn. Prof. O. Wiener ausgeführt hat und die später als Dissertation veröffentlicht werden soll. φ bedeutet die mittlere Höhe der Sonne über dem Horizont während der photometrischen Messung, zu deren Ausführung ein Wienersches Himmelsphotometer diente. ζ ist die Zenitdistanz des

Tabelle 1.

Datum	ζ	H beob.	$\overline{H}$ beob.	$\overline{H}$ berech.
22. Juni 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 20{,}0°$ vormittags	15	0,96	0,98	1,02
	30	1,18	1,09	1,09
	45	1,42	1,19	1,22
	60	2,03	1,42	1,42
	75	3,20	1,79	1,73

1) Es sind die vom 22. Juni 1916. Martin Uibe, Über die Helligkeitsverteilung des diffusen Sonnenlichts am klaren Himmel. Math.-Phys. Kl. d. Sächs. Ges. d. Wiss. Abhandlungen: Bd. 35. Nr. 6. 1918.

beobachteten Flächenstücks am Himmel und H die gefundene Himmelshelligkeit, unter der Festsetzung, daß im Zenit die Helligkeit $H = 1$ herrscht. Die Messungen sind in einem Azimut von 90°, vom Sonnenvertikal aus gezählt, vorgenommen worden. Dieses Azimut wurde aus weiter unten ersichtlichen Gründen für die Darstellung bevorzugt.

In der Fig. 1 sind von O aus, dem Standpunkte des Beobachters, unter dem zugehörigen Zenitabstand ζ die Strecken

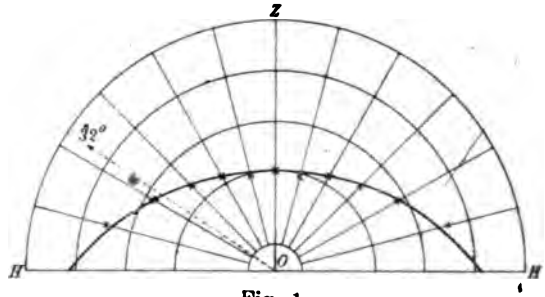


Fig. 1.

$\sqrt{H}$, welche den maximalen Sichtweiten entsprechen, als Vektoren aufgetragen und ihre Endpunkte miteinander verbunden. Ein Ansetzen des Zirkels lehrt, daß die so erhaltene Kurve mit sehr großer Genauigkeit ein Stück eines Kreises ist.

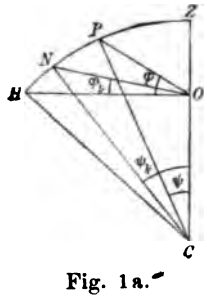


Fig. 1a.

In einem vorangehenden Bericht konnten wir zeigen, daß die Kugelkalotte eine gute Darstellung des Hauptverlaufs der Himmelsform gibt. Diese geometrische Eigenschaft gestattet eine Prüfung unserer Annahme, indem sich die nach der Kugelkalottentheorie errechneten Radiivektoren direkt gleich den photometrisch gefundenen $\sqrt{H}$ in einer bestimmten Richtung ergeben müssen, wenn der Radiusvektor der Kalotte im Zenit gleich 1 und die Helligkeit in dieser Richtung ebenfalls gleich 1 gesetzt wird.

In der vorstehenden Zeichnung (Fig. 1a) bedeutet HZ die Hälfte des kalottenförmigen Bogens des vom Beobachter in O gesehenen Himmels. Ist N am Himmel ein beliebiger

Punkt, der unter dem wahren Winkel φ_k über dem Horizont liegt, so ist es unsere Aufgabe, das Verhältnis der Strecken $NO:OZ$ zu berechnen, wenn φ_k und die gemessene Höhe φ des geschätzten Halbierungspunktes P bekannt sind. Statt φ führen wir den zugehörigen Zentriwinkel ψ ein. Beide sind durch die Gleichung

$$\cos^3\psi - {}^3/_4(1 - {}^1/_3\,\mathrm{tg}^2\varphi)\cos\psi = {}^1/_4(1 - \mathrm{tg}^2\varphi)$$

miteinander verbunden. Aus Dreieck NOC folgt

$$NO = \sin\psi_k : \cos\varphi_k .$$

Weiter ist $OZ = 1 - OC$ und da $OC = 1 \cdot \cos 2\psi$, so wird $OZ = 2\sin^2\psi$ und

$$\frac{NO}{OZ} = \frac{\sin\psi_k}{\cos\varphi_k \cdot 2\sin^2\psi} .$$

Hierin bestimmt sich der Winkel ψ_k aus

$$\cos(\varphi_k + \psi_k) = OC \cdot \cos\varphi_k = \cos 2\psi \cdot \cos\varphi_k .$$

Unser $\sqrt{H}:\sqrt{1}$ muß, falls die oben gegebene Darstellung richtig ist, für jeden Punkt am Himmel dem Ausdruck für $NO:OZ$ gleich sein. Mit seiner Hilfe haben wir die Werte für $\sqrt{H}$ in den Tabellen berechnet. Die Übereinstimmung der berechneten Werte mit den gemessenen ist, unter Berücksichtigung der Fehler himmelsphotometrischer Messungen und mitspielender zufälliger Umstände in der Atmosphäre besonders bei den in Güímar ausgeführten Beobachtungen (1—12) eine recht gute.

Daß die Möglichkeit der Konstruktion der Form des sichtbaren Himmelsgewölbes mit Hilfe der durch Himmelshelligkeiten gemessenen Sichtweiten keinem rechnerischen Zufall zu verdanken ist, darin bestärkt die Tatsache, daß der geschätzte Halbierungspunkt des Bogens Horizont-Zenit in der Figur 32° über dem Horizont liegt. Aus 204 in den Monaten Februar bis Juni 1916 ausgeführten Schätzungen des Halbierungswertes am klaren Taghimmel hatte sich ein mittlerer Wert dieses Winkels von 32,03° ergeben.

In den Tabellen 2—10 und den dazugehörigen Figuren 2 bis 10 folgen eine Anzahl weiterer Himmelshelligkeitsmessungen. Berechnungen und Formkonstruktionen für verschiedene Sonnenhöhen. Es sind jedesmal die Halbierungswerte der Gewölbe-

Tabelle 2.

Datum		H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
22. Juni 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 3{,}5°$ vormittags	15	1,09	1,04	1,03
	30	1,23	1,11	1,11
	45	1,61	1,27	1,27
	60	2,36	1,54	1,58
	75	3,34	1,83	1,95
	85	6,05	2,46	2,36

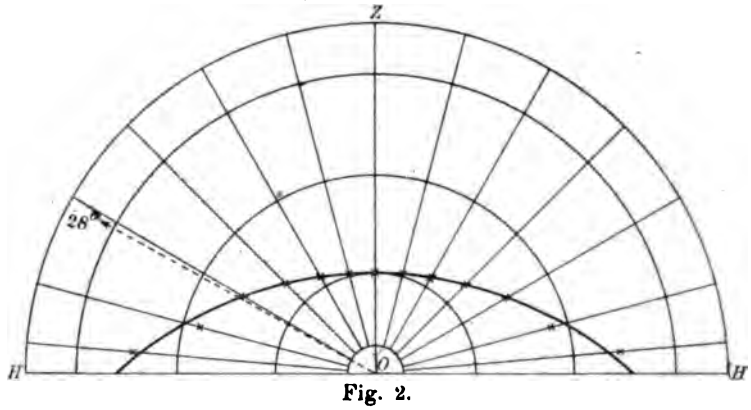


Fig. 2.

Tabelle 3.

Datum		H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
22. Juni 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 22{,}7°$ nachmittags	15	1,00	1,00	1,02
	30	1,08	1,04	1,10
	45	1,54	1,24	1,28
	60	2,01	1,42	1,45
	75	3,21	1,79	1,78
	80	3,92	1,98	1,92

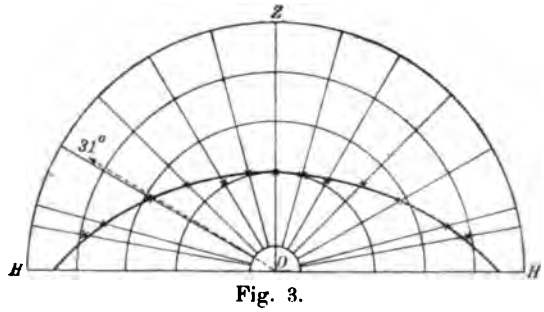


Fig. 3.

Tabelle 4.

Datum		H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
28. Juni 1916	0°	1,00	1,00	1,00
φ = 20,0° vormittags	15	1,08	1,04	1,02
	30	1,21	1,10	1,09
	45	1,54	1,24	1,22
	60	2,04	1,43	1,42
	75	3,02	1,74	1,78
	80	4,22	2,05	1,85

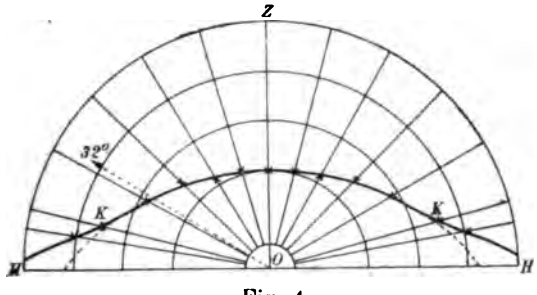


Fig. 4.

Tabelle 5.

Datum		H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
1. Juli 1916	0°	1.00	1,00	1,00
φ = 22,0° nachmittags	15	0,91	0,95	1,02
	30	1,10	1,05	1,10
	45	1,44	1,20	1,23
	60	2,20	1,48	1,45
	75	3,22	1,79	1,78
	80	5,10	2,26	1,92

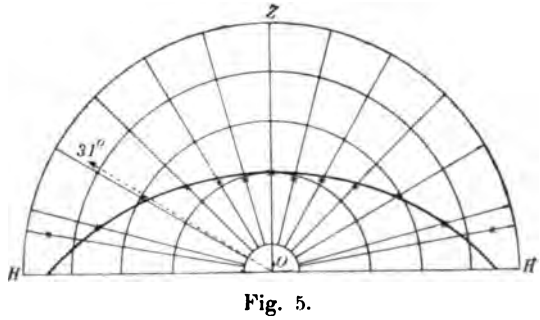


Fig. 5.

Tabelle 6.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
1. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
φ = 1,0° nachmittags	15	0,92	0,96	1,02
	30	0,92	0,96	1,10
	45	1,54	1,24	1,23
	60	2,08	1,44	1,45
	75	3,16	1,78	1,78
	80	4,28	2,07	1,92

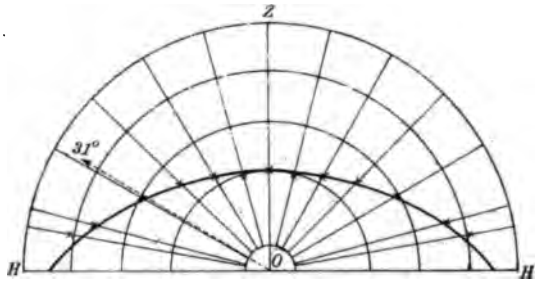


Fig. 6.

Tabelle 7.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
2. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
φ = 5,5° vormittags	15	1,01	1,00	1,02
	30	1,18	1,09	1,10
	45	1,47	1,21	1,24
	60	2,07	1,44	1,48
	75	3,45	1,86	1,84
	80	4,44	2.11	2,00

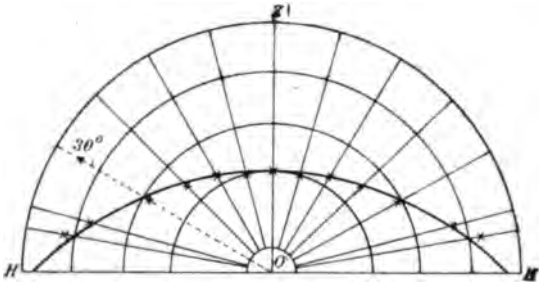


Fig. 7.

Tabelle 8.

Datum		H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
2. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 23{,}5°$ nachmittags	15	1,07	1,03	1,03
	30	1,14	1,07	1,11
	45	1,66	1,29	1,26
	60	2,10	1,45	1,51
	75	3,55	1,88	1,90
	80	5,40	2,32	2,07

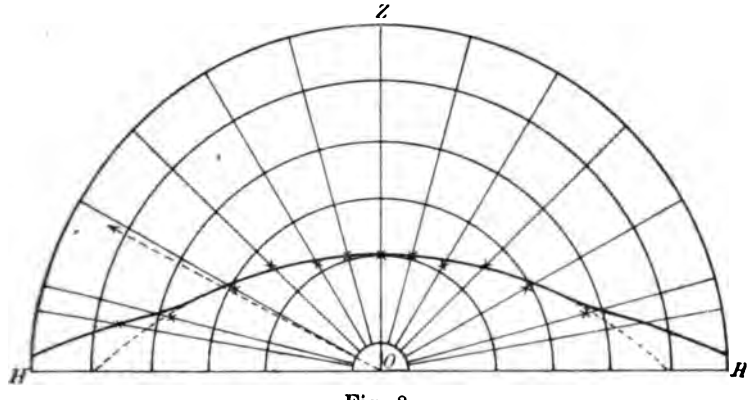


Fig. 8.

bögen angegeben, so wie sie graphisch gefunden wurden. Alle diese Winkel liegen innerhalb des Unsicherheitsbereiches unsrer früher ausgeführten Schätzungen. Den zugehörigen Berechnungen von $\sqrt{H}$ ist jedesmal der in der Figur angegebene Halbierungswert zugrunde gelegt.

§ 4.

Die Betrachtung der Figuren und der berechneten Zahlen zeigt, daß die Punkte, welche den dicht über dem Horizont gemessenen entsprechen, nicht auf der Kugelkalotte liegen. Sie liegen so, daß sie einem flacheren Gewölbe zuzugehören scheinen als die übrigen Punkte. Diese Abweichung hat uns den Schlüssel für das Verständnis von Beobachtungen gegeben, die wir oft in unserem Beobachtungsjournal bemerkt haben, für welche wir aber bis dahin trotz mancherlei Bemühungen keine Deutung hatten finden können. An vielen klaren Tagen mit mittlerer

Tabelle 9.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
2. Juli 1916	0°	1,00	1,00	1,00
$\varphi = 1{,}5°$ nachmittags	15	0,98	0,99	1,02
	30	1,28	1,13	1,10
	45	1,58	1,26	1,24
	60	2,24	1,49	1,48
	75	3,45	1,86	1,84
	80	5,40	2,32	2,00

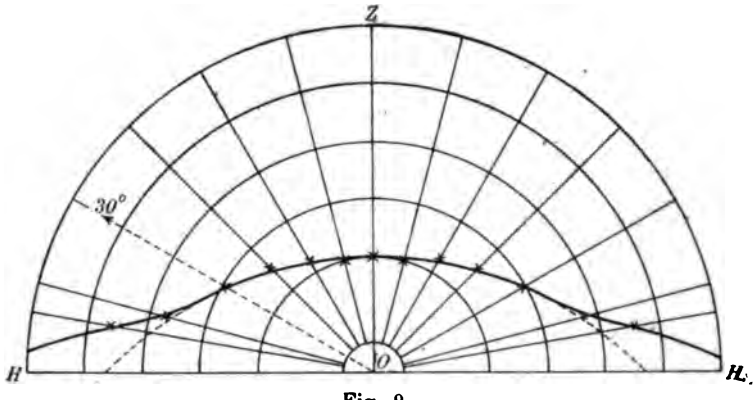


Fig. 9.

Weitsicht war es bei den Schätzungen der Halbierungswerte des Bogens Horizont-Zenit aufgefallen, daß der Himmel oft die Gestalt zeigte, wie sie besonders in den Figg. 4, 8 nnd 9 zu erkennen ist und die man mit Helmform bezeichnen kann. Einmal darauf aufmerksam geworden [1]), sieht man diese Gestalt fast täglich mehr oder weniger ausgeprägt, indem der in der Fig. 4 mit K bezeichnete Ansatz seine Höhe ändert. An wenig sichtigen Tagen und an ganz hervorragend klaren Tagen ist er nnr schwach oder gar nicht zu erkennen.

Das Auftreten der Helmform erklärt sich jetzt ungezwungen aus einem starken Anwachsen der Himmelshelligkeit nach dem Horizont hin, von etwa 75° Zenitdistanz an. Die photometrischen Messungen zeigen deutlich ein starkes An-

1) Um die Helmform zu erkennen, braucht man nur eine Himmelsstelle in etwa 45° über dem Horizont zu betrachten und dann langsam zum Horizont und wieder zurück zu blicken.

Tabelle 10.

Datum	z	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.	$\sqrt{H}$ berech.
2. Juli 1916	0°	1,00	1,06	1,00
$q = -2{,}0°$ nachmittags	15	0,92	0,96	1,02
	30	1,18	1,09	1,10
	45	1,53	1,24	1,23
	60	2,17	1,47	1,45
	75	3,20	1,79	1,78
	80	4,19	2,05	1,92

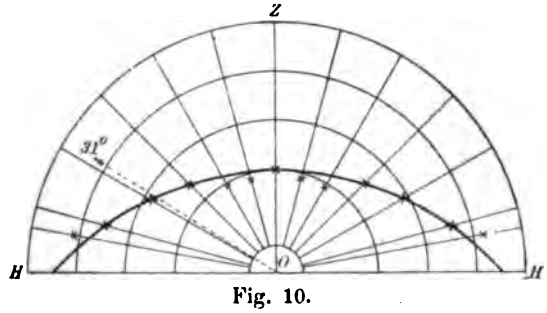


Fig. 10.

wachsen der Helligkeit des Himmels an dieser Stelle, aber auch das bloße Auge erkennt hier in den Subtropen an vielen Tagen die verhältnismäßig große Helle der dem Horizont unmittelbar anliegenden Luftschichten, bis zur Höhe von etwa 15° über dem Horizont. In der gleichen Weise wie die Helmform erklärt sich eine andere Abweichung von der normalen Himmelsform, die wohl auch schon oft bemerkt worden ist. Im Sonnenvertikal und in der Nähe der Sonne erscheint das Gewölbe nach oben hin ausgebogen, oft so stark, daß es die konvexe Seite nach der Erde zeigt. Solche Fälle sind in den Figg. 11 und 12 dargestellt und zwar nach in Güímar ausgeführten Messungen.

Daß sich diese Erscheinung für das Auge, bei dem mächtigen Anwachsen der Helligkeit nach der Sonne zu, nicht stärker ausprägt, liegt daran, daß die Lichtempfindung im Auge bei großen einfallenden Lichtintensitäten nur noch sehr langsam ansteigt, d. h. daran, daß eine Blendung eintritt. Mit Hilfe der hier in Betracht kommenden psycho-physischen Gesetze wird es nicht schwer sein, die entsprechenden Korrektionen

Tabelle 11.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.
22. Juni 1916	0°	1,00	1,00
φ = 35,0° vormittags	15	0,99	0,99
	30	0,99	0,99
	45	1,29	1,14
	60	1,70	1,30
	75	2,66	1,63

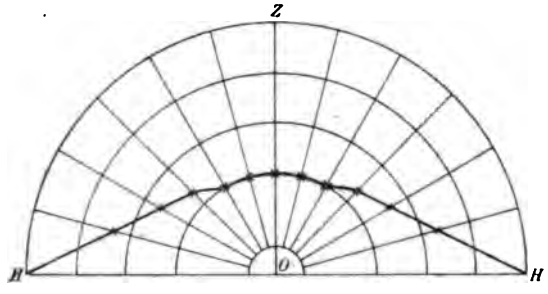


Fig. 11.

Tabelle 12.

Datum	ζ	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.
22. Juni 1916	0°	1,00	1,00
φ = 57,0° vormittags	15	0,89	0,94
	30	0,84	0,92
	45	0,86	0,93
	60	1,01	1,00
	75	1,78	1,33

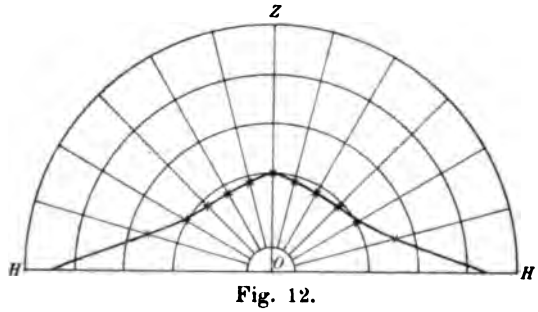


Fig. 12.

an der Gleichung (2) anzubringen, doch müssen wir aus Mangel an der einschlägigen Literatur davon absehen.

§ 5.

Um auch einen Vergleich mit an anderen Orten ausgeführten Beobachtungen zu ermöglichen, haben wir nach (2) die Quadratwurzeln der Himmelshelligkeiten aufgetragen nach Messungen, die Schramm[1]) in Kiel angestellt hat. Tab. 13 und Fig. 13 gibt die Zahlen und die Form des erhaltenen Gewölbes wieder.

Tabelle 13.

Datum	z	H beob.	$\sqrt{H}$ beob.
14. Januar 1900	0°	1,00	1,00
$\varphi = 5°$ nachmittags	30	2,40	1,55
	60	5,57	2,36
	85	9,05	3,01

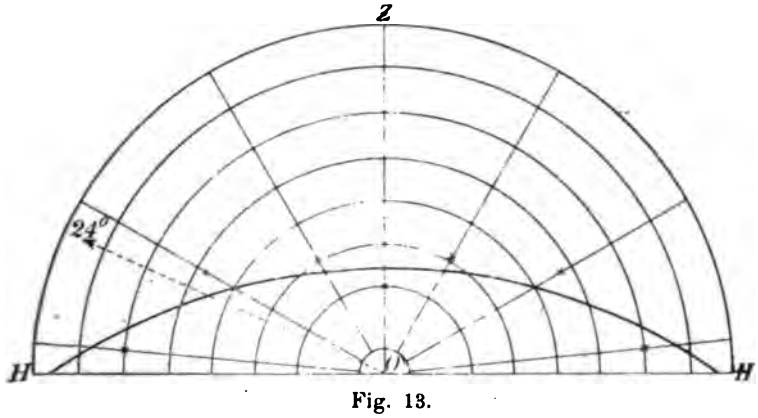


Fig. 13.

Die konstruierten Punkte liegen auch hier nahe auf einem Kreisbogen, dessen Halbierungswert rund 24° ist, in Übereinstimmung damit, daß die Reimannschen Werte der Höhe des geschätzten Halbierungspunktes für Deutschland niedriger (22°) sind als die unsrigen für Teneriffa (32°).

Eine weitere Bestätigung unserer Anschauung liefert die Chr. Wienersche Theorie der Helligkeit des klaren

1) W. Schramm, Kieler Dissertation 1901.

Tabelle 14.

	ζ	H der Theorie	$\sqrt{H}$ der Theorie	$\sqrt{H} \cdot 22{,}3$
$\varphi = 0°$	0°	0,00202	0,0449	1,00
	15	0,00226	0,0474	1,06
	30	0,00319	0,0564	1,26
	45	0,00420	0,0647	1,44
	60	0,00522	0,0722	1,61
	75	0,00682	0,0826	1,84
	90	0,01139	0,1067	2,39

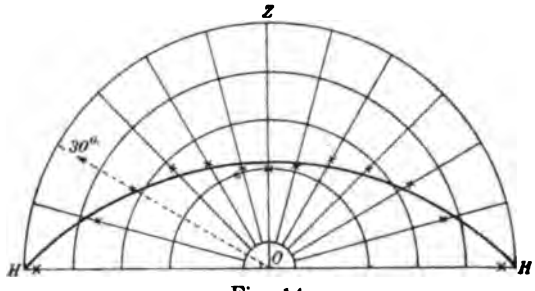


Fig. 14.

Tabelle 15.

	ζ	H der Theorie	$\sqrt{H}$ der Theorie	$\sqrt{H} \cdot 5{,}6$
$\varphi = 35°16'$	0°	0,03165	0,178	1,00
	15	0,03154	0,177	0,99
	30	0,03056	0,175	0,98
	45	0,02902	0,170	0,95
	60	0,03100	0,176	0,99
	75	0,04024	0,201	1,13
	90	0,06697	0,259	1,45

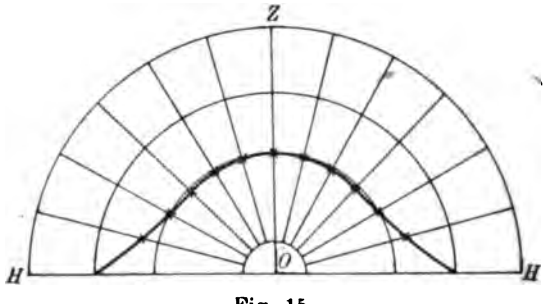


Fig. 15.

Himmels.[1]) Unter Berücksichtigung der direkten Sonnenstrahlung, der Zerstreuung des Lichts durch Beugung, Brechung und Reflexion an Wassertröpfchen, Eiskristallen und Staubteilchen, Reflexion durch den Erdboden und der Rayleighschen Diffusion durch die Luftmolekeln gelangt Wiener für die Helligkeit des Himmels an einer bestimmten Stelle für beliebige Sonnenstände zu exakten Zahlen. In der vorstehenden Tabelle und Fig. 14 haben wir aus Wieners Zahlen mit Hilfe von Gleichung (2) das Gewölbe konstruiert. Es ist mit großer Annäherung eine Kugelkalotte mit einem Halbierungswert des Bogens HZ von etwa 30°.

Für einen höheren Sonnenstand ($\varphi = 35°16'$) folgt aus den Wienerschen Zahlen (siehe Tab. und Fig. 15) die Helmform des Himmelsgewölbes, gerade so wie sie die nach den photometrischen Messungen konstruierten Gewölbe und vielfache Skizzen unsres Beobachtungsjournals zeigen.

Nach dem Obigen genügt, besonders bei niederen Sonnenständen eine einzige Schätzung des Halbierungswertes des Bogens Horizont-Zenit, um die Verteilung der Himmelshelligkeit in größerem Azimut vom Sonnenvertikal darzustellen. Für höhere Sonnenstände würde die im 3. Bericht geübte Unterteilung in Drittel und Viertel des Bogens Horizont-Zenit bei der Schätzung weiterhelfen.

§ 6.

Mit Hilfe der gleichzeitigen Verfolgung einer großen Anzahl gleichartiger Pilotballons mit dem Auge ließe sich in direkter Weise die Form des Himmels festlegen unter der Voraussetzung, daß die Entfernung Auge-Ballon im Augenblick des Verschwindens mit der kritischen Sichtweite identisch ist. Vom meteorologischen Observatorium auf Teneriffa wird seit einer Reihe von Jahren regelmäßig der Flug von Pilotballons beobachtet. Die im Jahre 1912 erreichten größten Höhen derselben waren am 13. Juni 21000 m und am 10. Juli 28400 m.[2])

1) Chr. Wiener, Abhandlungen d. K. Leopold.-Carol. Akad. d. Naturf. Nova Acta 73. Nr. 1. 1896: 91, Nr. 2. 1909

2) Diese Zahlen sind dem Anuario del Observatorio Central Meteorológico zu Madrid (Supl. zum 1. Bd. 1916) entnommen, das wir der Freundlichkeit seines Direktors Sr. D. José Galbis Rodríguez verdanken.

Im ersten Falle war der Ballon vom Auge in direkter Verbindungslinie 39,5 km entfernt und verschwand in einer Höhe von 37° 23,5′ über dem Horizont. Im zweiten Falle war die Entfernung 36,7 km bei einer Höhe von 50° 45,3′.

Die Entfernungen 39,5 km und 36,7 km entsprechen der Strecke ON (Fig. 1a). Ist das sichtbare Himmelsgewölbe eine Kugelkalotte und läßt es sich auf diese Weise mit Pilotballons abtasten, so muß die aus diesen Zahlen berechnete horizontale Sichtweite OH mit der auf Teneriffa im Sommer herrschenden übereinstimmen. Die horizontale Sichtweite schwankt hier zwischen 50 und 100 km; für einen Sommertag mit mittlerer Sichtigkeit ist sie rund 70 km. Aus den Entwicklungen des § 3 sieht man leicht, daß

$$OH = ON \cdot \frac{\cos \varphi_k \cdot \sin 2\psi}{\sin \psi_k} .$$

Hieraus rechnet sich unter Zugrundelegung eines Halbierungswertes für das Himmelsgewölbe von $\varphi = 32°$ ($\psi = 25° 3{,}5'$) für $ON = 39{,}5$ km eine horizontale Sichtweite $OH = 64{,}4$ km und für $ON = 36{,}7$ km eine solche von 67,5 km; in guter Übereinstimmung mit der horizontalen Sichtweite eines mittleren Sommertages.

§ 7.

Für eine gleichmäßig helle, den Beobachter vollständig umgebende Lufthülle folgt aus Gleichung (2), daß die maximale Schichtweite nach allen Richtungen darin gleich groß ist. d. h. daß ein Gewölbe gesehen wird mit einem Halbierungswert von 45°. Ist die Helligkeit am Horizont größer als in den übrigen Teilen, so ergibt sich ein Halbierungswert $< 45°$, ist der Horizont dunkler als das Übrige, so ist der Halbierungswert $> 45°$.

Wir haben diese Folgerungen einer direkten Prüfung innerhalb einer homogenen, hellen Nebelschicht unterzogen. In der folgenden Tab. 16 sind die Resultate chronologisch aufgeführt so wie sie sich bei einer Wanderung in einer Wolkenschicht ergeben haben.

Aus den Zahlen dieser Tabelle ist deutlich zu erkennen, wie sich das flache Gewölbe — mit kleinem Halbierungs-

Tabelle 16.

Beobachtungen im hellen Nebel.

Nr.	Tageszeit	Höhe ü. d. Meere	Halbierungswerte D.	Mittel	U.	Mittel	Gemeinsame Mittel	Bemerkungen
	20. 5. 1917							Oberhalb Güímars
1	8h 10 v.	508 m	24,0°		25,7°		24,85°	Am unteren Rand der Wolke.
2	8h 25	544	36,0		38,0			
			37,0	36,5	37,0	37,5	37,0	Vornan im Nebel.
3	8h 38	617	40,2		42,0			
			39,0		43,0			
			42,5	40,2	45,0	43,6	41,9	
4	9h 10	685	42,0		41,0			Ganz im hell. Nebel.
			45,1		41,2			
			39,2	41,75	40,7	40,95	41,35	
5	9h 30	741	46,8		45,8			Tiefer im Nebel.
			42,0		42,3			Windstill.
			40,5		41,2			
			44,5		45,8			
			46,0		50,0	44,9	44,4	
			44,0	43,9				
	–				38,0			Nach der helleren Sonnenseite beob.
6	10h 6	790	43,8		49,8			Auf horizontal. Stelle nach der Richtung eines Bergrückens gesehen. Oben etwas hell. als unten. Improvisiert. Diaphanometerversuch ergibt als Sichtweite 35 m.
			49,0		45,1			
			40,0		46,5			
			42,5		47,2			
			44,0	43,9	44,2	46,6	45,25	
7			41,0					Nach der Sonnenseite gemessen.
8	10h 45	684	40,4		44,4			
			40,8		40,7			
			37,0		43,0			
			39,0		42,5	42,65	41,5	Nach der helleren Meeresseite beob.
			44,8	40,4				
9		684	46,0		48,2			Nach der Landseite gemessen, wo der untere Teil des Nebels dunkler war, als oben.
			47,4		47,0			
			44,8	46,1	43,8	46,3	46,2	
10		684	$^3/_4$ Wert = 70,0°					

wert — unterhalb des Nebels, wo noch der helle klare Himmel den Horizont bildet, in das höhere im Innern des Nebels umwandelt. Bei dem Augenschein nach gleichmäßiger Helligkeit des Nebels (Nr. 5 der Tabelle) ist der Halbierungswert nahezu 45°. In den Fällen, wo der obere Teil heller war als der untere (Nr. 6 und 9) ist die Sichtweite nach oben größer als in der horizontalen oder einer dieser Richtung nahen gewesen. Der unter Nr. 10 angeführte Wert für die Höhe des als $^3/_4$ des Bogens geschätzten Punktes liegt, der oberen Helligkeit entsprechend, zu hoch, statt bei 67,5° der Halbkugel bei 70°.

Da selbst der sternenklare Nachthimmel am Horizont eine etwas größere Helligkeit als im Zenit besitzt, so folgt auch für ihn eine entsprechende geringe Abweichung von der Halbkugelform und es erklärt sich so der von uns in dem vorangehenden Bericht angegebene Halbierungswert von 42,9° statt 45° für den klaren Nachthimmel.

Welchen Einfluß die horizontale und zenitale Helligkeit auf die Wölbung des Himmels haben, davon haben wir uns durch die folgenden Versuche überzeugt, die gleichzeitig einen Beweis bringen, daß die Resultate der im hellen Nebel ausgeführten Beobachtungen auf die Atmosphäre übertragen werden dürfen.

Blickt man den Himmel durch eine dunkelblaue Glasscheibe genügender Größe an — wir benutzten zu dem Zwecke eine kobaltblaue Scheibe von 45×52 cm² —, so werden die großen Helligkeitsunterschiede ausgeglichen. Die unteren atmosphärischen Schichten, welche überwiegend langwellige Strahlen aussenden, die teilweise von dem blauen Glase absorbiert werden, erscheinen dunkler als vorher und in ihrem Helligkeitsgrade von der zenitalen Helligkeit wenig verschieden. Wie es nach dem Vorangehenden zu erwarten war, ergaben die durch die blaue Glasscheibe hindurch ausgeführten Versuche daher erhöhte Halbierungswerte. In Tab. 17 sind zwei Beobachtungsreihen angeführt.

Ein genügend großes, rotes Glas stand uns leider nicht zur Verfügung, doch zeigten schon durch eine kleine (9×12 cm²) Scheibe ausgeführte Schätzungen, daß der Himmel infolge der großen Dunkelheit im Zenit und dagegen auffallender Helle der Horizontschichten eine sehr flachgewölbte Gestalt besaß.

Tabelle 17.

Halbierungshöhen durch eine blaue Scheibe hindurch.

Blaues Glas	Mittel	Ohne Glas	Mittel	Beobachter und Datum
40,0°		30,0°		D.
41,5		31,0		19. 6. 1917
36,3		33,0		
38,8		32,8		
40,6	39,3°		31,7°	
38,0°		30,0°		U.
42,0		30,5		22. 6. 1917
38,5	39,5°	32,0	30,8°	

Es ergaben sich Halbierungswerte von 24,3°; 25,0°; 25,0°; 24,0°.

§ 8. **Resultate.**

1. Die sichtbare Form des Himmelsgewölbes wird bedingt durch die in verschiedenen Richtungen verschiedene kritische oder maximale Sichtweite und nicht durch physiologische oder psychologische Ursachen.

2. Zwischen den Sichtweiten und den Himmelshelligkeiten besteht eine einfache Beziehung, die es ermöglicht, die Himmelsform mit Hilfe photometrischer Helligkeitsmessungen geometrisch darzustellen.

Die Möglichkeit der Durchführung dieser Untersuchung verdanken wir Mitteln, welche die kartellierten Deutschen Akademien, sowie die Solvaystiftung zur Verfügung gestellt haben.

Güímar auf Teneriffa, Juni 1917.

(Eingegangen 23. Februar 1919.)

2. *Versuch zu einer Erweiterung der Planckschen Theorie der verdünnten Lösungen;* *von P. Boedke.*

Planck weist in seinen „Vorlesungen über Thermodynamik“ [1]) darauf hin, daß die weitere Auswertung der von ihm für die fundamentalen thermodynamischen Funktionen angegebenen Reihenentwicklungen ein gangbarer Weg sein dürfte, um zu einer rationellen thermodynamischen Theorie von Lösungen beliebiger Konzentration zu gelangen. Seit das Problem von Planck gestellt wurde, hat wohl zuerst und auch allein H. Jahn versucht, die mathematische Theorie der Lösungen in der angedeuteten Richtung auszubauen.[2]) Während die Plancksche Theorie der ideal verdünnten Lösungen in den erwähnten Reihenentwicklungen nur die Glieder der ersten Ordnung berücksichtigt, untersuchte Jahn den Einfluß der Glieder der zweiten Ordnung. Wenn nun auch durch die so erhaltenen erweiterten Ansätze ein näherer Anschluß der Theorie an die vorliegenden Versuchsdaten erreicht wird, so bleiben die Jahnschen Ergebnisse doch insofern unbefriedigend, als gewisse charakteristische Erscheinungen in höher konzentrierten Lösungen auch durch sie immer noch nicht und zwar nicht einmal andeutungsweise dargestellt werden. Wie nun die Hauptbedeutung der Van der Waalsschen Gleichung einer einheitlichen Flüssigkeit nicht etwa in der damit erzielten zahlenmäßigen Übereinstimmung von Theorie und Versuch liegt — diese ist bekanntlich sogar verhältnismäßig wenig befriedigend —, sondern vielmehr darin zu suchen ist, daß die Verdampfungserscheinungen und der kritische Zustand in ihr eine qualitativ zutreffende Darstellung finden, so erscheint auch in der Theorie der Lösungen ein Ansatz als das zunächst erstrebenswerte Ziel, aus dem sich

1) 3. Auflage, Leipzig 1911, § 252.
2) Zeitschr. f. phys. Chemie **41**. S. 257. 1902.

das charakteristische Verhalten hoch konzentrierter Lösungen, wenn auch vorläufig rein qualitativ ableiten läßt.

Da die Jahnschen Rechnungen nicht zu dem gewünschten Ergebnis führten, so müßte man in konsequenter Fortsetzung des einmal eingeschlagenen Weges nunmehr den Einfluß der Reihenglieder von der dritten Ordnung untersuchen. Die betreffenden Rechnungen gestalten sich jedoch überaus langwierig und scheinen jedenfalls nicht in einfacher Weise übersichtliche Resultate zu ergeben. Im folgenden wird deshalb versucht, in anderer Weise an die Planckschen Gesetze ideal verdünnter Lösungen anzuknüpfen.

In der Tat läßt sich eine Funktion aus ihrer Reihenentwicklung zwar einerseits mit um so größerer Genauigkeit bestimmen, je mehr Reihenglieder man berücksichtigt. Andererseits kann man aber auch durch passende Wahl des Arguments, nach dem man die Funktion entwickelt, häufig eine stärkere Konvergenz der Reihe erzielen und dadurch unter Berücksichtigung einer gleichen Anzahl von Reihengliedern wie vorher einen besseren Anschluß an die wahren Funktionswerte erreichen. Im folgenden wird deshalb versucht, die Reihenentwicklungen der thermodynamischen Funktionen nach einem anderen Argument als dem von Jahn gewählten vorzunehmen und auf diese Weise infolge gegebenenfalls besserer Konvergenz der Reihen immer noch allein mit den Gliedern der zweiten Ordnung auszukommen.

Ein Urteil darüber, ob ein Argument zweckmäßiger als ein anderes ist, kann man in dem hier vorliegenden Falle naturgemäß nur aus dem Umfange gewinnen, in welchem die erhaltenen Ansätze die charakteristischen Eigenschaften der Lösungen darstellen. Zur Prüfung dieses Geltungsbereiches wählen wir zunächst ein ganz spezielles, möglichst leicht zu übersehendes Beispiel; es wird im folgenden allein versucht, an der Hand der vorgenommenen Reihenentwicklungen die Erscheinungen der Sättigung und der kritischen Löslichkeit in binären flüssigen Gemischen, wie sie vor allem von Rothmund[1]) systematisch beobachtet worden sind, abzuleiten. In der Tat sind diese Erscheinungen für unseren Zweck besonders geeignet; denn sie spielen sich wesentlich nur in Gebieten

1) Zeitschr. f. phys. Chemie **26**. S. 433. 1898.

höherer Konzentration ab und sind, wie im folgenden gezeigt wird, weder mit Hilfe der Planckschen Gleichungen für ideal verdünnte Lösungen, noch auch mit Hilfe der erweiterten Jahnschen Gleichungen darstellbar. Die Planck-Jahnschen Gleichungen ergeben zwar eine Formulierung der Zustandsänderungen in den beiderseits hochverdünnten Gebieten solcher Gemische, gestatten aber nicht, an der Hand einer und derselben Gleichung die Erscheinungen, wie sie sich bei allmählicher Änderung der Konzentration zwischen den beiden Grenzgebieten abspielen, stetig zu verfolgen. Dies scheint nun mit Hilfe der im folgenden angegebenen Entwicklungen möglich zu sein. Ob danach den neuen Ansätzen eine tiefer liegende Bedeutung beigemessen werden kann, müssen allerdings erst noch weitergehende Untersuchungen entscheiden, auf die in dieser Mitteilung noch nicht eingegangen wird.

1. Über die Reihenentwicklungen der Planckschen Φ-Funktion.

Betrachten wir eine zunächst als verdünnt anzusehende Lösung, deren Zustand durch den Druck p, die Temperatur T und die Massen $m_0, m_1, m_2, \ldots$ der einzelnen Bestandteile bzw. durch deren Molekülzahlen $n_0, n_1, n_2, \ldots$ bestimmt ist. Es sei R die absolute Gaskonstante, $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ seien die bezüglichen Molekulargewichte, m sei die Gesamtmasse, n die Summe der Molekülzahlen, $c_0, c_1, c_2, \ldots$ seien die molekularen, $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots$ die molaren Konzentrationen, also z. B. sei

$$c_0 = \frac{n_0}{n}, \qquad \bar{c}_0 = \frac{m_0}{m}.$$

Überhaupt seien durchgängig die bei Benutzung der Massen an Stelle der Molekülzahlen einzuführenden Größen überstrichen. Bezieht sich der Index 0 auf das Lösungsmittel, so sind die Größen $m_1, m_2, n_1, n_2, c_1, c_2, \bar{c}_1, \bar{c}_1$ usw. sämtlich klein gegen die bezüglichen Größen mit dem Index 0.

Wir vergleichen unter diesen Voraussetzungen die vier Entwicklungen der Planckschen Φ-Funktion

$$(1) \qquad \Phi = -R\sum n_0 \log c_0 + n_0 \mathfrak{P}\left(\frac{n_1}{n_0}, \frac{n_2}{n_0}, \ldots\right),$$

$$(2) \qquad \Phi = -R\sum n_0 \log c_0 + n\,\mathfrak{Q}(c_1, c_2, \ldots),$$

$$(3) \qquad \Phi = -\sum r_0 m_0 \log \bar{c}_0 + m_0 \bar{\mathfrak{P}}\left(\frac{m_1}{m_0}, \frac{m_2}{m_0}, \ldots\right),$$

$$(4) \qquad \Phi = -\sum r_0 m_0 \log \bar{c}_0 + m\,\bar{\mathfrak{Q}}(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots).$$

Darin bedeuten $r_0, r_1, r_2 \ldots$ Konstante, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sind Potenzreihen der angegebenen Argumente, deren Koeffizienten durch q mit gehöriger Indizierung bezeichnet seien.

Die Entwicklung (1) ist von Planck angegeben worden. Unter Berücksichtigung von Gliedern nur der ersten Ordnung erhält man den Ansatz

$$\Phi = n_0(\varphi_0 - R\log c_0) + n_1(\varphi_1 - R\log c_1) + n_2(\varphi_2 - R\log c_2)\ldots,$$

auf dem sich die Plancksche Theorie der ideal verdünnten Lösungen aufbaut. Nimmt man noch die Glieder zweiter Ordnung mit hinzu, so erhält man die Ausgangsgleichung für die Jahnschen Rechnungen, die z. B. für eine binäre Lösung die Form hat

$$\Phi = n_0(\varphi_0 - R\log c_0) + n_1(\varphi_1 - R\log c_1) + \frac{n_1^2}{n_0}\varphi_{11}.$$

Die Entwicklungen (2), (3), (4) folgen am einfachsten durch Umformung von (1). Ersetzt man mit Hilfe der Beziehung

$$n_0 = n\,[1 - (c_1 + c_2 + c_3 + \ldots)]$$

die Molekülzahl des Lösungsmittels durchweg durch die Gesamtzahl n der Moleküle und entwickelt danach alle Glieder nach Potenzen von $c_1, c_2, \ldots$, so erhält man (2). Die dritte Form der Entwicklung ergibt sich aus (1), wenn man überall statt der molekularen Größen die molaren einführt und danach nach den Potenzen von $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots$ entwickelt. Aus (3) folgt schließlich (4) auf die gleiche Weise wie (2) aus (1). Zwischen den Koeffizienten der Entwicklungen bestehen natürlich Beziehungen; so ist vor allem

$$R = r_1\mu_1 = r_2\mu_2 = \ldots \text{ usw.} \tag{5}$$

Über die Konvergenz der Reihen läßt sich von vornherein nichts aussagen. Es ist möglich, daß sie in allen Konzentrationsgebieten Gültigkeit haben oder nur in gewissen beschränkten Bereichen anwendbar sind. Im letzten Falle würde es unmöglich sein, die Erscheinungen, wie sie sich bei fortgesetzter Erhöhung der Konzentration irgendeines Bestandteils in einer zunächst verdünnten Lösung zeigen, stetig an der Hand einer dieser Potenzentwicklungen zu verfolgen. Für unsere Betrachtungen im folgenden müssen wir deshalb ausdrücklich zweierlei voraussetzen: Einerseits soll sich der Konvergenzbereich der benutzten Reihen bis in das Gebiet höherer

Konzentrationen hineinerstrecken, zweitens soll die Konvergenz eine derartig schnelle sein, daß eine wenigstens qualitativ zutreffende Beurteilung der Erscheinungen schon bei Berücksichtigung der Glieder bis zur zweiten Ordnung möglich ist. Ob diese Voraussetzungen zulässig sind, kann natürlich nur der Vergleich mit der Erfahrung entscheiden.

Jedenfalls scheinen die Entwicklungen (2). (4) diesen Annahmen mehr zu entsprechen als (1). (3). Wird nämlich z. B. in einem binären Gemisch durch ständig verstärkte Konzentration des gelösten Stoffes allmählich die andererseits verdünnte Lösung hergestellt. so steigt gleichzeitig das Argument n_1/n_0 bzw. m_1/m_0 der Entwicklungen (1), (3) zu unendlich an. Gesetzt selbst den Fall. daß die Entwicklungen in diesem Grenzgebiet noch konvergierten, so kann man dann doch nicht mehr die Funktion durch die beiden ersten Reihenglieder approximieren. Sonach ist es z. B. ausgeschlossen, an der Hand des Jahnschen Ansatzes das Gesamtgebiet aller Konzentrationen zu überblicken. Bei den Entwicklungen (2), (4) werden die Argumente in dem betrachteten Grenzfall nahezu gleich 1: die Verhältnisse liegen hier für das Vordringen der Theorie in Gebiete höherer Konzentrationen also ungleich günstiger.

Die Entwicklungen (3). (4) sind überall da von Bedeutung, wo es sich um Anwendung der Theorie auf Beobachtungen mit molaren Konzentrationen handelt. Allerdings kann man auch in solchen Fällen von den molekularen Ansätzen ausgehen und die aus diesen entwickelten Ergebnisse dann auf die molare Form bringen. Da die Vernachlässigungen, die man auf dem einen und dem anderen Wege begeht, verschieden sind, so fallen auch die Ergebnisse verschieden aus. Welcher von beiden Wegen einen besseren Anschluß an die vorliegenden Versuchsdaten ergibt, das kann natürlich auch erst wieder hinterher entschieden werden. Jedenfalls müssen wir uns für Anwendungen auf solche molaren Beobachtungen zunächst beide Möglichkeiten offen halten.

Der ursprüngliche Planecksche Ansatz (1) wird bekanntlich durch Vergleichung mit Entwicklungen gewonnen, die für die in den idealen Gaszustand übergeführte Lösung gelten. Dieser Vergleich ist bei den Entwicklungen (3). (4) nicht mehr unmittelbar durchführbar, da bei der Einführung der molaren

Konzentrationen das logarithmische Glied zum Teil in die Potenzreihen eingeht. Das kann aber natürlich nicht als ein Grund gegen den Gebrauch dieser beiden Ansätze geltend gemacht werden; denn bei passender Umordnung der Glieder in diesen Entwicklungen oder der bezüglichen Glieder in den Gesetzen für den idealen Gaszustand läßt sich der Vergleich wieder vornehmen.

Für den weiteren Gebrauch stellen wir die vier auf Glieder zweiter Ordnung abgekürzten Entwicklungen für binäre Gemische zusammen.

$$(6)\quad \Phi = n_0(\varphi_0 - R\log c_0) + n_1(\varphi_1 - R\log c_1) + \frac{n_1^2}{n_0}\varphi_{11},$$

$$(7)\quad \Phi = n_0(\varphi_0 - R\log c_0) + n_1(\varphi_1 - R\log c_1) + \frac{n_1^2}{n}\varphi_{11},$$

$$(8)\quad \Phi = m_0(\bar{\varphi}_0 - r_0\log \bar{c}_0) + m_1(\varphi_1 - r_1\log \bar{c}_1) + \frac{m_1^2}{m_0}\bar{\varphi}_{11},$$

$$(9)\quad \Phi = m_0(\bar{\varphi}_0 - r_0\log \bar{c}_0) + m_1(\varphi_1 - r_1\log \bar{c}_1) + \frac{m_1^2}{m}\bar{\varphi}_{11},$$

Der geringfügige Unterschied in den quadratischen Zusatzgliedern von (7), (9) gegenüber denen in (6), (8) bewirkt, daß diese Ansätze, wie im folgenden gezeigt werden soll, für höhere Konzentrationen brauchbar werden.

2. Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für ein binäres Gemisch.

Die Bedingungen für das stabile Gleichgewicht eines aus α unabhängigen Bestandteilen bestehenden Systems gegen Zustandsänderungen, bei denen Druck, Temperatur und die Gesamtmassen aller α Bestandteile ungeändert bleiben, lauten nach Planck

$$\delta\Phi = 0, \qquad \delta^2\Phi < 0.$$

Hierin führen wir die spezifischen Werte φ', φ'' usw. der Potentialfunktion Φ in den einzelnen Phasen und die Konzentrationen c ein. Um nur mit unabhängigen Variablen zu operieren, denken wir uns eines der c, etwa c_a, durch die übrigen ersetzt; ferner sei noch zur Abkürzung

$$f_\nu = \frac{d\varphi}{dc_\nu} = \frac{\partial\varphi}{\partial c_\nu} - \frac{\partial\varphi}{\partial c_a}.$$

Für die Erscheinungen der gegenseitigen Löslichkeit lassen sich dann die obigen Gleichgewichtsbedingungen in der Form aussprechen: In allen Phasen besitzen gleiche Werte

(10) 1. jede der Größen $f_1, f_2, \ldots f_{a-1}$,

(11) 2. die Größen $q - c_1 f_1 - c_2 f_2 - \ldots c_{a-1} f_{a-1}$

und zwar gelten diese Bedingungen, wenn noch vorausgesetzt wird, daß das Molekulargewicht jedes Bestandteils in allen Phasen das gleiche ist, sowohl für die molare als auch für die molekulare Form der Gleichungen, d. h. für die ungestrichenen Größen ebenso wie für die überstrichenen.

Die hieraus abzuleitenden Bedingungen für die Erscheinungen der Sättigung und der kritischen Löslichkeit binärer Gemische lassen sich in einer Form hinschreiben, in der sie vollkommene Analogie mit gewissen aus der Theorie der Zustandsgleichung einer einheitlichen Substanz bekannten Gesetzmäßigkeiten zeigen. Wird bei der von jetzt ab allein auftretenden Größe f_1 der Einfachheit halber der Index fortgelassen, so gelten folgende Sätze:

1. In beiden Phasen eines binären flüssigen Systems ist

(12) $$\frac{df}{dc_1} < 0 .$$

2. Die Größe f hat in beiden Phasen den gleichen Wert

(13) $$f' = f'' .$$

Für f' und f'' wird deshalb einfach f geschrieben.

3. Analog zum Maxwell-Clausiusschen Satze bei der Zustandsgleichung ist

(14) $$\int_{c_1''}^{c_1'} f \, dc_1 = q' - q'' = f(c_1' - c_1'') .$$

4. Der kritische Lösungspunkt wird bestimmt durch

(15) $$\frac{\partial f}{\partial c_1} = 0 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial c_1^2} = 0 .$$

Die Differentiationen und Integrationen sind hierbei bei konstant gehaltenen Werten des Drucks und der Temperatur vorzunehmen.

Die Größen f, c_1, T spielen hier sonach bezüglich genau die gleiche Rolle, wie der Druck p, das Volumen v und die Temperatur T in der Theorie der Zustandsgleichung. Wie nun bekanntlich die Zustandsgleichung in übersichtlicher Weise durch die graphische Darstellung der Isothermen in einem p, v-Diagramm versinnlicht wird, so werden sich demnach in ganz ähnlicher Weise die Eigenschaften binärer Ge-

mische durch Zeichnung der Isothermen in einem f, c_1-Diagramm geometrisch interpretieren lassen. Das von uns zu lösende Problem kann dann in rein geometrischer Form so ausgesprochen werden: Es ist das spezielle Isothermensystem zu suchen, das als Träger der angegebenen Eigenschaften geeignet ist und in der Grenze die bekannten Eigenschaften der ideal verdünnten Lösungen ergibt. Ein solches Isothermensystem müßte den kritischen Punkt als singulären Punkt enthalten, auf der einen und nur der einen Seite der durch diesen Punkt hindurchgehenden Isotherme Maxima und Minima zeigen und in dem Grenzgebiet idealer Verdünnung in die durch die Plancksche Näherung bestimmten Isothermen übergehen. Im folgenden Abschnitt werden deshalb zunächst die Planckschen Isothermen besprochen, dann wird gezeigt, daß die aus dem Jahnschen Ansatz entspringenden Isothermen keinen geeigneten Träger bilden, während die Ansätze (7), (9) zu Isothermen führen, die alle nötigen Eigenschaften haben, und (9) zudem noch quantitativen Anschluß an die vorliegenden Versuchsergebnisse zeigt.

3. Anwendungen.

Aus (6), (7), (8), (9) leiten wir zunächst die auf die Einheit der Molekülzahl bzw. der Masse bezogenen Werte φ der Funktion Φ und die daraus abgeleiteten Größen her. Der Einfachheit halber schreiben wir nur die molare Form der Gleichungen hin und unterdrücken dabei die Überstreichung; eine Verwechslung der beiden Gleichungsformen erscheint ausgeschlossen, da die molare Form an den Größen r_0, r_1 kenntlich bleibt, die für die molekulare Form beide gleich R werden. Es wird für

	Jahns Ansatz:	Ansatz (7), (9):
(16)	$\varphi = c_0 \varphi_0 - r_0 \log c_0 + c_1 \varphi_1 - r_1 \log c_1 + \frac{c_1^2}{c_0} \varphi_{11}$.	$\varphi = c_0 \varphi_0 - r_0 \log c_0 + c_1 (\varphi_1 - r_1 \log c_1) + c_1^2 \varphi_{11}$.
(17)	$f = (r_0 - \varphi_0 - r_1 + \varphi_1 - \varphi_{11}) + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + \frac{\varphi_{11}}{c_0} c_1$.	$f = (r_0 - \varphi_0 - r_1 + \varphi_1) + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 + 2 c_1 \varphi_{11}$.
(18)	$\frac{df}{dc_1} = -\frac{r_0}{c_0} - \frac{r_1}{c_1} + \frac{2\varphi_{11}}{c_0} c_1$.	$\frac{df}{dc_1} = -\frac{r_0}{c_0} - \frac{r_1}{c_1} + 2\varphi_{11}$.
(19)	$\frac{d^2 f}{dc_1^2} = -\frac{r_1}{c_1^2} - \frac{r_1}{c_1^2} - \frac{2\varphi_{11}}{c_0}$;	$\frac{d^2 f}{dc_1^2} = -\frac{r_0}{c_0^2} - \frac{r_1}{c_1^2}$.

I. *Die Planckschen Isothermen.* Die durch $\varphi_{11} = 0$ aus allen Ansätzen gleichmäßig folgende Gleichung der Isothermen für ideal verdünnte Lösungen ist

$$f = f_{01} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 . \tag{20}$$

Dabei faßt die Größe

$$f_{01} = r_0 - \varphi_0^0 - r_1 + \varphi_1^0$$

die allein von Druck[1]) und Temperatur abhängigen Glieder zusammen, worin der an die Größen φ herangefügte obere Index andeutet, von welchem Stoff bei Herleitung des Ansatzes als Lösungsmittel ausgegangen wurde. Aus (15), (18), (19) ergibt sich für den kritischen Punkt

$$\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1} = 0 , \quad \frac{r_0}{c_0^2} - \frac{r_0}{c_1^2} = 0 .$$

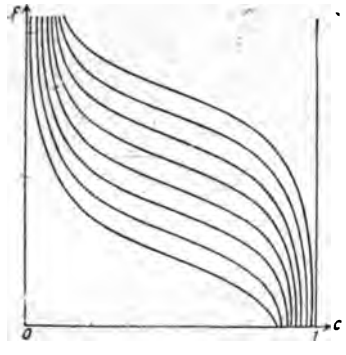


Fig. 1.

Da die erste dieser beiden Gleichungen mit der zweiten und zudem mit den Bedingungen

$$c_0 + c_1 = 1 ,$$
$$0 < c_0, c_1 < 1$$

unverträglich ist, so enthält der Plancksche Ansatz den kritischen Punkt nicht. In der Tat bestehen die Isothermen aus lauter kongruenten, nur in der Richtung der f-Achse gegeneinander verschobenen Kurven von der in Fig. 1 dargestellten Form ohne Maxima und Minima mit einem Krümmungswechsel an der Stelle

$$c_0 = \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}} , \quad c_1 = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_1}} ,$$

an der die Tangente die durch

$$\frac{df}{dc_1} = -(\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1})^2$$

1) Nach Rothmund, a. a. O., sind die Sättigungserscheinungen in weitem Umfange vom Druck unabhängig, so daß schlechthin von Isothermen gesprochen werden kann.

bestimmte Richtung hat. Für die molekulare Form liegt der Krümmungswechsel bei

$$c_0 = c_1 = \tfrac{1}{2}$$

und die Tangente hat hier die Richtung

$$\frac{df}{dc_1} = -4R.$$

Nach der Ableitung von (20) haben die Kurven zunächst nur für sehr kleine Werte von c_1 physikalische Bedeutung als Isothermen. Erst dadurch, daß der für die andererseits hochverdünnte Lösung gültige Wert

$$f = f_{10} + r_0 \log c_0 - r_1 \log c_1 ,$$

wo

$$f_{10} = r_0 - \varphi_0^1 - r_1 + \varphi_1^1 ,$$

dieselbe Kurvenschar ergibt, erhält auch das Gebiet der Werte von f für c_1 nahe 1 entsprechende Bedeutung. Damit ist allerdings noch nicht verbürgt, daß Anfang und Ende einer Kurve auch zur gleichen physikalischen Isotherme gehören. Dies ist nur der Fall, wenn

$$f_{01} = f_{10} ,$$
$$\varphi_0^0 + \varphi_1^1 - \varphi_0^1 + \varphi_1^0 ,$$

also nur, wenn die von Lösungsmittel und gelöstem Stoff abhängigen Größen φ_0^1 und φ_1^0 eine ganz bestimmte Bedingung erfüllen. Tun sie dies nicht, so wird der Anfang *einer* Kurve durch einen ganz anderen mittleren Isothermenverlauf als er dem Planckschen Ansatz entspricht in das Ende einer *anderen* Kurve übergeführt.

Dies im wesentlichen negative Ergebnis hat immerhin insofern eine physikalische Bedeutung, als dadurch eine Abschätzung des Gültigkeitsbereichs dieser ersten Näherung möglich wird. Dieser Bereich wird sicher beschränkt durch die Konzentrationsgebiete, innerhalb welcher sich die kritischen Erscheinungen abspielen und das sind teilweise Gebiete, innerhalb welcher die Lösungen schon als verdünnt bezeichnet werden müssen.

II. *Die Jahnschen Isothermen.* Ebensowenig wie diese erste Näherung führt auch in der Jahnschen Form die zweite Näherung zu einem kritischen Punkt. Dieser ist nämlich nach (15), (18), (19) jetzt an die Bedingungen

$$\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1} = \frac{2\varphi_{11}}{c_0^3}, \quad \frac{r_0}{c_0^2} - \frac{r_1}{c_1^2} = \frac{6\varphi_{11}}{c_0^4}$$

gebunden, woraus durch Elimination von φ_{11}

$$\frac{2r_0}{c_0^2} + \frac{3r_1}{c_0 c_1} + \frac{r_1}{c_1^2} = 0$$

folgt. Diese Gleichung ist aber unmöglich, da darin die Summe dreier wesentlich positiver Größen verschwindet. Noch deutlicher wird dies in der molekularen Form, in der sich für den kritischen Punkt

$$c_0 = 2, \qquad c_1 = -1$$

ergibt. Auch allein aus der Betrachtung von φ_{11} kann man die Ungeeignetheit des Jahnschen Ansatzes zur Darstellung der kritischen Erscheinungen erkennen. Entweder nämlich ist φ_{11} positiv, dann wird f für $c_1 = 0$ und ebenso für $c_1 = 1$ positiv unendlich und die Isothermen zeigen im Gebiete c_1 nahe 1 nicht den nötigen Anschluß an die Planckschen Isothermen. Oder φ_{11} ist negativ, dann folgt aus (18), daß die Kurvenschar keine Maxima und Minima zeigen kann, wie es für das Vorhandensein eines kritischen Punktes notwendig ist.

Sonach wird die Theorie der Lösungen durch die Jahnsche Näherung wenigstens in bezug auf die kritischen Erscheinungen keinen Schritt weiter geführt.

III. *Die Isothermen der Ansätze* (7), (9) ergeben demgegenüber zunächst widerspruchsfrei den kritischen Punkt. Für diesen gilt jetzt

$$\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1} = 2\varphi_{11},$$

$$\frac{r_0}{c_0^2} - \frac{r_1}{c_1^2} = 0.$$

Hieraus folgen die kritischen Konzentrationen, die wir von jetzt ab durch einen Stern auszeichnen,

$$(21) \qquad c_0^* = \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}, \qquad c_1^* = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_0} + \sqrt{r_1}}.$$

Nach (5) kann man diese Werte in Zusammenhang mit den Molekulargewichten bringen; es ergibt sich die Beziehung

$$\frac{c_0^*}{c_1^*} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_0}},$$

für deren Prüfung es zunächst allerdings noch an dem nötigen Beobachtungsmaterial fehlt. Die kritische Temperatur bestimmt sich aus

$$\varphi_{11}^{*} = \tfrac{1}{2}\,(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2 . \tag{22}$$

Jede Isotherme zeigt für $\varphi_{11} > \varphi_{11}^{*}$ ein Maximum und ein Minimum. Für Werte von c_1 nahe 0 oder 1 gehen die Isothermen in die Planck'sche Form über. Sie bilden demnach eine Kurvenschar etwa von der in Fig. 2 dargestellten Gestalt, die allen in Abschnitt 2 genannten Anforderungen entspricht.

Auf jeder Isotherme lassen sich zwei Punkte, A und B, so bestimmen, daß ihre zur c_1-Achse parallele Verbindungsgerade mit den Isothermenbögen ACE einerseits und BDE andererseits an Inhalt gleiche Flächenstücke begrenzt. Gemäß (13), (14) stellt AB den Zustand der Lösung im Zweiphasengebiet dar. Der geometrische Ort der Punkte A, B ist die Sättigungskurve, die im kritischen Punkt ein Maximum hat.

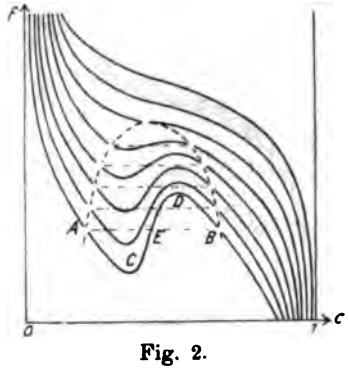


Fig. 2.

Das von der Sättigungskurve umschlossene Gebiet hat, wenn von Übersättigungserscheinungen abgesehen wird, nur theoretische Bedeutung; im besonderen führen nach (12) die Isothermen überall da, wo in diesem Gebiet

$$\frac{df}{dc_1} > 0$$

ist, durch labile Zustände hindurch. Die Konzentrationen in den Punkten A, B stehen zueinander in einer Beziehung, die von Druck und Temperatur unabhängig ist und die wir die Sättigungsgleichung nennen wollen. Sie wird aus den Gleichungen (13), (14), (16), (17) gewonnen und kann nach gehöriger Umformung auf die Form gebracht werden

$$\begin{cases} r_0 \left\{ (c_0' + c_0'') \log \dfrac{c_0'}{c_0''} - 2(c_0' - c_0'') \right\} \\ \qquad + r_1 \left\{ (c_1' + c_1'') \log \dfrac{c_1'}{c_1''} - 2(c_1' - c_1'') \right\} = 0 . \end{cases} \tag{23}$$

Solche zusammengehörigen Konzentrationen koexistenter Phasen sind von Rothmund in verschiedenen flüssigen Systemen beobachtet worden. Der Vergleich mit diesen Beobachtungen zeigt, daß (23) auch quantitativ mit der Erfahrung gut übereinstimmt. So ist z. B. für das Gemisch Schwefelkohlenstoff-Methylalkohol, wenn mit c_1 die Konzentration des Methylalkohols bezeichnet wird,

$\bar{c}_1'$	$\bar{c}_1''$ beobachtet	$\bar{c}_1''$ berechnet	$\frac{\bar{c}_1' \bar{c}_1''}{\bar{c}_0' \bar{c}_0''}$
0,549	0,017	0,016	0,021
0,492	0,028	0,027	0,028
0,458	0,036	0,037	0,032
0,416	0,045	0,050	0,034
0,360	0,065	0,072	0,039
0,195	0,195	0,192	0,059

wobei der Berechnung der Wert

$$\frac{r_1}{r_0} = 0{,}0567$$

zugrunde gelegt wurde.

Wir haben bisher mit den molaren Ansätzen gearbeitet. Die entsprechenden molekularen Beziehungen folgen aus (21), (22), (23), wenn darin r_1 und r_2 durch R ersetzt werden. Für den kritischen Punkt ergeben sich so die außerordentlich einfachen Bedingungen

$$c_0^* = \tfrac{1}{2}\,, \quad c_1^* = \tfrac{1}{2}\,. \quad \varphi_{11}^* = 2\,R\,.$$

Leider befinden sich die weiteren Ergebnisse nicht in der wünschenswerten quantitativen Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die Sättigungsgleichung erhält hier nämlich die gleichfalls sehr einfache Form

$$c_1' + c_1'' = 1\,.$$

oder, wenn sie auf die von Rothmund beobachteten molaren Konzentrationen reduziert wird, die jetzt der Übersichtlichkeit halber wieder besonders gekennzeichnet werden,

$$\frac{\bar{c}_1' \bar{c}_1''}{\bar{c}_0' \bar{c}_0''} = \frac{\mu_1^2}{\mu_0^2} = \text{const.}$$

Wie die letzte Spalte der obigen Tabelle zeigt, ist der Quotient auf der linken Seite aber keineswegs konstant, sondern mit

der Konzentration in ziemlich hohem Grade veränderlich. Danach kommt den molekularen Ansätzen nur eine qualitative Bedeutung zu.

Ähnlich wie bei den Planckschen Isothermen lassen sich auch hier die beiden Ansätze miteinander vergleichen, die man erhält, wenn man einmal den einen und dann den anderen Stoff als Lösungsmittel ansieht. Unterscheidet man die Größen in beiden Fällen wieder durch herangefügten oberen Index, so wird entweder

$$f = f_{01} + r_0 \log c_0 + r_1 \log c_1 + 2 c_1 \varphi_{11}^0 ,$$
$$f_{01} = r_0 - \varphi_0^0 + r_1 + \varphi_1^0 ,$$

oder

$$f = f_{10} + r_0 \log c_0 + r_1 \log c_1 + 2 c_1 \varphi_{11}^1 ,$$
$$f_{10} = r_0 - \varphi_0^1 + r_1 + \varphi_1^1 - 2 \varphi_{11}^1 .$$

Haben die aus beiden Ansätzen folgenden Isothermen gemeinsame Punkte — und das ist anzunehmen, wenn anders sich aus ihnen die kritischen Erscheinungen in gleicher Weise ergeben sollen —, so müssen die Beziehungen

$$\varphi_{11}^0 = \varphi_{11}^1 = \varphi_{11} ,$$
$$\varphi_0^0 + \varphi_1^1 - 2 \varphi_{11} = \varphi_0^1 + \varphi_1^0$$

erfüllt sein; es muß also vor allem der Koeffizient φ_{11} in genau der gleichen Weise vom Lösungsmittel wie vom gelösten Stoff abhängen.

4. Ein allgemeiner Satz über die Sättigungsgleichung.

Versucht man, wie wir es oben getan haben, die Plancksche Theorie der hochverdünnten Lösungen in absichtlicher Überschreitung ihres Geltungsbereichs auf die kritischen Lösungserscheinungen, die sich wesentlich nur in Gebieten höherer Konzentration abspielen, anzuwenden, so ergibt sich im allgemeinen nicht nur keine Übereinstimmung mehr mit der Erfahrung, sondern man wird auch, wie sich gezeigt hat, zu Widersprüchen der Theorie in sich geführt. Immerhin ergab sich z. B. schon der Krümmungswechsel der Isothermen an der richtigen Stelle und sehr wunderbarer Weise läßt sich auch die Sättigungsgleichung — wie man sich leicht überzeugt — aus jenen Ansätzen herleiten, die in sich völlig widerspruchsfrei ist und, wie wenigstens im Falle binärer Gemische

gezeigt wurde, in bemerkenswertem Grade den Beobachtungsresultaten entspricht. Die Bedeutung der von uns an die Planckschen Ansätze herangesetzten Zusatzglieder beruht demnach im wesentlichen darin, daß sie die inneren Widersprüche der Theorie beseitigen, ohne doch — ganz im Gegensatz zu der Jahnschen Erweiterung — den schon brauchbaren Kern, die Sättigungsgleichung nämlich, zu verändern. Die durch diese Glieder veranlaßte Änderung ist demnach rein sekundärer Natur und die oben gezogenen durch die Erfahrung bestätigten Folgerungen sind im wesentlichen schon ein Bestandteil der ursprünglichen Planckschen Theorie. Wir zeigen kurz, auf welchen allgemeinen Zusammenhängen dies beruht.

Aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (10), (11) ergibt sich für irgend zwei Phasen, z. B. für die ersten beiden, die Gleichung

$$(24) \qquad \varphi' - \varphi'' = \frac{1}{2} \sum (c_1' - c_1'') \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} + \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} \right),$$

worin die Summe über alle Bestandteile, auch über den $a$ten, zu erstrecken ist. Die Zustandsänderungen, auf die wir diese Gleichgewichtsbedingungen in der vorliegenden Untersuchung anwenden, sind nicht ganz allgemeiner Natur; sie gehen vielmehr stets kontinuierlich ohne chemische Umsetzungen vor sich. Handelt es sich etwa wie oben um ein binäres Gemisch, so wird dessen Zustand durch die nämliche Funktion Φ bestimmt, gleichgültig, ob es einerseits oder andererseits verdünnt oder beliebig konzentriert ist. Ebenso unterscheiden sich z. B. φ' und φ'' nur durch die Werte der Konzentrationen, dagegen sind die darin eingehenden Konstanten die gleichen, genau wie dies in der Van der Waalsschen Theorie der Zustandsgleichung einer einheitlichen Flüssigkeit der Fall ist, die in unveränderter Form für den von der Flüssigkeit ausgesandten Dampf Gültigkeit behält. Unter dieser beschränkenden Annahme gilt der folgende Satz: Ist φ eine ganze Funktion ersten oder zweiten Grades der Konzentrationen, so wird (24) identisch erfüllt.

Zum Beweise werde φ zunächst als lineare Funktion der Konzentrationen angenommen; es sei etwa

$$\varphi = \sum \varphi_1 c_1 ,$$

worin die Koeffizienten φ beliebig von Druck und Temperatur abhängen können. Dann ist unter der obigen Voraussetzung der Kontinuität

$$\varphi' = \sum \varphi_1 c_1', \qquad \varphi'' = \sum \varphi_1 c_1'',$$
$$\frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} = \varphi_1 \text{ usw.}, \qquad \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} = \varphi_1 \text{ usw.},$$

also

$$\varphi' - \varphi'' = \sum \varphi_1 (c_1' - c_1''),$$
$$\frac{1}{2} \sum (c_1' - c_1'') \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} + \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} \right) = \sum \varphi_1 (c_1' - c_1''),$$

was zu beweisen war.

Um auch für quadratische Funktionen von der Form

$$\varphi = \sum \varphi_{11} c_1^2 + 2 \varphi_{12} c_1 c_2 + \ldots$$

den Nachweis zu führen, bringt man (24) passend auf die Form

$$\varphi' - \varphi'' = \frac{1}{2} \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} - c_1'' \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} \right) + \frac{1}{2} \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} - c_1'' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} \right).$$

Die linke Seite dieser Gleichung zerfällt in zwei Teile, von denen der eine sich nur auf die erste Phase, der andere sich nur auf die zweite Phase bezieht. Soll die Gleichung identisch erfüllt werden, so muß sich auch die rechte Seite in gleicher Weise anordnen lassen können. Abgesehen von dem Fall, daß φ linear von den Konzentrationen abhängt, ist diese Zerlegung aber nur dann möglich, wenn die zweite Summe identisch verschwindet, wenn also einzeln

$$\varphi' - \varphi'' = \frac{1}{2} \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1'} - c_1'' \frac{\partial \varphi}{\partial c_1''} \right),$$
$$0 = \sum \left(c_1' \frac{\partial \varphi''}{\partial c_1''} - c_1'' \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1''} \right).$$

Der oben angegebene quadratische Ausdruck erfüllt nun in der Tat diese beiden Bedingungen. Für die erste folgt dies aus der Eigenschaft von φ als homogene Funktion zweiten Grades; für die zweite sieht man es, wenn man die Glieder mit einem bestimmten der Koeffizienten φ_{11}, φ_{12} usw. ins Auge faßt.

Man erkennt weiter sofort, daß ganze Funktionen der Konzentrationen von höherem als dem zweiten Grade die bewiesene Eigenschaft nicht mehr haben; denn die erste der

beiden simultanen Gleichungen wird nur durch quadratische Funktionen erfüllt. Demnach führen alle Funktionen φ_1, die sich um ganze Funktionen ersten oder zweiten Grades der Konzentrationen unterscheiden, aber auch nur diese zur nämlichen Gleichung (24).

Nach dem bewiesenen Satze wird (24) durch die zweite und die dritte Summe in dem von uns den Betrachtungen zugrunde gelegten Ausdruck (4), (9), (16)

$$\varphi = -\sum r_0 c_0 \log c_0 + \sum \varphi_0 c_0 + \sum (\varphi_{11} c_1^2 + 2 \varphi_{12} c_1 c_2 + \ldots)$$

identisch befriedigt. Es kann also φ beim Einsetzen in (24) durch den einfacheren, schon im Planckschen Ansatz für hochverdünnte Lösungen enthaltenen Ausdruck

$$-\sum r_0 c_0 \log c_0$$

ersetzt werden. Hieraus geht schon hervor, daß die aus (24) herzuleitende Gleichung in unserem Falle Druck und Temperatur nicht enthält, sich also eine Beziehung allein zwischen den Konzentrationen koexistenter Phasen ergibt. Vereinigt man nach dem Einsetzen alle sich auf den gleichen Bestandteil beziehenden Glieder, so erhält man die Sättigungsgleichung (23) in der allgemeinen Form

$$\sum r_0 \left\{ (c_0' + c_0'') \log \frac{c_0'}{c_0''} - 2 (c_0' - c_0'') \right\} = 0.$$

Entsprechende Beziehungen gelten natürlich auch für jede andere Kombination von je zwei Phasen.

Die Sättigungsgleichung ist sonach allein eine Folge der logarithmischen Glieder in den Planckschen Reihenentwicklungen, die sich bekanntlich aus dem Vergleich der Gesetze der Lösungen mit den Gesetzen des idealen Gaszustandes ergeben. Damit treten die Erscheinungen der Sättigung und der kritischen Löslichkeit in direkte Beziehung zu den Gasgesetzen. In der Tat würde die Sättigungsgleichung genau so für den gasförmigen Zustand gelten müssen, wenn ein Gasgemisch in zwei Phasen vorkommen könnte. Natürlich würden sich dabei auch wieder die gleichen Widersprüche wie oben bei Bestimmung des kritischen Punktes aus den Planckschen Ansätzen ergeben müssen, die ja erst durch das Anfügen der quadratischen Glieder, die die Gasgleichung[1]) nicht enthält,

1) Planck, a. a. O. Gleichung 199a.

aufgehoben werden. Die gesamte Theorie bleibt widerspruchsfrei, weil im Bereiche der einfachen nur lineare Glieder enthaltenden Ansätze, bei den Gasen nämlich, nicht Phasen verschiedener Zusammensetzung gebildet werden, und weil da, wo solche Phasen in flüssigen oder festen Systemen auftreten, eben die allgemeinere die quadratischen Glieder mit enthaltende Fundamentalbeziehung gilt.

Bemerkt sei noch, daß in den vorliegenden Betrachtungen unseres Wissens zum ersten Male das auf das Lösungsmittel bezogene Glied $\log c_0$ voll zur Geltung kommt. Bei den Vorgängen in verdünnten Lösungen wird c_0 im allgemeinen gleich 1 gesetzt, so daß $\log c_0$ verschwindet.

Die von uns vorgenommene Erweiterung der Planckschen Theorie erweist sich nach der obigen Darlegung in dem betrachteten speziellen Beispiel als erfolgreich. Weitergehende Untersuchungen müssen zeigen, ob sich noch andere zutreffende Folgerungen daraus ziehen lassen. Vor allem muß dadurch entschieden werden, ob die in der obigen Anwendung auch quantitativ befriedigenden molaren Ansätze in der Tat vor den molekularen den Vorzug verdienen. Es würde das den bisherigen Anschauungen, wonach die molekularen Ansätze im Wesen der Sache begründet sind, entgegen sein. Sollte diese Entscheidung nicht zugunsten der molaren Gleichungen ausfallen, so müßten im genauen Verfolg des Planckschen Gedankens die Reihenglieder dritter und höherer Ordnung herangezogen werden, um den quantitativen Anschluß an die Erfahrung zu erzielen. Dadurch würde dann allerdings die Sättigungsgleichung nicht unerhebliche Änderungen erfahren.

Wenn auch die weitere Auswertung der Planckschen Reihenentwicklungen immer näheren Aufschluß in der Theorie der Lösungen bringen wird, so ist auf dem Wege doch wohl kein endgültiger Abschluß der Theorie zu erwarten, wenn man sich nicht in endlose Rechnungen verlieren will. Derartige Untersuchungen, die sich auf Reihenentwicklungen gründen, werden wohl stets mehr oder weniger unbewußt in der Hoffnung unternommen, allmählich nicht nur zu immer mehr genäherten, sondern zu den genauen Ansätzen durchdringen zu können. Das bedeutet die Erwartung, daß die

Reihen nach einer nicht zu großen Zahl von Gliedern abbrechen, also endlich sind, oder daß man nach wenigen Gliedern schon sichere Anhaltspunkte gewinnt, wie sich die entwickelte Funktion in Wirklichkeit aufbaut. Von diesem Standpunkt aus würde sich empfehlen, zunächst schon etwa den Ausdruck

$$\varphi = -\sum r_\lambda c_\lambda \log c_\lambda + \sum \varphi_\lambda c_\lambda + \sum \varphi_{\lambda\mu} c_\lambda c_\mu \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots \alpha)$$

nicht nur als genäherten, sondern als genauen Wert des Potentials φ zu betrachten und alle irgend möglichen Folgerungen daraus zu ziehen. Erweist sich danach diese Annahme als nicht zutreffend, so würde neben der Untersuchung der Reihenglieder höherer Ordnung der Versuch gemacht werden können, mit einer geschlossenen Funktion, die durch den hingeschriebenen Ausdruck in anderer Weise approximiert wird, eine passende Erweiterung der Theorie zu finden. Am schnellsten und sichersten dürften solche rein formalen Versuche allerdings fortschreiten, wenn sie auf eingehende kinetische Vorstellungen gestützt werden könnten.

Neukölln, Juli 1919.

(Eingegangen 26. Juli 1919.)

3. *Versuch einer physikalischen Lösung des Problems der sichtbaren Größenänderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont;*

von H. Dember und M. Uibe.

(Abdruck aus den Berichten der Mathemat.-Phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 69, 14. Nov. 1917.)

Siebenter Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.

§ 1. Aufgabe.

Sonne und Mond besitzen im Horizont einen kleineren scheinbaren Durchmesser als im Zenit. Dies ist eine Folge davon, daß am Horizont der Abstand der Gestirne vom Beobachter größer ist als im Zenit. Am erdennahen Mond lassen sich diese Differenzen mikrometrisch feststellen, und man erhält z. B. für einen Durchmesser von 31′20″ im Horizont einen solchen von 31′52″ für 90° Höhe. Im gleichen Sinne wie die Verschiedenheit der Entfernung wirkt die atmosphärische Strahlenbrechung, die am Horizont eine Verkleinerung des vertikalen Durchmessers hervorruft. Aus diesen Gründen müßten die Gestirne am Horizont kleiner aussehen als im Zenit. Der tägliche Augenschein lehrt uns das Gegenteil: Wir schätzen die Gestirne in Horizontnähe mehr als doppelt so groß als in Zenitnähe.

Die älteren Theorien (Einfluß der Luftperspektive, Vergleichstheorien) sehen diesen Widerspruch als Wirkung einer Urteilstäuschung an, welche durch die unbewußte Verwendung von Urteilsmitteln hervorgerufen wird, die für diesen Fall untauglich sind, aber der sonstigen Erfahrung nach zu richtigen Schlüssen führen. In neuerer Zeit wird die Ursache oft einer optischen Täuschung zugeschrieben (Blickrichtungstheorie), bei welcher zwischen den geometrisch-physikalischen Eigenschaften des Objekts und der subjektiven optischen Wahrnehmung des Beobachters eine Übereinstimmung nicht besteht.

Die genau gleichen Anschauungen und Überlegungen, welche im einzelnen zur Erklärung der sichtbaren Größenveränderung der Gestirne dienen, sind auch für die Erklärung der Form des Himmelsgewölbes herangezogen worden. In dem vorangehenden 6. Bericht[1]) haben wir gezeigt, daß der sichtbaren Form des Himmelsgewölbes berechen- und meßbare physikalische Ursachen zugrunde liegen. Danach wird die Gestalt des Himmelsgewölbes bedingt durch die nach verschiedenen Richtungen von der Himmelshelligkeit abhängige verschiedene Sichtweite, welche bewirkt, daß wir am Tage im Abstande der Sichtweite eine unterschiedslose Grenze sehen, die von den im Sinne der Rayleighschen Theorie leuchtenden Molekeln der Luft gebildet wird.

Im folgenden haben wir den Versuch gemacht, experimentell und rechnerisch zu untersuchen, wieweit ein Zusammenhang zwischen diesem sichtbaren reellen Himmelsgewölbe und der sichtbaren Größenvariation der Gestirne besteht. Dabei hat uns der Gedanke geleitet, diejenige Stelle als Ort des Gestirns anzusehen, wo der vom Gestirn nach dem Auge konvergierende Lichtkegel das Himmelsgewölbe durchdringt und dann besonders zu untersuchen, ob zwischen den wirklichen Größen dieser Durchdringungsstellen — die infolge der abgeflachten Form des Gewölbes sich bei verschiedenen Gestirnhöhen voneinander der Größe und Lage nach unterscheiden — und der sichtbaren Größe der Gestirne ein fester numerischer Zusammenhang besteht.

§ 2. Versuch zur Prüfung der Gaussschen Blickrichtungstheorie.

Eine zahlenmäßige Prüfung derjenigen Theorien durchzuführen, die auf Urteilstäuschung und unbewußten Schlüssen, also auf rein psychologischen Vorgängen beruhen, waren wir nicht imstande. Dagegen ließ sich eine Entscheidung über das Gelingen eines Versuches bringen, von dem widersprechende Ergebnisse vorliegen und der von mehreren Forschern dazu angestellt worden ist, zu prüfen, wieweit bei der Größenvariation der Gestirne die Blickrichtung eine Rolle spielt, also eine bestimmte physiologische Eigenschaft unseres Sehapparates in

1) H. Dember und M. Uibe, Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes. Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 391—411. 1917.

Frage kommt. Der Vorschlag, einen solchen Versuch auszuführen, rührt von Gauss her: Hängt die scheinbare Größe der Sonne und des Mondes von der Blickrichtung ab, so muß das Spiegelbild des im Zenit stehenden Gestirns, in der horizontalen Richtung gesehen, groß erscheinen, und andererseits das vom Horizont aus in die Vertikale geworfene Bild klein. Helmholtz hat diesen Versuch ausgeführt[1]), indem er den hochstehenden Mond in die horizontale Richtung reflektierte. Der reflektierte Mond erschien ihm nicht entschieden größer als der direkt gesehene. Filehne und Zoth[2]) dagegen beschreiben den Versuch mit konträrem Ergebnis. Sowohl Helmholtz als auch die beiden letzteren Forscher benutzten planparallele Glasplatten zur Spiegelung.

Wir haben das Experiment mit einigen Abänderungen unter besonderer Berücksichtigung des Punktes wiederholt, der dem Helmholtzschen Versuch als Fehler vorgeworfen worden

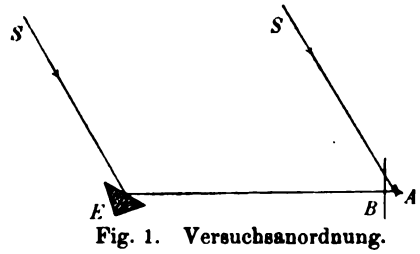


Fig. 1. Versuchsanordnung.

ist, nämlich daß in seiner Anordnung der Spiegel selbst nicht unsichtbar gewesen sei. Außerdem haben wir die planparallele Platte durch eine einzige spiegelnde Oberfläche ersetzt, weil planparallele Glasplatten sowohl an der Vorder- wie auch Hinterseite reflektieren und so zwei Bilder geben, die bei schräger Inzidenz der Lichtstrahlen nicht ganz zur Deckung kommen und bei genügender Lichtintensität leicht eine Vergrößerung vortäuschen können. Das Licht des Gestirns *S* (vgl. obenstehende Versuchsanordnung) fiel in unserer Anordnung auf die Hypotenuse eines sehr gut geschliffenen Glasprismas *E* und von dort durch ein Blendglas *B* in das Auge *A*.

1) H. v. Helmholtz, Physiologische Optik. 2. Aufl., S. 776. 1896.

2) Vgl. Pernter-Exner, Meteorologische Optik, wo auch, wie bei Helmholtz, die ältere Literatur angegeben ist.

Das Blendglas bestand in einer exponierten, entwickelten und fixierten photographischen Platte, welche die Sonne als silbernes Scheibchen durchscheinen ließ, aber so dicht war, daß von der spiegelnden Oberfläche des Prismas nichts erkannt werden konnte. Das Auge hat auf solche Weise keinen Anhalt, die Akkommodation beim Wechsel der Objekte (direkt gesehene Sonne oder ihr Spiegelbild) zu ändern. Das Ergebnis unserer Versuche war das gleiche wie es Helmholtz erhalten hat: Ob das Gestirn direkt oder im Spiegelbild betrachtet wurde, es behielt immer die gleiche scheinbare Größe. Die Versuche kamen an der Sonne und am Mond mit gleichem Resultat zur Ausführung.

Der Blickrichtungstheorie kommt hiernach für die Erklärung der Vergrößerung der Gestirne ebensowenig eine Bedeutung zu, wie für die Erklärung der Form des Himmelsgewölbes. Eine auf solche Art zustande kommende optische Täuschung liegt nicht vor.

§ 3. Meßmethode.

Um die Größenveränderung der Gestirne in verschiedenen Höhen über dem Horizont zu verfolgen, bedienten wir uns des folgenden, im Prinzip einfachen und schon von Reimann verwendeten Verfahrens. Eine weiße kreisrunde und durchscheinende Leinwandscheibe wurde in solcher Entfernung vom Beobachter aufgestellt, daß sie ihm die gleiche Größe zu haben schien wie das durch ein Blendglas betrachtete Gestirn. Das Blendglas ist stets so dicht gewesen, daß nur das Gestirn und nichts von der Umgebung zu erkennen war. Dabei ist vor allem darauf geachtet worden, daß kein Messen an Stelle des Schätzens ausgeführt werden konnte. Dies erreichten wir so, daß der Azimutabstand des niedrig stehenden Gestirns — nur hier liegt die Gefahr vor — ein genügend großer von der Scheibe aus war, und zwar immer größer als 30°. Die Höhe der Scheibe, die in einem dunklen Rahmen an einer der Länge nach verstellbaren Stange saß, war die Augenhöhe, und die Scheibe kam meist so zur Aufstellung, daß sie der Meereshorizont schnitt. Für verschieden große Gestirnhöhen muß der Beobachter eine jedesmal andere Distanz von der Scheibe aufsuchen, damit diese ihm gleich groß erscheint wie das Ge-

stirn. Das Aufsuchen geschah in der Weise, daß der Beobachter aus einer Entfernung, bei der die Leinwandscheibe mit Sicherheit kleiner geschätzt wurde als das Gestirn, an die Scheibe langsam heranging, den Ort der Gleichheit markierte und dann so weit sich näherte, bis die Scheibe mit Sicherheit größer erschien. Rückwärtsgehend markierte er dann wieder den Punkt der Gleichheit. Das Mittel aus beiden Markierungen nahmen wir als richtiges Mittel an und bestimmten den Abstand von der Vergleichsscheibe mit dem Bandmaß. Sieben Monate lang fortgesetzte, fast tägliche Übung verschaffte die angestrebte Sicherheit in der Ausführung dar Schätzungen.

Diese Beobachtungsmethode setzt voraus, daß für alle in Frage kommenden Abstände des Beobachters von der Vergleichsscheibe die scheinbare lineare Größe der Scheibe dem Abstande umgekehrt proportional ist oder ein anderer gesetzmäßiger Zusammenhang besteht. Es läßt sich durch Verwendung verschieden großer Scheiben bei gleicher Höhe des Gestirns leicht zeigen, daß diese Voraussetzungen für kleine Abstände nicht gelten[1]), und wir haben aus diesem Grunde die Scheibengrößen so gewählt, daß Entfernungen unter 15—20 m nur ausnahmsweise benutzt zu werden brauchten. Die Durchmesser der am meisten zur Verwendung gekommenen Scheiben waren $2r_1 = 40{,}0$ cm und $2r_2 = 29{,}8$ cm. Daß für größere Entfernungen die erste Voraussetzung erfüllt ist, zeigen die folgenden Beobachtungsreihen. Aus ihnen ist zu erkennen, daß sich die mit beiden Scheiben für dieselbe Gestirnhöhe gefundenen Entfernungen L_D (Beobachter: D) und L_U (Beobachter: U) wie die Durchmesser der Scheiben verhalten, daß also die Bedingung für die Verwendbarkeit der Methode

$$L_D : L_U = \text{konst.} = 2r_1 : 2r_2 = 40{,}0 : 29{,}8 = 1{,}342$$

mit hinreichender Annäherung Genüge getan wird.

In den Tabellen bedeutet ζ_k die Zenitdistanz des Gestirns und daher $\frac{\pi}{2} - \zeta_k = \varphi_k$ seine Höhe über dem Horizont.

---

1) Aus allen folgenden Ergebnissen ist der Schluß zu ziehen, daß auch für sehr große Entfernungen (~ 50 km) der Gesichtswinkel dem *Auge* nicht mehr das exakte Maß der scheinbaren Größe bildet. Ob darüber direkte Messungen vorliegen, ist uns nicht bekannt.

Tabelle 1.

Gestirn	$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	$L_D : L_U$	Bemerkungen
Sonne	3,2° vorm.	31,95 m			2. Juni 1917
	3,8		28,60 m	1,35	
	7,3	34,10			
	7,9		25,80	1,32	
	13,2		29,50		
	13,8	40,85		1,38	
	26,3	46,40			Klar, nur Horizont
	26,6		33,50	1,38	[diesig
	37,3	48,25			
	38,4		36,45	1,32	
	61,5	56,05			In der Güímarmulde
	62,5		41,10	1,36	[ganz feiner Dunst
	73,6	61,00			
	75,6		48,20	1,26	
	83,7	61,00	48,50	1,26	
	53,9° nachm.	46,90			
	52,6		33,70	1,39	
	41,7		33,40		
	41,0	48,50		1,45	
	32,0	45,50	33,40	1,36	
	17,1	41,40	30,10	1,37	Haidingers Büschel
				Mittel	[deutlich
				= 1,350	

Fig. 2. Kurve 1.

Tabelle 2.

Gestirn	$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	$L_D : L_U$	Bemerkungen
Sonne	5,6° vorm.		24,15 m		4. Juni 1917
	6,0	33,55 m		1,39	Horizont diesig
	16,2	41,50	29,70	1,40	
	28,3	46,00			
	29,2		34,00	1,35	Bis auf Horizont:
	40,0		38,70		klar
	40,8	48,40		1,25	
	68,1	57,75			
	64,1		44,80	1,29	
	76,5	60,30			
	76,8		46,90	1,29	
	83,9	62,50	44,60	1,40	Schwach dunstig in
	62,6° nachm.		36,60		der Gülmarmulde
	62,0	49,20		1,34	
	48,2	48,70	35,60	1,36	
	35,2	44,60	33,40	1,33	
	17,8	37,15	27,70	1,34	Horizont wird klar
				Mittel = 1,340	

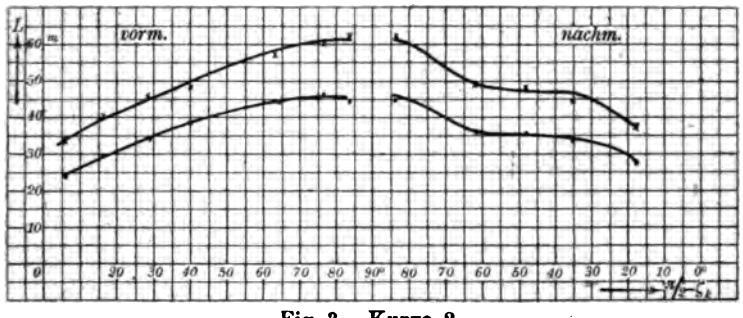


Fig. 3. Kurve 2.

Tabelle 2a.

Gestirn	$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	$L_D : L_U$	Bemerkungen
Voll-	4,6°		26,10 m		4. Juni—5. Juni 1917
mond	5,1	34,75 m		1,33	Klare Nacht
	11,0		30,20		
	12,0	40,70		1,35	
	26,0	43,55	37,20	1,18	
	33,0	47,75	39,20	1,22	
	37,5	53,40	40,90	1,31	
	29,5	45,00	33,90	1,33	
	16,5	41,55	31,20	1,34	
				Mittel = 1,295	

Für geringere Entfernungen als 15 m haben uns besondere Untersuchungen gezeigt, daß sich $L_D : L_U$ dem Werte

$$\left(\frac{2r_1}{2r_2}\right)^2 = 1{,}80$$

nähert, woraus folgt, daß das Auge dann nicht mehr Durchmesser, sondern Flächen schätzt. Der Übergang von der ersten zur zweiten Potenz von $\left(\frac{2r_1}{2r_2}\right)$ geschieht langsam und ist stark von der individuellen Beschaffenheit des Auges und der Disposition des Beobachters abhängig. Beträgt schließlich der Abstand des Beobachters von der Vergleichsscheibe nur etwa 5 m, so ändert sich die scheinbare Größe bei weiterer Annäherung nicht mehr, d. h. die Methode versagt.

Eine große Anzahl von Beobachtungen, die in der Weise angestellt waren, daß derselbe Beobachter erst mit der einen Scheibe den Abstand L_D, dann mit der andern den Abstand L_U aufsuchte, mußten verworfen werden, da die Messungen keine Kohärenz zeigten und eine große Unsicherheit beim Schätzen vorhanden war, die nicht überwunden werden konnte. Jeder Beobachter arbeitete schließlich monatelang nur mit ein und derselben Scheibe ganz bestimmter Größe. Die Übung wurde mit dieser so weit getrieben, daß bei gleicher Sonnenhöhe, aber wechselnder Aufstellung im Gelände — so daß die vielleicht mögliche Erkennung der Entfernungen an irgendwelchen Merkmalen vereitelt war — die Abstände L bei Wiederholungen auf 30—50 cm gleich geschätzt wurden, was einem relativen Fehler einer Schätzung von 1—2% entspricht.

Um die Sicherheit und Gleichartigkeit der Schätzungen weiter zu erhöhen, kamen sie immer so zur Ausführung, daß das Auge durch das Blendglas hindurch fest auf das Gestirn gerichtet blieb und nur zum schätzenden Vergleich bei langsamen Vor- und Rückwärtsschreiten von Zeit zu Zeit ein kurzer Blick auf die Vergleichsscheibe geworfen wurde.

§ 4. Beobachtungsresultate an Sonne und Mond.

In den Tabellen 1—13 und den Kurven 1—13, sowie der Tafel der Mondmessungen Fig. 16 sind die Meßresultate von 14 günstigen Tagen und 6 Nächten niedergelegt, die in den letzten Monaten erhalten worden sind. $\left(\frac{\pi}{2} - \zeta_*\right) = \varphi_k$

bedeutet die mit einem Busch-Jensenschen Pendelquadranten gemessene Höhe des Sonnen- bzw. Mondzentrums, L_D und L_U die jeweiligen von beiden Beobachtern für die verschiedenen Höhen gefundenen Abstände von den Vergleichsscheiben.

Tabelle 3.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
4,4°	—	29,70 m	7. Juli 1917
5,6	38,00 m	30,70	Sehr klar
10,0	43,90	33,60	
15,6	49,10	35,50	2° hohe Wolkenbank am
29,1	52,40	36,00	SO-Horizont
37,5	54,70	39,00	
59,5	59,15	40,70	
73,0	60,40	41,60	
84,1	64,60	44,70	

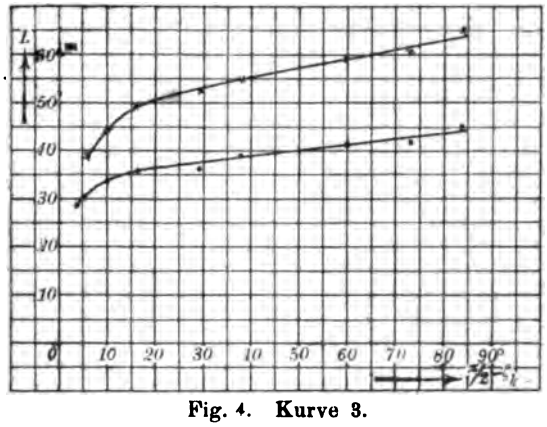


Fig. 4. Kurve 3.

Tabelle 4.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
3,7°	—	25,40 m	8. Juli 1917
6,8	37,60 m	30,00	Sonne geht stark elliptisch
10,6	43,30	33,70	auf
17,7	45,15	33,80	Horizont diesig
29,4	47,80	35,00	Himmel fleckig
38,3	54,00	36,40	
52,5	59,80	37,20	
65,6	59,10	38.20	
78,3	59,00	38,40	
84,0	60,10	38,00	

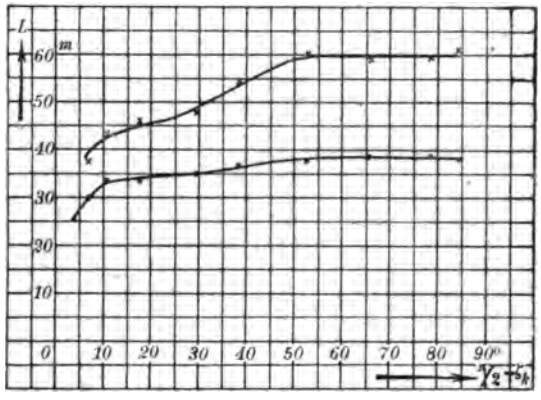


Fig. 5. Kurve 4.

Tabelle 5.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
4,2°	39,70 m	27,25 m	9. Juli 1917
7,2	41,00	30,60	Klar
11,2	42,10	30,50	Mond tagsüber gut
17,8	46,80	32,50	sichtbar
28,2	48,60	33,20	
41,7	51,20	34,80	
51,4	52,90	36,40	
66,0	56,40	39,60	
79,0	59,40	44,90	
83,9	59,20	44,70	

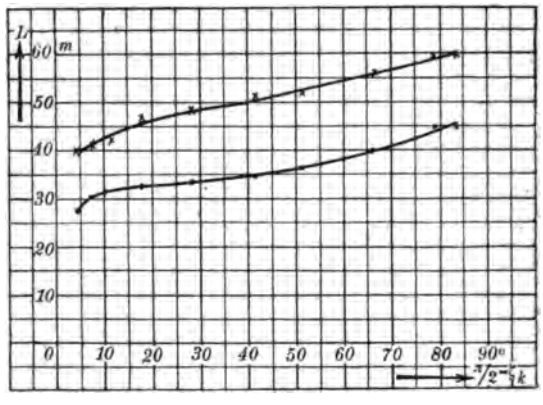


Fig. 6. Kurve 5.

Tabelle 6.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
4,4°	39,50 m	27,60 m	10. Juli 1917
5,8	40,15	28,80	
10,5	42,60	30,50	
18,5	43,10	32,90	Tagsüber immer wachsende Sichtigkeit
25,8	45,90	33,20	
37,7	46,60	35,00	
53,4	51,00	36,00	
65,0	51,35	36,00	
83,7	53,60	43,70	

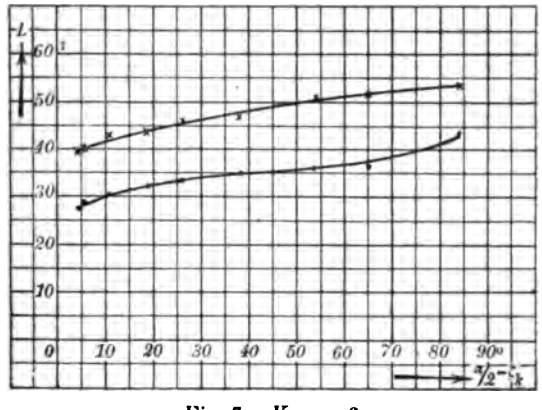


Fig. 7. Kurve 6.

Tabelle 7.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	$L_U \times 1{,}34$	Mittel aus L_D und $L_U \times 1{,}34$	$\frac{1}{\text{Mittel}} \times 10^2$	Bemerkungen
3,8°	29,60 m	24,70 m	33,1 m	31,4 m	3,19	11. Juli 1917
7,2	36,60	27,30	36,5	36,5	2,74	Südwetter
11,2	39,60	30,65	41,3	40,4	2,47	Sonne erscheint
20,3	42,20	30,80	41,4	41,8	2,39	weiß beim Auf-
29,5	45,20	34,45	46,1	45,6	2,19	gehen
45,0	47,60	35,20	47,3	47,4	2,11	Feine hohe Zirren
63,3	48,35	36,65	49,3	48,8	2,05	
76,6	51,15	39,90	53,5	52,3	1,91	
83,7	52,25	40,80	54,8	53,5	1,87	

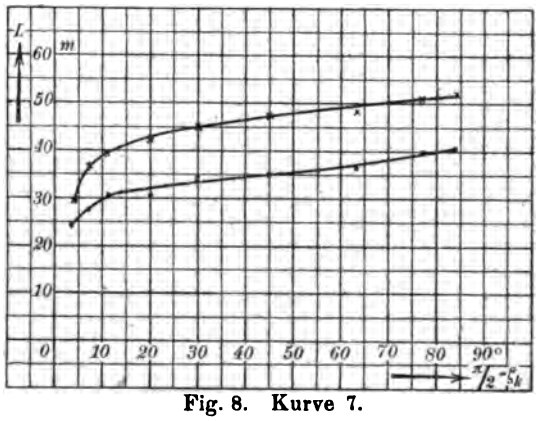


Fig. 8. Kurve 7.

Tabelle 8.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
2,3°	27,25 m	18,60 m	12. Juli 1917
4,2	35,50	23,80	Südwetter
8,0	36,80	—	Feine hohe Zirren
9,2	—	25,30	
13,4	38,00	30,80	
22,4	44,60	31,60	
31,4	44,80	33,40	
52,2	46,80	36,40	
68,5	48,50	36,70	Dicht über dem Meer
77,5	51,65	37,75	bildet sich eine Wolken-
83,6	52,15	40,90	schicht
39,3°	42,80 m	31,00 m	13. Juli 1917
51,8	45,10	33,10	Himmel weißlich. Fernsicht
76,7	47,80	35,90	verschleiert. Hohe feine
83,5	46,70	35,20	Zirren

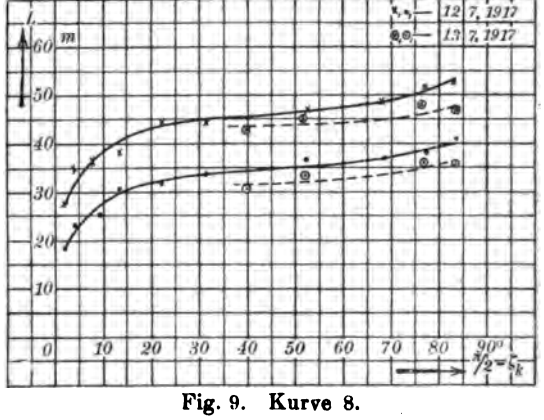


Fig. 9. Kurve 8.

Tabelle 9.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
2,5°	22,50 m	—	16. Juli 1917
4,7	—	21,70 m	Sonne geht elliptisch auf.
6,4	33,80	22,20	Himmel weißlich. Untere
11,6	36,60	30,00	Schichten aufklärend
21,0	39,30	32,00	
37,0	45,90	33,00	
50,9	46,40	34,60	
63,8	48,50	35,90	
77,0	51,60	36,90	
82,9	51,60	39,60	Aufklärend

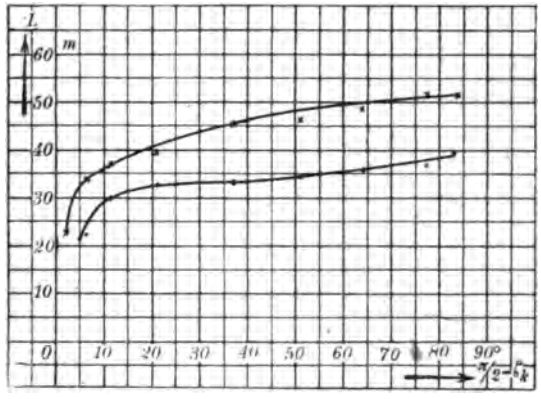


Fig. 10. Kurve 9.

Tabelle 10.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	$L_U \times 1{,}34$	Mittel aus L_D und $L_U \times 1{,}34$	$\frac{1}{\text{Mittel}} \times 10^2$	Bemerkungen
1,6°	13,40 m	—	—	13,4 m	7,47	17. Juli 1917
2,4	—	15,60 m	20,9 m	20,9	4,79	Größere Sichtweite
3,5	23,25	—	—	23,2	4,30	als tags vorher
3,9	—	20,80	27,9	27,9	3,59	Spitzen von Gran
8,0	34,30	26,30	35,2	34,8	2,87	Canaria (etwa
12,0	39,50	28,50	38,3	38,9	2,57	100 km Entfernung)
21,0	45,05	31,10	41,8	43,4	2,31	sichtbar
36,0	45,35	34,10	45,9	45,6	2,19	Außer Wolkenbank
57,2	48,50	35,85	48,0	48,2	2,07	von 1° Höhe
71,2	50,40	36,95	49,5	49,9	2,00	wolkenfrei
80,3	50,70	39,20	52,7	51,7	1,94	
82,7	52,30	40,30	54,0	53,1	1,88	

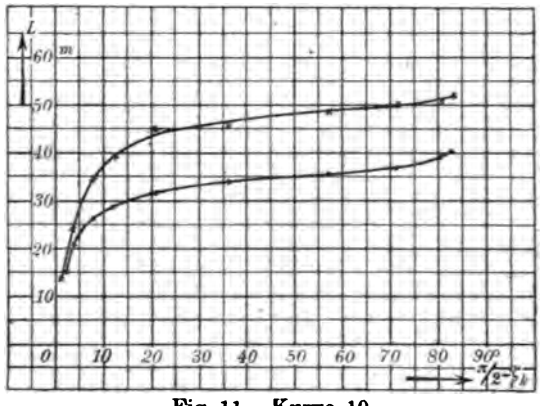


Fig. 11. Kurve 10.

Tabelle 11.

$\frac{\pi}{2} - \varphi$	L_D	L_U	Bemerkungen
1,9°	18,75 m	—	18. Juli 1917
2,7	—	17,50 m	Sehr klar
3,4	—	18,10	Farbe des Himmels
3,8	22,60	—	gesättigt
7,6	32,70	23,60	
14,7	37,00	29,80	
21,3	40,70	29,40	
29,1	43,80	30,90	
39,5	46,80	33,80	
56,2	47,30	34,30	
71,0	49,30	35,10	
81,0	51,90	40,50	
82,6	53,50	36,50	

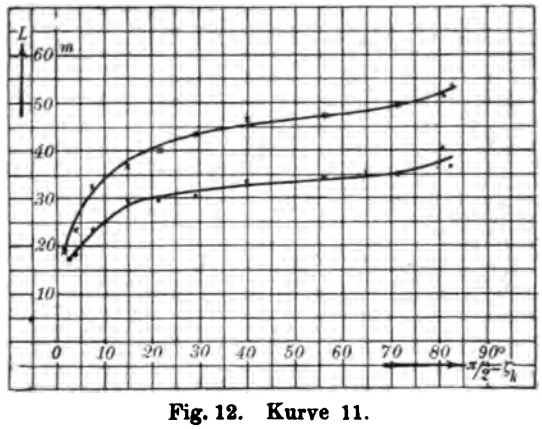


Fig. 12. Kurve 11.

Tabelle 12.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_s$	L_D	L_U	Bemerkungen
1,0° vorm.	12,60 m	—	21. Juli 1917
1,9	—	14,50 m	Ort: Izaña, 2300 m ü. d. M.
4,0	35,55	—	b_p = 605 mm Hg
5,0	—	25,70	Sonne geht oval auf, daher
7,6	39,00	26,40	sind die frühen Werte
20,1	43,80	33,90	unsicher
36,5	46,60	34,20	Pik klar sichtbar. Gran
52,0	49,65	36,60	Canaria nicht sichtbar
64,6	52,80	38,20	Die unteren Schichten sind
77,9	53,70	36,60	deshalb dunstig anzunehmen
81,8	53,80	36,80	
72,3° nachm.	50,40	34,60	Tagesüber wachsende
56,4	43,40	32,20	Sichtigkeit
39,6	41,20	32,30	
23,3	38,70	31,30	
13,6	37,60	28,60	
5,6	36,65	27,10	
2,6	32,60	—	
2,0	30,00	—	
1,75	26,60	—	Sonne oval beim Untergang,
1,4	17,50	—	daher auch diese späten
0.5	10,40	—	Werte unsicher

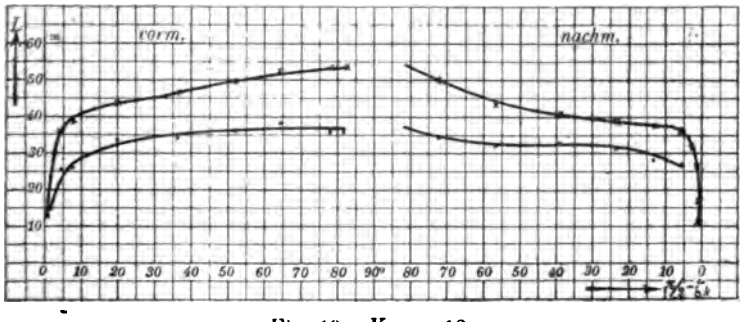


Fig. 13. Kurve 12.

Tabelle 13.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	L_D	L_U	Bemerkungen
2,1° vorm.	11,30 m	—	22. Juli 1917
3,0	20,30	—	Ort: Izaña[1])
5,7	—	23,70 m	
6,4	38,20	30,00	Horizont im SO dunstig
17,7	43,30	32,20	N-Quadrant sichtig
28,0	47,90	34,80	Blau des Himmels gesättigt
38,6	49,60	35,80	
50,5	49,90	34,10	
63,4	49,70	36,10	Vereinzelte Kumulibildung
76,1	50,00	33,00	über dem Pik
81,8	49,20	34,00	
71,0° nachm.	—	32,70	
55,0	—	32,90	Haidingers Büschel bei ge-
43,2	—	32,30	sättigtem Blau deutlich
27,1	—	30,60	
16,4	—	30,80	
7,0	—	28,65	
6,0	—	26,70	

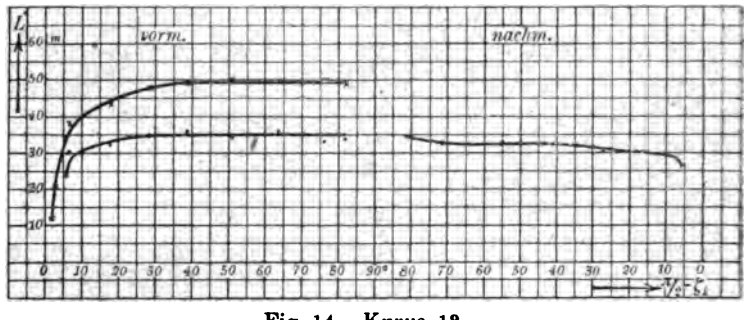


Fig. 14. Kurve 13.

§ 5. Durchdringungstheorie und ihre Prüfung an den Beobachtungen.

Wir wollen annehmen, daß die wahrgenommene Größenänderung eine physikalische Ursache besitzt, daß also *dem subjektiv als größer aufgefaßten Gestirn auch etwas objektiv Größeres zugrunde liegt.* Der vom Gestirn nach dem Auge konvergierende lichterfüllte Strahlenkegel schneidet aus dem lufterfüllten

1) Dem Direktor des Izaña-Observatoriums Sr. D. Francisco del Junco haben wir für die Gastfreundschaft zu danken, die es uns ermöglicht hat, diese Beobachtungen auszuführen.

Gewölbe einen leuchtenden Kegel, dessen Projektion auf eine zur Blickrichtung (Kegelachse) normale Ebene eine Kreisfläche ist. Diese Kreisfläche soll die Stelle sein, an der wir das Gestirn sehen.

Es sei HZH (Fig. 15) das vom Beobachter in O gesehene Himmelsgewölbe. $N_1 Q_1$ und $N_2 Q_2$ sind die in einem größten

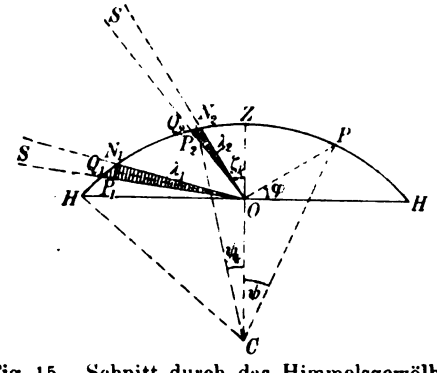


Fig. 15. Schnitt durch das Himmelsgewölbe.

Kreis der Kugelkalotte liegenden „vertikalen Durchmesser" zweier Durchdringungsstellen der Lichtkegel in zwei verschiedenen Höhen über dem Horizont, $N_1 P_1$ und $N_2 P_2$ sind deren Projektionen auf Ebenen, die senkrecht zu den entsprechenden Blickrichtungen stehen.

Denken wir uns den Kalottenbogen HZ in n gleiche Teile geteilt, so schneiden gleiche Winkel, die O zum Scheitel haben, in verschiedenen Höhen über H eine verschieden große Anzahl der n Teile ab. Nur für den Halbkreis über HOH ist deren Anzahl in allen Höhen gleich. Dem Zentriwinkel ψ_k sollen k solcher Teile, von Z aus gezählt, entsprechen. Ist der Zentriwinkel $HCZ = 2\psi$, so gilt

$$k : n = \psi_k : 2\psi.$$

Wird ψ_k wie ψ von Z aus gerechnet, so zählen auch die k in diesem Sinne. Rechnet man die Teile von H aus und bezeichnet sie mit k', so ist $n - k = k'$. Zwischen dem Zentriwinkel ψ des geschätzten Halbwertes ψ des Himmelgewölbes, der Höhe $\varphi_k = \frac{\pi}{2} - \zeta_k$ und dem zu dieser Höhe gehörigen Zentriwinkel ψ_k besteht die Beziehung

$$\cos(\varphi_k + \psi_k) = \cos 2\psi \cos \varphi_k,$$

wo ψ durch den für das betreffende Gewölbe (Kalotte) in Betracht kommenden Halbwertwinkel gegeben ist. Das aus dieser Gleichung für ein bestimmtes φ_k berechnete ψ_k in die vorangehende Beziehung eingesetzt, ergibt k und k'.

Eine bestimmte Anzahl Grade $\varphi_{k(1)} - \varphi_{k(2)}$ schneide $k'(1) - k'(2) = \Delta k'$ Teile ab. Im gleichen Längenmaß wie die $\Delta k'$ lassen sich die Projektionen $\Delta k_p'$ dieser Längen auf eine Ebene, die zur Blickrichtung senkrecht steht, ausdrücken. Da der projizierende Winkel $QNP = R - (\varphi_k + \psi_k)$ ist, so gilt

$$NP = NQ \cdot \sin(\varphi_k + \psi_k),$$
$$\Delta k_p' = \Delta k' \cdot \sin(\varphi_k + \psi_k).$$

Für zwei verschiedene Höhen über dem Horizont verhalten sich diese Projektionen wie ihre Abstände λ_1 und λ_2 von O

$$N_1 P_1 : N_2 P_2 = \lambda_1 : \lambda_2.$$

Die vom Beobachter beim Schätzen der Gestirngrößen gemessenen Abstände L werden um so kleiner gemessen, je größer diese Projektionen sind, und zwar gilt nach dem vorangehenden 3. Abschnitt

$$N_1 P_1 : N_2 P_2 = L_2 : L_1$$

und weil

$$N_1 P_1 : N_2 P_2 = \Delta k'_{1,p} : \Delta k'_{2,p},$$

so folgt

$$\lambda_1 : \lambda_2 = \Delta k'_{1,p} : \Delta k'_{2,p} = L_2 : L_1.$$

Die letztere Beziehung wollen wir dazu benutzen, die gemessenen L mit denen $\left(= \frac{1}{\Delta k_p}\right)$ zu vergleichen, welche resultieren, wenn unsere Anschauung richtig ist, d. h. die Projektionen der Durchdringungsstellen ihrer Größe nach durch das gerade vorhandene reelle Himmelsgewölbe bedingt werden.

In der folgenden Tabelle 14 ist dieser Vergleich für einen schönen Tag (4./6. 1917) durchgeführt. Die $\Delta k'$ und $\Delta k_p'$ sind von 10 zu 10° berechnet, wobei $n = 1000$ angenommen ist. An diesem Tage war das Himmelsgewölbe durch einen Halbwert $\varphi = 32°$ charakterisiert. 32° entspricht genau dem Wert, den wir als Mittel einer großen Anzahl von Beobachtungen für einen hiesigen Sommertag angegeben haben.[1])

1) H. Dember und M. Uibe, 3 Bericht; Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 144. 1917. Ann. d. Phys. 55. S. 387. 1918.

Tabelle 14.

φ_k	$\Delta k'$	$\Delta k_p'$	L gerechnet[1]) $= \frac{1}{\Delta k_p'} \times 3430$	L gemessen mit 40er Scheibe auf 29,8er umgerechnet	L gemessen mit 29,8er Scheibe	Mittel
0—10°	185,1	142,4	24,0	25,0 m	24,0 m	24,5 m
10—20	157,5	123,6	27,8	29,0	28,3	28,7
20—30	133,4	108,5	31,5	32,0	32,8	32,4
30—40	113,4	96,5	35,5	35,3	36,9	36,1
40—50	98,2	87,5	39,2	38,9	40,1	39,5
50—60	87,0	80,9	42,4	41,2	42,8	42,0
60—70	79,2	76,2	44,8	43,8	44,8	44,3
70—80	74,2	73,2	46,7	45,1	45,9	45,5
80—90	72,0	71,9	47,7	—	—	—

Die Werte L_U und L_D beider Beobachter sind in der Tabelle durch Division der L_D mit 1,45 vereinigt.

Die Übereinstimmung der gerechneten und gemessenen Zahlen ist innerhalb der Schätzungsunsicherheit vollständig. *Hierdurch ist wahrscheinlich gemacht, daß an günstigen Tagen die Projektion des erleuchteten Luftkegels auf eine zur Blickrichtung senkrechte Ebene, die sich an der Grenze des sichtbaren Himmelgewölbes befindet, als Gestirn der Größe nach wahrgenommen wird.*

Zum gleichen Resultat führt die Diskussion der Mondbeobachtungen (vgl. Fig. 16). Sie kamen in derselben Weise zur Ausführung wie an der Sonne, nur wurden die Vergleichsscheiben nachts von einer Lampe durchscheinend erleuchtet. Die Lampe trug einen diffus zerstreuenden Schirm, so daß die Leinwandscheiben gleichmäßig hell erschienen.

Die am 4.—5. Juni ausgeführten Beobachtungen zeigen deutlich, wie in der ersten Hälfte der Nacht die beobachteten Werte sich mit Hilfe eines Gewölbes darstellen lassen, dessen Halbwert $\varphi = 33^0$ ist, die zweite Hälfte mit einem höheren. Geschätzt wurden bei einer Mondhöhe $\varphi_k = 37{,}5^0$ ein Halbwert von $33{,}4^0$ und bei absteigendem Mond bei $\varphi_k = 29{,}5^0$ eine $\varphi = 35{,}7^0$. Der Tageshalbwert am 4./6. betrug 32^0.

1) Der Zahlenfaktor, mit dem $\frac{1}{\Delta k_p'}$ hier und in folgenden Tabellen multipliziert ist, ist so gewählt, daß das Produkt mit dem Mittel der gemessenen L direkt verglichen werden kann.

Die Durchdringung des Mondlichtkegels liegt beim Aufgang des Mondes auf einem Gewölbe, das nur wenig höher ist als das Tagesgewölbe. Das der Vollmondnacht entsprechende Himmelsgewölbe tritt erst ein, nachdem die vom Sonnenlicht

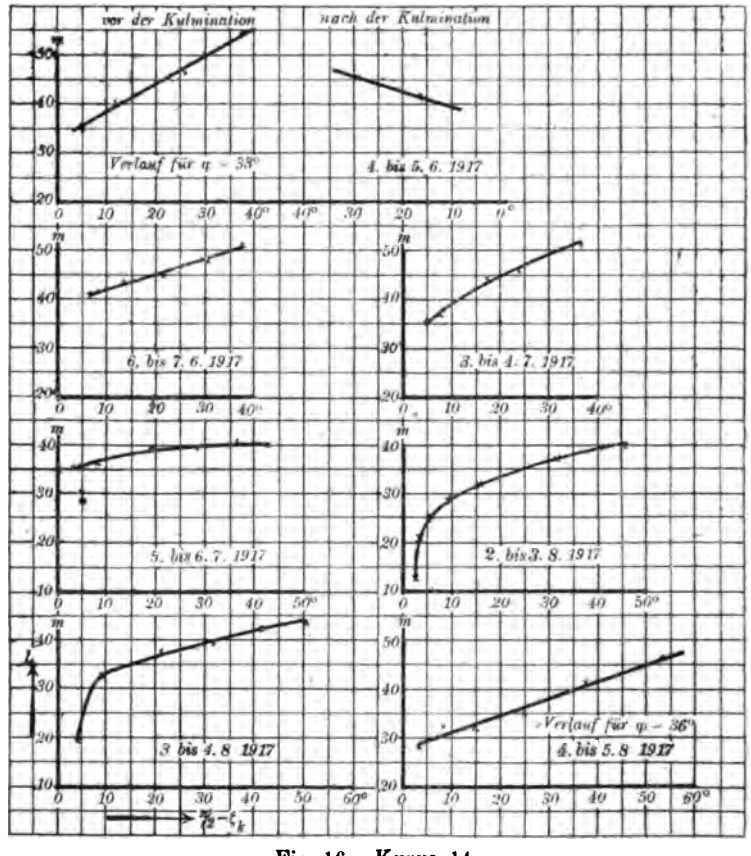


Fig. 16. Kurve 14.

hervorgerufene Dämmerung verschwunden ist. In der Nacht vom 4. auf 5./8. war der Halbwert des Gewölbes $\varphi = 36^0$, und die Mondgrößen, die hier geschätzt wurden, entsprechen, wie der Verlauf der Kurve zeigt, diesem Wert. Der 4. Juni, 5. Juni und 4. August waren Tage mit geringem Dunst am Horizont, was sich in den Kurven durch den fast geradlinigen Verlauf und die geringe Steigung beim Mondaufgang kennzeichnet.

Tabelle 14a.

φ_k	$\Delta k'$	$\Delta k_p'$	$\frac{1}{\Delta k_p'} \cdot 5170$	L gemessen	Bemerkungen
0—10°	178	141	36,6	35,8 m	4.—5. Juni 1917
10—20	154	124	41,7	41,3	Geschätzter Halbwert
20—30	114	110	47,0	47,0	$\varphi = 33{,}4°$; die Rechnung
30—40	89	99	52,1	52,4	ist für $\varphi = 33{,}0°$ durchgeführt

Tabelle 14b.

Δ_k	$\Delta k'$	$\Delta k_p'$	$\frac{1}{\Delta k_p'} \cdot 4139$	L gemessen	Bemerkungen
0—10°	160	138	29,9	29,8 m	4.—5. August 1917
10—20	142	124	33,4	33,0	Halbwert für mittleren
20—30	128	114	36,3	36,4	Nachthimmel mit Mond-
30—40	114	104	39,8	39,8	schein $\varphi = 36{,}7°$
40—50	104	97	42,6	43,2	Die Rechnung ist für
50—60	95	91	45,5	46,7	$\varphi = 36{,}0°$ durchgeführt

In den vorstehenden Tabellen 14a und 14b sind für den 4.—5. Juni und 4.—5. August 1917 die berechneten $\frac{1}{\Delta k_p'}$ mit den gemessenen L zusammengestellt.

Trotzdem die Mondvergleichungen viel schwieriger sind als die Beobachtungen an der Sonne, ist die Übereinstimmung eine gute.

§ 6. Darstellung durch die Sichtweiten.

Die vorangehenden Ausführungen stützen sich auf die Annahme, daß das durch den Halbwert φ charakterisierte Himmelsgewölbe auch in der Nähe des Gestirns vorhanden sei. Im Bericht Nr. 6[1]) haben wir darauf aufmerksam gemacht, daß dies im allgemeinen nur an sehr klaren Tagen der Fall ist, da sonst durch die besonders in der Nähe der Sonne vermehrten Helligkeiten die Sichtweiten und damit die Gestalt des Himmels beeinflußt werden. Die Zahlen der Tabelle 4 vom 8. Juli 1917, einem unruhigen Tage, lassen deutlich erkennen, welchen Einfluß ein Kondensationsvorgang in der Atmosphäre auf die scheinbare Größe der Gestirne ausübt.

1) H. Dember und W. Uibe, Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes. Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. S. 391. 1917.

Dasselbe zeigen die Beobachtungen vom 13/7. (Tabelle 8). Bei beginnender Trübung, die mit dem Auge als solche nicht erkennbar zu sein braucht, wächst die scheinbare Größe an. Bemerkenswert ist in dieser Hinsicht auch die Nachmittagskurve vom 21/7. 1917 (Tabelle 12 und Fig. 13), wo für die Entfernungen L am Nachmittag bei gleichen Sonnenhöhen kleinere Werte gemessen wurden als am Vormittage, was einer größeren scheinbaren Gestirngröße entspricht.

Die Projektionen (NP) der Durchdringungsstellen sind um so größer, desto weiter sie vom Beobachter entfernt sind,

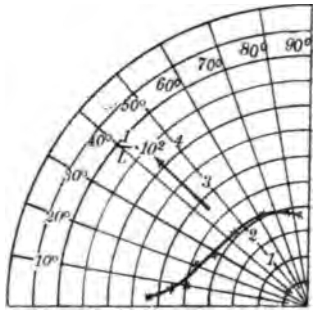


Fig. 17. Kurve 7a.

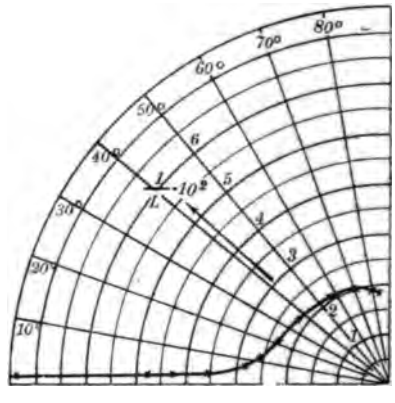


Fig. 18. Kurve 10a.

$\lambda_1 : \lambda_2 = \Delta h'_{1,p} : \Delta h'_{2,p}$, und da sich weiter verhält $\lambda_1 : \lambda_2 = L_1 : L_2$, so geben die reziproken Werte der gemessenen L als Radiivektoren unter dem Höhenwinkel φ_k von 0 aus abgetragen eine Bahn, auf der sich die Durchdringungsstellen bzw. ihre Projektionen abzeichnen. Diese so gezeichnete Bahn hat als Himmelsgewölbe in keinem Zeitpunkt bestanden und darf nicht mit der Form des Himmelgewölbes in einem bestimmten Zeitpunkt verwechselt werden. Diese Bahn ist nur die Verbindungslinie der Abstandsendpunkte von 0 der projizierten Durchdringungsstellen, oder sie ist nur der Ort, den die Durchdringungsstellen tagsüber eingenommen haben. In Fig. 17 und 18 (Kurve 7a und 10a) sind diese Bahnen mit Hilfe der Mittelwerte von $1/L$ der Tabellen 7 und 10 auf diese Weise dargestellt.

Diese Bahnen müssen — wenn unsere im vorigen Bericht und die hier entwickelten Anschauungen richtig sind — mit denjenigen identisch sein, welche man durch Zuhifenahme der Sichtweiten errechnet, die durch photometrische Messungen bestimmt werden oder mit anderen Worten, es soll die Entfernung der projizierten Durchdringungsstelle NP von O, welche aus dem durch Schätzung gewonnenen Scheibenstand L bestimmt ist, mit derjenigen identisch sein, die sich aus der photometrisch gemessenen Sichtweite errechnet.

Zwischen den Sichtweiten S und R zweier Himmelsstellen und ihren Helligkeiten H_1 und H_2 besteht die Beziehung[1])

$$S : R = \sqrt{H_1} : \sqrt{H_2}.$$

Um vergleichbare Werte für die Sichtweiten zu bekommen, und um mit diesen die *jeweilige* Lage der projizierten Durchdringungsstellen des vom Gestirn ausgehenden, die sichtbare Atmosphäre durchschneidenden Lichtkegels zu erhalten, haben wir nicht die in der Nähe der Sonne gefundenen — jedesmal auf den Zenit als Einheit bezogenen — Helligkeiten allein benutzt, sondern die Helligkeiten in Sonnennähe auf eine mittlere Helligkeit des Gesamthimmels bezogen. Zur Auswertung dieser mittleren Helligkeit dienten in jedem Falle rund 45 photometrische Einzelmessungen[2]), die systematisch über dem ganzen Himmel verteilt worden waren. Die Wurzeln der so erhaltenen relativen Helligkeiten, als Sichtweiten vom Beobachtungspunkt O aus unter dem zugehörigen Höhenwinkel φ_h abgetragen, geben die gesuchte Bahn.

Nennen wir H_n die Helligkeit in der Sonnennähe und $\overline{H}_m$ das Mittel aus den Helligkeiten des Gesamthimmels, zur gleichen Zeit wie H_n gemessen, so ist die Sichtweite in der Nähe der Sonne

$$S = \sqrt{\frac{H_n}{H_m}}.$$

Die Tabellen 15 und 16 geben die für die Bahnkonstruktion benutzten Helligkeits-Mittelwerte und die Kurven 15 und 16 ihre graphische Darstellung wieder. Die photometrischen

1) Vgl. Bericht Nr. 6, § 2. Ber. d. math.-physikal. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 69. 395. 1917. Ann. d. Phys. 55. S. 387. 1918.

2) M. Uibe, Leipz. Inaug.-Diss. 1919. Abhdlgn. d. math.-physikal. Kl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 35. Nr. 6. 1918.

Messungen sind an zwei typischen Sommertagen 1916 ausgeführt.

Tabelle 15.

22. Juni 1916 Mittleres φ_k	Relat. Helligkeit 10° über der Sonne im Sonnenvertikal $= H_n$	$\sqrt{H_n}$	Mittlere Helligkeit des Gesamthimmels $= \overline{H_w}$	$\sqrt{\overline{H_w}}$	$\sqrt{\frac{H_n}{\overline{H_w}}} \times 1{,}50$ [1])
4,0° vorm.	21,2	4,60	3,43	1,85	3,78
20,1	8,40	2,90	3,39	1,84	2,37
35,0	5,12	2,26	2,70	1,64	2,07
56,7	3,00	1,73	1,67	1,29	2,01
74,6	1,80	1,34	0,83	0,91	2,21
84,0	0,75	0,87	0,42	0,65	2,01
72,6 nachm.	1,50	1,22	0,82	0,89	2,04
54,6	2,65	1,63	1,64	1,28	1,91
35,3	6,20	2,49	2,46	1,57	2,37
22,8	8,90	2,98	2,81	1,68	2,66

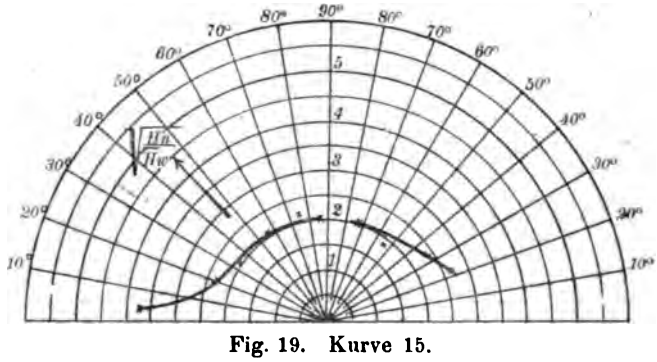


Fig. 19. Kurve 15.

Tabelle 16.

23. Juni 1916 Mittleres φ_k	Relative Helligkeit 10° über der Sonne im Vertikal $= H_n$	$\sqrt{H}$	Mittlere Helligkeit des Gesamthimmels $= \overline{H_w}$	$\sqrt{\overline{H_w}}$	$\sqrt{\frac{H_n}{\overline{H_w}}}$
0° vorm.	30,3	5,50	4,00	2,00	2,75
19,7	7,61	2,76	3,36	1,83	1,57
34,8	4,83	2,20	2,57	1,60	1,38
59,8	2,45	1,57	1,52	1,23	1,27
74,4	1,35	1,16	0,94	0,97	1,19
84,5	0,78	0,88	0,47	0,69	1,27

1) Der Faktor 1,50 ist so gewählt, daß ein Vergleich mit der Kurve auf Kurve Fig. 10a ohne weiteres möglich ist.

Ein Vergleich der Kurven 15 und 16 mit den aus den gemessenen L konstruierten 7a und 10a läßt den gleichen Charakter des Verlaufes erkennen.

Die photometrischen Messungen am 22. Juni 1916 (Tab. 15) und die Größenschätzungen am 17. Juli 1917 (Fig. 18) sind an zwei Tagen vorgenommen worden, die nach allen Bemerkungen des Beobachtungsjournals als gleich in bezug auf meteorologische Verhältnisse, vor allem auf Sichtigkeit der Luft, anzusehen sind. Hier ergibt sich nun quantitative Übereinstimmung der Kurven, wie es die folgende Tabelle 17 zeigt, wo die photometrisch gemessenen Sichtweiten ϱ mit den reziproken Werten der bei der Schätzung gefundenen L zusammengestellt sind.

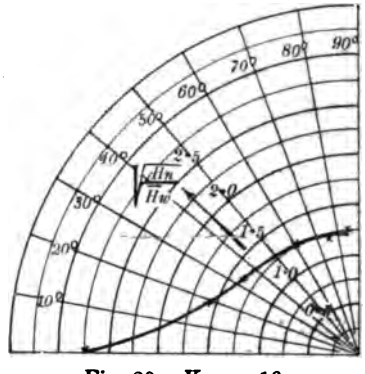


Fig. 20. Kurve 16.

Tabelle 17.

$\frac{\pi}{2} - \zeta_k$	ϱ	$\frac{1}{L}$
5°	3,37	3,25
10	2,75	2,70
20	2,30	2,35
30	2,18	2,23
40	2,10	2,13
50	2,07	2,08
60	2,04	2,05
70	2,04	2,00
80	2,03	1,94

Diese quantitative Übereinstimmung gibt die Möglichkeit, aus photometrischen Messungen der Himmelshelligkeit, welche

die Sichtweite bestimmt, die vom Auge geschätzte Vergrößerung der Sonne zu berechnen.

§ 7. Ergebnis.

Den sichtbaren Größenänderungen von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont liegen physikalische Größen und Größenveränderungen zugrunde.

Die Möglichkeit der Durchführung dieser Untersuchung verdanken wir Mitteln, welche die kartellierten Deutschen Akademien, sowie die Solvaystiftung zur Verfügung gestellt haben.

Güímar auf Teneriffa, August 1917.

(Eingegangen 28. Februar 1919.)

4. *Die reversible Permeabilität auf der idealen Magnetisierungskurve*[1]; *von Richard Gans.*

§ 1. *Einleitung.* Vor einigen Jahren habe ich eine Größe definiert[2]), die ich reversible Permeabilität genannt habe. Ich habe dieselbe auf der jungfräulichen Magnetisierungskurve, dem aufsteigenden sowie dem absteigenden Hysteresisast gemessen und gefunden, daß ihr Wert, praktisch von der magnetischen Vorgeschichte unabhängig, eine reine Funktion der Magnetisierung ist. Diese Funktion habe ich später analytisch angeben können.[3])

Inzwischen sind die interessanten Untersuchungen von Steinhaus und Gumlich[4]) veröffentlicht worden, in denen ein Verfahren angegeben wird, eine von Hysteresis freie Magnetisierungskurve, die sogenannte ideale Magnetisierungskurve zu erzeugen.

Es schien mir von Interesse, zu sehen, ob auf dieser von den üblichen Magnetisierungskurven gänzlich verschiedenen Kurve die reversible Permeabilität auch denselben Wert als Funktion der Magnetisierung hat, weil im bejahenden Falle die von mir definierte Größe eine noch allgemeinere Bedeutung haben würde.

Zu dem Zwecke habe ich von vier Materialien, hartem Stahl, weichem Stahl, weichem Eisen und Nickel, die gewöhnliche und die ideale Magnetisierungskurve aufgenommen sowie

1) Vgl. auch R. Gans, Contribución al estudio de las ciencias, Universidad Nacional de La Plata **2.** S. 145. 1918.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **27.** S. 1. 1908; **29.** S. 301. 1909; **33.** S. 1065. 1910; Verh. d. Deutschen phys. Ges. **12.** S. 802. 1910; Phys. Zeitschr. **11.** S. 988. 1910.

3) R. Gans, Phys. Zeitschr. **12.** S. 1053. 1911.

4) W. Steinhaus u. E. Gumlich, Verh. d. D. Physik. Ges. **17.** S. 369. 1915.

die reversible Permeabilität auf der jungfräulichen und auf der idealen Kurve beobachtet. Sie auch auf den Hysteresiskurven zu messen, war überflüssig, da ja bereits früher nachgewiesen war, daß jene Größe auf den Hysteresisästen denselben Wert hat, wie auf der Nullpunktskurve.

Die wichtigsten Ergebnisse der nachfolgenden Messungen sind, daß die ideale Kurve die von Steinhaus und Gumlich angegebene Form hat, insbesondere, daß diese Kurve im Nullpunkte senkrecht zur Abszissenachse steht, entsprechend einer unendlich großen Anfangspermeabilität, und zweitens, daß die reversible Permeabiltät, als Funktion der Magnetisierung, in der Tat genau denselben Verlauf auf der Nullpunktskurve wie auf der idealen Kurve hat, so daß praktisch die reversible Suszeptibilität $\varkappa_r$ in jedem erreichbaren Punkte der MH-Ebene einen bestimmten durch die Parametergleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\varkappa_r}{3\varkappa_0} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\mathfrak{Sin}^2 x}, \\ \dfrac{M}{M_\infty} = \mathfrak{Ctg}\, x - \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

gegebenen Wert hat. In ihnen bedeutet $\varkappa_r$ die Anfangssuszeptibilität, M_∞ die Sättigungsmagnetisierung.

§ 2. *Die ideale Magnetisierungskurve.* Bekanntlich kann man ein ferromagnetisches Material durch abnehmende magnetische Wechselfelder entmagnetisieren, indem man mittels dieses Verfahrens die mehr oder weniger gerichteten Elementarmagnete in größtmögliche Unordnung bringt.

Überlagert man dagegen einem konstanten Magnetfelde ein auf Null abnehmendes Wechselfeld, so bleibt eine Magnetisierung übrig, die, wie Steinhaus und Gumlich gezeigt haben, eine eindeutige Funktion des Feldes H ist, unabhängig von der Art und Weise, wie H seinen Wert angenommen hat.

Um sie zu messen, bediente ich mich der magnetometrischen Methode, indem ich eine Magnetisierungsspule von 54 cm Länge und 2,94 cm innerem, 3,52 cm äußerem Durchmesser benutzte. Der Draht war hierbei auf einen Zylinder gewickelt, der aus zwei konzentrischen Glasröhren bestand, zwischen denen Wasser lief, um die Spule zu kühlen.

Die Spule hatte $n = 104{,}0$ Windungen pro Zentimeter, so daß das in ihrem Inneren erzeugte Magnetfeld den Wert

$$\frac{H}{i} = \frac{4\pi n}{10} = 130{,}7 \frac{\text{Gauss}}{\text{Ampere}}$$

besaß.

Diese Spule war mit einer Kompensationsspule in üblicher Weise in Serie geschaltet. Außerdem befanden sich im Stromkreise eine Akkumulatorenbatterie von 120 Volt, ein Präzisionsamperemeter, regulierbare Widerstände und ein Stromwender.

Schließlich haben wir noch eine Impedanz von kleinem Ohmschen Widerstande eingeschaltet, um zu verhindern, daß die Wechselströme der Entmagnetisierungsspule im Kreise der Magnetisierungsspule Ströme induzierten.

Im Inneren der Magnetisierungsspule befand sich das zu studierende ferromagnetische Material in der Form eines verlängerten Rotationsellipsoids.

Die Magnetisierungsspule war koaxial umgeben von einer Entmagnetisierungsspule von 59 cm Länge und 5,44 cm mittlerem Durchmesser; sie bestand aus 4 Lagen, und zwar befanden sich $n_0 = 22{,}20$ Windungen auf einem Zentimeter Länge, so daß die von einem Ampere erzeugte Feldstärke

$$\frac{H_0}{J_0} = \frac{4\pi n_0}{10} = 27{,}90 \frac{\text{Gauss}}{\text{Ampere}}$$

war. Diese Spule war mit einem Entmagnetisierungsapparat ähnlicher Konstruktion wie der von Steinhaus und Gumlich[1]) benutzte verbunden.

Die Messungen der Magnetisierung auf der idealen Kurve gestalteten sich nun folgendermaßen. Zuerst wurde das Ellipsoid entmagnetisiert, dann wurde in der Magnetisierungsspule ein schwacher Strom erzeugt, um das Ellipsoid zu magnetisieren. Dieser Strom ruft eine kleine Abweichung der Magnetometernadel hervor, die aber enorm zunimmt, wenn man dem konstanten Feld den Entmagnetisierungsprozeß über-

---

1) W. Steinhaus u. E. Gumlich, a. a. O. S. 375 u. E. Gumlich u. W. Rogowski, Ann. d. Phys. **84**. S. 245. 1911.

lagert. Dann verstärkt man das stationäre Feld, wendet von neuem das Entmagnetisierungsverfahren an und fährt so fort, bis man genügend Punkte der idealen Kurve beobachtet hat.

Die Feldstärken wurden natürlich wegen der endlichen Länge der Ellipsoide gemäß der Formel

$$H = \frac{4\pi n i}{10} - NM$$

korrigiert, wo N den Entmagnetisierungskoeffizienten bedeutet.

Die Ellipsoide waren dieselben wie die in Ann d. Phys. **33.** S. 1065 benutzten, jedoch hatten sich ihre magnetischen Eigenschaften im Laufe der Jahre etwas verändert.

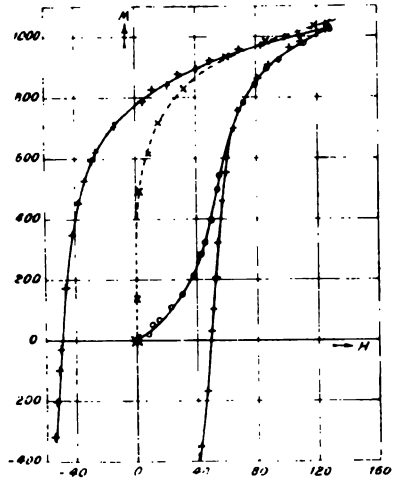
1. Gehärteter Remystahl.

Große Halbachse $A = 15{,}55$ cm; kleine Halbachse $B = 0{,}6625$ cm; Entmagnetisierungskoeffizient $N = 0{,}06496$; Volumen $V = 28{,}59$ cm³.

Nullpunktskurve.				Absteigender Hysteresisast.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
52,97	14,11	3,44	10,67	1023	194,7	66,5	128,2
109,4	30,05	7,11	22,94	1001	173,6	65,0	108,6
213,6	51,48	13,88	37,60	965,6	145,5	62,72	83,2
319,5	65,73	20,75	44,98	931,3	122,0	60,49	61,5
496,3	86,38	32,23	54,15	893,5	98,79	58,03	40,76
694,8	110,9	45,13	65,77	840,7	75,41	54,61	20,80
840,5	133,9	54,59	79,31	788,3	56,58	51,21	5,37
921,0	154,7	59,83	94,87	705,2	31,62	45,80	− 14,18
977,9	175,0	63,52	111,5	616,2	13,07	40,02	− 26,95
1023	195,1	66,50	128,6	524,7	0,0	34,30	− 34,30
				449,3	9,147	29,18	− 38,33
20,83	9,147	1,353	7,794	348,4	− 19,34	22,63	− 41,97
69,45	20,25	4,511	15,74	− 28,94	− 52,28	− 1,88	− 50,40
151,0	40,64	9,812	30,83	− 204,0	− 66,18	− 13,25	− 52,93
281,3	61,67	18,27	43,40	− 461,0	− 87,56	− 29,94	− 57,62
392,3	75,26	25,49	49,77	− 698,2	− 110,6	− 45,35	− 65,25
540,9	92,51	35,14	57,37	− 861,8	− 136,8	− 55,98	− 80,82
780,9	122,3	50,72	71,6	959,8	− 164,9	− 62,34	− 102,6
895,2	145,2	58,15	87,1	− 1023	− 193,6	− 66,5	− 127,1
956,1	164,2	62,10	102,1				
1023	195,5	66,45	129,0				

Aufsteigender Hysteresisast.				Ideale Kurve.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
− 1023	− 192,6	− 66,4	− 126,2	133,1	9,016	8,648	0,368
− 995,9	− 163,9	− 64,7	− 99,2	255,0	16,60	16,56	0,04
− 956,8	− 131,0	− 62,15	− 68,9	488,2	34,10	31,71	2,39
− 921,0	− 109,5	− 59,83	− 49,7	614,6	48,08	39,92	8,16
− 877,0	− 85,19	− 56,97	− 28,22	716,3	61,75	46,52	15,23
− 827,1	− 65,34	− 53,73	− 11,61	828,1	85,72	53,79	31,93
− 715,2	− 31,76	− 46,45	− 14,69	930,5	120,9	60,43	60,47
− 591,2	− 9,147	− 38,40	29,25	985,4	150,5	64,00	86,5
− 519,3	0,0	− 33,73	33,73	1037	185,8	67,38	118,4
− 401,2	+ 15,03	− 26,05	41,08	1047	195,5	68,05	127,4
− 171,6	35,55	− 11,15	46,70				
+ 98,97	57,37	− 6,428	50,94				
319,2	75,14	20,73	54,41				
551,3	95,39	35,81	59,58				
757,0	117,0	49,17	67,8				
904,8	146,7	58,78	87,9				
980,4	173,6	63,68	109,9				
1023	196,8	66,45	130,4				

Die Resultate sind graphisch in Fig. 1 dargestellt.



Gehärteter Remystahl.

⊙ Nullpunktskurve + Hysteresiskurve × Ideale Kurve

Fig. 1.

2. Geglühter Remystahl.

$A = 16{,}04\,\text{cm}$; $B = 0{,}660\,\text{cm}$; $N = 0{,}06138$; $V = 29{,}32\,\text{cm}^3$.

Nullpunktskurve.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
98,12	15,81	6,03	9,78
383,4	38,03	23,54	14,49
778,5	68,08	47,79	20,29
1000,0	91,47	61,42	30,05
1139,0	127,1	69,92	57,18
1200,0	161,4	73,72	87,68
1247,0	196,3	76,60	119,7
48,35	9,15	2,97	6,18
269,1	29,27	16,52	12,75
600,5	53,32	36,86	16,46
902,4	78,41	55,40	23,01
1095	108,3	67.22	41,08
1180	142,7	72,44	70,26
1231	181,9	75,58	106,3

Absteigender Hysteresisast.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
1243	193,3	76,3	117,0
1222	172,5	75,01	97,5
1199	143,7	73,57	70,1
1173	125,3	72,02	53,3
1113	95,52	68,32	27,20
1052	71,61	64,59	7,02
958,8	52,66	58,86	− 6,20
440,3	15,68	27,03	− 11,35
201,9	0,0	12,40	− 12,40
68,3	− 9,147	4,191	− 13,34
− 51,2	− 16,07	− 3,144	− 12,93
− 338,2	− 36,59	− 20,76	− 15,83
− 585,5	− 52,93	− 35,94	− 16,99
− 926,6	− 80,63	− 56,89	− 23,74
− 1106	− 110,6	− 67,87	− 42,7
− 1200	− 153,5	− 73,72	− 79,8
− 1245	− 193,9	− 76,42	− 117,5

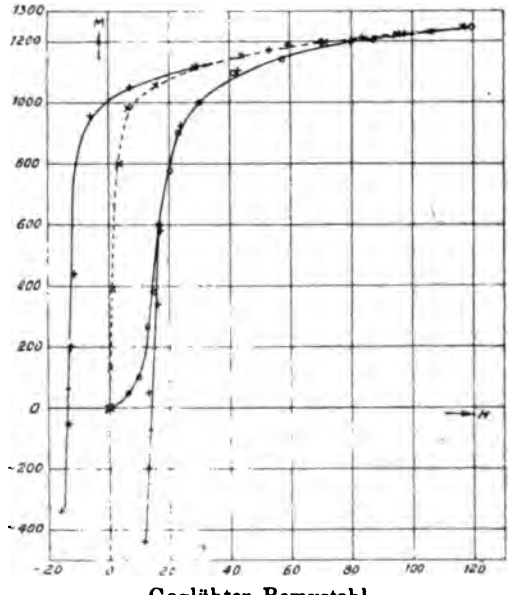
Aufsteigender Hysteresisast.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
− 1245	− 193,2	− 76,4	− 116,8
− 1214	− 158.1	− 74,56	− 83,5
− 1189	− 131,7	− 72,95	− 58,7
− 1149	− 105,9	− 70,52	− 35,4
− 1096	− 80,37	− 67,32	− 13,05
− 1037	− 62,59	− 63,65	+ 1,06
− 813,2	− 39,59	− 49,92	10,33
− 527,9	− 20,51	− 32,41	11.90
− 345,8	− 9,016	− 21,23	12,21
− 209,4	0,0	− 12,85	12,85
0,0	+ 13,46	0,0	13,46
+ 284,2	33,19	+ 17,45	15,74
482,7	46,51	29,64	16,87
789,6	69,13	48,48	20,65
1007	92,26	61,77	30,49
1147	126,5	70,36	56,1
1216	165,7	74,64	91,1
1247	194,7	76,60	118,1

Ideale Kurve.

M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
136,6	9,147	8,381	0,766
389,6	25,55	23,91	1,64
608,1	39,20	37,34	1,86
798,7	52,53	49,04	3,49
984,0	66,65	60,40	6,25
1053	80,31	64,66	15,65
1115	96,45	68,48	27,97
1149	114,6	70,55	44,0
1197	145,1	73,45	71,6
1225	170,4	75,19	95,2
1250	193,4	76,78	116,6

Die Resultate sind graphisch in Fig. 2 dargestellt.



Geglühter Remystahl.

⊙ Nullpunktskurve + Hysteresiskurve × Ideale Kurve

Fig. 2.

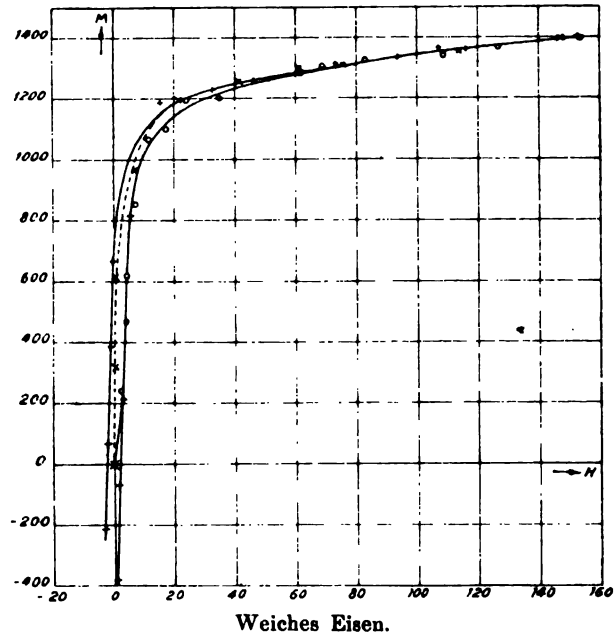
3. Weiches Eisen.

$A = 15{,}99$ cm; $B = 0{,}3995$ cm; $N = 0{,}02654$; $V = 10{,}69$ cm³.

Nullpunktskurve.				Absteigender Hysteresisast.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
212,0	9,018	5,627	3,391	1384	189,2	36,72	152,5
471,2	16,99	12,50	4,49	1360	152,3	36,09	116,2
851,3	30,06	22,59	7,47	1337	129,3	35,46	93,8
1102	46,79	29,23	17,56	1305	109,8	34,63	75,2
1203	67,05	31,95	35,10	1293	95,41	34,32	61,09
1281	95,81	34,01	61,80	1231	65,36	32,68	32,68
1337	144,2	35,46	108,7	1184	46,79	31,42	15,37
1395	190,3	37,03	153,3	667,4	17,26	17,71	− 0,45
				384,8	9,018	10,21	− 1,19
238,7	9,018	6,336	2,682	70,66	0,0	1,875	− 1,87
620,3	20,91	16,46	4,45	− 215,9	− 9,018	− 5,731	− 3,29
1067	39,99	28,30	11,69	− 817,4	− 27,84	− 21,69	− 6,15
1192	55,68	31,63	24,05	− 1293	− 95,81	− 34,33	− 61,48
1260	80,52	33,44	47,08	− 1317	− 110,2	− 34,94	− 73,3
1285	95,41	34,11	61,30	− 1364	− 143,0	− 36,20	− 106,8
1305	103,5	34,63	68,9	− 1403	− 190,1	− 37,22	− 152,9
1328	118,4	35,26	83,1				
1368	163,0	36,30	126,7				
1395	189,5	37,03	152,5				

Aufsteigender Hysteresisast.				Ideale Kurve.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	NM	H
−1403	−188,2	−37,22	−151,0	318,8	8,888	8,461	0,427
−1372	−151,5	−36,40	−115,1	614,1	17,12	16,29	0,83
−1326	−112,4	−35,20	− 77,2	1063	35,30	28,21	7,09
−1515	− 97,12	−34,90	− 62,22	1198	53,26	31,78	21,48
−1270	− 72,02	−33,69	38,33	1255	74,97	33,32	41,65
−1214	− 53,46	−32,22	− 21,24	1294	95,74	34,35	61,39
− 878,6	− 23,14	−23,33	+ 0,19	1307	110,1	34,68	75,4
− 400,5	− 8,758	−10,63	1,87	1352	150,0	35.88	114,1
− 82,45	0,0	− 2,189	2,189	1395	184,5	37,01	147,5
+ 218,3	+ 9,018	+ 5,793	3,225				
608,5	20,91	16,15	4,76				
988,8	35,94	26,24	9,70				
1261	79,47	33,47	46,00				
1309	104,0	34,73	69,3				
1337	125,1	35,46	89,6				
1379	156,9	36,61	120,3				
1398	188,7	37,11	151,6				

Die Resultate sind graphisch in Fig. 3 dargestellt.



Weiches Eisen.

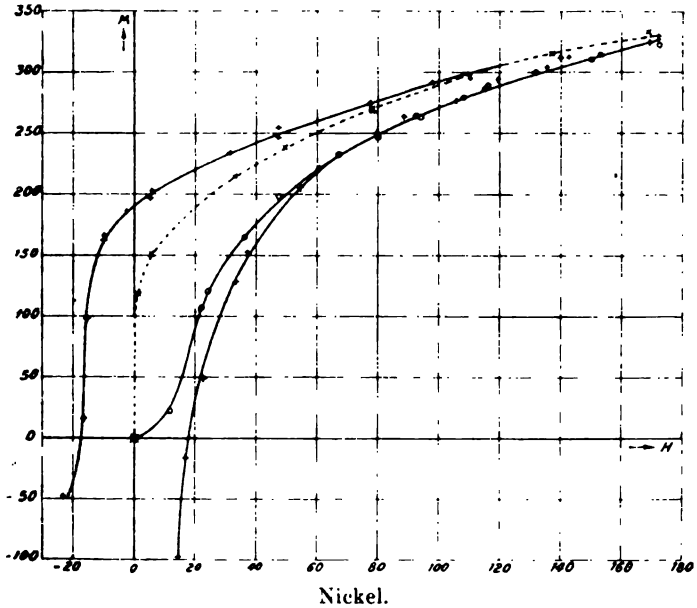
⊙ Nullpunktskurve + Hysteresiskurve × Ideale Kurve

Fig. 3.

4. Nickel.

$A = 16{,}05$ cm; $B = 0{,}6606$ cm; $N = 0{,}06142$; $V = 29{,}38$ cm³.

Nullpunktskurve.				Absteigender Hysteresisast.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
34,04	15,81	2,090	13,72	324,2	189,5	19,91	169,6
164,8	46,39	10,13	36,25	310,6	159,0	19,07	139,9
209,0	67,97	12,84	55,13	294,1	128,5	18,06	110,4
247,1	95,15	15,18	79,97	276,4	95,54	16,97	78,57
278,7	125,3	17,12	108,2	246,7	62,61	15,16	47,45
298,5	150,0	18,33	131,7	233,9	46,52	14,36	32,16
322,3	192,2	19,80	172,4	196,8	17,39	12,09	5,30
				162,5	0,0	9,979	− 9,98
22,47	13,20	1,380	11,82	− 48,93	− 26,01	− 3,004	− 23,01
120,3	31,63	7,389	24,24	− 152,2	− 46,79	− 9,344	− 37,45
197,4	59,47	12,13	47,34	− 219,5	− 74,11	− 13,48	− 60,63
232,9	81,56	14,31	67,25	− 263,3	− 104,4	− 16,17	− 88,2
264,4	108,5	16,25	92,3	− 294,1	− 137,6	− 18,06	− 119,5
286,4	133,0	17,59	115,4	− 326,2	− 192,2	− 20,04	− 172,7
314,4	172,6	19,31	153,3				
323,9	189,5	19,90	169,6				



Nickel.

⊙ Nullpunktskurve – Hysteresiskurve × Ideale Kurve

Fig. 4.

Aufsteigender Hysteresisast.				Ideale Kurve.			
M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H	M	$\frac{4\pi n i}{10}$	$N M$	H
−326,9	−190,3	−20,07	−170,2	65,70	4,378	4,035	0,343
−312,5	−161,9	−19,20	−142,7	117,1	9,018	7,194	1,824
−306,8	−141,1	−18,85	−122,3	149,4	15,03	9,177	5,85
−293,1	−115,5	−18,00	−97,5	213,9	46,39	13,14	33,25
−275,0	−94,10	−16,89	−77,21	237,1	64,04	14,56	49,48
−254,4	−62,73	−15,63	−47,10	269,7	94,75	16,57	78,18
−238,0	−46,01	−14,62	−31,39	298,5	129,0	18,33	110,7
−202,3	−18,30	−12,43	−5,87	313,9	155,8	19,28	136,5
−185,8	−9,018	−11,41	2,39	331,8	189,1	20,38	168,7
−166,6	0,0	−10,23	10,23				
−97,86	9,149	−6,011	15,16				
−15,85	17,77	−0,973	16,80				
+128,1	41,04	+7,87	33,17				
205,1	67,05	12,60	54,45				
248,9	94,88	15,29	79,59				
276,4	122,8	16,97	105,8				
303,6	153,8	18,65	135,2				
329,1	192,2	20,20	172,0				

Die Resultate sind graphisch in Fig. 4 dargestellt.

§ 3. *Die reversible Permeabilität.* Um die reversible Permeabilität zu messen, benutzten wir eine Versuchsanordnung ähnlich der, welche wir in den eingangs zitierten Arbeiten verwandt hatten, so daß einige wenige Worte über dieselbe genügen werden.

Um die kleinen Variationen ΔH der Feldstärke zu erzeugen, war die Magnetisierungsspule von einer anderen Spule umgeben, welche mit einem Akkumulator, einem Widerstande und einem Kommutator zu einem Stromkreise vereinigt war.

Diese zweite Spule hatte die folgenden Abmessungen. Ihr innerer und äußerer Durchmesser waren 3,52 cm bzw. 3,80 cm. Die Windungszahl pro Zentimeter betrug $n' = 34{,}35$, so daß $4\pi n' = 431{,}6$ war.

Wendet man mittels des Kommutators die Richtung des schwachen Stromes, der durch diese Spule floß, so ändert sich ein wenig das starke von der Magnetisierungsspule erzeugte Feld.

Die Änderung ΔB der Induktion im Ellipsoid, die durch die Feldänderung ΔH hervorgerufen wurde, wurde ballistisch beobachtet mittels einer Spule, welche direkt auf das Ellipsoid gewickelt und mit einem ballistischen Galvanometer verbunden

war. Die Empfindlichkeit dieses Instrumentes wurde durch eine geeichte wechselseitige Induktion bestimmt.

Es möge noch ein kleiner Hilfsapparat beschrieben werden, der die Bequemlichkeit und Exaktheit der Messungen sehr vergrößerte.

Wegen der großen Galvanometerempfindlichkeit, die notwendig war, um die kleine durch ΔH hervorgerufene Änderung des magnetischen Induktionsflusses zu beobachten, ließ jede kleinste Schwankung des starken Stromes in der Magnetisierungsspule, die durch veränderliche Kontakte in den Schiebewiderständen entstand, das ballistische Galvanometer ausschlagen.

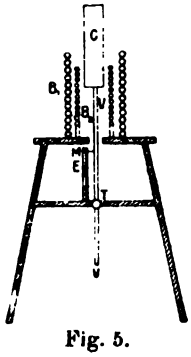


Fig. 5.

Ich vermied früher diese Störungen durch häufige und recht lästige Reinigung der Kontakte, zog es aber jetzt vor, die Unannehmlichkeit durch Anwendung des folgenden „Beruhigungsapparates" zu umgehen.

Im Innern einer Primärspule B_1 (Fig. 5) von 4 Lagen und 1096 Windungen befand sich koaxial eine Sekundärspule B_2 von 1200 Windungen. Beide waren auf einem Holzstativ montiert.

In ihrem Innern befand sich ein Zylinder C aus weichem Eisen, der mittels des Messingstabes $V\,V$ in Richtung seiner Achse verschiebbar und mittels der Druckschraube T in jeder Stellung fixierbar war. Diese Stellung konnte jederzeit reproduziert werden, da sie mit Hilfe des Zeigers M auf der Skale E ablesbar war.

Durch die Primärspule B_1, welche mit der Magnetisierungsspule in Serie geschaltet war, floß also der Magnetisierungsstrom, der, wie wir sagten, niemals bis zum Äußersten konstant blieb. Nun befand sich aber die Spule B_2 im ballistischen Stromkreise, und zwar der Spule, die unmittelbar auf das Ellipsoid gewickelt war, entgegengeschaltet, so daß jede Stromschwankung in diesen beiden Spulen Induktionen von entgegengesetztem Vorzeichen hervorrief. Es war leicht, mittels einiger Versuche die Stellung des Eisenzylinders zu finden, bei der sich die Schwankungen genau kompensierten.

Eine ideale Anordnung, die ich aber leider nicht ausführen konnte, da ich von jeder Materialsorte nur ein Ellipsoid hatte,

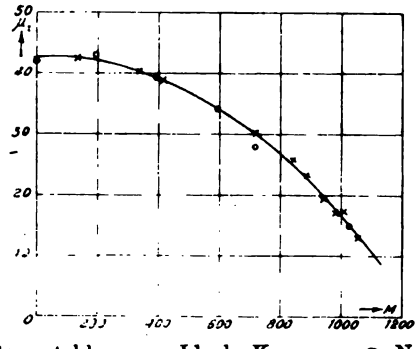
wäre die folgende gewesen. Der Beruhigungsapparat müßte als Primärspule B_1 eine Spule enthalten, die genau gleich der Magnetisierungsspule wäre; in ihr müßte sich ein dem zu studierenden Ellipsoid gleiches befinden, und beide Ellipsoide müßten von gleichen ballistischen Spulen umgeben sein. Letztere hätte man so in Serie zu schalten, daß eine Schwankung des Magnetisierungsstromes keinen Galvanometerausschlag hervorriefe. Über die Magnetisierungsspule sowie über B_1 wäre je eine Spule zu wickeln, deren Strom das Zusatzfeld ΔH erzeugt, diese aber müßten so in Serie geschaltet werden, daß ihre Induktionswirkungen sich im ballistischen Kreise summierten.

Die Beobachtungen ergaben die folgenden Resultate.

1. Gehärteter Remystahl.

Ideale Kurve.		Nullpunktskurve.	
M	μ_r	M	μ_r
0,0	42,34	0,0	41,81
134,6	41,64	192,1	43,16
412,4	38,84	397,3	39,41
938,7	19,46	593,4	34,02
980,0	17,08	712,9	27,98
1054	12,97	1026	15,08
0,0	42,29		
0,0	42,50		
719,7	30,41		
841,4	25,69		
0,0	41,59		
337,8	40,25		
885,3	23,34		
1006	17,21		

Die Resultate sind graphisch in Fig. 6 dargestellt.



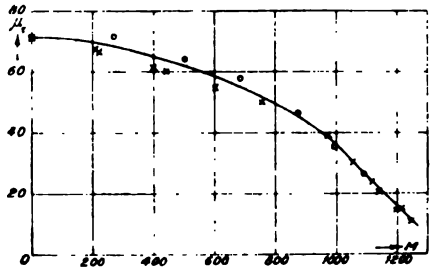
Gehärteter Remystahl. × Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve

Fig. 6.

2. Geglühter Remystahl.

Ideale Kurve.		Nullpunktskurve.	
M	μ_r	M	μ_r
0,0	72,15	0,0	71,06
400,2	61,72	271,6	71,81
757,8	49,72	503,0	64,13
1054	29,89	687,3	57,94
1138	20,67	989,5	35,26
1200	14,72	873,2	46,40
1242	10,80	1091	26,32
0,0	70,66		
221,8	66,68		
0,0	70,61		
209,9	67,19		
441,7	60,03		
603,4	54,36		
0,0	70,66		
971,2	39,08		
1119	23,86		
1216	15,07		

Die Resultate sind graphisch in Fig. 7 dargestellt.

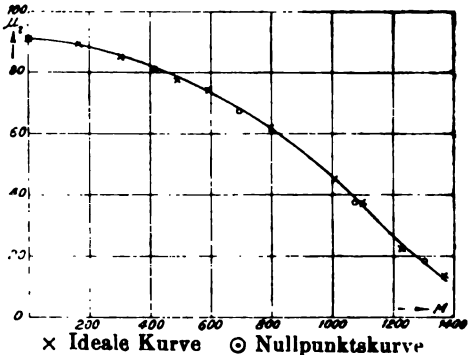


Geglühter Remystahl.
× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve
Fig. 7.

3. Weiches Eisen.

Ideale Kurve.		Nullpunktskurve.	
M	μ_r	M	μ_r
0,0	92,83	0,0	92,02
307,8	85,04	417,0	81,25
592,8	74,61	693,4	67,28
1099	37,43	1073	37,83
1228	22,63	1302	17,96
1367	13,76		
0,0	89,62		
164,9	89,74		
490,8	77,49		
798,7	62,13		
1010	45,21		

Die Resultate sind graphisch in Fig. 8 dargestellt.

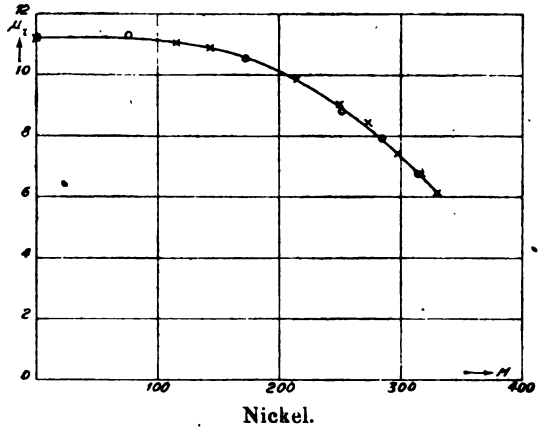


× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve
Fig 8. Weiches Eisen.

4. Nickel.

Ideale Kurve.		Nullpunktskurve.	
M	μ_r	M	μ_r
0,0	11,20	0,0	11,18
115,1	11,05	76,78	11,32
143,9	10,89	172,2	10,53
216,1	9,845	251,6	8,812
248,9	9,014	284,6	7,900
272,8	8,418	314,4	6,741
297,9	7,432		
317,3	6,778		
329,5	6,169		

Die Resultate sind graphisch in Fig. 9 dargestellt.



Nickel.

× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve

Fig. 9.

Aus den Messungen geht klar hervor, daß ***die reversible Permeabilität auf der idealen und der Nullpunktskurve genau die gleiche Funktion der Magnetisierung ist.***

Nur der geglühte Remystahl fügt sich nicht diesem Gesetze, doch haben wir schon früher[1]) den Verdacht geäußert, daß das Material, aus welchem das betreffende Ellipsoid gefertigt war, nicht homogen ist.

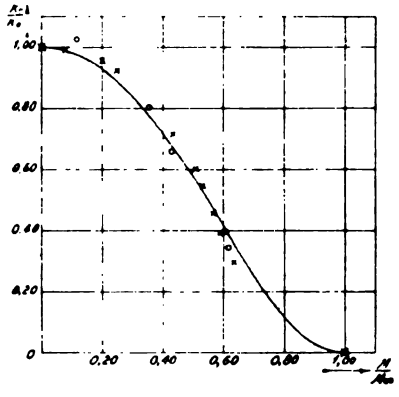
1) R. Gans, Ann. d. Phys. **33.** S. 1092. 1910.

§ 4. *Magnetisch korrespondierende Zustände.* Zum Schluß wollen wir noch das durch Gleichung (1) ausgedrückte quantitative Gesetz für die Abhängigkeit der reversiblen Permeabilität von der Magnetisierung prüfen.

Es ergaben sich die folgenden Tabellen und Kurven.

1. Gehärteter Remystahl (vgl. Fig. 10).

Ideale Kurve.				Nullpunktskurve.			
M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{1667}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{41{,}00}$	M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{1667}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{41{,}00}$
0,0	41,18	0,0	1,004	0,0	40,81	0,0	0,9954
134,6	40,64	0,0807	0,9910	192,1	42,16	0,1153	1,028
337,8	39,25	0,2026	0,9572	397,3	38,41	0,2383	0,9369
412,4	37,84	0,2474	0,9230	593,4	33,02	0,3560	0,8054
719,7	29,41	0,4317	0,7171	712,9	26,98	0,4277	0,6582
841,5	24,69	0,5048	0,6022	1026	14,08	0,6155	0,3434
885,3	22,34	0,5310	0,5449				
938,7	18,46	0,5631	0,4502				
980,0	16,08	0,5879	0,3921				
1006	16,21	0,6034	0,3954				
1054	11,97	0,6324	0,2919				



Gehärteter Remystahl $M_\infty = 1667$; $4\pi\varkappa_0 = 41{,}00$
× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve

Fig. 10.

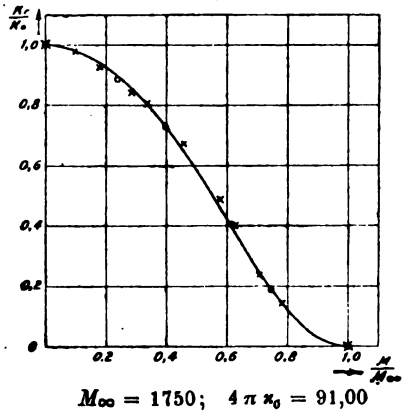
Die in den Figuren gezeichnete Kurve ist die theoretische, die Kreuze und Kreise entsprechen den Beobachtungen auf der idealen bzw. jungfräulichen Kurve. Der Punkt

$$\frac{M}{M_\infty} = 1\,; \quad \frac{\varkappa}{\varkappa_0} = 0$$

ist mit in die Figur eingezeichnet, er entspricht der bekannten Tatsache, daß die Suszeptibilität im Sättigungszustande Null ist.

2. Weiches Eisen (vgl. Fig. 11).

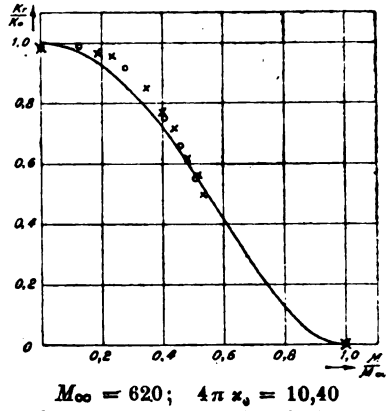
Ideale Kurve.				Nullpunktskurve.			
M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{1750}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{91{,}00}$	M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{1750}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{91{,}00}$
0,0	90,22	0,0	0,9914	0,0	91,02	0,0	1,000
164,9	88,74	0,0942	0,9752	417,7	80,25	0,2386	0,8820
307,8	84,04	0,1759	0,9237	693,4	66,28	0,3962	0,7285
490,8	76,49	0,2804	0,8406	1073	36,83	0,6132	0,4048
592,8	73,61	0,3387	0,8091	1302	16,95	0,7439	0,1863
798,7	61,13	0,4564	0,6717				
1010	44,21	0,5772	0,4859				
1099	36,43	0,6281	0,4004				
1228	21,63	0,7018	0,2378				
1367	12,76	0,7811	0,1403				



$M_\infty = 1750$; $4\pi\varkappa_0 = 91{,}00$

× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve

Fig. 11. Weiches Eisen.



$M_\infty = 620$; $4\pi\varkappa_0 = 10{,}40$

× Ideale Kurve ⊙ Nullpunktskurve

Fig. 12. Nickel.

3. Nickel (vgl. Fig. 12).

Ideale Kurve.				Nullpunktskurve.			
M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{620}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{10{,}40}$	M	$4\pi\varkappa_r$	$\frac{M}{620}$	$\frac{4\pi\varkappa_r}{10{,}40}$
0,0	10,20	0,0	0,9804	0,0	10,18	0,0	0,9790
115,1	10,05	0,1857	0,9663	76,78	10,32	0,1239	0,9922
143,9	9,89	0,2321	0,9510	172,2	9,53	0,2777	0,9164
216,1	8,845	0,3485	0,8506	251,6	7,812	0,4058	0,7513
248,9	8,014	0,4015	0,7705	284,6	6,900	0,4590	0,6634
272,8	7,418	0,4400	0,7134	314,4	5,741	0,5071	0,5521
297,9	6,432	0,4805	0,6184				
317,3	5,778	0,5118	0,5556				
329,5	5,169	0,5315	0,4971				

Während das weiche Eisen in hervorragender Weise der Theorie entspricht, zeigen die härteren Materialien, wie Stahl und Nickel, kleine Abweichungen, jedoch sind diese so unbedeutend, daß man praktisch die ganze reversible Permeabilitätskurve aus der Anfangspermeabilität und der Sättigungsmagnetisierung berechnen kann.

La Plata, 1. November 1917, Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

5. *Die Trägheitsmomente der Magnetonen;* [1] *von R. Gans.*

In einer früheren Arbeit[2]) habe ich eine Formel für die spezifische Suszeptibilität diamagnetischer Körper [(a. a. O., Formel (60)] in ihrer Abhängigkeit von der Feldstärke und Temperatur abgeleitet.

Diese Beziehung vereinfacht sich noch auf Grund der im hiesigen Institut angestellten experimentellen Untersuchungen des Hrn. H. Isnardi[3]), welche zeigten, daß die Suszeptibilität tatsächlich nicht vom Felde abhängig ist, woraus man nach meiner Theorie den Schluß ziehen kann, daß die drei Hauptträgheitsmomente der Magnetonen einander gleich sind. So nimmt die Formel für die spezifische Suszeptibilität χ die Form an

$$\chi = - N \frac{e^2}{4 m^2} J, \tag{1}$$

wo N die Anzahl Magnetonen im Gramm, $e/m = 1{,}77 \cdot 10^7$ die in elektromagnetischem Maß gemessene spezifische Ladung des Elektrons, J das Trägheitsmoment des Magnetons bezüglich einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Achse bedeutet.

Nimmt man an, daß jedes Atom nur *ein* Magneton enthält, so ist das Produkt aus N und dem Atomgewicht A die Anzahl Atome im Grammatom, d. h. die bekannte Avogadrosche Zahl

$$N_0 = N A = 6{,}175 \cdot 10^{23}. \tag{2}$$

Multipliziert man (1) mit A, so erhält man

$$A \chi = - N_0 \frac{e^2}{4 m^2} J \tag{3}$$

oder

$$J = - 2{,}067 \cdot 10^{-38} \cdot A \chi. \tag{4}$$

1) Vgl. R. Gans, Contribución al estudio de las ciencias, Univ. Nacional de La Plata **1.** S. 383. 1916.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **49.** S. 149. 1916.

3) H. Isnardi, Contribución al estudio de las ciencias, Univ. Nacional de La Plata.

Es läßt sich also das Trägheitsmoment aus der Atomsuszeptibilität $A\chi$ berechnen.

In der folgenden Tabelle haben wir auf Grund der von Owen[1]) bestimmten Magnetisierungskonstanten die Werte von J in absolutem Maß ausgewertet.

Element	A	$-\chi \cdot 10^6$	$J \cdot 10^{40}$ in g cm²	Element	A	$-\chi \cdot 10^6$	$J \cdot 10^{40}$ in g cm²
Be	9,1	1,00	1,88	Zr	90,6	0,45	8,43
B	11,0	0,7	1,59	Ag	107,9	0,20	4,46
C (Diamant)	12,0	0,49	1,22	Cd	112,4	0,18	4,18
Si	28,3	0,13	0,761	Jn	114,8	0,11	2,61
P	31,0	0,90	5,77	Sn (Grauzinn)	119,0	ca. 0.35	ca. 8,61
S	32,07	0,49	3,25	Sb	120,2	0,82	20,4
Cu	63,57	0,085	1,12	Te	127,5	0,32	8,43
Zn	65,37	0,155	2,09	J	126,9	0,36	9,45
Ga	69,9	0,24	3,46	Cs	132,8	0,10	2,75
Ge	72,5	0,12	1,80	Au	197,2	0,15	6,12
As	75,0	0,31	4,81	Hg	200,0	0,19	7,86
Se	79,2	0,32	5,24	Tl	204,0	0,24	10,1
Br	79,92	0,40	6,61	Pb	207,1	0,12	5,14
Sr	87,62	0,2?	3,62?	Bi	208,0	1,40	60,2

Es ist bemerkenswert, daß fast alle Trägheitsmomente von derselben Größenordnung sind.

Die Trägheitsmomente paramagnetischer Magnetonen[2]) sind wesentlich größer; es ergab sich nämlich für Platin $67{,}7 \cdot 10^{-40}$ und für wasserfreies Mangansulfat $12{,}4 \cdot 10^{-40}$.

Ebenso sind die Trägheitsmomente des HCl- und des H_2O-Moleküls viel größer, für die Bjerrum[3]) $5{,}4 \cdot 10^{-40}$ bzw. 0,96 und $2{,}21 \cdot 10^{-40}$ fand.

La Plata, 1. März 1917. Instituto de Fisica.

1) M. Owen, Ann. d. Phys. **37.** S. 664. 1912.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **50.** S. 163. 1916.

3) N. Bjerrum, Nernst-Festschrift S. 90, 1912; Verh. d. Deutsch. phys. Ges. **16.** S. 640. 1914; vgl. auch Verh. d. Solvay Congresses, deutsche Ausgabe von Eucken S. 405, 1911.

(Eingegangen 23. August 1919)

6. *Bemerkung zu meiner Arbeit „Fortpflanzung des Lichts durch ein inhomogenes Medium“; von R. Gans.*

Kürzlich veröffentlichte ich[1]) eine theoretische Untersuchung über die Fortpflanzung des Lichts in einem inhomogenen Medium, welche im wesentlichen die Ergebnisse hatte, daß das Licht sich ohne Reflexion fortpflanzt, daß es aber Totalreflexion gibt.

Ferner zeigte ich, daß überall die Regeln der geometrischen Optik über die Richtung des Strahles gelten außer in der Nähe der Ebene, in der die Totalreflexion eintritt. Hier ist der Einfallswinkel kleiner, als es dem Snelliusschen Brechungsgesetze entspricht, und hier kann auch nicht von einem Umbiegen des Strahls gesprochen werden, sondern er kehrt mit einem Knick von endlichem Winkel um.

Nun hat Lord Rayleigh[2]) schon früher einen Aufsatz über den Durchgang von Schallwellen durch ein geschichtetes Medium publiziert, der mir leider infolge der schlechten argentinischen Bibliotheksverhältnisse entgangen war, und von dem ich erst im November 1915 durch einen Separatabdruck Kenntnis erhielt, den der Verfasser mir zusandte.[3])

Sonst hätte ich natürlich nicht verfehlt, die Arbeit Lord Rayleighs zu zitieren, ja ich hätte sogar, trotzdem es sich bei ihm um ein akustisches, bei mir um ein elektromagnetisches Problem handelte, manches seiner Resultate direkt verwenden können.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **47.** S. 709. 1915.

2) Lord Rayleigh, Proc. of the Royal Soc. (A) **86.** S. 207. 1912.

3) In diesem Zusammenhang sei auch eine Arbeit von J. Boussinesq, C. R. **129.** 1899 erwähnt, welche auch Lord Rayleigh entgangen zu sein scheint. Der Verf. steht auf dem Boden der elastischen Lichttheorie und geht auf das interessante Problem der Totalreflektion gar nicht ein.

In der Diskussion der Einzelheiten ging ich über Lord Rayleigh in einigen Punkten hinaus und griff die Aufgabe insofern allgemein an, als er ***aus mathematischen Gründen*** die Dichte als lineare Funktion der Koordinate betrachtete, während ich durch einen Kunstgriff, der dem des Helmholtzschen Orgelpfeifenproblems ähnlich ist, zu einer solchen beschränkenden Annahme nicht gezwungen war.

Schließlich glaubt Lord Rayleigh, die Totalreflexion in inhomogenen Medien sei natürlicher als eine Art Brechung (Umbiegen des Strahls) aufzufassen (a. a. O., S. 224). Mit dieser Meinung kann ich mich wegen des von mir gefundenen Knicks, den der Strahl erleidet, nicht einverstanden erklären. Es tritt eine wirkliche Unstetigkeit infolge von Reflexion auf.

La Plata, 30. Nov. 1915. Instituto de Fisica.

(Eingegangen 23. August 1919.)

7. *Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden. Ein Beitrag zur Quantentheorie;* von *R. Gans.*

Planck[1]) hat in seiner Arbeit über die physikalische Struktur des Phasenraumes gezeigt, in welcher Weise der Phasenraum in Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit zerlegt werden kann. Mittels dieser Resultate und der Ergebnisse einer früheren Untersuchung[2]) kann man die für die Thermodynamik wichtigen Funktionen für den Fall von Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden berechnen.

Die Durchführung dieses Problems und der Vergleich der Endformeln mit der Erfahrung ist deshalb von Interesse, weil die schwingungsfähigen Teilchen in den praktisch untersuchten Körpern sicherlich häufig nicht lineare Vibratoren waren, sondern mehr Freiheitsgrade hatten.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn man die Zustandssumme

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{-\frac{\overline{U_n}}{kT}} \quad . \tag{1}$$

einführt, in der T die absolute Temperatur, $\overline{U_n}$ die mittlere Energie eines Teilchens im $n$ten Elementargebiet, p_n das Verhältnis der Größe des $n$ten zum nullten Elementargebiet bedeutet.

Aus der Funktion Z berechnen sich alle thermodynamisch wichtigen Funktionen, wie die freie Energie F und die Energie U nach den folgenden Gleichungen[2]) (N Anzahl der Oszillatoren)

$$F = -NkT \ln Z, \tag{2}$$

$$U = -Nk \frac{d \ln Z}{d \frac{1}{T}} \, . \tag{3}$$

1) M. Planck, Ann. d. Phys. (4) **50**, S. 385. 1916 (im folgenden zitiert als „Planck I").

2) M. Planck, Verh. d. Deutschen phys. Ges. **17**, S. 407. 1915 (im folgenden zitiert als „Planck II").

I. Lineare Oszillatoren.

Um die für Oszillatoren von zwei und drei Freiheitsgraden gültigen Resultate mit den bekannten Formeln für lineare Oszillatoren vergleichen zu können, stellen wir letztere noch einmal kurz zusammen.

Nach Planck[1]) gilt für geradlinige Oszillatoren der Schwingungszahl ν

$$p_n = 1; \quad \overline{U_n} = h\nu\left(n + \tfrac{1}{2}\right). \tag{4}$$

so daß, wenn wir die Abkürzung

$$\frac{h\nu}{kT} = x \tag{5}$$

einführen, die Substitution von (4) in (1) Z ergibt. Wir wollen diesem Wert aber und ebenso der freien Energie, sobald sie sich auf lineare Oszillatoren bezieht, den Index Null geben. So erhalten wir

$$Z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)x} = \frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{2}}, \tag{6}$$

also nach (2)

$$\frac{F_0}{Nh\nu} = -\frac{\ln Z_0}{x} = \frac{\ln 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{2}}{x}. \tag{7}$$

Die Funktionen sind in Tab. 1 niedergelegt worden.

Tabelle 1.

$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$	Z_0	$-\frac{\ln Z_0}{x} = \frac{F_0}{Nh\nu}$
0,00	∞	∞	$-\infty$
0.10	5,000	4,992	- 8,041
0.12	4,167	4.158	5,937
0.14	3,571	3.560	4,535
0,16	3,125	3.112	3,547
0,18	2,778	2,764	- 2,823
0,20	2,500	2,484	2,274
0,30	1,667	1,643	0,8266
0,4	1,250	1,217	0,2458
0,5	1,000	0,9596	- 0,0412
0,6	0,8333	0,7854	0,2013
0,7	0,7143	0,6590	0,2977

1) M. Planck II.

Tabelle 1. (Fortsetzung.)

$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$	Z_0	$-\frac{\ln Z_0}{x} = \frac{F_0}{Nh\nu}$
0,8	0,6250	0,5630	0,3591
0,9	0,5556	0,4871	0,3997
1,0	0,5000	0,4255	0,4273
1,2	0,4167	0,3313	0,4603
1,4	0,3571	0,2626	0,4774
1,6	0,3125	0,2105	0,4870
1,8	0,2778	0,1699	0,4923
2,0	0,2500	0,1379	0,4949
2,5	0,2000	0,0826	0,4986
3,0	0,1667	0,0499	0,4996
3,5	0,1429	0,0302	0,4998
4,0	0,1250	0,0183	0,4998
5,0	0,1000	0,0067	0,4999
∞	0,0000	0,0000	0,5000

II. Oszillatoren von zwei Freiheitsgraden.

Ein Massenpunkt bewege sich in einer bestimmten Ebene unter dem Einfluß einer quasielastischen Kraft mit der Schwingungszahl ν. Bedeuten u und v die Integrale der Energie und des Flächensatzes, so gilt nach Planck I, S. 396, Formel (21), (22), (24) und (25), wenn $dG = dg\,dg'$ das Element des Phasenraumes ist.

$$g = \frac{u}{2\nu} - \pi v, \tag{8}$$

$$g' = 2\pi v, \tag{9}$$

so daß

$$= \overline{U_{n,n'}} \frac{\iint u\,dg\,dg'}{\iint dg\,dg'} = \nu \frac{\iint (2g + g')\,dg\,dg'}{\iint dg\,dg'} \tag{10}$$

wird. Hier läuft g von nh bis $(n+1)h$ und g' von $n'h$ bis $(n'+1)h$.

Daraus folgt

$$U_{n,n'} = \nu h[2n + 1 + n' + \tfrac{1}{2}], \tag{11}$$

so daß aus Gleichung (1) folgt

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-x(2n+1+n'+\frac{1}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)x} \cdot \sum_{n'=0}^{\infty} e^{-(n'+\frac{1}{2})x} \tag{12}$$

oder nach (2) und (5)

$$\frac{F}{Nh\nu} = -\frac{\ln Z}{x} = 2\,\frac{\ln 2\,\mathfrak{Sin}\,2\frac{x}{2}}{2x} + \frac{\ln 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{2}}{x},$$

d. h. nach (7)

$$F(T, \nu) = F_0(T, 2\nu) + F_0(T, \nu). \tag{12'}$$

In Worten: *Ein Oszillator von zwei Freiheitsgraden der Schwingungszahl ν ist energetisch vollkommen äquivalent zwei linearen Oszillatoren, von denen der eine die Schwingungszahl ν, der andere die Schwingungszahl 2ν hat.*

Das ist aber ein Ausdruck der Nernst-Lindemannschen Formel[1]), die zwar praktisch erprobt, bisher aber nicht theoretisch begründet war, jedoch ist zu beachten, daß die Übereinstimmung der Nernst-Lindemannschen Formel und unserer nur gilt, solange man die Schwingungszahl frei wählen kann, diese also nicht etwa durch optische Messungen oder nach Lindemann durch den Schmelzpunkt festliegt; denn Nernst und Lindemann haben den Anschluß an die Erfahrung durch die Annahme gleich vieler linearer Resonatoren der Schwingungszahlen ν und $\nu/2$ erzielt, d. h. ihr ν entspricht unserem 2ν.

III. Oszillatoren von drei Freiheitsgraden.

Ein Massenpunkt bewege sich im Raum unter dem Einfluß eines quasielastischen Kraftzentrums. Auch für diesen Fall hat Planck[2]) die Struktur des Phasenraums bestimmt.

Bezeichnen u und v wieder die Integrale der Energie und des Flächensatzes, so gilt wie bei zweidimensionalen Oszillatoren

$$\begin{cases} g = \frac{u}{2\nu} - \pi v, \\ g' = 2\pi v, \end{cases} \tag{13}$$

und da das Volumenelement des Phasenraumes

$$dG = dg \cdot dg'^2 \tag{14}$$

1) W. Nernst u. F. A. Lindemann, Zeitschr. f. Elektrochemie **17**. S. 817. 1911.

2) M. Planck, I. S. 406.

ist, so berechnet sich

$$\overline{u_{n,n'}} = \frac{\int\int u\, dg\, dg'^2}{\int\int dg\, dg'^2} = \nu \frac{\int\int (2g + g')\, dg\, dg'^2}{\int\int dg\, dg'^2} \tag{15}$$

Über g ist von nh bis $(n+1)h$, über g' von $n'h$ bis $(n'+1)h$ zu integrieren, so daß

$$\overline{u_{n,n'}} = \nu h \left[2n + 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3n'^2 + 3n' + 1}{2n' + 1}\right]. \tag{16}$$

Da ferner

$$p_{n,n'} = 2n' + 1 \tag{17}$$

ist, so ergibt (1) die Zustandssumme

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} (2n' + 1) e^{-x\left[2n + 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3n'^2 + 3n' + 1}{2n' + 1}\right]}, \tag{18}$$

die ohne weiteres in das Produkt

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 \tag{19}$$

zerfällt, wo

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x(2n+1)} = \frac{1}{2 \mathfrak{Sin} x}, \tag{20}$$

$$\left| \begin{aligned} Z_2 &= \sum_{n'=0}^{\infty} (2n' + 1) e^{-x \frac{2}{3} \frac{3n'^2 + 3n' + 1}{2n' + 1}} \\ &= 2 \sum_{n'=0}^{\infty} (n' + \tfrac{1}{2}) e^{-x\left[n' + \frac{1}{2} + \frac{1}{12(n' + \frac{1}{2})}\right]} \end{aligned} \right. \tag{21}$$

ist.

Die Bedeutung von Z_1 ergibt sich sofort durch Vergleichung mit (6); es ist die Zustandssumme eines linearen Oszillators der Schwingungszahl 2ν.

Die Berechnung von Z_2 nach (21) ist sehr einfach für große Werte von x; für kleinere x ist es besser, die Gleichung (21) umzuformen.

Setzen wir

$$\frac{1}{12(n' + \frac{1}{2})} = \alpha, \tag{22}$$

so wird

$$Z_2 = 2 \sum_{n'=0}^{\infty} (n' + \tfrac{1}{2}) e^{-x(n' + \frac{1}{2} + \alpha)} = 2 \sum_{n'=0}^{\infty} (n' + \tfrac{1}{2}) e^{-x(n' + \frac{1}{2})}$$
$$- 2 \sum_{n'=0}^{\infty} (n' + \tfrac{1}{2}) \left[e^{-x(n' + \frac{1}{2})} - e^{-x(n' + \frac{1}{2} + \alpha)}\right].$$

Nun ist

$$e^{-\delta} - e^{-\varepsilon} = 2e^{-\frac{\delta+\varepsilon}{2}} \operatorname{Sin}\frac{\varepsilon-\delta}{2}. \tag{23}$$

also

$$Z_2 = 2\sum_0^\infty (n'+\tfrac{1}{2})e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}\right)} - 4\sum_0^\infty (n'+\tfrac{1}{2})e^{-\left(n'+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)x} \operatorname{Sin}\frac{\alpha x}{2}.$$

Ist x so klein, daß

$$\operatorname{Sin}\frac{\alpha x}{2} = \frac{\alpha x}{2}$$

gesetzt werden kann, so wird mit Berücksichtigung von (22)

$$Z_2 = 2\sum_0^\infty (n'+\tfrac{1}{2})e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}\right)} - \frac{x}{6}\sum_0^\infty e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

und mit erneuter Anwendung der Formel (23)

$$\left\{\begin{aligned} Z_2 &= 2\sum_0^\infty (n'+\tfrac{1}{2})e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}\right)} - \frac{x}{6}\sum_0^\infty e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}\right)} \\ &\quad + \frac{x^2}{3}\sum_0^\infty \frac{\alpha}{4} e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Die Auswertung der ersten beiden Summanden gelingt leicht, so daß wir für kleine Werte von x schließlich erhalten

$$Z_2 = \frac{\operatorname{Cof}\frac{x}{2}}{2\operatorname{Sin}^2\frac{x}{2}} - \frac{x}{12\operatorname{Sin}\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{3}\sum_0^\infty \frac{\alpha}{4} e^{-x\left(n'+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)}. \tag{25}$$

Die hier auftretende Größe $\alpha/4$ hat als Funktion von n' nach (22) folgende Werte.

Tabelle 2.

n'	$\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{48(n'+\frac{1}{2})}$	n'	$\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{48(n'+\frac{1}{2})}$
0	0,04167	6	0,00320
1	0,01389	7	0,00278
2	0,00833	8	0,00245
3	0,00595	9	0,00219
4	0,00463	10	0.00198
5	0,00379		

So läßt sich Z_2 für kleine x nach (25) und für große x nach (21) berechnen, und es ergibt sich folgende Tabelle.

Tabelle 3.

x	Z_2	$-\frac{1}{2}\frac{\ln Z_2}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln Z_2}{x} - \frac{1}{x}\ln\frac{3}{2\sqrt{2}}\right]$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}$
0,0	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞
0,2	49,92	− 9,77	5,000	− 15,09	7,5
0,4	12,41	− 3,150	2,500	− 4,945	3,75
0,6	5,477	− 1,417	1,667	− 2,273	2,5
0,8	3,309	− 0,748	1,250	− 1,232	1,875
1,0	2,191	− 0,3921	1,000	− 0,6764	1,5
1,5	0,8206	+ 0,0660	0,6667	+ 0,0401	1,0
2,0	0,4362	0,2074	0,5000	0,2670	0,75
2,5	0,2603	0,2692	0,4000	0,3685	0,6
3,0	0,1662	0,2991	0,3333	0,4193	0,5
4,0	0,07565	0,3226	0,2500	0,4619	0,375
5,0	0,03692	0,3299	0,2000	0,4772	0,3
10	0,00127	0,3333	0,1000	0,4912	0,15
∞	0,00000	0,3333	0,0000	0,5000	0,0

Nach (2) und (19) ist

$$(26)\qquad \frac{F}{Nh\nu} = -\frac{\ln Z}{x} = -\frac{\ln Z_1}{x} - \frac{\ln Z_2}{x} = \frac{F_1}{Nh\nu} + \frac{2F_2}{Nh\nu}.$$

Da nun, wie wir bereits auf Grund der Gleichung (20) sahen,

$$(27)\qquad F_1 = -Nh\nu\frac{\ln Z_1}{x}$$

die freie Energie eines linearen Oszillators der Schwingungszahl 2ν darstellt, so können wir

$$-Nh\nu\frac{\ln Z_2}{x}$$

als die freie Energie der beiden anderen Freiheitsgrade deuten. Die Hälfte hiervon, d. h.

$$F_2 = -\frac{Nh\nu}{2}\frac{\ln Z_2}{x}$$

ist der auf jeden dieser beiden Freiheitsgrade fallende Teil.

Deshalb haben wir in der 3. und 4. Kolonne der obigen Tabelle

$$-\frac{1}{2}\frac{\ln Z_2}{x} = \frac{F_2}{Nh\nu}$$

als Funktion von

$$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$$

berechnet und haben nun zu sehen, ob auch dieser Teil der freien Energie mit der von linearen Oszillatoren identisch ist.

Vergleichen wir unsere Funktion

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\ln Z_2}{x}$$

mit der in Tabelle 1 berechneten Funktion $-\frac{\ln Z_0}{x}$, so sehen wir auf den ersten Blick, daß die beiden Funktionen nicht identisch sind, da ja für $x = \infty$ (d. h. $T = 0$) erstere den Wert $\frac{1}{2}$, letztere den Wert $\frac{1}{3}$ hat.

Wohl aber ist

$$\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{\ln Z_2}{x} - \frac{1}{x}\ln\frac{3}{2\sqrt{2}}\right]$$

als Funktion von

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

fast völlig identisch mit $-\frac{\ln Z_0}{x}$ als Funktion von $\frac{1}{x}$, wie das Diagramm beweist, in welchem diese Funktion als Kurve eingezeichnet, jene durch Kreise nach den in Tab. 8, Kolonne 5 und 6 ermittelten Werten markiert ist.

Die physikalische Bedeutung dieser mathematischen Transformation erkennen wir aus folgender Überlegung.

Bezeichnen wir für den Augenblick die Funktion

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\ln Z_2}{x}$$

in ihrer Abhängigkeit von $\frac{1}{x}$ durch $V_2\left(\frac{1}{x}\right)$ und ebenso $-\frac{\ln Z_0}{x}$ als Funktion von $\frac{1}{x}$ durch $V_0\left(\frac{1}{x}\right)$, so lehrt uns unser Diagramm, daß sehr genähert

$$\frac{3}{2}\left[V_2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\ln\frac{3}{2\sqrt{2}}\right] = V_0\left(\frac{3}{2x}\right) \tag{28}$$

ist, d. h. es gilt

$$V_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{3}\,V_0\left(\frac{3}{2x}\right) + \frac{1}{x}\ln\frac{3}{2\sqrt{2}}\,. \tag{29}$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $N h \nu$, berücksichtigen, daß

$$\frac{1}{x} = \frac{kT}{h\nu}$$

ist, und führen die Bezeichnung

$$\frac{2}{3}\,v = v' \tag{30}$$

ein, so wird mit großer Näherung

$$F_2(T, v) = F_0(T, v') + N k T \ln \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \tag{31}$$

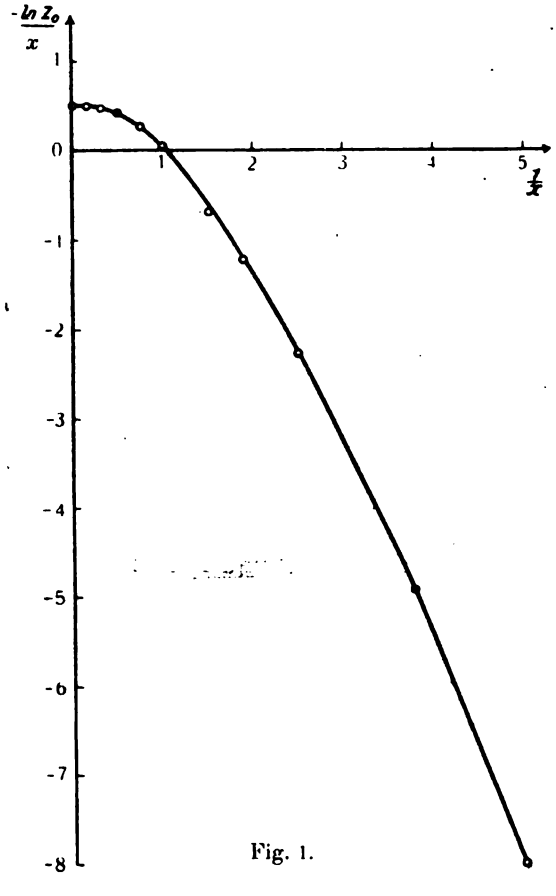


Fig. 1.

Nun ist eine freie Energie nach der klassischen Thermodynamik nur bis auf eine additive lineare Funktion der Temperatur bestimmt. Sehen wir deshalb also vom zweiten Summanden rechts in der Gleichung (31) ab, so sagt uns diese Beziehung, daß der Teil der freien Energie, den wir jetzt be-

trachten, identisch ist mit der eines linearen Oszillators der Schwingungszahl $\nu' = \frac{2}{3}\nu$.

Nach (26) und der Bemerkung, die wir an (27) anknüpften, ist also ***ein Oszillator von drei Freiheitsgraden mit der Schwingungszahl ν energetisch zu ersetzen durch drei lineare Oszillatoren, von denen einer die Schwingungszahl 2ν, die anderen beiden jeder die Schwingungszahl $\frac{2}{3}\nu$ haben.***

Zum Schluß möge noch eine Bemerkung über die Berechtigung der Annäherung dieses Resultates gesagt werden. Erstens liegen in dem Diagramm die Kreise nicht ganz exakt auf der Kurve, zweitens wissen wir, daß in der modernen Thermodynamik, welche den dritten Hauptsatz, das Nernstsche Wärmetheorem, mit berücksichtigt, nicht nur $\lim_{T=0} F = 0$ werden muß, sondern auch

$$\lim_{T=0} \frac{dF}{dT} = 0.$$

Dieser letzteren Bedingung genügt die Näherungsformel (31) nicht.

Wohl aber ist Gleichung (31) und der aus ihr folgende Äquivalenzsatz ***praktisch*** völlig genügend und beschreibt die komplizierteren Vorgänge durch Zurückführung auf die bekannten Erscheinungen an linearen Oszillatoren in ***einfacher*** Weise.

La Plata, 15. Januar 1917. Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

8. *Der gegenseitige Induktionskoeffizient von Rechtecken und Quadraten;* *von A. Esau.*

Die große Bedeutung, die „geschlossene" Antennenformen (Braunsche Rahmenantennen) für Empfangszwecke der drahtlosen Telegraphie in ihrer neuesten Entwicklung erlangt haben, läßt den Wunsch berechtigt erscheinen, Formeln für die Berechnung der Selbst- und gegenseitigen Induktionskoeffizienten derartiger Gebilde zu besitzen.

Während die Rechnung für kreisförmigen Spulenquerschnitt bereits früher[1]) durchgeführt worden ist, fehlt es an Formeln für rechteckigen und quadratischen Querschnitt, der den praktischen Anordnungen fast ausschließlich zugrunde gelegt worden ist.

Die Ableitung der Formel für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier aus mehreren Windungen bestehenden derartigen Spulen setzt zunächst die Kenntnis jenes Koeffizienten von einfachen Rechtecken voraus, die verschieden groß sind, wofür ich in der Literatur eine Formel nicht habe finden können.

Die von Neumann[2]) und Martens[3]) angegebenen Ausdrücke sind für den vorliegenden Zweck nicht anwendbar, da sie entweder gleich große, symmetrisch in parallelen oder verschieden große in der gleichen Ebene gelegene Rechtecke voraussetzen.

Die beiden erwähnten Formeln werden übrigens in dem jetzt abzuleitenden Ausdruck, wie die Untersuchung ergeben wird, als spezielle Fälle enthalten sein.

---

1) B. Strasser, Ann. d. Phys. 17. S. 763. 1905; A. Esau, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie 14. S. 271. 1919.

2) Neumann, Allgem. Gesetze der reduzierten Ströme, Abh. d. Berl. Akad. 1845.

3) F. F. Martens, Ann. d. Phys. 29. S. 959. 1909.

Ableitung der Formel.

Wir setzen voraus zwei Rechtecke mit den Seitenlängen $a + 2c$ und $b + 2c$, die in zwei parallelen Ebenen vom Abstand d einander gegenüber liegen (vgl. Fig. 1).

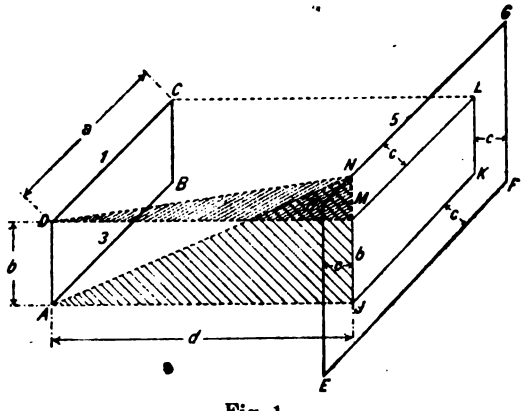


Fig. 1.

Ihr gegenseitiger Induktionskoeffizient M setzt sich zusammen aus zwei Teilen, von denen der eine, M_h, den horizontalen, der andere, M_v, den vertikalen Seiten seine Entstehung verdankt

$$M = M_h + M_v.$$

M_h ist, wenn man den gegenseitigen Induktionskoeffizienten der Seiten 1 und 5 mit M_{15}, den von 3 und 5 mit M_{35} bezeichnet, gleich der doppelten Differenz $M_{15} - M_{35}$:

$$M_h = 2(M_{15} - M_{35}).$$

M_{15} bedeutet den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier parallelen Geraden von den Längen a und $a + 2c$ und dem Abstand h, der nach Martens sich darstellen läßt in der Form

$$M_{15} = 2\left\{ S_0 \ln \frac{S_0 + \sqrt{h^2 + S_0^2}}{h} - s_0 \ln \frac{s_0 + \sqrt{h^2 + s_0^2}}{h} + \sqrt{h^2 + s_0^2} - \sqrt{h^2 + S_0^2} \right\}.$$

Die Größen s_0, S_0 und h haben die folgenden Bedeutungen:

$$s_0 = c; \quad S_0 = a + c; \quad h = \sqrt{c^2 + d^2}$$

(folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck DNM, in dem $MN = c$, $DM = d$ und $DN = h$ ist).

Nach Einführung dieser Werte in die Gleichung für M_{15} erhalten wir

$$M_{15} = 2\left\{\begin{array}{l} a\ln\dfrac{a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} \\ \quad + c\ln\dfrac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}}{c+\sqrt{2c^2+d^2}} \\ \quad - \sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2} + \sqrt{2c^2+d^2} \end{array}\right\}.$$

Bei M_{35} haben wir für s_0, S_0 und h zu setzen:

$$s_0 = c; \quad S_0 = a + c; \quad h = \sqrt{(b+c)^2+d^2}$$

(folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck AJN mit den Seiten $AJ = d$, $AN = h$ und $NJ = b + c$).

$$M_{35} = 2\left\{\begin{array}{l} a\ln\dfrac{a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2}}{\sqrt{(b+c)^2+d^2}} \\ \quad + c\ln\dfrac{a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2}}{c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2}} \\ \quad - \sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2} + \sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2} \end{array}\right\}.$$

Damit wird

$$M_h = 4\left\{\begin{array}{l} a\ln\dfrac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(b+c)^2+d^2}}{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}} \\ + c\ln\dfrac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})(c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})}{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})(c+\sqrt{2c^2+d^2})} \\ + \sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2} - \sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2} \\ \quad - \sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2} + \sqrt{2c^2+d^2} \end{array}\right\}.$$

M_v entsteht aus der vorhergehenden Formel, wenn man a und b miteinander vertauscht:

$$M_v = 4\left\{\begin{array}{l} b\ln\dfrac{(b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(a+c)^2+d^2}}{(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}} \\ + c\ln\dfrac{(b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})(c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})}{(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})(c+\sqrt{2c^2+d^2})} \\ + \sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2} - \sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2} \\ \quad - \sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2} + \sqrt{2c^2+d^2} \end{array}\right\}.$$

Nach Einsetzen der für M_h und M_v gefundenen Ausdrücke in die Gleichung

$$M = M_v + M_h$$

erhalten wir für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten der beiden Rechtecke die allgemeine Formel

$$M = 4\left\{\begin{array}{l} a\ln\dfrac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(b+c)^2+d^2}}{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}} \\ +b\ln\dfrac{(b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(a+c)^2+d^2}}{(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})\sqrt{c^2+d^2}} \\ +c\ln\dfrac{(c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})}{(c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})(b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2})} \\ \qquad\cdot\dfrac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})(\sqrt{2c^2+d^2}+c)^2}{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2})(\sqrt{2c^2+d^2}+c)^2} \\ +2\left[\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2+d^2}-\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2}\right. \\ \qquad\left.-\sqrt{(b+c)^2+c^2+d^2}+\sqrt{2c^2+d^2}\right] \end{array}\right\}.$$

Nachdem wir die allgemeine Formel gefunden haben, wollen wir auf die in ihr enthaltenen speziellen Fälle näher eingehen.

1. $a \geqq b;\ c = 0;\ d > 0.$

Setzt man $c = 0$, d. h. haben beide Rechtecke die gleichen Seitenabmessungen, so erhalten wir für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten den Ausdruck

$$M = 4\left\{\begin{array}{l} a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+d^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2+d^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{b^2+d^2}}{d} \\ \qquad +b\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2+d^2}}{b+\sqrt{a^2+b^2+d^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+d^2}}{d} \\ +2\left[\sqrt{a^2+b^2+d^2}-\sqrt{a^2+d^2}-\sqrt{b^2+d^2}+d\right] \end{array}\right\}.$$

Das ist die Neumannsche Formel.

2. $a \geqq b;\ d = 0;\ c \geqq 0.$

Wird $d = 0$, so rücken die beiden Rechtecke in eine Ebene. Der gegenseitige Induktionskoeffizient wird dann

$$M = 4\left\{\begin{array}{l} a \ln \dfrac{a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2}}{a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}} \cdot \dfrac{b+c}{c} \\ \quad + b \ln \dfrac{b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2}}{b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2}} \cdot \dfrac{a+c}{c} \\ \quad + c \ln \dfrac{(c+\sqrt{(a+c)^2+c^2})(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2})\cdot}{(c+\sqrt{(b+c)^2+c^2})(b+c+\sqrt{(b+c)^2+c^2})} \\ \qquad \dfrac{}{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2})(b+c+\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2})} \cdot c^2(1+\sqrt{2})^2 \\ \quad + 2[\sqrt{(a+c)^2+(b+c)^2} - \sqrt{(a+c)^2+c^2} \\ \qquad - \sqrt{(b+c)^2+c^2} + c\{\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\}] \end{array}\right\}.$$

3. $a = b$; $c \neq 0$: $d > 0$.

Wir setzen jetzt $a = b$ und kommen damit zu den praktisch wichtigen Formeln für die gegenseitige Induktion zweier in parallelen Ebenen vom Abstand d einander gegenüberliegenden Quadrate mit den Seitenlängen a und $a + c$.

Es wird hierfür

$$M = 8\left\{\begin{array}{l} a \ln \dfrac{(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})\sqrt{(a+c)^2+d^2}}{a+c+\sqrt{2(a+c)^2+d^2}\sqrt{c^2+d^2}} \\ \quad + c \ln \dfrac{(c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})(a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2})}{(a+c+\sqrt{2(a+c)^2+d^2})(\sqrt{2c^2+d^2}+c)} \\ \quad + \sqrt{2(a+c)^2+d^2} + \sqrt{2c^2+d^2} - 2\sqrt{(a+c)^2+c^2+d^2} \end{array}\right\}.$$

4. $a = b$; $c = 0$; $d > 0$.

Für gleich große Quadrate im Abstand d läßt sich der gegenseitige Induktionskoeffizient schreiben in der Form

$$M = 8\left[a \ln \frac{a+\sqrt{a^2+d^2}}{a+\sqrt{2a^2+d^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+d^2}}{d} + \sqrt{2a^2+d^2} - 2\sqrt{a^2+d^2} + d\right].$$

Dieser Ausdruck läßt sich aus der vorhin angeführten Neumannschen Formel ableiten, wenn man dort $a = b$ setzt.

5. $a = b$; $c \neq 0$; $d = 0$.

Der gegenseitige Induktionskoeffizient zweier in einer Ebene gelegenen Quadrate, deren Abstand c ist, wird

$$M = 8\left\{\begin{array}{l} (a+c) \ln \dfrac{a+c+\sqrt{(a+c)^2+c^2}}{c} + c \ln \dfrac{c+\sqrt{(a+c)^2+c^2}}{a+c} \\ \quad - 2\sqrt{(a+c)^2+c^2} + (a+c)[\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})] \end{array}\right\}.$$

Dieser Ausdruck stimmt überein mit dem von Martens gefundenen.

Umgestaltung der allgemeinen Formel.

Die soeben abgeleiteten Formeln gelten für beliebige Werte des Abstandes der Spulen und ihrer Abmessungen.

Führt man aber die Beschränkung ein, daß die Verhältnisse c/a und d/a kleine Werte annehmen, was immer dann der Fall sein wird, wenn der Abstand klein und die Abmessungen der Figuren nicht wesentlich voneinander verschieden sind, so kann man die für quadratischen Windungsquerschnitt geltende Formel (4) — und auf diese wollen wir uns im folgenden beschränken — noch erheblich vereinfacht werden.

Zu diesem Zweck entwickeln wir in ihr die Wurzel- und logarithmischen Ausdrücke nach Potenzen von c/a und d/a und erhalten für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten die Formel

$$M = 8\,a\left\{r + s\frac{c}{a} + t\frac{c^2}{a^2} + u + \frac{d^2}{a^2}\sqrt{2\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}} - \ln\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}} - \frac{c}{a}\ln\left(\sqrt{2\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}} + \frac{c}{a}\right)\right\}.$$

Hierin sind die Größen r, s, t und u zur Abkürzung für folgende Ausdrücke gesetzt worden

$$r = \sqrt{2} - 2 + \ln\frac{2}{1+\sqrt{2}} = -0{,}774,$$

$$s = \sqrt{2} - 1 + \ln\frac{2}{1+\sqrt{2}} = +0{,}226,$$

$$t = 0{,}75,$$

$$u = \frac{1-\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})} = -0{,}043.$$

Spezialfälle.

1. $c = 0;\ d > 0$.

Die obige Formel geht für den Fall gleich großer, im Abstande d voneinander gelegenen Quadrate über in die folgende

$$M = 8\,a\left\{\ln\frac{a}{d} + r + \frac{d}{a} + u\frac{d^2}{a^2}\right\}$$

oder nach Einführung der Werte für r und u

$$M = 8\,a\left\{\ln\frac{a}{d} - 0{,}774 + \frac{d}{a} - 0{,}043\frac{d^2}{a^2}\right\}.$$

Diese Formel ist von mir benutzt worden bei der Ableitung der Formel für den Selbstinduktionskoeffizienten von Spulen mit quadratischem Windungsquerschnitt.[1])

$$2.\ c = 0;\ d = 0.$$

Liegen die beiden Quadrate in einer Ebene, so wird

$$M = 8\,a\left\{\ln\frac{a}{c} + r + \frac{c}{a}\left(\ln\frac{a}{c} + s + \sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) + t\frac{c^2}{a^2}\right\}$$

oder anders geschrieben

$$M = 8\,a\left\{\ln\frac{a}{c} - 0{,}774 + \frac{c}{a}\left(\ln\frac{a}{c} + 0{,}759\right) + 0{,}75\,\frac{c^2}{a^2}\right\}.$$

Gültigkeitsbereich der Reihenformel.

Da bei der Reihenentwicklung alle die Glieder nicht berücksichtigt wurden, deren Potenzen über die zweite hinausgehen, so ist ohne weiteres klar, daß die erhaltenen Formeln bei größeren Werten der Argumente c/a und d/a versagen müssen.

Ihr Gültigkeitsbereich bleibt beschränkt, wie durch Vergleich mit der exakten Formel nachgewiesen werden kann, auf Werte der Verhältnisse c/a und d/a, die unterhalb von 0,25 liegen. Die Abweichungen bei 0,3 betragen etwa $1\,\%$.

Vereinfachung der Berechnung.

Um die Berechnung des gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier in parallelen Ebenen vom Abstand d einander gegenüberliegenden Quadrate und den Seitenlängen a und $a + 2c$ einfacher zu gestalten (schreiben wir die allgemeine Gleichung 3) in der Form

$$M = a\,S,$$

wo

$$S = 8\left\{\ln\frac{1+\frac{c}{a}+A}{1+\frac{c}{a}+B}\cdot\frac{D}{C} + \frac{c}{a}\ln\frac{1+\frac{c}{a}+A}{1+\frac{c}{a}+B}\cdot\frac{\frac{c}{a}+A}{\frac{c}{a}+E} + B + E - 2A\right\}$$

gesetzt worden ist.

1) A. Esau, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie 14. S. 271. 1919.

Die Wurzelausdrücke A, B, C, D und E haben dann die folgenden Werte

$$A = \sqrt{\left(1 + \frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{d^2}{a^2}}, \qquad D = \sqrt{\left(1 + \frac{c}{a}\right)^2 + \frac{d^2}{a^2}},$$

$$B = \sqrt{2\left(1 + \frac{c}{a}\right)^2 + \frac{d^2}{a^2}}, \qquad E = \sqrt{2\,\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}},$$

$$C = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2}},$$

Die Größe S ist für eine Reihe von Wertsystemen c/a und d/a nach der allgemeinen Formel (3) berechnet worden und kann der folgenden Tabelle entnommen werden.

$$S = f\left(\frac{c}{a}, \frac{d}{a}\right).$$

$\frac{d}{a} =$	0,0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	4,0
$\frac{c}{a} = 0{,}0$		13,02	8,264	3,224	1,016	0,202	0,028
0,1	14,74	12,12	8,832	3,688	1,312	0,264	0,036
0,2	10,70	9,904	8,232	4,232	1,576	0,360	0,056
0,5	6,40	6,256	5,872	4,264	2,136	0,600	0,112
1,0	3,968	3,936	3,856	3,384	2,328	0,952	0,208
2,0	2,320	2,296	2,256	2,176	1,888	1,184	0,416
4,0	1,232	1,248	1,256	1,232	1,200	1,200	0,568

Den Verlauf der Kurven $S = f\left(\frac{c}{a}, \frac{d}{a}\right)$ zeigen die nachstehenden Figuren.

In Fig. 2 sind die Kurvenscharen eingetragen, die sich ergeben, wenn man bei konstant gehaltenen Werten $\frac{c}{a}$ S als Funktion von d/a auffaßt, während Fig. 3 den Verlauf $S = f\left(\frac{c}{d}\right)$ bei konstanten Werten d/a zeigt. Man ersieht aus ihnen, daß für jeden Wert c/a die Kurve $S = f\left(\frac{a}{d}\right)$ ein Maximum besitzt, das um so ausgeprägter ist, je kleiner d/a gewählt wird. Mit wachsendem c/a wird dieses Maximum flacher und flacher und rückt außerdem mehr und mehr nach Stellen größerer Werte des d/a hin. Für Fig. 3 gilt das Entsprechende.

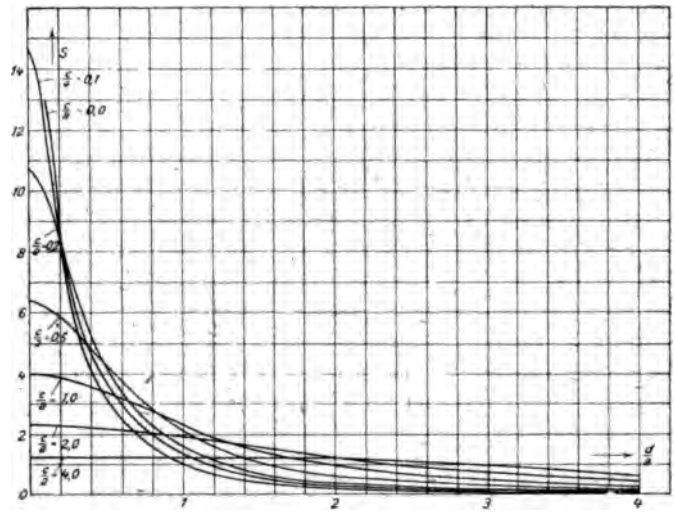


Fig. 2.

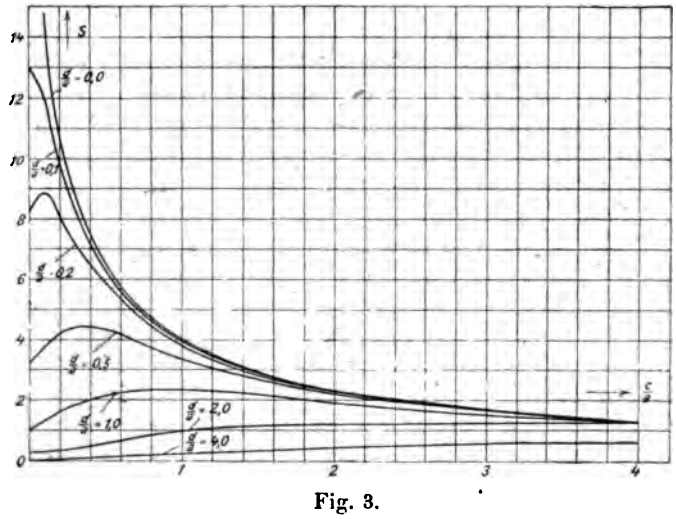


Fig. 3.

Berechnung des Koppelungskoeffizienten *K*.

Unter der Annahme, daß die beiden Quadrate zwei miteinander gekoppelten Schwingungskreisen angehören und daß sie die einzigen in den Kreisen vorhandenen Selbstinduktionen

sind, läßt sich ihr Koppelungskoeffizient K auf sehr einfache und schnelle Weise bestimmen. Der Koppelungskoeffizient ist definiert durch die bekannte Beziehung

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{oder} \quad K^0/_0 = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \times 100.$$

Setzen wir hierin $M = a S$ und für die Selbstinduktionskoeffizienten L_1 und L_2 der beiden Quadrate, wie sich aus meiner früheren Arbeit über den gegenseitigen Induktionskoeffizienten häufig vorkommender Leiterformen[1]) ergibt

$$L_1 = a S' \quad \text{bzw.} \quad L_2 = a' S'',$$

so wird

$$K = \sqrt{\frac{a}{a'}} \frac{S}{S' S''}.$$

Die Größen S, S' und S'' lassen sich aus der vorhergehenden und folgenden Tabelle für jedes beliebige Wertsystem c/a und d/a entnehmen.

Tabelle für die Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten von Quadraten.

$S' = f\left(\frac{a}{\varrho}\right)$		$L = a S'$	(ϱ = Drahthalbmesser)
$\frac{a}{\varrho}$	S'	$\frac{a}{\varrho}$	S'
20	20,18	800	49,30
40	25,52	1000	51,08
60	27,90	2000	56,62
80	30,97	4000	62,16
100	32,73	6000	65,41
200	38,23	8000	67,70
400	43,76	10000	69,49
600	47,00		

Die Berechnung soll nun für ein bestimmtes Beispiel durchgeführt werden.

Die beiden Quadrate sollen die Seitenlängen $a = 100$ cm und $a' = 300$ cm besitzen, ihr Drahtdurchmesser sei $2\varrho = 0{,}1$ cm.

Zu berechnen ist der Kuppelungskoeffizient für die Entfernungen 10 cm und 100 cm.

Es ist also

$$\frac{c}{a} = 1, \quad \frac{d}{a} = 0{,}1 \quad \text{bzw.} \quad 1{,}0, \quad a = 100 \text{ cm},$$
$$a' = a + 2c = 300 \text{ cm}. \quad 2\varrho = 0{,}1 \text{ cm}.$$

1) A. Esau, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie. 15. 1920.

Aus der Tabelle erhalten wir

$$S = 3{,}936 \quad \text{bzw.} \quad 2{,}328,$$
$$S' = 56{,}62,$$
$$S' = 65{,}41$$

und

$$K = \frac{3{,}936}{\sqrt{3 \cdot 56{,}62 \cdot 65{,}41}} = 3{,}73\,\%,$$

bzw.

$$K = \frac{2{,}328}{\sqrt{3 \cdot 56{,}62 \cdot 65{,}41}} = 2{,}2\,\%.$$

Die Koppelung in 10 cm Entfernung beträgt also 3,73%, in 1 m Entfernung 2,2%.

Zusammenfassung.

Es wird eine Formel abgeleitet für die Berechnung des gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier in parallelen Ebenen einander gegenüberliegenden Rechtecke von ungleicher Größe.

Die allgemeine Formel enthält eine Reihe von speziellen Fällen, die unter anderem die Neumannsche Formel für den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier in parallelen Ebenen liegenden gleich großen Rechtecke und die Formel von Martens für zwei in einer Ebene liegende Quadrate ergeben. Unter der Annahme, daß die Verhältnisse

$\frac{\text{Abstand}}{\text{Seitenlänge}}$ und $\frac{\text{Differenz der Seitenlängen}}{\text{kleinste Seitenlänge}}$ kleiner sind als 0,25,

wird eine für die Rechnung sehr einfache Näherungsformel abgeleitet. Aus berechneten Tabellen und Kurven kann man für jeden beliebigen Wert der obigen Verhältnisse den zugehörigen Wert des gegenseitigen Induktionskoeffizienten entnehmen und unter Hinzunahme der für die Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten mitgeteilten Tabelle auf sehr einfache Weise den Koppelungskoeffizienten bestimmen.

Berlin, den 9. Sept. 1919.

Laboratorium der Ges. für drahtlose Telegraphie (Telefunken) Berlin.

(Eingegangen 28. September 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 5.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Eine neue Anordnung für röntgenkristallographische Untersuchungen von Kristallpulver*[1]; *von Helge Bohlin.*

(Hierzu Tafel I.)

Während die von v. Laue[2]) und W. H. und W. L. Bragg[3]) gegründeten Methoden zur Bestimmung des Atomgitters Kenntnis von dem Kristallsytem des zur Untersuchung vorliegenden Materials und größere ausgebildete Kristalle erfordern, erreicht das von Debye und Scherrer[4]) angegebene Verfahren dasselbe Ziel, auch wenn die kristallographischen Verhältnisse des Stoffes von vornherein vollkommen unbekannt sind. Da weiter keine großen Kristalle beim letzteren Verfahren notwendig und sonst die experimentellen Anordnungen sehr einfach sind, dürfte wohl diese Methode einer allgemeineren Anwendung fähig sein.

In der vorliegenden Mitteilung wird nun eine neue Anordnung beschrieben, welche dem Grundgedanken nach sich der Methode von Debye und Scherrer anschließt, deren Vorzug vor allem aber in einer größeren Meßgenauigkeit begründet ist. Hier soll zunächst die Methode auseinandergesetzt werden. Ferner werden einige Beispiele für ihre Verwendung angeführt, in einer späteren Abhandlung soll dann über weitere nach diesem Verfahren gemachte Kristallgitterbestimmungen berichtet werden.

Das Prinzip der Debye-Scherrer-Methode ist bekanntlich folgendes: In einem Aggregat von sehr kleinen Kristall-

1) Die Methode ist vor kurzem unabhängig von Hrn. H. Seemann angegeben; vgl. hierzu seine Nachschrift bei der Korrektur Ann. d. Phys. **59**. S. 464. 1919.

2) W. Friedrich, P. Knipping u. M. Laue, Sitzungsber. München 1912. S. 303; zusammenfassende Darstellung: M. v. Laue, Encycl. d. Math. Wiss. V_3. S. 457. 1919.

3) W. H. u. W. L. Bragg, X-Ray and crystal structure. London 1915. Zeitschr. f. anorg. Chem. **90**. 1915.

4) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. **17**. S. 277. 1916; **18**. S. 291. 1917.

körnern, die vollkommen regellos geordnet sind, kommen die Kriställchen, und somit die Netzebenen in allen möglichen Orientierungen vor. Ein solches Pulver, zu einem dünnen Stab gepreßt, wird von einem Bündel monochromatischen Röntgenlichtes durchstrahlt. Wenn ein Kristallkorn zufälligerweise so liegt, daß die von Bragg eingeführte Bedingung

$$n\lambda = 2d \sin \varphi, \tag{1}$$

worin d den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Netzebenen, φ den Winkel zwischen der Richtung dieser Netzebenen und dem einfallenden Strahl, λ die Wellenlänge der Röntgenstrahlung und n eine kleine ganze Zahl bedeutet, erfüllt ist, so reflektiert es den einfallenden Strahl, in allen anderen Fällen nicht. Weil nun wegen der verschiedenen Lagen der Kristallkörner alle möglichen Winkel φ vorhanden sind, wird der einfallende Strahl in verschiedene, bestimmte Richtungen abgelenkt, von denen jede einem bestimmten Netzebenenabstand entspricht. Dieser Ablenkungswinkel ist natürlich nicht auf eine Ebene beschränkt, sondern der Strahl wird in allen möglichen Richtungen abgelenkt, die mit der Einfallsrichtung den Winkel 2φ bilden, beschreibt also um den einfallenden Strahl als Achse einen Kegel mit dem halben Öffnungswinkel 2φ. Um diese Ablenkungswinkel zu bestimmen, brachten Debye und Scherrer ein Kristallstäbchen in der Mitte einer zylinderförmigen Kamera an, an deren Wand ein Film ausgespannt war. Da, wo die Kegelflächen den Film schneiden, entstehen also gekrümmte Linien; durch Bestimmung des Abstandes dieser Linien vom Treffpunkt des direkten Strahles mit dem Film können die Ablenkungswinkel ermittelt werden.

Ist die einfallende Strahlung hart genug, um das Stäbchen vollkommen zu durchdringen, so wird die Breite der Interferenzlinie ungefähr gleich der Dicke des Stabes, also gleich 1 bis 2 mm. Diese Breite der Linien bringt natürlich eine gewisse Ungenauigkeit der Messung mit sich, besonders bei kleinen Winkeln, wodurch die mathematische Auswertung erheblich erschwert werden kann, namentlich wenn linienreiche Aufnahmen vorliegen.

Wenn infolge Absorption die Strahlung nur bis zu einer gewissen Tiefe in die zerstreuende Substanz eindringt, müssen an den ausgemessenen Winkeln nicht unbedeutende Korrektionen vorgenommen werden, wie A. J. Bijl und N. H. Kolk-

meyer[1]) nachgewiesen haben. Nach ihnen muß von dem durch die Ausmessung erhaltenen Werte von $\sin^2\varphi$ der Betrag

$$\frac{r}{4R}\sin 2\varphi\left[\frac{R}{d}+\cos 2\varphi+\sqrt{\frac{R^2}{d^2}+\frac{R}{d}\cos 2\varphi+1}\right]$$

subtrahiert werden, worin r den Radius des zirkulären Querschnittes des Stabes, R den Radius der Kamera und d den Abstand zwischen dem Zentrum der Kamera und der Eintrittsöffnung des Strahlenbündels bedeuten soll. In den von Bijl und Kolkmeijer gemachten Aufnahmen kann diese Korrektion für kleinere Ablenkungswinkel bis zu 14% betragen.

Die nachfolgend beschriebene Methode ist frei von einer solchen Korrektion. Die Anordnung ist folgende:

Das Kristallpulver wurde so gepreßt, daß eine Fläche zylindrischer Krümmung entsteht von demselben Radius, wie die ebenfalls zylinderförmige Kamera. Fig. 1 zeigt einen schematischen Grundriß der Kamera. Durch den Spalt S tritt ein divergentes monochromatisches Röntgenstrahlenbündel ein, trifft die zerstreuende Substanz K, an der es abgelenkt wird, in demselben Sinn wie bei der Debye-Scherrer-Anordnung. Greifen wir also einen Strahl aus diesem Bündel heraus und betrachten die Reflexion an einer bestimmten Netzebene (Abstand d), so wird der Strahl um einen Winkel 2φ aus seiner Einfallsrichtung abgelenkt nach der Gleichung (1). Alle Strahlen des Bündels werden — Reflexion an derselben Netzebene vorausgesetzt — um denselben Winkel 2φ abgelenkt, treffen also, wie aus einer einfachen geometrischen Überlegung zu ersehen ist, in einem Punkte A zusammen, wo ein scharfes Bild von dem Punkte S zu erwarten ist. Eine andere Netzebene (Abstand d_1) lenkt die einfallenden Strahlen um den Winkel $2\varphi_1$ ab, erzeugt also im Punkte B ein anderes Spaltbild usw. Durch die Anwendung der gekrümmten Reflexionsfläche wird also eine Art fokusierender Wirkung erreicht. Ist die Länge des Zirkelbogens $SKA = l$ und der Radius der Kamera R bekannt, so läßt sich der Ablenkungswinkel 2φ berechnen nach der Gleichung:

$$2\varphi = \frac{l}{2R}. \tag{2}$$

1) A. J. Bijl u. N. H. Kolkmeyer, Proceedings of the Section of Sciences of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen at Amsterdam. **21.** S. 494 u. 501. 1919.

Im unteren Teil der Fig. 1 ist eine Vertikalprojektion der Kamera angedeutet. Hier bedeutet $S_1 S_5$ den Spalt, $M_1 F_1 H N$ die Projektion des „Spiegels" K und $F_1 G_1 I H$ die der Kamerawand $F A B G$. Jeder von den einfallenden Strahlen $S_1 D_1$,

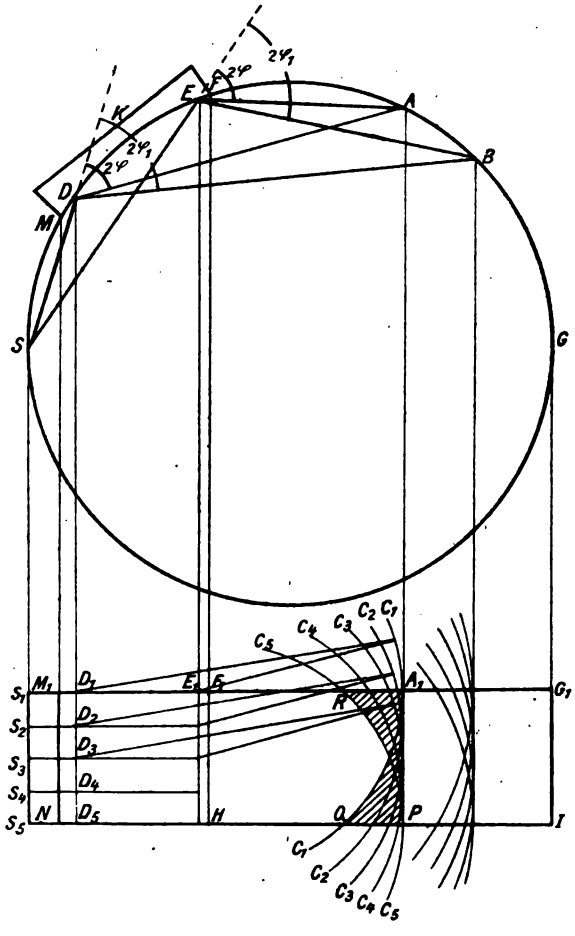


Fig. 1.

$S_2 D_2$ usw. wird, wie oben gesagt, um den Winkel 2φ abgelenkt und beschreibt um die Einfallsrichtung einen Kegel, der als Schnittlinie zwischen diesem Kegel und dem zylinderförmigen Film zu erkennen ist (Kurven C). Alle diese Kurven haben

eine gemeinsame Tangente $A_1 P$, deren Lage dem Punkte A entspricht. Beim Überlagern aller Kurven C entsteht also ein Bild auf dem Film von der in Fig. 1 angedeuteten Form des schraffierten Gebietes $R A_1 P Q$ mit einer scharfen nach Gleichung (2) definierten Kante $A_1 P$. Die genaue Gestalt der Kurven C und somit die Form und Breite des Interferenzbildes läßt sich natürlich ohne größere Schwierigkeiten berechnen, ist aber von nebensächlichem Interesse. Die Hauptsache ist, daß die Kante des Bildes scharf und geometrisch definiert ist.

Die Breite des Interferenzbildes ist, wie aus der Konstruktion Fig. 1 hervorgeht, von den Dimensionen des „Spiegels" K abhängig und um so kleiner, je kleiner die Höhe $M_1 N$ desselben gemacht wird. Weiter nimmt die Breite der Linie ab mit wachsendem Abstande der Linie vom „Spiegel", bis der Ablenkungswinkel $2\varphi = 90^0$ wird, wo eine gerade Linie von der Breite des Spaltes zu erwarten ist. Für Ablenkungswinkel größer als 90^0 wächst wieder die Breite der Linien und die scharfe Kante liegt von da ab auf der entgegengesetzten Seite.

Größere *Spaltbreite* gibt auch eine größere Breite der Linie, jedoch ohne die ursprüngliche Lage der Linienkante zu beeinflussen, wie aus Fig. 2 hervorgeht. Die scharfe Bildkante A entspricht stets der Spaltkante S, weshalb aufs sorgfältigste dafür gesorgt werden muß, daß diese in die richtige Lage (Innenfläche der Kamerawand) eingefügt wird. Obgleich die Breite der Interferenzlinie nicht auf die Meßgenauigkeit einwirkt, muß sie doch innerhalb gewisser Grenzen gehalten werden, weil bei zu großer Breite die scharfe Kante einer Linie von dem diffusen Teil der folgenden verdeckt werden kann.

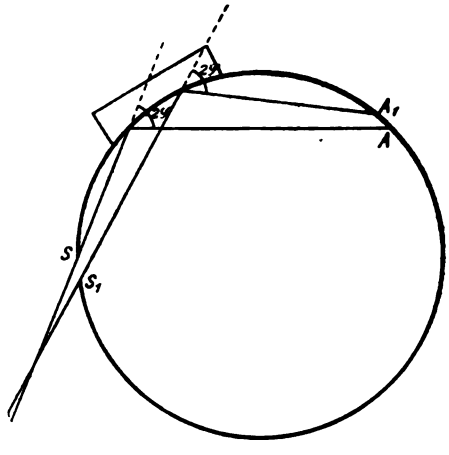


Fig. 2.

Die Eindringungstiefe der Strahlung in die Kristallmasse ist ebenfalls ohne Einwirkung auf die Lage der scharfen Kante der Linie, wie aus Fig. 3 hervorgeht. Hier bedeuten die gestrichelten Linien den Weg der von Kristallteilchen im Inneren der Kristallmasse reflektierten Strahlen.

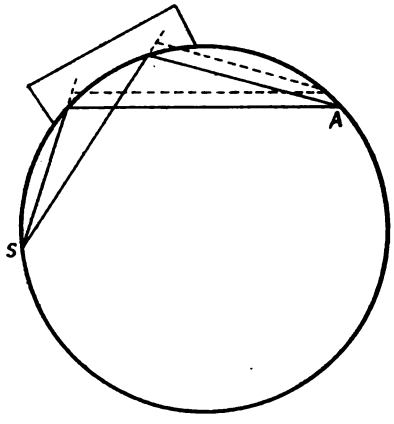


Fig. 3.

Die Aufnahme Nr. 1 bestätigt die oben gegebene Auseinandersetzung. Sie wurde mit Aluminiumpulver als reflektierende Substanz gemacht. Die Spaltbreite war ungefähr 1 mm. In den folgenden Aufnahmen wurde nur ein schmaler,

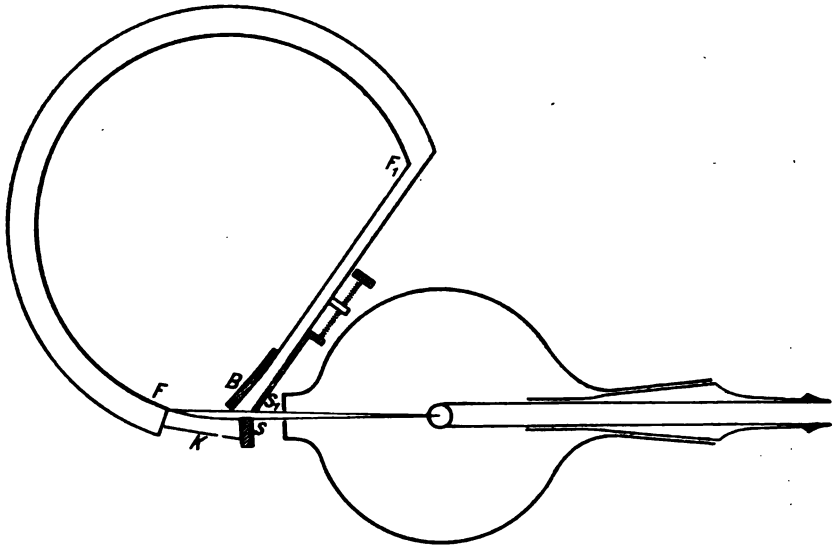


Fig. 4.

der Höhe des Spiegels entsprechender Filmstreifen verwendet, da nur dieses Stück des Bildes zur Ausmessung dienen kann.

Kamera und Röntgenröhre sind in ihrer gegenseitigen Lage in Fig. 4 dargestellt. SS_1 ist der Spalt aus Blei, dessen eine Kante S_1 mit einer Schraube verschiebbar ist, B eine Blende, die verhindern soll, daß die Strahlung vom Spalte direkt den Film FF_1 trifft. Im Punkte F wurde ein feiner Strich auf den Film gemacht, von wo aus die Lagen der Interferenzlinien gemessen wurden. Die Länge des Bogens FKS

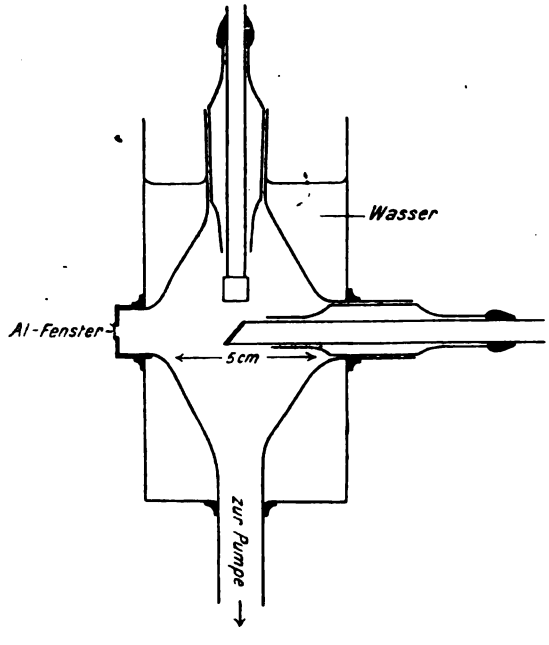


Fig. 5.

beträgt 22,4 mm, der Radius der Kamera 40,2 mm. Die Spiegel wurden mit einem Stempel von rechtwinkligem Querschnitt und zylindrisch gekrümmter Endfläche (Radius gleich dem Radius der Kamera) hydraulisch gepreßt.

Als Strahlungsquelle wurde eine Röntgenröhre mit Glühkathode und Kupferantikathode verwendet (Fig. 5). Um den Abstand Antikathode—zerstreuende Substanz so klein wie angängig zu machen, wurden die Dimensionen der Röhre möglichst reduziert (der Durchmesser der Kugel ungefähr 5 cm). Die Strahlung trat durch ein Aluminiumfenster von 0,05 mm

Dicke aus der Röhre heraus. Kathode und Antikathode waren in Glasschliffen mit Siegellack eingekittet. Die Glühspirale der Kathode bestand aus 0,2 mm dickem Wolframdraht, von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft in Berlin bezogen. Die Röhre wurde mit Kühlwasser umgeben, außerdem wurde sowohl Kathode als Antikathode mit fließendem Wasser gekühlt. Die Stromstärke durch die Röhre konnte bis 30 M.A. gesteigert werden bei einer Spannung von ungefähr 15000 Volt. Während des Betriebes war die Röhre dauernd mit der Vakuumpumpe verbunden (Diffusionspumpe nach Gaede). Die Belichtungszeiten betrugen im allgemeinen 2 Stunden. Es wurde Röntgenfilm von der Firma O. Perutz, München, verwendet.

Drei Aufnahmen. (Vgl. Tafel I.)

1. Thorium.

Die Aufnahme Nr. 2 ist mit Thoriumpulver als reflektierender Substanz gemacht. Durch einen unvorhergesehenen Zufall hatte der Brennfleck während der Belichtung dieser Aufnahme die Kante der Antikathodenfläche getroffen, wo die Kupferplatte an Messing gelötet war.

Tabelle 1.

Cu_α-Strahlung		Cu_β-Strahlung			Zn_α-Strahlung		
l	$\sin\varphi$	l	$\sin\varphi$	Cu_α/Cu_β	l	$\sin\varphi$	Cu_α/Zn_α
41,5	0,256	37,4	0,229	1,114	38,5	0,238	1,076
48,1	0,295	43,0	0,265	1,113	44,5	0,274	1,077
70,0	0,422	62,4	0,379	1,112	64,7	0,392	1,077
83,5	0,497	74,4	0,447	1,112	77,1	0,462	1,076
87,5	0,518	79,1	0,473	1,100	80,9	0,483	1,076
102,5	0,596						
114,9	0,656				105,1	0,609	1,078
118,4	0,671				108,5	0,625	1,073
133,2	0,737				121,9	0,689	1,072
143,4	0,779						

Es war deshalb zu vermuten, daß eine neue Wellenlänge, die des Zinks, hinzukam, welches auch eine einfache Untersuchung bestätigt. Das Diagramm würde sich dann aus drei Serien von Linien zusammensetzen mit den Wellenlängen

$$Cu_\alpha = 1{,}54, \qquad Cu_\beta = 1{,}39, \qquad Zn_\alpha = 1{,}43 \text{ Å.-E.},$$

von denen Cu_α die größte, Cu_β die kleinste Intensität besitzt. (Zn_β ist, wie aus dem Folgenden zu sehen ist, zu schwach, um

auf dem Film sichtbar zu werden.) Diese Zusammensetzung der Strahlung stört indessen nicht die Berechnung, liefert im Gegenteil eine wertvolle Kontrolle.

Wenn die drei Arten der Strahlung an derselben Netzebene reflektiert vorkommen, müssen nach Gleichung (1) die zugehörigen Werte von $\sin\varphi$ sich wie die betreffenden Wellenlängen verhalten. Wir suchen also zuerst unter Berücksichtigung der Intensitäten in der Reihe von beobachteten Größen von $\sin\varphi$ je zusammengehörige Werte, für welche das Verhältnis $1{,}54/1{,}39 = 1{,}108$ besteht. So wurden die in den Kolumnen 2 und 4 der Tab. 1 stehenden Werte von $\sin\varphi$ ausgesondert, von denen je zwei in derselben Horizontalreihe stehenden das in der Kolumne 5 berechnete Verhältnis ergeben. Die Werte in der Kolumne 2 entsprechen also der Cu_α-Strahlung, die in der Kolumne 4 der Cu_β-Strahlung. In derselben Weise wurden die Zn_α-Linien identifiziert; die entsprechenden Werte von $\sin\varphi$ sind in der Kolumne 7 wiedergegeben. Wenn aus den Mittelwerten der gefundenen Verhältnisse in den Kolumnen 5 und 8 Cu_β und Zn_α berechnet werden, erhält man, wenn Cu_α gleich 1,54 gesetzt wird: $Cu_\beta = 1{,}38$ und $Zn_\alpha = 1{,}43$, was mit den oben angeführten Werten der Wellenlängen gut übereinstimmt.

Weil alle beobachteten Linien in der Tab. 1 untergebracht sind, und die Konstanz der Verhältnisse Cu_α/Cu_β und Cu_α/Zn_α nichts zu wünschen übrig läßt, können wir die Einteilung der Linien als zuverlässig ansehen und jede von den drei Serien benutzen, um das Atomgitter zu ermitteln. — In den Kolumnen 1, 3 und 6 der Tab. 1 sind außerdem die Abstände l der Linien von der Spaltkante S (Fig. 4) angegeben.

Für Thorium ist nach Brögger[1]) eine reguläre Struktur zu erwarten. Die beobachteten Werte von $\sin\varphi$ würden sich in diesem Falle nach der Gleichung[2]):

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \tag{3}$$

berechnen lassen, wo h_1, h_2, h_3 die kristallographischen Indizes derjenigen Netzebene bedeuten, die die Strahlung unter dem Winkel φ reflecktiert und a die Kantenlänge des kubischen Elementarbereiches des Atomgitters ist. Wie man aus der

1) W. C. Brögger, Zeitschr. f. Krystall. 7. S. 442. 1883.
2) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. 17. S. 277. 1916.

Tab. 2 ersieht, ist dieses wirklich der Fall. Darauf deuten die konstanten Verhältnisse

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

hin. Hieraus läßt sich also a berechnen. Man findet als Wert für a den drei Strahlungskomponenten entsprechend

$$5{,}13 \cdot 10^{-8}; \quad 5{,}11 \cdot 10^{-8}; \quad 5{,}11 \cdot 10^{-8}\,\text{cm},$$

eine Übereinstimmung, die als recht gut zu bezeichnen ist.

Wenn das spezifische Gewicht des Thoriums gleich 11 gesetzt wird, erhält man für das Gewicht des Elementarwürfels $1510 \cdot 10^{-24}$ g. Das absolute Gewicht des Thoriumatoms ist $232 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24}\,\text{g} = 385 \cdot 10^{-24}\,\text{g}$. Der Elementarbereich enthält also 4 Atome.

Wir haben also die kubische Struktur des Thoriums bestätigt und weiter festgestellt, daß es von 4 ineinander geschalteten kubischen Gittern mit der Kantenlänge a aufgebaut ist. Es bleibt noch übrig zu ermitteln, in welcher Weise diese 4 Gitter ineinander geschaltet sind.

Aus Kolumne 1 der Tab. 2 geht hervor, daß nur Netzebenen mit ungemischten Indizes Interferenzlinien erzeugen. Dieses deutet darauf hin, daß das Gitter ein flächenzentriertes ist. Der Strukturfaktor S[1]) wird für diesen Fall

$$S = 1 + e^{\pi i (h_1 + h_2)} + e^{\pi i (h_1 + h_3)} + e^{\pi i (h_2 + h_3)},$$

verschwindet also, wenn nicht die Indizes entweder alle gerade oder alle ungerade sind. Nach Debye[2]) ist die Intensität J einer Interferenzlinie mittels des Ausdruckes

$$J = K \frac{(1 + \cos^2 2\varphi)\, n\, |S|^2}{\sin^2 \varphi} \tag{4}$$

zu berechnen, wo K ein Proportionalitätsfaktor und n die sogenannte Kombinationszahl ist, d. h. die Zahl der Netzebenen, die zur Bildung einer Interferenzlinie zusammenwirken.

1) M. v. Laue, a. a. O.
2) P. Debye, Phys. Zeitschr. 18. S. 483. 1917.

Tabelle 2.

h_1	h_2	h_3	Cu_α-Strahlung: sin φ	$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$	Intensität beob.	Intensität ber.	Cu_β-Strahlung: sin φ	$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$	Intensität beob.	Intensität ber.	Zn_α-Strahlung: sin φ	$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$	Intensität beob.	Intensität ber.
1	1	1	0,256	0,149	*ss t*[1])	21	0,229	0,132	*s – m*	28	0,238	0,138	*m*	27
2	0	0	0,295	0,148	*s t*	12	0,265	0,132	*s*	15	0,274	0,138	*s*	14
2	2	0	0,422	0,150	*s t*	10	0,379	0,134	*s*	12	0,392	0,139	*s*	11
3	1	1	0,497	0,150	*s t*	12	0,447	0,135	*s*	17	0,462	0,139	*s*	14
2	2	2	0,518	0,150	*m*	4,0	0,473	0,136	*ss*	5	0,483	0,139	*ss*	4
4	0	0	0,596	0,149	*ss*	1,8								
3	3	1	0,656	0,150	*m – st*	10					0,609	0,140	*s*	8
4	2	0	0,671	0,150	*s – m*	5,3					0,625	0,140	*s*	6,5
4	2	2	0,737	0,150	*s*	4,8					0,689	0,140	*ss*	5
3	3	3	0,779	0,150	*s – m*	6,8								
5	1	1												

1) Die Bezeichnung der geschätzten Intensitäten ist folgende: *sst* = sehr stark, *st* = stark, *m* = mittel, *s* = schwach, *ss* = sehr schwach.

In der Tab. 2 sind die nach dieser Formel berechneten relativen Intensitäten zum Vergleich mit den beobachteten angegeben. Weil auch in dieser Hinsicht eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung vorliegt, können wir also feststellen, daß das Atomgitter von Thorium ein kubisches, flächenzentriertes mit der oben ermittelten Kantenlänge a ist.

In der 4. Gruppe des periodischen Systems, die hinsichtlich des Raumgitters die am besten ausgeforschte ist, sind also jetzt fünf Elemente untersucht worden, nämlich: C[1]), Si[2]), Sn[3]), Pb[4]), Th.

2. Nickel.

Aufnahme Nr. 3 ist mit Nickelpulver als zerstreuender Substanz gemacht. Dieses Bild wurde von reiner Kupferstrahlung erzeugt. Die Cu_β-Linien sind nicht auf der Platte zu sehen, wahrscheinlich wegen der recht starken kontinuierlichen Schwärzung derselben.

Über die Kristallform des Nickels liegen nur ganz unbestimmte Angaben vor, nach welchen dieselbe kubisch wäre.[5]) Schon die Einfachheit des Diagramms läßt auch eine kubische Struktur vermuten. Wie eine nähere Untersuchung ergibt, lassen sich die Werte von $\sin\varphi$ nach der Gleichung (8) berechnen, was aus dem konstanten Verhältnis

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$$

hervorgeht (Tab. 3).

Tabelle 3.

l	$\sin\varphi$	h_1	h_2	h_3	$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$	Intensität beob.	Intensität ber.
61,8	0,375	1	1	1	0,217	*s s t*	8,8
72,1	0,434	2	0	0	0,217	*s t*	4,2
106,5	0,616	2	2	0	0,218	*s t − m*	3,4
129,7	0,723	3	1	1	0,218	*s t*	4,8
137,4	0,755	2	2	2	0,218	*s*	1,4

1) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. **18**. S. 291. 1917.
2) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. **17**. S. 277. 1916.
3) A. J. Bijl u. N. H. Kolkmeyer, a. a. O.
4) L. Vegard, Phil. Mag. **32**. S. 65. 1916.
5) J. A. Ewing u. W. Rosenhain, Trans. Roy. Soc. London 1900 **193** A. S. 353.

Auf dieselbe Weise, wie im vorigen Falle, erhalten wir hier $a = 3{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm. Setzen wir das spezifische Gewicht des Nickels gleich 8, 8, erhalten wir für das Gewicht des Elementarkubus $388 \cdot 10^{-24}$ g. Das absolute Gewicht des Nickelatoms beträgt $97{,}4 \cdot 10^{-24}$ g. Ein Elementarbereich des Gitters enthält also 4 Atome. Weil keine gemischte Indizes vorkommen, andererseits aber die beobachteten Linien allen überhaupt möglichen ungemischten Indizes angehören, die innerhalb des Beobachtungsgebietes fallen, schließen wir, daß wir es auch in diesem Falle mit einem flächenkonzentrierten Gitter zu tun haben. Dieses wird auch durch die Übereinstimmung der nach Formel (4) berechneten Intensitäten mit den beobachteten bestätigt.

Das Atomgitter des gewöhnlichen (α)-Nickels ist also ein flächenzentriertes kubisches mit der Kantenlänge

$$a = 3{,}53 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Unter den bis jetzt hinsichtlich des Raumgitters untersuchten Elementen haben die in der folgenden Tabelle zusammengestellten kubische flächenzentrierte Gitter. In der zweiten Reihe ist die Kantenlänge des Elementarwürfels angegeben.

Al[1])	$4{,}07 \cdot 10^{-8}$ cm
Ni (α)	3,53 „
Cu[2])	3,61 „
Ag[3])	4,06 „
Sn (grau)	6,46 „
Au[4])	4,07 „
Pb	4,91 „
Th	5,12 „

3. Magnesium.

(Aufnahme 4.) Nach demselben Verfahren wie bei Thorium beschrieben, wurden die von den beiden Strahlungskomponenten Cu_α und Cu_β herrührenden Linien getrennt. Es ergab sich dann, daß diejenigen Linien, die in der Tab. 4 mit a', b', c', d', f', h', j' bezeichnet sind, β-Linien sind, reflektiert an den-

1) P. Scherrer, Phys. Zeitschr. **19.** S. 23. 1918.
2) W. H. Bragg, Phil. Mag. **28.** S. 355. 1914.
3) L. Vegard, Phil. Mag. **31.** S. 83. 1916.
4) L. Vegard, Phil. Mag. **32.** S. 65. 1916

selben Netzebenen, wie die α-Linie a, b, c, d, f, h, j. Die übrigen sind alle α-Linien, deren entsprechende β-Linien zu schwach sind, um auf dem Film sichtbar zu werden.

Tabelle 4.

	l	$\sin^2\varphi$ beob.	ber.	$h_1\,h_2\,h_3$	n	Intensität beob.	ber.
a'	39,9	0,0605					
b'	42,6	0,0687					
a	44,2	(0,0739); 0,0755[1])	0,0755	110 (100)	1	m	2,3
c'	45,4	0,0779					
b	47,6	(0,0853); 0,0860[1])	0,0860	002	1	$s\,t$	2,0
c	50,6	(0,0960); 0,0967[1])	0,0970	111 (101)	2	$s\,s\,t$	3,4
d'	58,9	0,128					
d	66,1	0,160	0,162	112 (102)	2	$s\,t-m$	1,8
f'	70,8	0,183					
e	72,5	0,191	0,193	003	1	$s\,s$	0,7
h'	77,9	0,218					
f	79,5	0,226	0,227	1–10 (120)	1	$m-s$	0,6
g	83,4	0,247	0,248	1–11 (121)	2	$s\,s$	1,0
j'	84,6	0,253					
h	87,5	0,268	0,269	113 (103)	2	m	0,9
i	93,4	0,302	0,302	220, 200	3	$s\,s$	1,1
j	95,1	0,313	0,313	1–12 (212)	2	m	0,8
k	97,2	0,324	0,324	201, 221	6	m	2,3
l	100,6	0,344	0,344	004	1	s	0,3
m	108,0	0,387	0,388	222, 202	6	s	1,8
n	113,3	0,420	0,420	1–13, 114 (123)	4	s	0,9
o	125,8	0,498	0,496	203, 223	6	s	1,2
p	134,7	0,554	0,550	131 (231)	4	s	0,7
q	138,1	0,575	0,571	1–14 (124)	2	$s\,s$	0,4
r	145,4	0,619	0,615	132 (232)	4	s	0,7

Schon die große Anzahl der Linien dieser Aufnahme deutet auf ein Gitter von niedrigerer Symmetrie als in den oben besprochenen Fällen. Eine ähnliche Untersuchung zeigt auch, daß die Gleichung (3) nicht die beobachteten Linien wiedergeben kann. Der Berechnung müssen dann die von Debye und Scherrer zusammengestellten[2]), für ein beliebiges Kristallsystem geltenden Formeln zugrunde gelegt werden. Nach

1) Aus der Linie 2. Ordnung ermittelt. Weil die eine Ecke des Films bei dieser Aufnahme von der Kamerawand sich losgelöst hatte, sind die ersten Linien etwas schräg.

2) P. Debye u. P. Scherrer, Phys. Zeitschr. **18**. S. 291. 1917. A. Johnson u. O. Toeplitz, Phys. Zeitschr. **19**. S. 47. 1918.

diesen lassen sich die Werte von $\sin^2\varphi$ berechnen aus der homogenen quadratischen Form

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 4\sin^2\varphi = {} & k_{11}h_1^2 + k_{22}h_2^2 + k_{33}h_3^2 + 2k_{12}h_1h_2 \\ & + 2k_{13}h_1h_3 + 2k_{23}h_2h_3, \end{aligned}\right.$$

wo $h_1\,h_2\,h_3$ die kristallographischen Indizes der Netzebene bedeuten, die unter dem Winkel φ die Strahlung reflektiert, und die Konstanten k das Kristallsystem charakterisieren. Es ist also die Aufgabe, diese Konstanten so zu bestimmen, daß die quadratische Form die beobachteten Werte von $\sin^2\varphi$ gibt wenn (kleine) ganze Zahlen für die veränderlichen $h_1\,h_2\,h_3$ eingesetzt werden. Sind die Konstanten k ermittelt, so lassen sich die das Elementarbereich bestimmenden Stücke, die Kantenlängen a, b, c und die Winkel α, β, γ, welche diese miteinander bilden, nach den folgenden Formeln berechnen:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} a^2 &= \frac{\lambda^2(k_{22}k_{33}-k_{23}^2)}{K}, \\ b^2 &= \frac{\lambda^2(k_{33}k_{11}-k_{31}^2)}{K}, \\ c^2 &= \frac{\lambda^2(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)}{K}, \\ \cos\alpha &= \frac{k_{31}k_{12}-k_{23}k_{11}}{\sqrt{(k_{33}k_{11}-k_{31}^2)(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)}}, \\ \cos\beta &= \frac{k_{12}k_{23}-k_{31}k_{22}}{\sqrt{(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)(k_{22}k_{33}-k_{23}^2)}}, \\ \cos\gamma &= \frac{k_{23}k_{31}-k_{12}k_{33}}{\sqrt{(k_{22}k_{33}-k_{23}^2)(k_{33}k_{11}-k_{31}^2)}}. \end{aligned}\right.$$

Hier ist

$$K = k_{11}k_{22}k_{33} - k_{11}k_{23}^2 - k_{22}k_{31}^2 - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{23}k_{31}k_{12};$$

λ bedeutet die benutzte Wellenlänge.

Nach Arbeiten von Des Cloizeau[1]), Ditscheiner[2]) und Hlawatsch[3]) ist für Magnesium eine hexagonale Struktur zu erwarten. Wenn wir als Elementarbereich eines hexagonalen Gitters ein gerades Prisma mit rhombischer Grundfläche ansehen, deren Seiten den Winkel 60° und 120° miteinander

1) A. Des Cloizeau, Bull. soc. min. d. Fr. Par. 1880. 3. S. 111.

2) L. Ditscheiner, Sitzungsberichte d. Akad. Wien. 105 (II b). S. 597. 1896.

3) C. Hlawatsch, Zeitschr. f. Krystall. 32. S. 497. 1900.

bilden, so vereinfacht sich die Formel (5) zu:

$$x\,(h_1^2 + h_2^2 - h_1 h_2) + y\,h_3^2 = \sin^2\varphi\,, \tag{7}$$

worin $x = \frac{k_{11}}{4}$ und $y = \frac{k_{33}}{4}$ zwei mit den Beobachtungen zu berechnende Größen sind.

Die drei ersten Formeln unter (6) werden für diesen Spezialfall:

$$a^2 = b^2 = \frac{\lambda^2}{3x}\,; \qquad c^2 = \frac{\lambda^2}{4y}\,.$$

Nach einer Methode, die von Johnsen und Toeplitz[1]) beschrieben ist, wurden jetzt a und β so bestimmt, daß sich die beobachteten Werte von $\sin^2\varphi$ aus der Gleichung (7) berechnen ließen. Es zeigte sich, daß, wenn

$$x = 0{,}0755 \quad \text{und} \quad y = 0{,}0215 \tag{8}$$

gesetzt wird, die Gleichung (7) sich mit großer Genauigkeit den beobachteten Werten anschließt.

In den Spalten 3 und 4 der Tab. 4 sind die beobachteten und berechneten Werte von $\sin^2\varphi$ zum Vergleich angeführt; daneben stehen die Indizes der Netzebenen. Die Übereinstimmung ist überraschend gut, indem die größten Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Werten von $\sin^2\varphi$ ungefähr 1% betragen.

Aus den Formeln (8) berechnet sich jetzt

$$a = b = 3{,}23 \cdot 10^{-8}\,\text{cm}; \qquad c = 5{,}25 \cdot 10^{-8}\,\text{cm}.$$

Diese Gestalt des Elementarbereiches entspricht einem Raumgitter von gerade übereinander in dem Abstande c gelagerten Atomschichten, von dem in Fig. 6 angegebenen Bau. Diese Tatsache steht in gutem Einklang mit den von Hlawatsch an ausgebildeten Magnesiumkristallen ausgeführten kristallographischen Messungen. Für die dihexagonal-bipyramidalen Kristalle findet er das Achsenverhältnis $a : c = 1 : 1{,}624$, während die hier ermittelten Maße des Elementarbereiches $a : c = 1 : 1{,}625$ geben.

Es bleibt noch übrig zu ermitteln, wieviele solche Gitter ineinander gestellt sind. Wenn das spezifische Gewicht des Magnesiums gleich 1,7 gesetzt wird, erhält man als Gewicht

1) A. Johnsen u. O. Toeplitz, a. a. O.

des Elementarbereichs $80{,}7 \cdot 10^{-24}$ g. Das wirkliche Gewicht eines Magnesiumatoms beträgt $40{,}3 \cdot 10^{-24}$ g. Ein Elementarbereich muß also *zwei* Magnesiumatome enthalten.

Schwierigkeiten treten indessen auf, wenn es gilt zu entscheiden, wie diese zwei Gitter gegeneinander verschoben sind. Am nächsten liegt es, an eine Verschiebung längs der *hexagonalen* (*c*-)*Achse* zu denken. Daß eine solche nicht (was am einfachsten scheint) $c/2$ sein kann, geht daraus hervor, daß in diesem Falle alle Interferenzlinien mit ungeraden h_3 verschwinden müßten; mehrere solche sind aber vorhanden, wie aus der

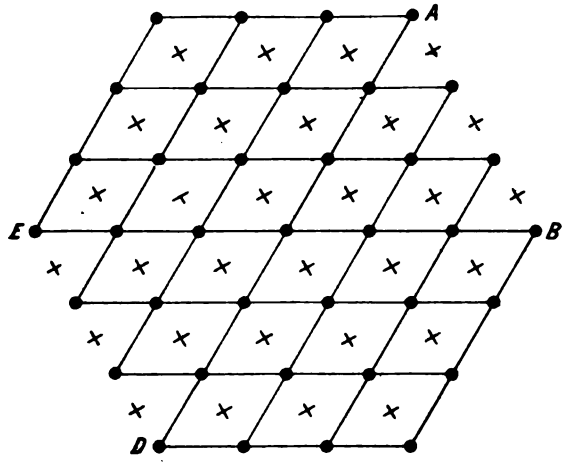


Fig. 6.

Tab. 4 zu ersehen ist. Eine gegenseitige Verschiebung um ungefähr $^1/_6$ von der *c*-Achse würde mit der Tatsache gut übereinstimmen, daß die Linie *e* (003) bedeutend schwächer ist, als *l* (004), würde aber ein sehr unwahrscheinliches Bild vom Raumgitter ergeben.

Als unmöglich erweist sich das Anbringen des zweiten Atoms im *Zentrum* des Elementarkörpers. Es würde das Ausfallen von allen Interferenzlinien, deren Indizessumme ungerade ist, bedeuten.

Eine gegenseitige Verschiebung in der *Basisebene* (Ebene der Fig. 6) würde kein Verschwinden von vorhandenen Linien zur Folge haben. In diesem Falle wird die größte Symmetrie

erreicht, wenn das zweite Atom in der Mitte von der Basisfläche des Elementarbereiches angebracht wird. Dieses würde, wie aus der Figur zu ersehen ist, bewirken, daß zwei gegenüberliegende Prismaflächen ($A\,B$ und $D\,E$) dichter mit Atomen besetzt werden würden, als die anderen vier Flächen derselben Art. Möglicherweise spricht für eine solche Anordnung die von Hlawatsch beobachtete Tatsache, daß die Magnesiumkristalle oft längs einer Nebenachse verlängert sind. In der Tab. 4, Kolumne 8, sind die Intensitäten der Linien dieser Anordnung der beiden Gitter entsprechend nach Formel (4) berechnet. Der Strukturfaktor wird für diesen Fall

$$S = 1 + e^{\pi i (h_1 + h_2)},$$

woraus hervorgeht, daß alle Netzebenen, für welche $h_1 + h_2$ eine ungerade Zahl ist, nicht reflektieren. Diese Indizeskombinationen sind in der Tabelle eingeklammert. In der Spalte 6 sind die Kombinationszahlen der verschiedenen Indizestriplets angegeben.

Wahrscheinlich hat außerdem ein anderer Faktor auf die Intensitätsverteilung eingewirkt. Eine mikroskopische Untersuchung des Metallpulvers zeigte, daß dieses aus sehr dünnen Blättchen bestand von der ungefährlichen Dicke $^1/_{100}$ mm, deren Fläche aber eine Ausdehnung von mehreren Zehnteln Millimeter haben konnte. Nach Hlawatsch ist die Basisfläche der hexagonalen Säulen eine bevorzugte Spaltungsfläche. Die Anordnung der Kristallkörner ist nun wegen der Gestalt der Teilchen keine vollkommen regellose, was im Diagramm vor allem dadurch zum Ausdruck kommt, daß die Intensität der Reflexion an der Basisfläche (002) größer wird, als berechnet, während die von den Prismaflächen (110) entsprechend schwächer ausfällt. In welchem Maße der erwähnte Umstand auf die Intensitäten einwirkt, läßt sich aus diesem einzelnen Falle nicht beurteilen. Jedenfalls scheint es möglich, die Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Intensitäten dadurch zu erklären.

Um sich die Unstimmigkeit zu erklären, wäre es auch möglich, anzunehmen, daß das Metall zweiatomig sein würde. Für einen solchen Fall würden wohl die gewöhnlichen für punktförmige Zerstreuungszentra abgeleiteten Formeln nicht ausreichen, um die Intensitätsverteilung des Interferenzbildes zu be-

rechnen. Eine geplante Untersuchung von mehreren Elementen der zweiten Gruppe des periodischen Systems, wo analoge Raumgitter zu erwarten sind, wird voraussichtlich die Frage betreffs Verschiebung der beiden Gitter endgültig entscheiden können.

Zusammenfassung.

1. Es wurde eine neue Anordnung ausgearbeitet, nach welcher mittels einer zylinderförmig gekrümmten Zerstreuungsfläche aus gepreßtem Kristallpulver Interferenzlinien erzeugt werden, deren eine Kante scharf ist und sich geometrisch definieren läßt, weshalb eine Erhöhung der Meßgenauigkeit gegenüber der bisherigen Methode ermöglicht wird.

2. Es wurde gezeigt, daß die Schärfe und Lage der Linienkante unabhängig sind von der *Spaltbreite* und der *Eindringungstiefe* der Strahlung.

3. Es wurde mittels Aufnahmen nach der beschriebenen Methode die Raumgitter von Th, Ni und Mg ermittelt. Als Resultat ergab sich, daß Th und Ni flächenzentrische kubische Gitter besitzen. Mg ist aus zwei ineinander geschalteten einfachen hexagonalen Gittern aufgebaut.

Hrn. Professor Dr. F. Krüger bin ich für das große Interesse, das er für meine Arbeit gezeigt hat und für das bereitwilligste Zurverfügungstellen aller notwendigen Hilfsmittel zu großem Dank verpflichtet.

Ebenfalls möchte ich Hrn. Dr. Freiherrn von der Osten-Sacken für manche wertvolle Ratschläge danken.

Für die Arbeit standen auch Mittel der Jagorstiftung zur Verfügung, wofür auch hier der beste Dank ausgesprochen sei.

Danzig-Langfuhr, Physik. Inst. der Techn. Hochschule.

(Eingegangen 14. Juli 1919.)

2. *Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik?*[1]) *von P. Ehrenfest.*

„Warum hat unser Raum gerade drei Dimensionen?[1]) oder anders gefragt: „Welche *singulären*[2]) Vorkommnisse unterscheiden die Physik des R_3 vor der in den übrigen R_n?" — So gestellt, sind die Fragen vielleicht sinnlos, jedenfalls fordern sie zur Kritik heraus. Denn „ist" der Raum?, „ist" er dreidimensional? Und vollends die Frage nach dem „warum". Auch: was muß man unter „der" Physik des R_4 oder R_7 verstehen?

Ich werde nicht versuchen, diesen Fragen eine minder anstößige Form zu geben. Glückt es, nur erst mehr und mehr singuläre Eigenschaften des R_3 aufzufinden, dann wird schließlich von selber deutlich werden, welche „vernünftige" Frage sich zu der gefundenen Antwort konstruieren läßt.

§ 1. Schwerkraft und Planetenbewegung.

Was die Bewegung eines Planeten um einen Zentralkörper betrifft, so kann man feststellen, daß ein charakteristischer Unterschied zwischen R_3 und R_2 einerseits und allen höheren R_n anderseits besteht, was die Stabilität der Kreisbahn be-

1) Auszug aus der gleichnamigen Abhandlung in Versl. d. Ak. v. Wetensch. te Amsterdam **26.** S. 105. 1917 (Sitzung v. 26. V. 1917) = Proceedings **20.** S. 200. — Die interessante Bemerkung, die H. Weyl kürzlich über die Vierdimensionalität der Raum-Zeit-Welt gemacht hat (Gravitation u. Elektrizität. Sitzungsber. preuß. Ak. **26.** S. 474 oben. 1918; Neue Erweiterung der Relativtheorie. Ann. d. Phys. **59.** S. 133 Mitte. 1919), veranlaßt mich, hier noch einmal meine Bemerkungen zusammenzustellen, obwohl ich mir dessen bewußt bin, daß sie sehr elementar sind und einzeln genommen den meisten gut bekannt sein dürften. Aber ich hoffe eben, daß vielleicht andere dann einen Anlaß finden werden, reicheres und besseres Material zu dieser faszinierenden Frage vorzulegen.

2) Vgl. hierzu „Schlußbemerkung 1".

trifft. Während im R_3 die Bewegung bei einer Störung im Endlichen bleibt, wenn die Energie nicht zu groß ist und dies im R_2 sogar für jeden beliebigen endlichen Betrag der Energie der Fall ist, sind *im* R_4, R_5, R_6 *usw. die Kreisbahnen zwar natürlich auch noch möglich, aber bei jeder noch so kleinen Störung läuft der Planet längs einer Spirale in den Zentralkörper oder ins Unendlichferne.*

Das Anziehungsgesetz im R_n setzen wir $\varkappa \frac{Mm}{r^{n-1}}$: dazu gehört für $n > 2$ eine potentielle Energie:

$$(1) \qquad V(r) = -\varkappa \frac{Mm}{(n-2)r^{n-2}}.$$

Dies entspricht natürlich der Annahme:

a) daß die Kraft nach dem Zentrum gerichtet und nur Funktion von r ist;

b) daß auch im R_n für die Schwerkraft das Theorem von Gauss über die Kraftlinienströmung gelten soll.

Man erhält so die Bewegungsgleichungen:

$$m\frac{d^2x_h}{dt^2} = -\varkappa \frac{Mm}{r^{n-1}}\frac{x_h}{r} = -\frac{\partial V}{\partial x_h} \qquad (h = 1, \ldots n).$$

Die Bahn ist eben. Einführung von Polarkoordinaten r, φ gibt für Energie und Flächensatz:

$$\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + V(r) = E, \qquad m r^2\dot\varphi = \Theta.$$

Elimination von $\dot\varphi$ gibt:

$$(2) \qquad \dot r = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V}{m} - \frac{\Theta^2}{m^2 r^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{A r^2 + B r^{4-n} - C^2},$$

wo A, B, C Konstanten sind, von denen die erste und letzte von den Beginndaten der Bewegung abhängt, insofern sie die Totalenergie E und die Konstante des Flächensatzes Θ enthalten. Damit r bei der Bewegung zwischen zwei positiven Werten hin und her pendle, ist nötig, daß $\dot r$ reell ist und abwechselnd positive und negative Werte annimmt, also muß die Größe unter der Wurzel positiv sein zwischen zwei Werten von r, für die sie Null ist. Die Diskussion der Fälle, worin das vorkommt, läßt sich leicht geometrisch geben, indem man die Kurven $y = A r^2$ und $y = B r^{4-n}$ zeichnet, hieraus die Summenkurve skizziert und nachsieht, wie sie von $y = c^2$

geschnitten wird.[1]) Entsprechend läßt sich auch der Fall $n = 2$ behandeln, wo (1) ersetzt werden muß durch:

$$V = \varkappa M m \lg r. \tag{1'}$$

also (2) durch

$$\dot{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\alpha r^2 - \beta r^2 \lg r - \gamma^2}, \tag{2'}$$

wo

$$\alpha = \frac{2E}{m}, \qquad \beta = 2\varkappa M, \qquad \gamma^2 = \frac{\mathfrak{G}^2}{m^2}.$$

Das Resultat der Diskussion ist:

n	Kreisbahnen	Bewegungen zwischen zwei positiven Werten von r	Bewegung nach Unendlich
4, 5 . . .	instabil	unmöglich!	möglich
3	stabil	möglich [geschlossene Bahn]	möglich
2	stabil	möglich [ungeschlossene Bahn]	unmöglich!

Bemerkungen:

1. Es sei bei dieser Gelegenheit an das Theorem von J. Bertrand (1873) erinnert[2]): Die Bahnen eines materiellen Punktes, beschrieben unter Einfluß einer Zentralkraft, die nur Funktion des Abstandes ist, sind nur dann geschlossen, wenn die Kraft entweder proportional mit dem Abstand oder umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes ist.

2. Bemerkenswert ist, daß die Planetenbewegungen die den elliptischen entsprechen, auch im *nichteuklidischen* R_3 geschlossen sind, falls man nur die Gleichungen der Mechanik und das Anziehungsgesetz zugleich diesem Raum anpaßt.[3])

3. Man wird sich natürlich auch fragen, was aus dem Bohrschen *Atommodell* wird im R_n für $n \neq 3$. Modifiziert man das Gesetz der elektrischen Anziehung so wie das der

1) Vgl. die Figuren in Koninkl. Akad. van Wetensch. Amsterdam a. a. O. „Aanhangsel I".

2) J. Bertrand, C. R. 77. S. 846. 1873.

3) H. Liebmann, Nichteukl. Geometrie (Samml. Schubert. 2. Aufl. 1912. S. 207).

Schwere und behält: a) die Quantisierung des Flächenmoments, b) den Ansatz $\nu = \frac{E' - E}{h}$ bei, so sieht man alsbald, wie scharf *das Bohrsche Modell gerade auf den R_3 paßt*: Für $n = 4$ erhält man eine ganz arge Degeneration.[1]) Für $n = 2$ erhält man Spektralserien mit Häufungsstelle im Unendlichen, weil ja im R_2 unendlich viel Energie nötig ist, um das Elektron ins Unendliche zu werfen. Für $n > 4$ sind vor allem natürlich höchstens die Kreisbahnen zu brauchen. Im Gegensatz zum R_3 liegen hier die Bahnen wachsender Quantenzahl stets dichter und dichter beim Kern, und damit im Zusammenhang haben auch hier wieder die Spektralserien ihre Häufungsstellen im Unendlichen.[2])

§ 2. Dualität zwischen elektrischem und magnetischem Feld im R_n.

Im R_n wird das elektrische Feld durch n-Komponenten bestimmt, das magnetische Feld durch $\frac{n(n-1)}{2}$ Kennzahlen. Nur für $n = 3$ fallen diese beiden Anzahlen zusammen und besteht also die weitgehende Dualität zwischen den beiden Feldern.

In der Tat seien $x_2 \ldots . x_n$ und $x_0 = i\,c\,t$ die $n+1$ Koordinaten der Raum-Zeit-Welt und $\varphi_0, \varphi_1 \ldots . \varphi_n$ die Komponenten des retardierten Potentials (entsprechend dem Viererpotential in der zum R_3 gehörigen Relativitätstheorie), so entsprechen die $\frac{n(n-1)}{2}$-Komponenten der Rotation:

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} \qquad (h, k = 1, \ldots n)$$

dem *magnetischen* Feld und die n-Komponenten:

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_h} \qquad (h = 1, \ldots n)$$

dem elektrischen Feld.

Analoges ist bekanntlich zu sagen betreffs Translations-Rotationsgeschwindigkeit, Kraft-Drehmoment.

§ 3. Die Wellenausbreitung im R_n.

Die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^n{}_h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h^2} = 0$$

1) a. a. O., „Aanhangsel II".
2) a. a. O., Ebenda.

haben im ξ für $n = 3$ folgende Eigenschaft: Hat man im Moment $t = 0$ überall $\varphi = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ außer in einem kleinen Gebiet γ, dann ist in jedem späteren Moment t (wenn nur nicht zu klein genommen wird) noch überall $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ außer in einer dünnen Schale zwischen zwei Oberflächen (vgl. Figur), die — falls γ klein genug ist, angenähert zwei konzentrische Kugeln sind um γ.

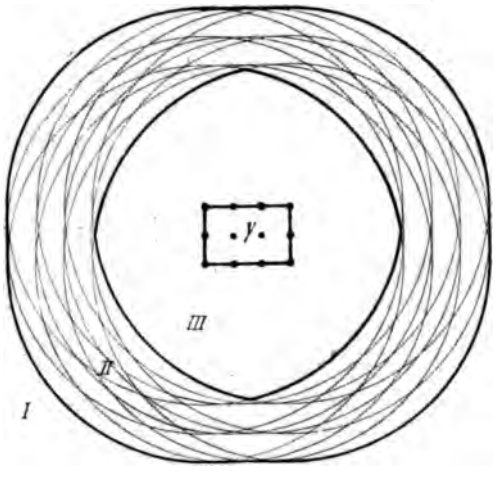


Fig. 1.

Im R_2 ist es bekanntlich[1]) anders: Bei der Wellenausbreitung auf einer Membran hat man außer einer Störung in dem Ring, der II entspricht, auch noch eine (schwächere) Störung im ganzen inneren Gebiet III.

Alle R_{2n+1} verhalten sich in dieser Beziehung wie der R_3. alle R_{2n} analog wie der R_2 (in dieser letzteren kann man also nicht das Prinzip von Huygens anwenden).[2 u. 3]) Aber unter

1) Vgl. z. B. Rayleigh, Theory of sound Ch. XIV. § 275.

2) Vgl. Duhem, Hydrodynamique T. I. Paris, Hermann Volterra, Acta Math. 1894; Hadamard, Bull. soc. franç. de phys. 1906 (dort andere Literatur, auch die älteren Arbeiten von Hadamard); Acta math. 31. S. 333. 1908; Leç. sur la propag. des Oudes (Paris Hermann 1903) Chap VII § 3.

3) Diese Tatsache steht rechnerisch in Beziehung zu der folgenden Tatsache: Die Formel für das Volumen einer Kugel im R_p enthält für

den R_{2n+1} zeichnet sich R_3 durch eine Eigenartigkeit aus, die evident wird, wenn man das retardierte Potential berechnet[1]), d. h. das Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h^2} = \varrho .$$

Für R_3 erhält man:

$$\varphi = \frac{1}{c_3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int d\omega \,\frac{[\varrho]}{r} .$$

Für R_5:

$$\varphi = \frac{1}{3c_5}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int d\omega \left\{\frac{[\varrho]}{r^3} + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right]_{r^2}\right\} .$$

Für R_7:

$$\varphi = \frac{1}{5c_7}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int d\omega \left\{\frac{[\varrho]}{r^5} + \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right]_{r^4} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2}\right]_{r^3}\right\} .$$

Hierin sind:

$$c_3 = 4\pi, \quad c_5 = \frac{8}{3}\pi^2, \quad c_7 = \frac{11}{15}\pi^3$$

die Oberflächen der Einheitskugel im R_3. R_5. R_7 und die Symbole

$$[\varrho], \quad \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right], \quad \left[\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2}\right]$$

bedeuten, daß man die Werte zur Zeit $t - \frac{v}{c}$ (die „retardierten" Werte) nehmen muß. Man sieht: *im Gegensatz zu R_3 werden im R_5 und R_7 usw. die retardierten Potentiale nicht nur durch ϱ, sondern auch noch durch dessen Differentialquotienten nach der Zeit bestimmt.* Dabei ist noch zu bemerken, daß für große Werte von r, also bei der eigentlichen Aus-

---

$p = 2n$ und $p = 2n + 1$ die Zahl π in *derselben* Potenz n. Die analytische Beziehung zwischen beiden Tatsachen tritt in Evidenz, wenn man die Wellengleichung z. B. mit Hilfe von Fourierintegralen integriert. Man stößt dann schließlich auf ein Integral über die $(p-1)$te Potenz von einem Quadratwurzelausdruck. Der Integrand wird also rational, wenn $p = 2n + 1$, irrational, wenn $p = 2n$. Das gleiche findet statt bei Berechnung des Kugelvolumens.

1) Vgl. a. a. O., Aanhangsel IV, eine einfache Ableitung der Lösungen für die R_{2n+1}.

strahlung, es jeweils gerade auf den höchsten Differentialquotient von ϱ ankommt, weil er durch die kleinste Potenz von r dividiert ist. Ein „Elektron" mit scharf begrenzter Ladung würde also im R_5, R_7 ... durch seine Bewegung Felder mit hohen Singularitäten ausstrahlen!

Schlußbemerkungen: 1. Wir haben hier nur solche Beziehungen betrachtet, bei denen der R_3 eine *singuläre* Stellung gegenüber den anderen R_n einnimmt. Darüber hinaus ist es natürlich oft sehr instruktiv, sich deutlich zu machen, wie an so vielen Punkten der Physik die Dreizahl der Dimensionen eingreift, ohne daß bei Übergang auf den R_n der R_3 gerade singuläres Verhalten zeigt: z. B. sind die *4* im Strahlungsgesetz von Stefan Boltzmann und die *3* im Verschiebungsgesetz von W. Wien: $\varrho = \nu^3 f(\nu/T)$ im R_n durch $(n+1)$ und n zu ersetzen. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen einatomiger Gase $c_p/c_v = 1^2/_3$ durch $1 + 2/n$ usw.

2. Man wird so veranlaßt, bei jeder in der Physik auftretenden, von den Maßeinheiten unabhängigen universellen Konstanten *versuchsweise* nach einem Zusammenhang mit der Dreidimensionalität des Raumes zu fragen (oder der Vierdimensionalität der Raum-Zeit-Welt). Man denke z. B. an die Rolle der Zahl 8 (und 10?) im periodischen System der chemischen Elemente [vgl. Borns „kubisches Atommodell"[1])]; den Exponenten 2 in der Formel von Balmer.

3. Aber es greift noch eine andere ganze Zahl in jeden Winkel der Physik ein: *der Exponent „zwei" des Theorems von Pythagoras.* Oder anders ausgedrückt: die homogen *quadratische* Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_h \sum_k g_{hk}\, dx_h\, dx_k$$

hat eine überherrschende Bedeutung gegenüber allen anderen homogenen Formen. — Läßt sich an diesem *zwei* nichts mehr fragen und begreifen?

Leiden, August 1919.

1) Verh. d. Deutsch. phys. Ges. **20.** S. 230. 1918.

(Eingegangen 31. August 1919.)

3. *Das Verhalten Hertzscher Gitter; von R. Gans.*

J. J. Thomson[1]) und H. Lamb[2]) haben sich mit der Theorie Hertzscher Gitter beschäftigt, und G. H. Thomson[3]) und Schaefer und Laugwitz[4]) konnten durch ihre Beobachtungen beweisen, daß die Thomsonsche Theorie im Widerspruch mit der Erfahrung ist, während die Lambsche befriedigend den Tatsachen gerecht wird.

Eine Annahme bei den mathematischen Berechnungen war die gewesen, daß die Leitfähigkeit der Gitterdrähte unendlich groß sei, was berechtigt ist, wenn die Drähte z. B. aus Kupfer sind und einen nicht zu kleinen Radius haben.

Um den Materialeinfluß zu erforschen, haben Schaefer und Laugwitz[5]) Gitter aus sehr feinen Drähten (von 0,0125 mm Durchmesser) konstruiert, deren Leitfähigkeit durch geeignete Auswahl des Materials innerhalb weiter Grenzen variierte, und haben das Reflektionsvermögen und die Durchlässigkeit für Hertzsche Wellen gemessen, konnten aber ihre experimentellen Resultate nicht mit der Theorie vergleichen, weil es noch keine Theorie des Verhaltens Hertzscher Gitter von endlicher Leitfähigkeit gab.

Beim Studium verschiedener Methoden zur Messung der magnetischen Permeabilität ferromagnetischer Körper für sehr schnelle Schwingungen habe ich mich auch mit der Gittertheorie beschäftigt und gelegentlich das Reflektions- und Absorptionsvermögen sowie die Durchlässigkeit der von Schaefer und Laugwitz benutzten Gitter numerisch berechnet.

---

1) J. J. Thomson, Recent researches in Electricity and Magnetism. S. 425.

2) H. Lamb, Proceedings of the London Math. Soc. **29.** S. 523. 1898.

3) G. H. Thomson, Straßburger Dissert. u. Ann. d. Phys. **22.** S. 365. 1907.

4) Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. **21.** S. 587. 1906.

5) Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. **23.** S. 951. 1907.

Diese Ergebnisse sollen im Folgenden mitgeteilt werden. Leider standen mir die Arbeiten von J. J. Thomson und von Lamb nicht zur Verfügung. Deshalb mußte ich die Lambschen Formeln, die sich auf Drähte von unendlicher Leitfähigkeit beziehen, und die die Grundlage unserer Überlegungen bilden werden, von neuem ableiten. Hierbei kam mir die Lambsche Theorie[1]) der Ausbreitung akustischer Wellen durch Gitter wegen ihrer Ähnlichkeit mit dem elektromagnetischen Problem zustatten.

Nach Beendigung der vorliegenden Arbeit fand ich, daß Schaefer und Reiche[2]) sich auch mit Gittertheorie beschäftigt haben, aber sie beschränken sich auf den Fall, daß die Gitterkonstante groß im Vergleich zur Wellenlänge ist, während für das Studium Hertzscher Wellen gerade der entgegengesetzte Fall von Interesse ist.

Außerdem behandelt von Ignatowsky[3]) die Theorie der Gitterbeugung, und zwar in sehr allgemeiner Weise. Deshalb sind seine Ableitungen naturgemäß wesentlich komplizierter als unsere, nach anderer Methode gefundenen.

Bei der Anwendung seiner Formeln auf *elektrische* Wellen (a. a. O., S. 430) begeht er das Versehen, die von uns in dieser Abhandlung eingeführte Größe

$$-\Delta = \frac{2a}{\lambda} \ln \frac{a}{2\pi b}$$

gegen Eins zu vernachlässigen, während er die unendlich kleine Größe

$$k l = \frac{2\pi^2 b^2}{a\lambda}$$

beibehält, so daß seine Gleichung (27) unrichtig wird, welche gerade für uns in Betracht kommt.

§ 1. Unendlich gut leitende Gitter.

Erster Fall: Die elektrische Schwingung ist parallel den Drähten.

Eine ebene elektromagnetische Welle komme aus der Richtung $x = +\infty$ und pflanze sich in der Richtung der negative x fort. In der yz-Ebene befinde sich ein Gitter von

1) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik; Deutsch von J. Friedel, Leipzig und Berlin 1907. S. 630.

2) Cl. Schaefer u. Fr. Reiche, Ann. d. Phys. **35.** S. 817. 1911.

3) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. **44.** S. 369. 1914.

äquidistanten metallischen Drähten vom Radius b, deren Achsen die Richtung der z-Achse haben. Der Abstand zweier aufeinander folgender Drähte (Gitterkonstante) sei a.

Wir beschränken uns auf den Fall, daß der Radius b klein gegen den Abstand a sei und a wiederum klein im Vergleich zur Wellenlänge λ.

Nach der elektromagnetischen Theorie gehorcht die z-Komponente des elektrischen Vektors, die einzige, welche existiert, wenn die elektrischen Schwingungen den Gitterdrähten parallel sind, der Gleichung

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = c^2 \Delta E_z, \tag{1}$$

die sich in

$$\Delta U + k^2 U = 0 \tag{2}$$

transformiert unter der Annahme, daß n die Schwingungszahl sei, so daß

$$E_z = U e^{2\pi i n t}, \tag{3}$$

und wenn zur Abkürzung

$$k = \frac{2\pi n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{4}$$

gesetzt wird, unter c die Lichtgeschwindigkeit, unter λ die Wellenlänge verstanden.

Für $x = +\infty$ muß U nach (1), (3) und (4) die Form haben

$$U = e^{ikx} + A e^{-ikx}; \tag{5}$$

in dieser Gleichung stellt das erste Glied rechts die einfallende, das zweite die reflektierte Welle dar.

Für $x = -\infty$ muß U der Gleichung

$$U = B e^{ikx} \tag{6}$$

gehorchen, welche die durch das Gitter gedrungene Welle repräsentiert.

Uns werden besonders das Reflektionsvermögen $|A|^2$ und die Durchlässigkeit $|B|^2$ interessieren.

Da die Leitfähigkeit der Drähte in diesem Paragraphen als unendlich angenommen wird, so kann die elektrische Schwingung nicht ins Metall eindringen; deshalb gilt aus Stetigkeitsgründen an der Oberfläche der Drähte

$$U = 0. \tag{7}$$

Wir können den Raum durch zwei dem Gitter parallele Ebenen in drei Teile zerlegen (vgl. die Figur), und zwar so, daß OL und OM groß gegen die Gitterkonstante a aber klein gegen die Wellenlänge λ sind.

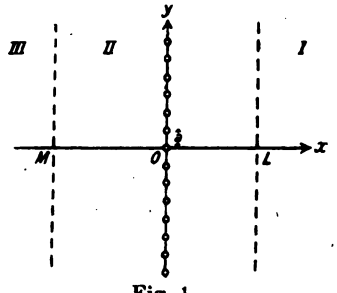


Fig. 1.

Dann gilt Gleichung (5) in I und hat in der Nähe der Trennungsebene der beiden Räume I und II den genäherten Wert

$$U = 1 + A + i k x (1 - A), \tag{8}$$

weil kx dort eine kleine Größe ist.

Im Raume III gilt (6), und in der Nähe der Trennungsebene der Räume II und III haben wir näherungsweise

$$U = B (1 + i k x). \tag{9}$$

Im Raume II lautet die Differentialgleichung für U

$$\Delta U = 0,$$

da k sehr klein ist, und da aus Symmetriegründen U von z unabhängig ist, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \tag{10}$$

Es handelt sich also darum, ein Integral dieser Gleichung zu suchen, welches auf den Oberflächen der Drähte der Bedingung (7) genügt, das für $x = +\infty$ in (8), für $x = -\infty$ in (9) übergeht.

Die Funktionen

$$\varphi_1 = x - \frac{\pi b^2}{a} \frac{\sinh \frac{2\pi x}{a}}{\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}} \tag{11}$$

und

$$\varphi_2 = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{1}{2} \left(\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a} \right) \tag{12}$$

sind nach den Prinzipien der Funktionentheorie als reelle Teile von

$$x + y i - \frac{\pi b^2}{a} \operatorname{ctgh} \frac{\pi (x + y i)}{a} \quad \text{bzw.} \quad \log \sinh \frac{\pi (x + y i)}{a}$$

partikulare Integrale von (10).

Für sehr kleine Werte von x und y nehmen φ_1 und φ_2 die Werte an

$$(13)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = x\left(1 - \dfrac{b^2}{x^2+y^2}\right), \\ \varphi_2 = \log \dfrac{\pi}{a}\sqrt{x^2+y^2}, \end{cases}$$

so daß auf der Oberfläche des Drahtes $x^2 + y^2 = b^2$

$$(14)\qquad \varphi_1 = 0\,; \quad \varphi_2 = \log \frac{\pi b}{a},$$

und diese Werte gelten wegen der Periodizität der Funktionen bezüglich y auch auf den Oberflächen der übrigen Drähte.

Für $x = +\infty$ gilt

$$(15)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = x - l, \\ \varphi_2 = \dfrac{\pi x}{a} - \log 2 \\ \text{und für } x = -\infty \\ \varphi_1 = x + l, \\ \varphi_2 = -\dfrac{\pi x}{a} - \log 2, \end{cases}$$

wenn

$$(16)\qquad l = \pi \frac{b^2}{a}$$

bedeutet.

Wir wollen probieren, ob wir den Bedingungen (7), (8) und (9) durch den Ansatz

$$(17)\qquad U = \alpha\,\varphi_1 + \beta + \gamma\,\varphi_2$$

genügen können, indem wir die Konstanten α, β, γ zweckmäßig bestimmen.

Nach (7) und (14) erhalten wir

$$(18)\qquad \beta + \gamma \log \frac{\pi b}{a} = 0,$$

so daß sich (17) in

$$(19)\qquad U = \alpha\,\varphi_1 + \beta - \frac{\beta}{\log \dfrac{\pi b}{a}}\,\varphi_2$$

verwandelt.

Nach (19), (8) und (9) muß gelten

$$(20)\quad \begin{cases} 1 + A + ik(1-A)x = \alpha(x-l) + \beta - \dfrac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a}}\left(\dfrac{\pi x}{a} - \log 2\right), \\ B + ikBx \quad\;\; = \alpha(x+l) + \beta + \dfrac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a}}\left(\dfrac{\pi x}{a} + \log 2\right). \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen sind in Wirklichkeit vier, da sie für jeden Wert von x gelten müssen, und erlauben so, die vier Konstanten A, B, α, β zu berechnen.

Es ergibt sich

$$(21)\qquad B - A = \frac{1+ikl}{1-ikl},$$

$$(22)\qquad B + A = \frac{iA+1}{iA-1},$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

$$(23)\qquad A = -\frac{ka}{\pi}\log\frac{a}{2\pi b}.$$

Unsere Annahme über die Größenordnung von b, a und λ zeigen, daß

$$kl = \frac{2\pi^2 b^2}{a\lambda}$$

eine unendlich kleine Zahl ist, so daß (21) sich in

$$(21')\qquad B - A = 1$$

verwandelt, und aus (21') und (22) folgt

$$(24)\qquad A = \frac{1}{iA-1}; \quad B = \frac{iA}{iA-1}.$$

Diese Konstanten geben die Amplituden und Phasen der reflektierten und durchgehenden Welle.

$$|A|^2 = \frac{1}{1+A^2} \quad \text{und} \quad |B|^2 = \frac{A^2}{1+A^2}$$

stellen das Reflektionsvermögen und die Durchlässigkeit des Gitters dar. Ihre Summe ist gleich Eins wegen der vollkommenen Leitfähigkeit der Drähte, d. h. weil das Absorptionsvermögen gleich Null ist.

Diese Resultate sind mit denen von Lamb identisch, wie ich aus einem Zitat in der erwähnten Arbeit von G. H. Thomson entnehmen kann.

§ 2. Zweiter Fall: Die elektrische Schwingung ist senkrecht zu den Drähten.

In diesem Falle ist der magnetische Vektor H parallel zur z-Achse und genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = c^2 \Delta H_z, \tag{25}$$

die sich in

$$\Delta V + k^2 V = 0 \tag{26}$$

verwandelt, wenn man setzt

$$H_z = e^{2\pi i n t} V. \tag{27}$$

Führt man Zylinderkoordinaten $r_1 \vartheta_1 z$ ein, deren Ursprung eine Drahtachse ist, so sind H_z und E_ϑ nach den Maxwellschen Gleichungen verknüpft durch die Beziehung

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial E_\vartheta}{\partial t}, \tag{28}$$

und da die Tangentialkomponente von E an der Oberfläche eines vollkommenen Leiters verschwinden muß, so erhält man mit Rücksicht auf (27) auf den Drahtoberflächen

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0. \tag{29}$$

Das Problem ist genau identisch mit dem von Lamb[1]) behandelten akustischen Problem.

Die Funktion

$$\varphi_3 = x + \frac{\pi b^2}{a} \frac{\sinh \frac{2\pi x}{a}}{\cosh \frac{2\pi x}{a} - \cos \frac{2\pi y}{a}} \tag{30}$$

genügt als reeler Teil von

$$x + y i + \frac{\pi b^2}{a} \operatorname{ctgh} \frac{\pi (x + y i)}{a} \text{ der Gleichung } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

hat für kleine x und y den Wert

$$\varphi_3 = x \left(1 + \frac{b^2}{x^2 + y^2}\right) = \cos \vartheta \left(r + \frac{b^2}{r}\right), \tag{31}$$

gibt also

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = \cos \vartheta \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \tag{32}$$

1) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 630.

so daß

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = 0$$

auf den Drahtoberflächen.

Für $x = +\infty$ ist $\varphi_3 = x + l$.
$x = -\infty$ ist $\varphi_3 = x - l$.

Versuchsweise setzen wir an

$$V = a' \varphi_3 + \beta'. \tag{33}$$

und bestimmen die willkürlichen Konstanten a' und β' durch die Stetigkeitsbedingungen an den Grenzen der Räume I und II bzw. II und III mittels der Gleichungen

$$\begin{cases} a'(x+l) + \beta' = 1 + A' + ik(1 - A')x, \\ a'(x-l) + \beta' = \quad B' + ikB'x, \end{cases} \tag{34}$$

indem wir annehmen, daß

$$\begin{cases} \text{im Raume I:} & V = e^{ikx} + A' e^{-ikx}, \\ \text{und im Raume III:} & V = B' e^{ikx} \end{cases} \tag{35}$$

gilt.

Durch Elimination von a' und β' erhält man

$$A' = \frac{ikl}{1 + ikl}; \quad B' = \frac{1}{1 + ikl}, \tag{36}$$

oder

$$|A'|^2 = \frac{k^2 l^2}{1 + k^2 l^2}; \quad |B'|^2 = \frac{1}{1 + k^2 l^2}. \tag{37}$$

Das Reflektionsvermögen ist in diesem Falle fast Null wegen des äußerst kleinen Wertes von

$$kl = \frac{2\pi^2 b^2}{a\lambda},$$

während die Durchlässigkeit fast Eins ist, wie Hertz das bereits experimentell festgestellt hat.

§ 8. Gitter von endlicher Leitfähigkeit.

Erster Fall: Die elektrische Schwingung ist parallel den Drähten.

Die Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{cases} \text{rot } H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\sigma E, \\ -\text{rot } E = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \tag{38}$$

erlauben die Elimination des Vektors H und geben zur Bestimmung von

(39) $$E_z = U e^{2\pi i n t}$$

die Gleichung

(40) $$\Delta U + k^2 U = 0,$$

in der

(41) $$k^2 = 4\pi^2 n^2 \varepsilon \mu - 8\pi^2 \mu \sigma n i$$

bedeutet, unter ε die Dielektrizitätskonstante, unter μ die Permeabilität und unter σ die Leitfähigkeit verstanden. Alle diese Werte seien in elektromagnetischem Maße gemessen.

Für Luft geben wir allen Konstanten den Index 0 und haben somit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}; \quad \mu_0 = 1; \quad \sigma_0 = 0$$

und somit

(42) $$k_0 = \frac{2\pi n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

während im Metall der Gitterdrähte, in denen εn neben σ zu vernachlässigen ist,

(43) $$k = \sqrt{-8\pi^2 \mu \sigma n i}$$

gilt.

Da U von der Koordinate z unabhängig ist, können wir das Integral von (40) für das Drahtinnere in folgender Form schreiben

(44) $$U = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu J_\nu (k r) \cos \nu \vartheta.$$

In dieser Gleichung bedeuten r, ϑ Polarkoordinaten in einer zu der des Gitters senkrechten Ebene, deren Pol der Schnittpunkt der Drahtachse mit jener Ebene ist, J_ν die Besselsche Funktion erster Art von der Ordnung ν, während die C_ν Konstanten sind.

Im Außenraum der Drähte, soweit derselbe zum Raume II gehört, wollen wir das Integral U als lineare Kombination der schon früher benutzten [vgl. (11), (12) und (30)] drei Funktionen

$$(45)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = x - \dfrac{\pi b^2}{a}\,\dfrac{\sinh\dfrac{2\pi x}{a}}{\cosh\dfrac{2\pi x}{a} - \cos\dfrac{2\pi y}{a}}, \\ \varphi_2 = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2}\left(\cosh\dfrac{2\pi x}{a} - \cos\dfrac{2\pi y}{a}\right), \\ \varphi_3 = x + \dfrac{\pi b^2}{a}\,\dfrac{\sinh\dfrac{2\pi x}{a}}{\cosh\dfrac{2\pi x}{a} - \cos\dfrac{2\pi y}{a}}, \end{cases}$$

darzustellen suchen, die für kleine $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Werte annehmen

$$(46)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = x\left(1 - \dfrac{b^2}{r^2}\right) = \cos\vartheta\left(r - \dfrac{b^2}{r}\right), \\ \varphi_2 = \log\dfrac{\pi r}{a}, \\ \varphi_3 = x\left(1 + \dfrac{b^2}{r^2}\right) = \cos\vartheta\left(r + \dfrac{b^2}{r}\right), \end{cases}$$

so daß für $r = b$

$$(47)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = 0, & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 2\cos\vartheta, \\ \varphi_2 = \log\dfrac{\pi b}{a}, & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r} = \dfrac{1}{b}, \\ \varphi_3 = 2b\cos\vartheta, & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial r} = 0. \end{cases}$$

Ferner haben wir

$$(48)\qquad \begin{cases} \text{für } x = +\infty\ \varphi_1 = x - l, & \text{für } x = -\infty\ \varphi_1 = x + l, \\ \varphi_2 = \dfrac{\pi x}{a} - \log 2, & \varphi_2 = -\dfrac{\pi x}{a} - \log 2, \\ \varphi_3 = x + l, & \varphi_3 = x - l. \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen drücken die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von E und H beim Durchgang durch die Drahtoberfläche aus.

Bezeichnen wir den Wert von U im Drahtinnern mit U_i, im Außenraum mit U_a, so stellt sich die Stetigkeit von E [vgl. (89)] in der folgenden Weise dar.

Für $r = b$:

(49) $$U_i = U_a.$$

Ferner gilt nach der zweiten Gleichung (38)

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\partial H_\vartheta}{\partial t},$$

also ist die Stetigkeit von H gewährleistet durch die Beziehung

(50) für $r = b$: $$\frac{1}{\mu}\frac{\partial U_i}{\partial r} = \frac{\partial U_a}{\partial r}.$$

Gemäß unserer Annahme, daß U_a eine lineare Funktion von φ_1, φ_2 und φ_3 ist, können wir schreiben

(51) $$U_a = \alpha\,\varphi_1 + \beta + \gamma\,\varphi_2 + \delta\,\varphi_3$$

und erhalten mittels (47), (49), (44) und (51)

(52) $$\beta + \gamma \log\frac{\pi b}{a} + \delta\, 2b\cos\vartheta = C_0 J_0(kb) + C_1 J_1(kb)\cos\vartheta$$

und mittels (47), (50), (44) und (51)

(53) $$2\alpha\cos\vartheta + \frac{\gamma}{b} = \frac{k C_0}{\mu} J_0'(kb) + \frac{k C_1}{\mu} J_1'(kb)\cos\vartheta;$$

denn aus der Form der Gleichungen (46), in denen nur $\cos\vartheta$, und nicht $\cos 2\vartheta$, $\cos 3\vartheta$ usw. vorkommen, erkennen wir, daß wir uns auf die ersten beiden Glieder der Reihe (44) beschränken können.

Da (52) und (53) für jeden beliebigen Wert von ϑ gelten, so zerfallen dieselben in folgende vier Beziehungen.

(54) $$\begin{cases} \beta + \gamma\log\frac{\pi b}{a} = C_0 J_0(kb), & 2b\delta = C_1 J_1(kb), \\ \gamma = \frac{kb}{\mu} C_0 J_0'(kb), & 2b\alpha = \frac{kb}{\mu} C_1 J_1'(kb). \end{cases}$$

Elimination von C_0 und C_1 ergibt

(55) $$\frac{\beta + \gamma\log\frac{\pi b}{a}}{\gamma} = \frac{\mu}{kb}\frac{J_0(kb)}{J_0'(kb)} = \tau_0; \quad \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\mu}{kb}\frac{J_1(kb)}{J_1'(kb)} = \tau_1,$$

wenn man die Abkürzungen einführt

(56) $$\frac{\mu}{kb}\frac{J_0(kb)}{J_0'(kb)} = \tau_0; \qquad \frac{\mu}{kb}\frac{J_1(kb)}{J_1'(kb)} = \tau_1.$$

Aus den Gleichungen (55) folgt

$$\gamma = -\frac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\quad;\quad \delta = \alpha\tau_1\,, \tag{57}$$

so daß (51) in

$$U_a = \alpha\varphi_1 + \beta - \frac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\varphi_2 + \alpha\tau_1\varphi_3 \tag{58}$$

übergeht.

Die Bedingungen im Unendlichen ergeben mit Berücksichtigung von (48), (58), (8) und (9)

$$\begin{cases} \alpha(x-l) + \beta - \dfrac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\left(\dfrac{\pi x}{a} - \log 2\right) + \alpha\tau_1(x+l) \\ \qquad = 1 + A + ik_0 x(1-A), \\ \alpha(x+l) + \beta + \dfrac{\beta}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\left(\dfrac{\pi x}{a} + \log 2\right) + \alpha\tau_1(x-l) \\ \qquad = B + ik_0 x B\,. \end{cases} \tag{59}$$

Da diese Gleichungen für jeden beliebigen Wert von x gelten, so zerfallen sie in die folgenden

$$\begin{cases} 1 + A = -\alpha l(1-\tau_1) + \beta + \beta\dfrac{\log 2}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\,; \\ ik_0(1-A) = \alpha(1+\tau_1) - \dfrac{\beta\frac{\pi}{a}}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\,; \\ B = \alpha l(1-\tau_1) + \beta + \beta\dfrac{\log 2}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\,; \\ ik_0 B = \alpha(1+\tau_1) + \dfrac{\beta\frac{\pi}{a}}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\,, \end{cases} \tag{60}$$

aus welchen

$$B - A - 1 = 2\alpha l(1-\tau_1) \qquad B + A + 1 = 2\beta\frac{\log\frac{2\pi b}{a} - \tau_0}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\,,$$

und

$$ik_0 l(B - A + 1) = 2\alpha l(1+\tau_1) \qquad ik_0(B + A - 1) = \frac{2\beta\frac{\pi}{a}}{\log\frac{\pi b}{a} - \tau_0}\,,$$

d. h.

$$\frac{B-A-1}{B-A+1} = \frac{1-\tau_1}{1+\tau_1} i k_0 l \quad \text{und} \quad \frac{B+A+1}{B+A-1} = -\left(\log \frac{a}{2\pi b} + \tau_0\right) \frac{a k_0}{\pi} i = \Delta i$$

folgt.

Bedenken wir, daß $k_0 l$ äußerst klein ist, so haben wir

$$B - A = 1$$

und außerdem

$$B + A = \frac{\Delta i + 1}{\Delta i - 1},$$

so daß

$$A = \frac{1}{\Delta i - 1}; \qquad B = \frac{\Delta i}{\Delta i - 1}, \tag{61}$$

wird, unter Δ

$$\Delta = -\frac{2a}{\lambda}\left(\log \frac{a}{2\pi b} + \tau_0\right) \tag{62}$$

verstanden.

Das Reflektionsvermögen $|A|^2$ und die Durchlässigkeit $|B|^2$ ergeben sich, wenn wir

$$\Delta = -u + v i \tag{63}$$

setzen, so daß

$$A = -\frac{1 + v - u i}{u^2 + (1+v)^2}; \quad B = \frac{v(v+1) + u^2 + u i}{u^2 + (1+v)^2},$$

also

$$|A|^2 = \frac{1}{u^2 + (1+v)^2}; \quad B|^2 = \frac{u^2 + v^2}{u^2 + (1+v)^2} \tag{64}$$

und das Absorptionsvermögen

$$1 - |A|^2 - |B|^2 = \frac{2v}{u^2 + (1+v)^2} \tag{65}$$

wird.

Bestimmung der Funktion τ_0.

Wie man aus der Formel (62) ersieht, reduziert sich das Problem auf die Berechnung der Funktion τ_0, welche durch die Gleichung (56) definiert ist.

Zur Diskussion der Beobachtungen von Schaefer und Laugwitz interessiert uns nur der Fall $\mu = 1$, da sie nicht mit ferromagnetischen Materialien operiert haben.

Also wird

$$\tau_0 = \frac{1}{k\,b}\,\frac{J_0(k\,b)}{J_0'(k\,b)}, \tag{66}$$

wo $k\,b$ nach (43) den Wert hat

$$k\,b = \sqrt{8\pi^2\sigma n\,b^2}\sqrt{-i} = q\sqrt{-i}. \tag{67}$$

Nun ist die Funktion

$$\Omega = -\frac{q\sqrt{-i}}{2}\,\frac{J_0(q\sqrt{-i})}{J_0'(q\sqrt{-i})} = \Omega_1 + i\,\Omega_2 \tag{68}$$

in seiner Abhängigkeit von q bekannt, denn Ω stellt eine Kombination des Widerstandes r und der inneren Selbstinduktion L eines Drahtes für Wechselstrom dar. Es ist nämlich

$$\Omega = \frac{r}{r_0} + 2\pi n i\,\frac{L}{r},$$

worin r_0 den Widerstand für Gleichstrom bedeutet.

Diese Funktion findet sich in verschiedenen Veröffentlichungen[1]) in Reihen entwickelt und in Tafeln niedergelegt, so daß wir uns ohne Weiteres der Beziehung

$$\tau_0 = -\frac{2i}{q^2}\,\Omega(q) \tag{69}$$

bedienen können.

§ 4. Die elektrische Schwingung ist senkrecht zu den Drähten.

Setzt man

$$H_z = e^{2\pi i n t}\,V, \tag{70}$$

so genügt die Funktion V der Gleichung

$$\Delta\,V + k^2\,V = 0. \tag{71}$$

Um die Oberflächenbedingungen abzuleiten, schreiben wir eine der Maxwellschen Gleichungen an

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = \varepsilon\,\frac{\partial E_\phi}{\partial t} + 4\pi\sigma E_\phi,$$

---

1) W. Thomson, Math. and phys. papers 3. S. 493. Cambridge 1890; I. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. 1903. S. 1141; vgl. auch I. Zenneck, Elektromagn. Schwingungen. Stuttgart 1905. S. 403 u. 992; A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. 8. S. 805. 1907; E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig u. Berlin 1909. S. 144—174.

aus der mit $E_\varphi = e^{2\pi i n t} W$

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = (\varepsilon 2\pi n i - 4\pi\sigma) W$$

hervorgeht.

Da aber $\mu 2\pi n i (\varepsilon 2\pi n i + 4\pi\sigma) = -k^2$ ist, so folgt

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{k^2}{\mu 2\pi n i} W.$$

Da V und W an der Oberfläche stetig bleiben müssen, so haben wir die Bedingungen

$$\begin{cases} V_i = V_a, \\ \frac{\mu}{k^2}\frac{\partial V_i}{\partial r} = \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial V_a}{\partial r}. \end{cases} \tag{72}$$

Versuchsweise setzen wir an

$$V_a = \alpha' \varphi_3 + \beta' + \gamma' \varphi_1 + \delta' \varphi_2, \tag{73}$$

während

$$V = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu' J_\nu(kr)\cos\nu\vartheta. \tag{74}$$

Mittels (47), (78) und (74) erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{cases} 2\alpha b\cos\vartheta + \beta + \delta\log\frac{\pi b}{a} = C_0' J_0(kb) + C_1' J_1'(kb)\cos\vartheta \\ 2\gamma\cos\vartheta + \frac{\delta}{b} = \frac{\mu k_0^2}{k}\left[C_0' J_0'(kb) + C_1' J_1'(kb)\cos\vartheta\right], \end{cases} \tag{75}$$

aus denen

$$\delta = \left(\beta + \delta\log\frac{\pi b}{a}\right)\varrho_0; \quad \gamma = \varrho_1 \tag{76}$$

folgt, wenn wir die Abkürzungen einführen

$$\varrho_0 = \mu\frac{k_0^2 b^2}{kb}\frac{J_0'(kb)}{J_0(kb)}; \quad \varrho_1 = \mu\frac{k_0^2 b^2}{kb}\frac{J_1'(kb)}{J_1(kb)}. \tag{77}$$

So verwandelt sich (73) in

$$V_a = \alpha'\varphi_3 + \beta' + \alpha'\varrho_1\varphi_1 + \frac{\beta'\varrho_0}{1-\varrho_0\log\frac{\pi b}{a}}\varphi_2. \tag{78}$$

Im Unendlichen gelten die Gleichungen (35), so daß mittels (48) die Beziehungen folgen

$$\alpha'(x+l) + \beta' + \alpha'\varrho_1(x-l) + \frac{\beta'\varrho_0}{1-\varrho_0\log\frac{\pi b}{a}}\left(\frac{\pi x}{a} - \log 2\right) = 1 - A' + ik_0(1-A')x,$$

$$\alpha'(x-l)+\beta'+\alpha'\varrho_1(x+l)-\frac{\beta'\varrho_0}{1-\varrho_0\log\frac{\pi b}{a}}\left(\frac{\pi x}{a}+\log 2\right)$$
$$=B'+ik_0B'x.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt

$$\frac{1+A'-B'}{1-A'+B'}=\frac{1-\varrho_1}{1+\varrho_1}ik_0l$$

oder genähert

(79) $$B'-A'=1$$

und

(80) $$B'+A'=\frac{\frac{ik_0a}{\pi}\left(1-\varrho_0\log\frac{2\pi b}{a}\right)-\varrho_0}{\frac{ik_0a}{\pi}\left(1-\varrho_0\log\frac{2\pi b}{a}\right)+\varrho_0},$$

d. h.

(81) $$\begin{cases} B'=\dfrac{\frac{ik_0a}{\pi}\left(1-\varrho_0\log\frac{2\pi b}{a}\right)}{\frac{ik_0a}{\pi}\left(1-\varrho_0\log\frac{2\pi b}{a}\right)+\varrho_0}=\dfrac{\Delta' i}{\Delta' i-1}, \\ A'=-\dfrac{\varrho_0}{\frac{ik_0a}{\pi}\left(1-\varrho_0\log\frac{2\pi b}{a}\right)+\varrho_0}=\dfrac{1}{\Delta' i-1}, \end{cases}$$

wo

(82) $$\Delta'=-\frac{2a}{\lambda_0}\left[\log\frac{a}{2\pi b}+\frac{1}{\varrho_0}\right].$$

Nach (77) und (66) folgt mit $\mu=1$

(83) $$\frac{1}{\varrho_0}=\frac{kb}{k_0^2b^2}\frac{J_0(kb)}{J_0'(kb)}=\frac{k^2b^2}{k_0^2b^2}\tau_0=-\frac{2}{k_0^2b^2}\Omega=-\frac{\lambda^2}{2\pi^2b^2}\Omega.$$

§ 5. Vergleich der Theorie mit den Beobachtungen von Schaefer und Laugwitz.

Der durch (67) eingeführte Wert von q ist

(84) $$q=\sqrt{8\pi^2\sigma n}b^2=\sqrt{\frac{8\pi n}{\omega}}$$

unter $\omega=\frac{1}{b^2\pi\sigma}$ den in elektromagnetischen Einheiten gemessenen Widerstand von 1 cm Draht verstanden.

In den Versuchen von Schaefer und Laugwitz war $\lambda_0 = 30\,\text{cm}$; $a = 1{,}5\,\text{cm}$; $b = 0{,}00125\,\text{cm}$, so daß

$$\ln \frac{a}{2\pi b} = 5{,}252.$$

Um τ_0 zu bestimmen, berechnen wir die folgende Tabelle.

Material	$\omega \cdot 10^{-7}$	η	Ω_1	Ω_2	τ_0
Silber	39	8,028	3,105	2,818	0,08744 − i 0,09636
Platin	274	3,028	1,328	0,9632	0,2101 − i 0,2898
Manganin . . .	970	1,610	1,035	0,3181	0,2454 − i 0,7986
Kruppin . . .	1620	1,246	1,013	0,1927	0,2482 − i 1,305

$A = -u + vi$	Reflektionsvermögen	Durchlässigkeit	Absorptionsvermögen
− 0,5339 + i 0,009636	76,65%	21,84%	1,51%
− 0,5462 + i 0,02898	73,69	22,05	4,26
− 0,5497 + i 0,07986	68,11	21,04	10,85
− 0,5500 + i 0,1305	63,20	20,18	16,62

Diese Werte sind nach den Gleichungen (64) und (65) berechnet worden, d. h. unter der Annahme, daß die elektrischen Schwingungen den Drähten parallel waren. Die Autoren machen darüber zwar keine Angaben, jedoch ist es auf Grund der Beobachtungsergebnisse außer Zweifel, daß Oszillator, Resonator und Gitterdrähte einander parallel waren.

Schaefer und Laugwitz geben die folgenden experimentellen Resultate

Material	Reflektionsvermögen	Durchlässigkeit	Absorptionsvermögen
Silber	35,5%	62,1%	2,4%
Platin	32,9	60,6	6,5
Manganin	32,0	57,7	10,3
Kruppin	25,3	55,8	18,9

welche keineswegs mit der Theorie übereinstimmen.

Die Abweichungen würden noch bedeutend größer sein, wenn wir annähmen, daß der Oszillator senkrecht zu den Drähten stand, denn in diesem Falle hätte $1/\varrho_0$ nach (83) einen so großen Wert, daß die Gleichungen (81) praktisch mit

$B' = 1$; $A' = 0$ identisch sind, d. h. in dieser Anordnung würde das Gitter nichts reflektieren und die Gesamtstrahlung hindurchlassen.

Es ist schwer, den Grund dieser Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung anzugeben, da die Verfasser keine Einzelheiten der Versuchsanordnung und Messung mitteilen, aber es könnte sein, daß zu den Differenzen die Dämpfung der ausgesandten Wellen beigetragen hat.

La Plata, 1. Dezember 1916. Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

4. *Die Form ultramikroskopischer Platinteilchen; von Richard Gans und Ricardo Calatroni.*

(Nach Versuchen von Ricardo Calatroni.)

Nachdem der eine von uns[1]) gezeigt hatte, daß die ultramikroskopischen Metallteilchen kolloidaler Gold- und Silberlösungen mit großer Annäherung Kugelform haben, wandten wir uns der Ermittlung der geometrischen Form der Partikeln in Platinlösungen zu, über deren Resultate im folgenden kurz berichtet werden soll.

Nach Abschluß unserer Untersuchungen kam uns — infolge des Krieges sehr verspätet — die schöne Publikation von Diesselhorst und Freundlich[2]) zu Händen, in der diese nach ihrer Schlierenmethode u. a. die Gansschen Resultate bestätigen und feststellen konnten, daß auch die nach der Bredigschen Zerstäubungsmethode hergestellten Platinsole aus kugeligen Amikronen bestehen.

Wenn wir trotzdem unsere Beobachtungen der Veröffentlichung übergeben, so geschieht es erstens, weil dieselben die Diesselhorst und Freundlichschen, nach ganz anderer experimenteller Methode angestellten Messungen bestätigen, zweitens, weil es uns daran lag, daß das zur Untersuchung herangezogene Material auf rein chemischen Wege durch Reduktion hergestellt sei; denn bei den hohen Temperaturen, die bei der Zerstäubungsmethode ins Spiel kommen, ist es nicht ausgeschlossen, daß das Metall kurze Zeit flüssig ist und dann den Kapillarkräften unterliegt, und da wir gerade einen Beitrag zur Kenntnis der physikalisch-chemischen Kräfte liefern wollten, die für die Form der äußerst kleinen Teilchen maßgebend sind, so mußten wir alle sekundären Einwirkungen ausschalten.

---

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **37**. S. 881. 1912; **47**. S. 270. 1915.

2) H. Diesselhorst u. H. Freundlich, Phys. Zeitschr. **17**. S. 117. 1916.

Unsere ersten Versuche stellten wir allerdings mit Präparaten an, die wir nach der Bredigschen Methode gewonnen hatten, indem wir unter ganz reinem Wasser, welches als Schutzkolloid 0,1 Proz. Gelatine enthielt, zwischen zwei 0,6 mm dicken Platinelektroden einen Lichtbogen erzeugten. Die auf diese Weise hergestellte Lösung *A* hatte eine dunkel graurote Farbe.

Dann gingen wir zum Paalschen Verfahren[1]) über, und zwar benutzten wir protalbinsaures Natrium als Schutzkolloid, indem wir von der Platinchlorwasserstoffsäure ausgingen, Hydrazinhydrat als Reduktionsmittel benutzten und dann gegen Wasser dialysierten. Das so entstehende sehr stabile Präparat löst sich, worauf Paal und Amberger hinwiesen, sehr leicht in warmem Wasser nach Zusatz eines Tropfens verdünnter Natronlauge. Die auf diese Weise hergestellte Lösung *B* war grauschwarz.[2])

Von diesen beiden Lösungen wurde, wie früher, die Absorption mit dem König-Martensschen Spektralphotometer gemessen, und zwar für die vier Heliumlinien $\lambda = 6678$, 5877, 5010, 4472 Å.E. Es ergaben sich folgende Tabellen, in denen wir die Absorption in relativem Maß angeben, indem wir dieselbe für die grüne Linie willkürlich gleich Eins setzen.

Tabelle 1.

Absorption der ursprünglichen Lösungen.

Lösung *A* nach Bredig. Farbe: dunkel graurot.		Lösung *B* nach Paal. Farbe: grauschwarz.	
λ	K	λ	K
667,8	0,687	667,8	0,705
587,7	0,822	587,7	0,817
501,0	1,000	501,0	1,000
447,2	1,230	447,2	1,163

1) C. Paal u. C. Amberger, Chem. Ber. 37. I. S. 124. 1904.

2) Daß die beiden Lösungen *A* und *B* verschiedene Farbe haben, trotzdem der Verlauf der Absorptionskurven fast identisch ist, ist nichts Auffallendes, denn aus physiologischen Gründen hängt die Farbe auch von den absoluten Werten der Absorption ab. Davon überzeugt man sich z. B. leicht, wenn man dieselbe Kaliumbichromatlösung in dünner und dicker Schicht beobachtet. Im ersten Falle ist sie grün, im zweiten orange gefärbt.

Um aus diesen Lösungen die größeren Partikel und die, welche sich durch Zusammenballen von kleineren gebildet hatten, auszuschalten, wurden die ursprünglichen Lösungen nach dem von einem von uns[1]) beschriebenen modifizierten Bechholdschen Verfahren ultrafiltriert, und zwar mit Kollodiumfiltern, die mehr oder weniger Eisessig enthielten.

Die mit den so präparierten Lösungen gewonnenen Absorptionskurven sind die folgenden.

Tabelle 2.

Mit 0,5 Proz. Eisessig-Kollodiumfiltern ultrafiltriert.
Farbe mattgelb.

Lösung *A* nach Bredig.		Lösung *B* nach Paal.	
λ	K	λ	K
667,8	0,342	667,8	0,326
587,7	0,583	587,7	0,574
501,0	1,000	501,0	1,000
447,2	1,357	447,2	1,675

Tabelle 3.

Mit 1,0 Proz. Eisessig-Kollodiumfiltern ultrafiltriert.
Farbe hellgelb.

Lösung *A* nach Bredig.		Lösung *B* nach Paal.	
λ	K	λ	K
667,8	0,516	667,8	0,459
587,7	0,704	587,7	0,693
501,0	1,000	501,0	1,000
447,2	1,237	447,2	1,195

Um aus diesen Resultaten Schlüsse über die Form der Teilchen ziehen zu können, haben wir die Absorptionskurven theoretisch berechnet, welche kugel-, scheiben- und stabförmigen Partikeln entsprechen.

Hierzu brauchten wir die numerischen Werte des Reflektionsvermögens und des Extinktionskoeffizienten des metallischen Platins, welche von Hagen und Rubens[2]) beobachtet worden sind.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **47.** S. 280. 1915.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. **8.** S. 1 u. 432. 1902.

Tabelle 4.

λ	R	$\nu\varkappa$	$m = \nu(1 - i\varkappa)$	$m'^2 - 1$	λ'
650	0,664	4,53	3,219 – i 4,53	– 6,733 – i 16,46	488,
600	0,640	4,15	2,964 – i 4,15	– 5,744 – i 13,84	450,
550	0,612	3,81	2,836 – i 3,81	– 4,631 – i 12,13	412,0
500	0,584	3,49	2,659 – i 3,49	– 3,862 – i 10,40	374,3
450	0,547	3,15	2,555 – i 3,15	– 2,893 – i 8,976	336,0
425	0,523	2,98	2,636 – i 2,98	– 2,073 – i 8,738	317,0

In Tab. 4 bedeutet λ die Wellenlänge im Vakuum, R das Reflektionsvermögen, $\nu\varkappa$ den Extinktionskoeffizienten nach Hagen und Rubens. Daraus berechnet sich der (reelle) Brechungsexponent ν nach der Formel

$$(1) \qquad \nu = \frac{1+R}{1-R} - \sqrt{\left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2 - (1+\nu^2\varkappa^2)}.$$

Die vierte Kolonne enthält $m = \nu - i\,\nu\varkappa$, den sogenannten komplexen Brechungsexponenten. Nennt man m_0 den Brechungsexponenten des Wassers, so ist $m' = m/m_0$ der komplexe Brechungsexponent des Platins gegen Wasser. In Kolonne 5 finden sich die Werte von $m'^2 - 1$, und schließlich enthält Kolonne 6 die Wellenlängen in Wasser.

Die Absorption K ergibt sich ferner[1]) aus folgendem Formelsystem.

$$(2) \qquad K = \frac{2\pi}{\lambda'} \operatorname{Im}(-a_1 - 2a_1'),$$

wo

$$(3) \qquad a_1 = \frac{m'^2 - 1}{3 + (m'^2 - 1)\frac{3}{4\pi}P}; \qquad a_1' = \frac{m'^2 - 1}{3 + (m'^2 - 1)\frac{3}{4\pi}P'}.$$

P und P' sind Faktoren, welche nur von der Form der Teilchen abhängen, und zwar ist

für	$\frac{P}{4\pi}$	$\frac{P'}{4\pi}$
Kugeln	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Stäbchen . . .	0	$\frac{1}{2}$
Scheiben . . .	1	0

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 37. S. 886. 1912. Formel (19) und (21).

λ' und m' sind bereits oben definiert; „Im" bedeutet den imaginären Teil des in Klammern stehenden Ausdrucks.

So berechnete sich die folgende Tabelle, in welcher K die Absorption einer 1 mm dicken Lösung bedeutet, in welcher sich 1 mm³ Platin in 1 Liter Wasser befindet. K_{red} stellt dieselben Absorptionen für solche Konzentrationen dar, daß dieselben für $\lambda = 500\,\mu\mu$ gleich Eins werden.

Tabelle 5.

λ	K			K_{red}		
	Kugeln	Stäbchen	Scheiben	Kugeln	Stäbchen	Scheiben
650	0,00669	0,07249	0,1414	0,4634	1,162	1,209
600	0,00874	0,06691	0,1291	0,6050	1,073	1,104
550	0,01114	0,06485	0,1237	0,7713	1,040	1,058
500	0,01444	0,06237	0,1169	1,000	1,000	1,000
450	0,01875	0,06144	0,1126	1,298	0,985	0,963
425	0,02018	0,06378	0,1162	1,397	1,022	0,994

Die Figur gibt K_{red} in seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge für Kugeln und Stäbchen. Die für Scheiben gültige

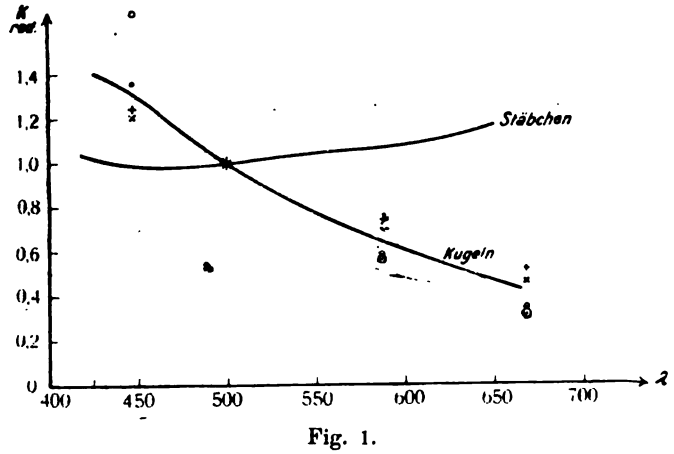


Fig. 1.

Kurve haben wir nicht gezeichnet, weil sie sich kaum von der für Stäbchen gültigen unterscheidet. Neben diesen theoretischen Werten der Kurve sind die beobachteten Absorptionen eingetragen, und zwar entsprechen

•	Lösung	*A*	nach	Bredig.	Ultrafilter mit	0,5% Eisessig
⊙	„	*B*	„	Paal.	„	„ 0,5 % „
+	„	*A*	„	Bredig.	„	„ 1,0 % „
×	„	*B*	„	Paal.	„	„ 1,0% „

Ein Vergleich mit der theoretischen Kurve ergibt, daß *die Platinamikronen ebenso wie die Silber- und Goldamikronen genähert Kugelgestalt haben.*

La Plata, 15. Juli 1916. Instituto de Física.

(Eingegangen 23. August 1919.)

5. *Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel;* von *Reinhard Mecke.*

I. Teil: Experimentelle Ergebnisse.

(Marburger Dissertation 1919.)

Inhaltsverzeichnis:

Einleitung. § 1. Allgemeines über Beugungserscheinungen im homogenen Nebel. § 2. Über Nebelbildung und Tropfengröße. — Versuchsanordnung. Experimentelle Untersuchung der Beugungserscheinung im homogenen Nebel. § 1. Über den Einfluß der Dicke der Nebelschicht. § 2. Untersuchung des Beugungsbildes im weißen Licht. § 3. Messungen im monochromatischen Licht. § 4. Versuche mit homogenen Nebeln anderer Flüssigkeiten. § 5. Vergleichsmessungen mit Pilzsporen. Zusammenfassung.

Einleitung.

§ 1. Allgemeines über Beugungserscheinungen im homogenen Nebel.

Im homogenen Nebel von gleichgroßen, durchsichtigen Tröpfchen, welche als Kugellinsen dem Brechungs- und Reflexionsgesetze unterliegen, sind drei verschiedene Arten von Beugungserscheinungen möglich, von denen die bekannteste wohl der Regenbogen ist. Dieser entsteht durch innere Reflexion im Tropfen und seine Theorie, welche auf der Beugung nichtsphärischer Wellen beruht, ist in Weiterbildung der Theorie von Cartesius von verschiedenen Forschern schon eingehend behandelt worden, so daß ich hier nur auf die diesbezüglichen Arbeiten von Airy[1]), Pernter[2]) und Möbius[3]) verweisen möchte. Ein anderes nur im reflektierten Licht sichtbares Beugungsphänomen sind die in der Metereologie als Glorie, die das Brocken- oder Ballongespenst umgibt, allge-

1) G. Airy, Trans. of the Soc. of Cambr. **6.** S. 379. 1836.
2) J. Pernter, Metereol. Optik, S. 495ff.
3) W. Moebius, Ann. d. Phys. **33.** S. 79. 1910.

mein bekannten farbigen Ringe, welche sich um den auf die Nebelwand fallenden Schatten des Beobachters bilden. Eine einwandsfreie Erklärung der Glorie durch ein in der Einfallsrichtung sich bildendes Intensitätsmaximum gelang Hrn. Geheimrat Prof. Dr. F. Richarz[1]); jedoch liegen die Verhältnisse hier sehr verwickelt und manches bedarf noch der Aufklärung. Auf eine Anregung von Geheimrat Prof. Richarz hin fand ich z. B., daß mit aufgewirbeltem Lycopodiumstaub die Erscheinung selbst im intensiven Bogenlicht nicht hervorzurufen war, während sie beim künstlichen Nebel schon im schwachen diffusen Tageslicht sichtbar ist. Allerdings ist auch die Intensität des an den Tröpfchen zurückgeworfenen Lichtes weit größer als an Lycopodiumstaub. Es scheinen somit noch andere Ursachen, welche wohl auf der Eigenschaft der Tröpfchen als Kugellinsen beruhen mögen, zur Entstehung der *Glorie* beizutragen. Auch dürfte die bis jetzt stillschweigend gemachte Annahme, daß das *zurückgeworfene Licht* aus parallelen Strahlen besteht (denn nur für solches Licht gelten ja die Fraunhoferschen Beugungsgleichungen), bei der Erklärung der farbigen Beugungsringe (Glorie) kaum zutreffend sein. Die Erklärung des Intensitätsmaximums erfährt dadurch keine Änderung. Eine genaue Untersuchung der Glorie und ihre Theorie muß aber einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben, da es sich als notwendig erwies, zunächst die einfacheren Erscheinungen im *durchgehenden* Licht zu untersuchen und zu erklären.

Diese sind in der Natur häufig als prächtig gefärbte Kränze, auch Aureolen oder kleine Höfe genannt, um Sonne und Mond zu sehen, wenn leichtes Gewölk oder Nebel diese Gestirne verschleiern. Schon Fraunhofer fand, daß dieses Phänomen mit der Beugungserscheinung kreisförmiger Scheibchen, wie sie sich durch eine mit Lycopodium- oder Bovistsporen bestreute Glasplatte nachahmen läßt, analog ist. Die Erscheinung besteht in der Mitte, zunächst der direkt gesehenen Lichtquelle aus einem bläulichweiß gefärbten zentralen Feld, umgeben von einem braunroten Kreis, an den sich ein dunkelvioletter Ring und dann abwechselnd grüne und rote Ringe anschließen. Im *monochromatischen* Licht setzt

1) F. Richarz, Marburger Sitzungsber. 1912. S. 1 u. 5; Metereol. Zeitschr. **25.** S. 29. 1908; **29.** S. 282. 1912; **31.** S. 188. 1914.

sie sich aus dunklen und hellen Ringen mit abnehmender Helligkeit zusammen, welche die Lichtquelle konzentrisch umgeben. Bedeutet φ den Beugungswinkel, r den Tropfenradius und λ die Wellenlänge, so gehorchen die Ringe dem Gesetze

$$z_{\text{Min}} = \frac{r}{\lambda} \sin \varphi ,$$

wo r den Tropfenradius bedeutet, z_{Min} aber eine Konstante ist und für den ersten dunklen Ring den Wert 0,61, für den zweiten den Wert 1,116 besitzt. Man kann also aus den Durchmessern der Minima verschiedener Ordnung die Tropfengröße bestimmen, und es muß sich *jedesmal* derselbe Wert ergeben. Im *weißen* Licht nimmt man für die Messungen am besten den äußersten Rand des roten Ringes, wo nach den Versuchen von Fraunhofer das Minimum der Wellenlänge „des weißen Lichtes" 0,571 μ[1]) liegt.

Von den 11 Messungen von Kämtz[1]) nun, welche ich in Pernters „Metereologischer Optik" fand, zeigen die aus den beiden ersten Ringen berechneten Tropfenradien nur geringe Abweichungen von etwa $\pm$ 3 Proz. voneinander. Auf dem Ben Nevis[2]) gemachte Beobachtungen weisen allerdings etwas größere Abweichungen auf, doch ist dies wohl auf die Schwierigkeit der Messungen im weißen Licht und die Veränderlichkeit der Erscheinung zurückzuführen. Auch bestehen oft Zweifel, ob die Wolkenelemente wirklich aus Wassertropfen und nicht aus Eiskristallen bestehen. Nach diesen Messungen besitzt natürlicher Nebel noch immer relativ große Tropfen von etwa 5—30 μ Radius.

Während also bei der Naturerscheinung sowohl bezüglich der Farbenfolge als auch bezüglich der Durchmesser der Ringe gute Übereinstimmung mit der Theorie erzielt worden ist, treten beim künstlichen Nebel, der ungefähr 5—10 mal kleinere Tropfen besitzt, ganz andere Erscheinungen auf. Das zentrale Feld, welches nahezu weiß sein soll, ist lebhaft gefärbt und ähnelt in seiner Veränderlichkeit mit der Tropfengröße den Farben dünner Blättchen. Nach Kießling[3]) durchläuft es in schneller Aufeinanderfolge folgende Farben, die immer

1) J. Pernter, Metereol. Optik, S. 459.

2) J. Pernter, Metereol. Optik, S. 466, 467.

3) J. Kießling, Deutsche Metereol. Zeitschr. 1. S. 122ff. 1884. Dämmerungserscheinungen, Hamburg 1888, S. 140.

blasser werden: blaßlila, blaulila, leuchtend hellblau, bläulich grün, smaragdgrün, gelbgrün, hellorange, dunkelorange, scharlachrot, carmoisinrot, steingrau, olivengrün, gelbgrün, bronzegelb, orange usw.

Die Farbenfolge im Beugungsbilde, welche eine gänzlich andere ist, scheint nicht so einfachen Gesetzmäßigkeiten unterworfen zu sein, und die wenigen im monochromatischen Lichte vorhandenen Beobachtungen lassen auch hier Abweichungen von der Beugungstheorie kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen vermuten.

Es ist deshalb der Zweck dieser Arbeit, die Erscheinungen und Abweichungen eingehend zu untersuchen und zu erklären. Da für die Erscheinungen im *weißen* Licht schon gute Beschreibungen von Kießling, Barus u. a. vorhanden sind, so legte ich besonderen Wert auf die Messungen im *monochromatischen* Licht und vergleichende Beobachtungen mit der gleichzeitigen Färbung des zentralen Feldes, um hier etwaige Gesetzmäßigkeiten zu entdecken. Zu diesem Zwecke wurden auch Messungen mit anderen Flüssigkeiten ausgeführt. Daran anschließend soll in einem zweiten Teil zur Erklärung dieser Erscheinungen die Beugungstheorie kleiner Kugellinsen abgeleitet werden, woraus sich dann eine Methode der Berechnung von Tropfenradien aus der Färbung des zentralen Feldes ergeben wird.

§ 2. Über Nebelbildung und Tropfengröße.

Nebel besteht nach den Untersuchungen von Kießling[1]), Roth[2]) u. a., welche die von Clausius[3]) aufgestellte Bläschentheorie widerlegten, aus massiven kugelförmigen Tröpfchen, die sich durch plötzliche Abkühlung an den zur Nebelbildung notwendigen Kondensationskernen niedergeschlagen haben. Als solche Ansatzkerne können z. B. Staubteilchen und Ionen, wie sie sich in Flammengasen befinden, dienen. Eine Kondensation von Flüssigkeit läßt sich experimentell am einfachsten durch adiabatische Zustandsänderung der den gesättigten Dampf enthaltenden Luft erreichen. Da bei Wasser und den

1) J. Kießling, Deutsche Metereol. Zeitschr. **1.** S. 117. 1884.

2) Fr. Roth, Deutsche Metereol. Zeitschr. **2.** S. 52. 1985.

3) R. Clausius, Lichterscheinungen der Atmosphäre. 1850. S. 392—346; Pogg. Ann. **76.** S. 84—88.

meisten anderen in Betracht kommenden Flüssigkeiten (außer Äther) die spezifische Wärme des gesättigten Dampfes negativ ist, so tritt Kondensation nur bei plötzlicher *Abkühlung* der mit Wasserdampf gesättigten Luft ein.

Für die folgenden Versuche war es nun von Wichtigkeit, durch *andere nicht auf Beugung* beruhende Meßverfahren eine Vorstellung von der in Frage kommenden Tropfengröße im homogenen Nebel zu erhalten. Von den verschiedenen Methoden kann die direkte mikroskopische Ausmessung der Teilchen außer Betracht gelassen werden. Barus[1]) fand nämlich nach Überwindung der großen experimentellen Schwierigkeiten, daß die Tropfengröße durchaus nicht homogen ist. Es ist dies wohl auf die nachträgliche Veränderung des Durchmessers auf dem Objektträger zurückzuführen. Zu erwähnen wäre dann die Bestimmung aus der Fallgeschwindigkeit, deren Genauigkeit aber auch durch äußere Einflüsse und große Fehlerquellen erheblich beeinträchtigt wird. Ferner ist eine Berechnung des Tropfenradius möglich, wenn man die kondensierte Wassermenge und die Anzahl der Tropfen bzw. der Ansatzkerne kennt. Auf dieser letzteren Methode beruhen die zahlreichen Messungen von Barus[2]), indem er die relative Abnahme der Kondensationskerne infolge mehrerer aufeinanderfolgender Expansionen durch Versuche berechnet. Während diese Messungen die relative Tropfengröße mit einiger Wahrscheinlichkeit zu ermitteln gestatten, beruht ihre absolute Bestimmung nur auf Schätzung. Man kennt eben die anfängliche Anzahl der Kerne nicht genau genug und der Vorgang der Expansion verläuft nicht streng adiabatisch, so daß die Temperaturerniedrigung nur angenähert bekannt ist. Diesen beiden Methoden käme, wenn man von der Schwierigkeit solcher Messungen absieht, infolgedessen nur Beachtung zu, sobald es sich um die bloße Bestimmung der Größenordnung handelt. Ihre Genauigkeit reicht jedoch nicht an die durch die optische Methode erzielbare, welche eine schnelle absolute Bestimmung gestatten würde, heran. Aus diesem Grunde schon

1) C. Barus, Amer. Journ. of Sc. **17.** S. 81ff. 1904.

2) Vgl. z. B. Ann. d. Phys. Boltzmann-Festschrift. S. 204ff. 1904; Sill. Journ. **18.** S. 81. 1902; **24.** S. 309—312. 1907; **31.** S. 564—566. 1911; **15.** S. 335. 1903.

erhebt sich die Forderung, die Erscheinungen und Gesetze der Beugung im Wassernebel eingehend zu untersuchen.

Die Größenordnung der im künstlichen Nebel zu erwartenden Tropfen läßt sich angenähert am besten wohl aus der kondensierten Wassermenge und der Anzahl der Kondensationskerne berechnen. Die durch Kondensation niedergeschlagene Wassermenge läßt sich aus den thermischen Daten nach bekannten Formeln[1]) bestimmen. In einem Gefäß mit konstantem Volumen sei von der Menge M eines Stoffes, m_0 im dampfförmigen, also $M - m_0$ im flüssigen Zustand vorhanden. Bedeuten T_0 und T die Anfangs- und Endtemperaturen (abs.), r_0 und r die Verdampfungswärmen bei den betreffenden Temperaturen, c die spezifische Wärme der Flüssigkeit, so ist bei der Endtemperatur im dampfförmigen Zustand die Menge

$$m = \frac{T}{r}\left(\frac{m_0 r_0}{T_0} - M \cdot c \cdot \ln\frac{T}{T_0}\right).$$

Soll im Anfang alle Flüssigkeit verdampft sein, so ist $m_0 = M$ zu setzen. Die Temperaturänderung läßt sich aus der adiabatischen Zustandsgleichung

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p - \pi}{p_0 - \pi_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

berechnen, wobei π der Sättigungsdruck des Dampfes bedeutet. Den Richtungssinn des Vorganges kann man aus dem ersten Differentialquotienten nach der Temperatur ersehen, welcher sich zu

$$dm = -m \cdot \frac{h}{r} dT$$

ergibt. Ist also die spezifische Wärme h des gesättigten Dampfes negativ, so wird es auch dm bei einer Expansion und es tritt dann Kondensation ein, während bei positiver spezifischer Wärme das Umgekehrte der Fall sein würde. Die Berechnung von m bedarf aber noch einer kleinen Korrektion, da die durch die Kondensation freiwerdende Verdampfungswärme nicht nur den Dampf, sondern auch die umgebende Luft miterwärmt. Die Versuche wurden nun bei Zimmertemperatur von etwa

1) G. Kirchhoff, Wärme, 1894. S. 88ff.; Helmholtz, Wärme, 1903. S. 236ff; Clausius, Mechanische Wärmetheorie 1. S. 161ff.; Winkelmann, Handbuch d. Phys. 3. (Wärme) S. 644ff.

17° und einer durchschnittlichen Druckverminderung von 20 cm Hg ausgeführt. Zwar wurden auch größere Druckunterschiede, welche eine erhebliche Abkühlung unter den Nullpunkt bedeuten würden, angewandt, doch dürfte dann der Vorgang infolge der äußeren Wärmeleitung kaum adiabatisch verlaufen. Barus fand z. B., daß schon nach einer Minute wieder nahezu Temperaturausgleich stattgefunden hat. Einer Druckverminderung von 74 cm auf 54 cm würde eine Temperaturänderung von 290° abs. auf 265° ($k = 1{,}40$) also 25° entsprechen; die Verdampfungswärme des Wassers ist $r = 596{,}7 - 0{,}601\,t^0$, d. h. $r_0 = 586{,}5$ und $r = 601{,}5$. Aus diesen Daten ergibt sich $m = 0{,}929\,m_0$ und es hat sich somit $0{,}071\,m_0$ Wasser kondensiert. Da im Kubikzentimeter Luft bei 17° maximal $14{,}5 \cdot 10^{-6}$ g Wasserdampf enthalten sind, so wurden also für 1 g Luft $872 \cdot 10^{-6}$ g Wasser niedergeschlagen. Die hierdurch freiwerdende Wärmemenge von 0,51 kal. erwärmen die Luft ($c_p = 0{,}237$) um 2,15° und setzen die Temperaturerniedrigung auf 22,85° gegen 25° herab. Folglich erhält man nur 0,064 m, d. h. $0{,}93 \cdot 10^{-6}$ g pro ccm Luft.[1])

Neben der kondensierten Wassermenge hängt die Tropfengröße auch noch von der Anzahl der vorhandenen Ansatzkerne ab. Soll der Nebel aber Beugungserscheinungen zeigen, so muß er homogen sein, da bei verschiedenen Tropfenradien die von den einzelnen Tropfen erzeugten Beugungsbilder sich übereinanderlagern und die Ringe an Schärfe und Reinheit der Farben verlieren würden. Es kommt also im wesentlichen darauf an, daß die Teilchen von gleicher Beschaffenheit und vor allen Dingen gleichmäßig verteilt sind, denn nur dann können die Kerne den Wasserdampf aus gleichgroßen Bereichen an sich reißen.[2]) Bei einer beträchtlichen Anzahl der Kerne wird aber die Verteilung nie eine so regelmäßige sein, um bei dem kleinen Tropfenradius die zur Erzeugung von guten Beugungsbildern erforderlichen Ansprüchen an die Homogenität genügend zu erfüllen. Sind hingegen wenig Kondensationskerne vorhanden, so wird wiederum die Erscheinung zu lichtschwach, um praktische Beobachtungen anstellen zu können. Zur Erzielung brauchbarer Beugungsbilder ist es

1) Für die Berechn. vgl. auch C. Barus, Ann. d. Phys. **24**. S. 229. 1907.

2) E. Barkow, Marburger Dissert. Entstehung von Nebel. S. 13.

also notwendig, daß die Luft nach einer Bezeichnung von Kießling[1]) „den lichtgünstigsten Dunstbetrag" enthält. Dieser beträgt nun nach den Versuchen[2]) von Barus in der oberen Grenze etwa $5 \cdot 10^4$ Kerne im Kubikzentimeter und sinkt bis auf etwa $5 \cdot 10^2$. Ist N die Anzahl der Kondensationskerne im Kubikzentimeter, s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, m die niedergeschlagene Wassermenge, so berechnet sich der Radius r leicht aus der Formel

$$m = \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot s \cdot N.$$

Für Wasser unter den üblichen Versuchsbedingungen würden Tropfen von etwa 1,7—7,7 μ Radius entstehen. Da eine Druckerniedrigung von ungefähr 2 cm gerade noch Nebelbildung hervorzurufen vermag, so schwanken beim künstlichen Nebel die Tropfengrößen zwischen 0,9 und höchstens 8 μ. Für andere Flüssigkeiten als Wasser wird man unter denselben Versuchsbedingungen im allgemeinen andere Größen erhalten und zwar hängen sie, wie die Berechnung zeigt, außer vom Dampfgehalt der Luft noch von der spezifischen Wärme des gesättigten Dampfes und seiner Verdampfungswärme ab.

Die Messungen aus der Fallgeschwindigkeit ergeben nach Versuchen von Barkow[3]) Tropfen von derselben Größenordnung.

Versuchsanordnung.

Zur experimentellen Herstellung von möglichst homogenem Nebel durch die Entspannungsmethode verwandte ich folgende Versuchsanordnung, wie sie auch schon von Kießling[4]), Barkow[5]), Mierdel[6]) u. a. benutzt wurde, und die eine weitgehende Regulierung der Tropfengröße innerhalb der angegebenen Grenzen zuläßt.

1) J. Kießling, Deutsche Metercol. Zeitschr. 1. S. 117—126. 1884. Dämmerungserscheinungen. Hamburg 1888.

2) C. Barus, Boltzmann-Festschrift, S. 205. 1904; Ann. d. Phys. 24. S. 225—242. 1907.

3) E. Barkow, Marb. Dissert. Versuche über Entstehung von Nebel. S. 61. 1906.

4) J. Kießling, Metercol. Zeitschr. 1. S. 117ff. 1884.

5) E. Barkow, Marb. Dissert. Versuche über Entstehung von Nebel, S. 15ff. 1906.

6) F. Mierdel, Marb. Dissert. w. veröff. in „Physik der freien Atmosphäre".

In einem Vorvakuum, bestehend aus den beiden großen Flaschen V_1 und V_2 (Säureballone) und der Glaskugel V_3 von 40 cm Durchmesser, wurde durch eine kräftige Wasserstrahlpumpe L ein Reservoir von verdünnter Luft hergestellt. Der Unterdruck konnte an einem Quecksilbermanometer M abgelesen werden. Um einen bestimmten Verdünnungsgrad erzielen zu können, war das Gefäß V_3 von den beiden anderen durch den Hahn H_3 noch abzuschließen. Ein kleiner Erlenmayerkolben E fing nach Abstellung der Pumpe das zurück fließende Wasser auf; ein weiterer Hahn H_4 verhinderte dann

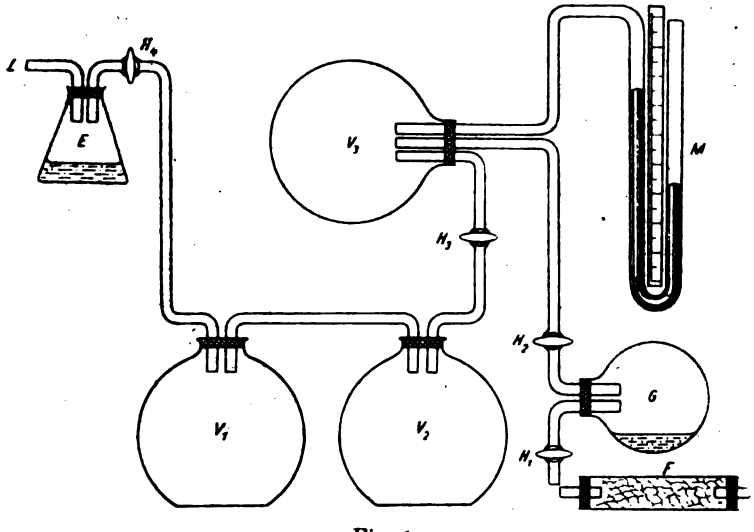


Fig. 1.

das Einströmen von Außenluft in das Vorvakuum. Die Verbindungen wurden durch weite Glasröhren und dickwandige Gummischläuche hergestellt, welche an den Ansatzstellen noch zweckmäßig durch festangezogene Drahtringe und Lacküberzüge gegen Undichtigkeiten geschützt waren.

Das eigentliche Nebelgefäß G bestand aus einer Glaskugel von 20 cm Durchmesser, welche etwas Wasser enthielt, um die Luft dauernd mit Wasserdampf gesättigt zu erhalten, und war mit einem doppelt durchbohrten Gummistopfen verschlossen. Dieser besaß zwei mit Hähnen versehene Glasröhren, von denen die eine mit dem Vakuumreservoir, die

andere aber mit der Außenluft in Verbindung stand. Nach Schließen des Hahnes H_1 konnte durch Öffnen von H_2 die gewünschte Entspannung bewirkt werden; durch Öffnen von H_1 wurde der Unterdruck wieder ausgeglichen. Das Vorvakuum hatte den Zweck, auch nach mehreren Entspannungen einen nahezu konstanten Unterdruck von 30—40 cm zu erhalten.

Kondensationskerne wurden durch Einsaugen von Flammengasen, welche sehr kräftig auf die Nebelbildung wirken, in das Gefäß G gebracht: meistens enthielt aber die Zimmerluft schon genügend Kerne, um gute Beugungsbilder zu liefern. Trat hingegen bei den ersten Entspannungen zu dichter Nebel auf, so mußte durch mehrere kräftige Entspannungen ein Teil der Kerne entfernt werden. Zweckmäßig wurde dabei die einströmende Luft durch kernfreie ersetzt, was dadurch ermöglicht wurde, daß die eintretende Luft erst durch ein Filter, bestehend aus einer 30 cm langen, dicht mit Watte gefüllten Glasröhre gesaugt wurde. Dabei konnte die Mehrzahl der im Nebelgefäß vorhandenen Kondensationskerne entfernt werden und man erhielt dadurch einen dünnen Nebel, bestehend aus großen Tropfen, welche allerdings bei ihrer Größe sehr schnell zu Boden sanken. Die Beobachtung war bei diesem dünnen Nebel sehr erschwert. Durch geeignete Druckverminderung, hervorgerufen durch längeres oder kürzeres Öffnen des Hahnes H_2, gelingt es nach einiger Übung bei dieser Versuchsanordnung leicht, jede Tropfengröße und jede beliebige Färbung des zentralen Feldes herzustellen.

Da die Beugungserscheinungen, die besonders bei weniger dichtem Nebel und im monochromatischen Lichte sehr schwer erkennbar sind, ein Experimentieren im vollkommen dunklen Zimmer notwendig machten, wurde folgende Meßanordnung gewählt:

Die Lichtquelle war von vorne durch einen aus schwarzer Pappe bestehenden, lichtundurchlässigen Schirm abgeblendet. In diesem war zur Erzielung einer scharfbegrenzten Lichtquelle eine kreisrunde Öffnung geschnitten, welche je nach der erforderlichen Lichtstärke einen Durchmesser von 2 oder 10 cm hatte. Der Maßstab wurde nun, von der Mitte der Öffnung ausgehend, in den Pappschirm eingestochen und von hinten durch eine Glühlampe beleuchtet. Für die zur Messung hinreichende Genauigkeit genügte die einfache Zentimeterteilung;

die halben Dezimeter wurden durch 2 Stiche, die ganzen Dezimeter durch 3 Stiche kenntlich gemacht. Auf diese Weise erhielt ich einen im gänzlich dunklen Zimmer gut sichtbaren Maßstab, welcher recht genaue Messungen zuließ.

Als Lichtquelle benutzte ich das durch eine Mattscheibe diffus gemachte, weiße Licht einer Bogenlampe, welche mittels einfachen Vorschaltens eines Filters, bestehend aus einer hinreichend konzentrierten Lösung von Kaliumpermanganat und Kaliumbichromat, nach Bedarf monochromatisch gemacht werden konnte. Dieses Filter ließ nur rotes Licht bis zur Wellenlänge von 0,57 μ hindurch und besaß somit eine mittlere Wellenlänge von 0,65 μ. Nach Aufstellen des planparallelen Gefäßes auf ein leichtbewegliches Tischchen war ein schnelles Ein- und Ausschalten des Filters vom Beobachtungsplatze aus möglich, und die Versuche konnten im weißen und roten Lichte unmittelbar hintereinander ausgeführt werden. Es war dies für vergleichende Beobachtungen sehr wünschenswert. Zur Erzielung von streng monochromatischem Licht nahm ich einen breitbrennenden Bunsenbrenner, dessen Flamme durch geschmolzenes Kochsalz, das auf einer Asbestplatte in die Flamme gehalten wurde, intensiv gefärbt war. Mittels eines Hohlspiegels und einer großen Sammellinse konnte das Licht noch mehr auf die Blende konzentriert werden. Obwohl so eine recht helle Natriumbeleuchtung erzielt wurde, mußte doch zur Sichtbarmachung der Ringe die größere Öffnung von 10 cm Durchmesser genommen werden, was bei dem starken Bogenlicht hingegen nicht erforderlich war.

Für die Messungen wandte ich fast ausschließlich die subjektive Beobachtungsmethode an, welche mit der objektiven im Prinzip übereinstimmt, aber bei der großen Unbeständigkeit des Nebels schnellere und sicherere Beobachtung zuläßt. Das Nebelgefäß war im Durchschnitt 130—150 cm vom Schirm entfernt, und das Auge befand sich unmittelbar dahinter. Indem es durch den Nebel zur Lichtquelle blickte, wurden so die Beugungsringe auf einen dunklen Hintergrund projiziert. Die geringe Entfernung des Nebelgefäßes von der Lichtquelle war bei der Kleinheit der Tropfen vollkommen hinreichend, um die für die Fraunhoferschen Beugungserscheinungen geforderte Parallelität der Strahlen zu gewährleisten. Andererseits ist ein größerer Abstand nicht zweckdienlich, um die

Meßgenauigkeit, welche schätzungsweise 3 Proz. betrug, nicht durch zu große Beugungsringe herabzusetzen.

Experimentelle Untersuchung der Beugungserscheinung im homogenen Nebel.

§ 1. Über den Einfluß der Dicke der Nebelschicht.

Vor Ausführung der eigentlichen Messungen untersuchte ich den etwaigen Einfluß der Dicke der beugenden Schicht auf die Größe der Ringe und ihre Färbung. Indem ich bis zu 8 Glasplatten, auf beiden Seiten mit Lycopodiumpulver bestreut, dicht hintereinander aufstellte und durch sie die Beugungsringe um eine entfernte Lichtquelle beobachtete, fand ich nur in soweit eine Änderung der Erscheinung gegenüber *einer* Platte, als bei zu dichter Bestäubung die Ringe undeutlicher und verwaschener wurden. Es kommt dies wohl dadurch, daß dann zuviel Teilchen die Erscheinung verdecken. Ich möchte hierbei auch folgenden Versuch erwähnen: Stellt man zwei mit Lycopodiumsporen bestäubte Glasplatten soweit voneinander auf, daß die durch die eine Schicht hervorgerufenen Ringe bedeutend kleiner, etwa halb so groß, erscheinen als die anderen (ungefähr in 1 und 2 m Entfernung von der Lichtquelle), so lagern sich nicht, wie man erwarten sollte, beide Ringsysteme übereinander. Je nach der Stärke der Bestäubung sieht man entweder die größeren oder die kleineren Ringe; nur bei einem bestimmten Bestäubungsverhältnis gelang es mir, beide Beugungserscheinungen zur gleichen Zeit als einfache Übereinanderlagerung zu beobachten.

Auch bei Ausführung der obigen Versuche mit Bovistsporen (Boletus cervinus) oder mit in Wasser aufgeschwemmtem Lycopodiumpulver konnte ich eine Größenänderung der Ringe oder einen Farbenwechsel nicht feststellen. Der letztere Versuch mit Lycopodium, welches durch kräftiges Schütteln in Wasser fein verteilt wurde, dürfte wohl, abgesehen von der Größe der Teilchen, den beim homogenen Nebel tatsächlich vorliegenden Verhältnissen am nächsten kommen. In der Literatur fand ich außerdem von Barus[1]) eine experimentelle Untersuchung, wonach die im homogenen Nebel zu beobachtenden Erscheinungen bei einer Dicke der Nebelschicht von

1) C. Barus, Sill. Journ. (4) **31**. S. 564—566. 1911.

15 cm bis zu ihrer dreifachen (45 cm) genau dieselben bleiben. Ein erheblicher Einfluß der Tiefenausdehnung dürfte somit nicht vorhanden sein, wie auch aus folgender Überlegung zu schließen ist: Das Nebelgefäß G befindet sich in der Entfernung l von der Lichtquelle L (Fig. 1a). Das von ihr auf die in der Blickrichtung $CEFA$ sich befindenden Tröpfchen fallende Licht wird, damit es ins Auge des Beobachters bei A gelangt, um Winkel zwischen φ_1 und φ_2 abgebeugt. Das Auge projiziert dann alle diese Strahlen auf dieselbe Stelle C des Schirmes. Die Maximaldifferenz der verschiedenen Beugungswinkel, $\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2$, ist nun gering und beträgt bei den in der Beschreibung der Versuchsanordnung gegebenen Abmessungen im Höchstfalle nur $1^1/_2$ Proz. Außerdem kommen für die Beugung

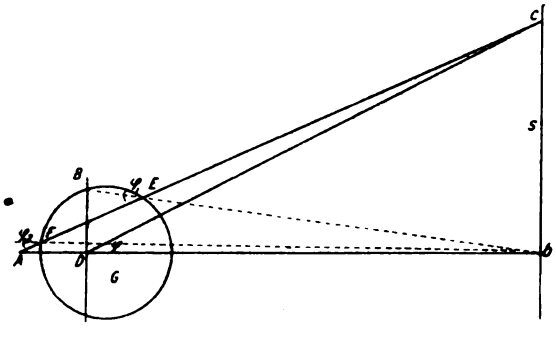


Fig. 1a.

hauptsächlich die in der Nähe des Auges sich befindenden Tropfen in Betracht, da diese die an weiter entfernt liegenden Tröpfchen gebeugten Strahlen verdecken; für ungebeugtes Licht fällt dies bei seiner erheblich größeren Helligkeit nicht so ins Gewicht. Um also einen mittleren Beugungswinkel zu erhalten, kann man annehmen, daß die Teilchen alle in einer Ebene BD sich befinden, die aber wohl nicht durch den Mittelpunkt des Nebelgefäßes G geht, sondern eher näher dem Auge zu liegt. Der mittlere Beugungswinkel ist dann mit großer Annäherung gleich dem Winkel CDL und für diesen gilt die Beziehung

$$\sin\varphi = \frac{s}{\sqrt{s^2 + l^2}} \sim \frac{s}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{s^2}{l^2}\right).$$

§ 2. Untersuchung des Beugungsbildes im weißen Licht.

Die Farbenerscheinungen, die das Beugungsbild in weißem Licht zeigt, sind schon von einigen Autoren näher beschrieben worden. Kießling[1]) stellt fest, daß die Farben den Charakter von Mischfarben haben, welche aber mit einem eigentümlichen mattglänzenden Metallschimmer übergossen sind, so daß eine genaue Beschreibung der Farben schwierig ist. Er vermutet aus der rein qualitativen Beobachtung der Erscheinung eine Abhängigkeit der Färbung des zentralen Feldes von der Tropfengröße, indem es mit wachsendem Tropfenradius die in der Einleitung auf S. 474 erwähnten Farbtöne durchläuft. Für die Aufeinanderfolge der Farben in den Ringen gibt er keine genaueren Angaben, sondern stellt nur fest, daß hierin keine Gesetzmäßigkeit zu bestehen scheint. Barus[2]) erwähnt in seinen Untersuchungen über die Anzahl der vorhandenen Kondensationskerne die Farbenfolge für einige Tropfengrößen. Außerdem findet er aber, daß bei dichtem Nebel auch die Lichtquelle selbst gefärbt erscheint (axial colours) und zwar merkwürdiger Weise nahezu komplementär zu der Färbung des sie umgebenden zentralen Feldes.

Um ein klares Bild über diese Beugungserscheinung im homogenen Nebel zu erhalten, besonders um für jede Tropfengröße das ihr charakteristische Farbenbild festzulegen, versuchte ich die Farbenfolge in den Ringen bei verschieden gefärbten zentralen Feldern möglichst genau zu bestimmen. Mit wachsender Tropfengröße (d. h. mit zunehmender Expansion) durchläuft die Färbung des *zentralen* Feldes drei Perioden, indem in jeder Periode die Farbe von violett über blau, grün, gelb, rot und purpurn nach violett zurückwechselt. Die erste Periode zeigt große, schön satt gefärbte zentrale Felder, welche infolge der Größe der Ringe nicht allzu lichtstark sind. Auch sind dadurch wenig andere Farben zu sehen. In den folgenden Tabellen ist die erste Farbe stets die des zentralen Feldes, worauf dann die anderen auffallendsten Farben von innen nach außen sich anschließen.

1) J. Kießling, Deutsche Metercol. Zeitschr. **1.** S. 117 ff. 1884.
2) C. Barus, Sill. Journ. **18.** Boltzmann-Festschrift 1904. S. 207 ff.

Tabelle 1.

Erste Periode.

Nr.	r^1)	Zentrales Feld	Ringe
1	1,0 μ	hellviolett	grün
2	1,06	blauviolett	gelbgrün
3	1,2	hellblau	grün, rosa
4	1,27	blau (grünlich)	dunkelblau, rot
5	1,32	grünblau	hellviolett (rötlich)
6	1,4	grün	violettblau, hellgrün, rosa
7	1,45	gelbgrün	blau, rosa
8	1,52	gelb	grün, violett
9	1,57	orange	grün, violett
10	1,60	rot	grün, violett
11	1,63	rot	hellgrün (gelblich), rosa
12	1,66	purpurrot	fahlgrün, rosa
13	1,75	hellpurpur	grün, rötlich, violett

Hierauf folgt nun unmittelbar die zweite Periode, welche kleinere zentrale Felder besitzt und daher auch mehr Farben in den Ringen erkennen läßt. Die Intensität ist eine bedeutend größere, und gerade diese Periode zeigt die prächtigsten und glänzendsten Farbenerscheinungen.

Tabelle 2.

Zweite Periode.

Nr.	r^1)	Zentrales Feld	Ringe
1	1,87 μ	violett	grün, rot, grün
2	1,92	violett	gelb, rot, dunkelblau
3	2,0	graublau	grün, dunkelviolett, gelb
4	2,07	blaugrün	gelb, violett, grün
5	2,09	bläulich grün	gelb, grün, rosa
6	2,15	smaragdgrün	(reines grün), dunkelblau, rot
7	2,22	olivengrün	schmales dunkelblau, rot
8	2,3	grüngelb	blau, grün, rot, violett
9	2,31	grünlich gelb	rot, blau, grün
10	2,32	gelb	rot, grün, violett
11	2,33	gelb	dunkler Streifen (schwach blau, grün, rot, blau), rot
12	2,35	hellorange	rot, grün, violett
13	2,4	hellpurpur	gelbgrün, rosa

1) Die Berechnung dieser Werte für die Tropfenradien folgt aus dem zweiten Teil.

Die dritte Periode ist in der Hauptsache nur eine Wiederholung der zweiten. Die Farben folgen hier sehr dicht aufeinander, so daß es oft schwierig ist, die einzelnen Farbtöne zu unterscheiden. Das zentrale Feld wird immer blasser gefärbt, und schließlich geht die ganze Beugungserscheinung allmählich in die normale Farbenfolge wie sie Lycopodiumsporen zeigen, über. Sie ist deshalb weniger charakteristisch, und es seien nur einige Farbtöne mitgeteilt.

Tabelle 3.
Dritte Periode.

Zentrales Feld	Ringe
weißgrün	blau, rot
weißgelb	blau, grün, rot
weißorange	grün, violett

Um die Tabellen später nicht wiederholen zu müssen, habe ich hier gleich die entsprechenden Tropfenradien hinzugefügt, wie sie sich aus der Färbung des zentralen Feldes nach der im zweiten Abschnitt entwickelten Theorie ergeben. Ich kann deshalb erst am Schlusse der Arbeit näher darauf eingehen. Gefärbte Beugungsbilder, welche noch kleineren Tropfen als 1 μ Radius entsprachen, konnten aus dem in der Einleitung (S. 477) erwähnten Grunde nicht erhalten werden, da bei zu großer Dichte nur ein weißlicher inhomogener Nebel entstand.

Wie nun aus den Tabellen hervorgeht, ist es nicht möglich, irgendeine Gesetzmäßigkeit in der Farbenfolge der Beugungsringe zu entdecken. Nur das zentrale Feld durchläuft Farben, die in ihrer Aufeinanderfolge denen dünner Blättchen sehr ähneln. Bei seinem Entstehen erweckt das Beugungsbild durch das Kleinerwerden der Ringe den Anschein, als ob die inneren Farben in die Lichtquelle hineinversinken und von außen immer neue hinzutreten, welche sich über die bereits vorhandenen Farben (aber durchaus nicht gleichmäßig) zu schieben scheinen. Indem hierbei einige sich zu breiten Ringen ausbilden, andere hingegen so schmal werden, daß nur ein Übergangston sie anzudeuten scheint, entstehen so die mannigfaltigsten Farbenanordnungen, welche jeder Tropfengröße ein ihr allein eigentümliches Beugungsbild geben. Die Schnellig-

keit, mit der dieser Farbenwechsel erfolgt, ist eine sehr unregelmäßige. Im allgemeinen sind die Beugungserscheinungen der ersten Periode recht unbeständig und wechseln schnell ihre Farben, da infolge der Kleinheit der Tropfen ihr Radius größeren Veränderungen unterworfen ist. Doch auch für die verschieden gefärbten zentralen Felder vollzieht sich der Übergang von einem Farbton in den anderen nicht immer gleichmäßig. So ist z. B. die blaue Farbe des zentralen Feldes äußerst schwer zu erhalten, weil das Violett fast unmittelbar in ein bläuliches oder sogar reines Grün übergeht. Nur durch langsames Expandieren gelang es mir, die tiefblaue Färbung vorübergehend zu erhalten. Sehr charakteristisch und auffallend ist hingegen das schön smaragdgrün gefärbte zentrale Feld (Tab 2, Nr. 6), welches einen Durchmesser von etwa 16° hat. Hieran schließt sich mit scharfer Grenze ein schmaler dunkelblauer Ring von 3° Breite an, gefolgt von einem breiteren roten. Beständig, doch nicht so hervortretend, ist auch das purpurne zentrale Feld.

Da unsere übliche Farbenbenennung recht unvollkommen und auch subjektiver Natur ist, was leicht ein gewisses Farben-*suchen* des Beobachters zur Folge haben kann, so bemühte ich mich, die Farben noch genauer zu definieren, leider mit nicht nennenswertem Erfolge. Die Beugungsbilder, welche ja aus Mischfarben bestehen, enthalten immer noch soviel Weiß und allmähliche Übergänge in ihren Farbkomponenten, daß sie kräftige Absorptionsbanden im Spektrum nicht zu geben vermögen. Ich bemerkte deswegen in einem kleinen geradsichtigen Spektroskop auch nur beim Entstehen der Ringe schwache Schatten, welche schnell vom violetten zum roten Ende über das ganze Spektrum hinwegeilten und die ich ohne diese Bewegung nicht gesehen hätte. Ferner versuchte ich einen Vergleich der Farben mit denen des Ostwaldschen Farbenatlasses durchzuführen. Es sind diese jedoch Oberflächenfarben, welche von der Stärke der Beleuchtung abhängen, so daß eine gute Betrachtung derselben im dunklen Zimmer gegen die helle Lichtquelle sehr erschwert ist. Auch war ich mit dem groß angelegten Werke, welches etwa 3500 verschiedene Farbtöne enthält, nicht so vertraut, um in der kurzen Zeit (1—2 Minuten), während welcher das Beugungsbild sichtbar blieb, gleich die richtige Farbe herauszufinden. Nach

längeren Versuchen konnte ich für das Beugungsbild Nr. 6. Tab. 2, welches noch am leichtesten und längstens herstellbar war, etwa folgende Vergleichsfarben feststellen:

grün: 88 *ga*, blau: 50 *ka*, rot: 30 *hb*.

Wir haben es in der Hauptsache mit den sogenannten hellklaren Farben zu tun, doch muß ich wegen der Bedeutung dieser Ostwaldschen Farbenbenennung[1]) auf das dem Atlas beiliegende Heft verweisen.

Ein Ausmessen der Ringe, etwa unter Benutzung des äußeren Randes eines roten Ringes, hielt ich hier, wo die Farbenanordnung eine so überaus verschiedenartige ist, für zwecklos und verschob es auf die Untersuchungen im monochromatischen Licht. Denn nur für die normale Farbenfolge ist die Benutzung der sogenannten Wellenlänge des weißen Lichtes [2]) zulässig, die ja nichts weiter besagt, als daß in diesem Falle das Minimum der Wellenlänge 0,571 μ bei der scharfen Grenze zwischen rot und violett liegt. Hier haben wir es aber anscheinend mit einer ganz anderen Beugungserscheinung zu tun. Ist jedoch im homogenen Nebel die Farbenfolge bei größeren Tropfen in die normale übergegangen, so findet man in der Berechnung der Tropfengröße aus dem ersten und zweiten Ringe auch hier Übereinstimmung (vgl. hierzu § 4 und besonders die Messungen mit Alkoholnebel).

Eine Färbung der Lichtquelle, wie sie Barus als axial colours wahrgenommen hatte, konnte ich nur selten beobachten, da bei dem kleinen Nebelgefäß der Nebel meistens nicht dicht genug war. Verschärft wurde der Farbenkontrast, wenn ich die Beugungserscheinung auf der Mattscheibe eines kleinen photographischen Apparates beobachtete. Auf diese Weise fand ich folgende Färbungen:

Zentrales Feld:	violett	grün	gelbgrün	gelb
Lichtquelle:	gelbgrün	rötlich orange	rotviolett	grünblau

Eine genaue Farbbestimmung war jedoch sehr schwierig, da die Färbungen äußerst schwach und die Helligkeit der Lichtquelle oft nur ihren Farbton vermuten ließ. Doch scheint aus diesen Beobachtungen und denen von Barus hervorzu-

1) Vgl. auch die Farbenfibel von Ostwald.

2) J. Pernter, Meteorol. Optik, S. 459.

gehen, daß die Färbungen häufig, wenn auch *nicht immer* genau, komplementär zueinander sind.

§ 3. Messungen im monochromatischen Licht.

Die eben beschriebenen anomalen Farbenerscheinungen lassen schon voraussehen, daß auch im monochromatischen Licht, welches aus der Gesamtwirkung aller Wellenlängen den Einfluß einer einzelnen allein erkennen läßt, erhebliche Abweichungen von der Beugungserscheinung undurchsichtiger, kreisförmiger Scheibchen auftreten werden. Es liegen hier jedoch noch wenige Beobachtungen vor, und die vorhandenen Messungen beschränken sich fast nur auf die Berechnung der Tropfengröße aus dem ersten dunklen Ringe unter Benutzung der Beugungsgleichung undurchsichtiger kreisförmiger Scheibchen. Die Frage aber, ob diese Formel überhaupt für die Beugungserscheinungen im homogenen Nebel angewendet werden darf, wird nicht näher untersucht. Und gerade diese Frage scheint, wenigstens für kleine Tropfen, durchaus verneint werden zu müssen. Schon Barus[1]) fand beim Vergleich der optisch nach der obigen Formel berechneten Tropfenradien mit denen aus der Anzahl der vorhandenen Kondensationskerne gewonnenen (vgl. Einleitung S. 475) Abweichungen, die er zuerst auf subjektive Beobachtungsfehler und Unbeständigkeit der Ringe infolge Verdampfens der Tröpfchen zurückführt. Später kommt er durch die Regelmäßigkeit dieser Abweichungen zu der Ansicht, daß ihre Bedeutung, solange eine Theorie der Erscheinungen noch nicht besteht, schleierhaft bleibt. Seine im grünen Quecksilberlicht ausgeführten Messungen[2]) des Durchmessers vom ersten Ringe und dessen Breite bringen nicht viel positiv Neues, was zur Klärung beitragen könnte. Mierdel[3]) berechnet den Tropfenradius zwar aus den beiden ersten Minima, bemerkt aber dazu, daß „natürlich nur die Ringe ausgemessen werden konnten, deren Minima erster und zweiter Ordnung annähernd gleichstark ausgeprägt waren". Demzufolge bringt er nur zwei Messungen bei größeren Tropfen und findet bei dieser Auswahl dann allerdings Übereinstimmung in den Resultaten.

1) C. Barus, Sill. Journ. **24.** S. 309—312. 419—425. 1907.
2) C. Barus, Sill. Journ. **27.** S. 73. 1909.
3) F. Mierdel, Marb. Dissert.

Die Beugungstheorie undurchsichtiger kreisförmiger Scheibchen verlangt nun, daß die Durchmesser der Ringe stets in einem bestimmten konstanten Verhältnisse zueinander bleiben müssen und daß auch keine Änderung der Intensitätsverteilung eintreten darf. Da die Lage des ersten dunklen Ringes durch

$$\sin \varphi_1 = 0{,}61 \cdot \frac{\lambda}{r},$$

die des zweiten durch

$$\sin \varphi_2 = 1{,}116 \cdot \frac{\lambda}{r}$$

gegeben ist, so müssen sich also die Radien immer wie 1 : 1,83 verhalten. Barkow[1]) fand nun beim homogenen Licht der Natriumflamme nicht diese gleichmäßige Helligkeitsverteilung, sondern beobachtete oft eigenartige Anordnungen der Maxima und Minima, von denen er vier verschiedene Typen unterscheidet. Auch aus meinen Versuchen ergibt sich durchaus nicht ein regelmäßiges Abwechseln der Maxima und Minima oder gar ein konstantes Verhältnis der Ringe zueinander. Ich möchte die Änderungen, welche das Beugungsbild mit zunehmender Expansion und Tropfengröße erfuhr, wie folgt beschreiben:

Zuerst war bei den kleinsten Tropfen nur ein schwacher, großer, dunkler Ring zu bemerken, welcher allmählich kleiner wurde. Während nun der Radius des bald sichtbar werdenden zweiten Ringes schnell abnahm, verlangsamte sich die Geschwindigkeit des ersten immer mehr und kam schließlich gänzlich zum Stillstande. Die Ringe verbreiterten sich etwas und der erste schien sogar wieder größer werden zu wollen. Das dazwischen liegende Maximum, welches zuerst breit und hell war, schrumpfte zusammen und verlor zusehends an Intensität, bis es schließlich ganz verschwunden war und die beiden Minima sich zu einem einzigen breiten Ringe verschmolzen hatten. Diese Vereinigung dauerte jedoch nur kurze Zeit. Jetzt war es der erste Ring, welcher sich lostrennte und rasch kleiner wurde, während hingegen der zweite konstant blieb und sich auch mit dem dritten zu vereinigen schien. Zu gewissen Augenblicken waren drei schmale Minima und gut ausgeprägte Maxima zu sehen, so daß das Beugungsbild ganz den nor-

1) Barkow, Marb. Dissert. S. 77.

malen Eindruck machte. Dieser Vorgang des Treffens und wieder Auseinandergehens der Ringe wiederholte sich nun noch einmal, und das Beugungsbild ging dann allmählich mit kleineren Schwankungen in das normale über. Von jetzt ab ändern sich die Ringe nur noch im konstanten Verhältnisse zueinander.

Auch hinsichtlich der Breite und Helligkeit sind die Ringe Änderungen unterworfen, indem oft ein Schmälerwerden und erhebliche Aufhellung der Minima zu bemerken ist. Bei Messungen im Natriumlicht konnte ich sogar ein gänzliches Verschwinden des ersten Ringes beobachten. Da ich aber bei diesen Beobachtungen die große Öffnung von 10 cm Durchmesser nehmen mußte, um das Beugungsbild überhaupt sichtbar zu machen, so kann dies auch darin seine Erklärung finden, daß bei der großen Ausdehnung der Lichtquelle die schwachen Intensitätsunterschiede nicht mehr wahrzunehmen waren.

Dieser ganze Vorgang, welchen das Beugungsbild mit wachsender Tropfengröße durchläuft, ist also ein so auffallend eigenartiger und weist so große Abweichungen in den Ringen auf, daß man erst gar nicht wagt, daraus den Tropfenradius nach der alten Formel zu berechnen. Ich habe deswegen auch in der folgenden Tabelle nur die Beugungswinkel der Minima und das jeweilige Verhältnis der Ringe zueinander angegeben. Es wurden stets die beiden Ränder, der äußere und innere, gemessen und jedesmal das arithmetische Mittel daraus genommen. Hiervon mußte dann noch die Ausdehnung (Radius) der Lichtquelle (1 cm) abgezogen werden, um den richtigen Beugungswinkel zu erhalten. Die in Tabellen 4 und 5 enthaltenen Werte verstehen sich für rotes Licht und sind Mittelwerte aus 3 bis 8 Einzelmessungen. Die gleichzeitige Färbung des zentralen Feldes wurde nach der auf S. 481 angegebenen Methode der Einschließung vor und nach der Messung im roten Licht bestimmt.

Bei Verwendung von Natriumlicht wurden dieselben Werte erhalten, doch sind hier die Messungen durch die notwendig große Ausdehnung der Lichtquelle weniger zuverlässig. Auch hier fand ich z. B. durch die Vereinigung der beiden Ringe zwischen $8^0\ 25'$ und $17^0\ 15'$ ein breites Minimum. Es erübrigt sich deshalb, die Werte hierfür noch einmal zu wiederholen.

Tabelle 4.

Nr.	φ_1	φ_2	Bemerkungen	$\sin\varphi_1 : \sin\varphi_2$
1	11° 55′	Von 18° 25′	an breites Minimum, äußere Rd. nicht erkennbar, zentrales Feld rot (Tab. 1, Nr. 10).	
2	11° 30′	Von 21° 30′	an breites Minimum, äußere Rd. nicht erkennbar, zentrales Feld purpurrot (Tab. 1, Nr. 12).	
3	8° 50′	19° 40′	z. F. bläulich grün (Tab. 2, Nr. 5), breites 2. Maximum.	1 : 2,3
4	8° 55′	19°	grün (Tab. 2, Nr. 6).	1 : 2,19
5	8° 57′	18° 15′	grüngelb (Tab. 2, Nr. 8) 1. Ring etwas größer.	1 : 2,09
6	9° 12′	16° 46′	gelb, grünlich (Tab. 2, Nr. 9—10) 2. Maximum nur schwach.	1 : 1,86
7	Von 8° 25′	bis 17° 15′	sehr breites Minimum, beide Ringe vereinigt, gelb (Tab 2. Nr. 11) (22° 20′ dritter Ring)	
8	8° 47′	17°	2. Ring etwas größer geworden	1 : 1,97
9	7° 56′	17° 16′		1 : 2,23
10	7° 15′	16° 45′		1 : 2,37
11	6° 34′	15° 20′	gelb, dritte Periode (Tab. 3)	1 : 2,38
12	6° 20′	14° 15′	orange, dritte Periode (Tab. 3)	1 : 2,22
13	6° 15′	13° 10′		1 : 2,14
14	6° 22′	12° 31′	20° 40′ dritter Ring sichtbar	1 : 2,0 : 3,39
15	6° 30′	11° 48′	18° 40′ drittes Minimum	1 : 1,84 : 2,97
16	Von 6° 22′	bis 12° 57′	sehr breites Minimum, beide Ringe vereinigt	
17	6° 26′	10° 43′	17° 50′ dritter Ring 2. Maximum nur schwach.	1 : 1,67 : 2,9

Während nun bei den vorigen Messungen die Tropfengrößen nach der alten Formel, d. h. der Beugungsformel kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen, nicht berechnet werden konnten, glaubte ich dies jedoch tun zu dürfen, sobald das Beugungsbild den normalen Charakter angenommen hat, und die Ringe sich nur noch im gleichen Abstande voneinander ändern. Wie aus der Tabelle hervorgeht, erhielt ich für diesen Fall auch fast genaue Übereinstimmung der aus verschiedenen Ringen berechneten Tropfenradien mit nur geringen Abweichungen.

Um jene komplizierten Verhältnisse, wie sie besonders bei kleineren Tropfen auftreten, noch klarer zum Ausdruck zu bringen, als das durch die Beschreibung und die Tabellen möglich ist, versuchte ich, die Messungen graphisch darzustellen. Da mir aber jede andere Bezugsgröße, wie z. B. die Tropfen-

größe selbst, fehlt, wählte ich als Abszissenachse die Radien des ersten Ringes und als Ordinatenachse die des zweiten.

Tabelle 5.

φ_1	r_1	φ_2	r_2	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
4° 35′	4,97 μ	8°	5,15 μ	− 4,2%
3° 51′	5,88	7° 5′	5,90	− 0,3%
3° 39′	6,22	6° 38′	6,25	− 0,5
3° 8′	7,25	5° 55′	7,02	+ 3,2
2° 43′	8,32	5° 5′	8,17	+ 1,8

Der normale Verlauf des Beugungsbildes wäre dann durch eine gerade Linie gegeben, deren tang des Neigungswinkels 1,83 betrüge. In Fig. 2 erkennt man deutlich die Periodizität der Abweichungen, wenn auch die genaue Kurve noch durch mehrere Messungen festgelegt werden müßte. Bei den Spitzen *A* und *B* der Kurve vereinigen sich die beiden Ringe zu dem breiten Minimum und hier tritt dann auch mit wachsender Tropfengröße eine kleine Vergrößerung, zuerst des ersten Ringes und später nach ihrer Trennung des zweiten auf. Werden die Tropfen größer, so nähert sich die Kurve allmählich der Geraden, um von einem Tropfenradius von etwa 4—5 μ ab fast gar keine erheblichen Abweichungen mehr zu zeigen.

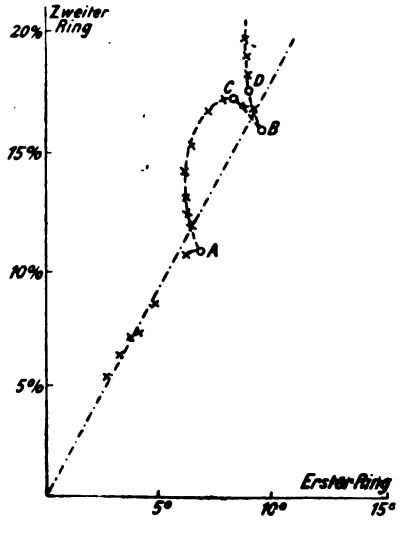


Fig. 2.

§ 4. Versuche mit homogenem Nebel anderer Flüssigkeiten.

Um die bei Wasser durch seine thermischen Daten gegebenen Grenzen der Tropfengröße zu erweitern, besonders aber, um die stark vermutete Abhängigkeit der Beugungserscheinungen vom Brechungsexponenten nachzuweisen, stellte

ich noch Versuche mit anderen Flüssigkeiten an. Als gut geeignet hierzu erwiesen sich folgende chemische Verbindungen, deren Brechungsexponenten genau bestimmt waren und zwischen 1,333 (Wasser) und 1,586 (Anilin) lagen: Alkohol, Äther, Chloroform, Benzol, Toluol, Anilin. Vor Ausführung der Versuche wurde jedesmal das Nebelgefäß gut ausgetrocknet, und durch mehrere hintereinander gemachte Expansionen überzeugte ich mich auch davon, daß jegliche Nebelbildung verschwunden war. Durch kräftiges Schütteln und längeres Stehenlassen wurde nun die im Gefäß befindliche Luft mit dem betreffenden Dampfe gesättigt. Es trat dann fast stets sofort kräftige Nebelbildung ein, so daß Kondensationskerne aus Flammengasen nicht erst zugeführt zu werden brauchten, was infolge der leichten Explosionsmöglichkeit einiger Substanzen (Äther, Benzol) nicht zu empfehlen war. Versuchs- und Meßanordnung blieben dieselben.

a) Alkohol, C_2H_5OH. $n = 1{,}363$.

Absoluter Alkohol besitzt einen Brechungsexponenten von 1,36, welcher nahezu gleich dem von Wasser ist. Spielt also die Durchsichtigkeit der Tropfen in der Entstehung der anomalen Beugungserscheinungen eine Rolle, so kann hier kein großer Unterschied bestehen. In der Tat erhielt ich mit Alkoholnebel auch dieselben eigenartigen Erscheinungen wie bei Wasser, indem er gefärbte zentrale Felder zeigt und auch sonst dem Wassernebel äußerst ähnlich ist. Nur können im allgemeinen nicht so kleine Tropfen hergestellt werden; demzufolge treten normale Beugungsbilder mit ungefärbten zentralen Feldern häufiger auf und sind dadurch der Beobachtung leichter zugänglich. In der Tab. 6 gebe ich einige Messungen dieser Ringe wieder, welche ich diesmal aber im weißen Licht unter Benutzung der sogenannten Wellenlänge des weißen Lichtes 0.571 μ ausgeführt habe.

Tabelle 6 (Alkohol).

φ_1	r_1	φ_2	r_2	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
5° 13′	3,83 μ	9° 27′	3,88 μ	− 1,3%
4° 46′	4,19	8° 47′	4,17	+ 0,5
4° 5′	4,87	7° 35′	4,83	+ 0,8
3° 39′	5,47	6° 48′	5,37	+ 1,8

Danach scheinen die Abweichungen erst bei etwas kleineren Tropfen wie im Wassernebel, wo sie bei etwa 4,5—5 μ beginnen dürften, aufzutreten, was eine eventuelle Abhängigkeit vom Brechungsexponenten andeuten könnte.

b) Äther. $(C_2H_5)_2O$. $n = 1.354$.

Obwohl Äther eine positive spezifische Wärme seines gesättigten Dampfes besitzt, tritt doch bei Expansion Nebelbildung ein, wenn der Ätherdampf mit viel Luft gemischt ist, eine eigenartige Erscheinung, die auch R. v. Helmholtz[1]) beobachtet hat. Dagegen bildet er einen nicht durch Kondensation, sondern nur als Schlieren sichtbaren Dampfstrahl. (Auf die Erklärung kann hier jedoch nicht eingegangen werden.) Der Nebel bildet sich erst geraume Zeit nach der Expansion und ist sehr dünn. Es können nur sehr kleine Tropfen entstehen, die rasch wieder verdunsten, so daß der Nebel nicht lange bestehen kann. Auch ist er im ganzen Gefäß nicht homogen, sondern zeigt infolge des Verdunstens merkliche Schichtung, indem die Tropfengröße von unten nach oben hin abnimmt. Sein Brechungsexponent ist 1,354, liegt also zwischen dem von Wasser und Alkohol. Bei der Kleinheit der Tropfen zeigt Äthernebel breite, schön gefärbte zentrale Felder, welche wenig andere Farben in den Ringen erkennen lassen. Die Färbung ist aber durch die Schichtung des Nebels in gleichen Abständen von der Mitte nicht dieselbe, auch bilden die gerade entstehenden Farben sich infolge des schnellen Verdunstens rasch wieder zurück, so daß an eine Beständigkeit der Erscheinung nicht zu denken ist und genaue Beobachtungen unmöglich sind. Besonders schön war hier jedoch die tiefblaue Farbe des zentralen Feldes ausgebildet, welche ja bei Wassernebel nur schwer zu erhalten war. Es ist somit immerhin möglich, daß hier die Tropfen klein genug sind, um Färbungen zu zeigen, welche noch vor denen der ersten Periode (Tab. 1) liegen. Um axiale Farben der Lichtquelle selbst erkennen zu können, war der Ätherneben nicht dicht genug.

c) Chloroform. $CHCl_3$. $n = 1.446$.

Ein Einfluß der Durchsichtigkeit der Tropfen auf das Beugungsbild könnte erst jetzt beim Chloroform nachgewiesen

1) R. v. Helmholtz, Ann. d. Phys. u. Chemie **27**. S. 508—543. 1886.

werden, da sein Brechungsexponent 1,446 schon mehr als bei Alkohol und Äther von dem des Wasser abweicht. Aber gerade hier liegen die Bedingungen zu ungünstig, um charakteristische Beugungsbilder liefern zu können. Man erhält nämlich nur größere Tropfen, welche normale Beugungsbilder und ungefärbte zentrale Felder liefern, und der Versuch, kleinere durch Einführen von mehr Kondensationskernen zu bekommen, scheitert leider daran, daß der Nebel dann sofort inhomogen wird. Die Messungen selbst, welche Tropfenradien zwischen 4,6 μ und 9 μ ergaben, bieten somit wenig neues und brauchen hier nicht mitgeteilt zu werden. Auch bei diesen Messungen, welche sowohl im roten als auch im weißen Licht ausgeführt wurden, fand ich, wie nach den gemachten Ausführungen zu erwarten war, Übereinstimmung in den Resultaten aus verschiedenen Ringen.

d) Benzol, C_6H_6, $n=1{,}504$ und Toluol, $C_6H_5CH_3$, $n=1{,}499$.

Benzol und Toluol haben in bezug auf Brechungsexponenten und auch sonstigem Verhalten solch übereinstimmende Eigenschaften, daß es sich empfiehlt, sie zusammen zu behandeln. Bei beiden Flüssigkeiten ist die Nebelbildung eine sehr kräftige, so daß sie glänzende Beugungsringe, von denen stets drei bis vier sichtbar waren, lieferten. Da aber auch hier die Tropfengröße ziemlich groß war, so sank der Nebel rasch zu Boden und machte ein schnelles Messen erforderlich. Allerdings gab Toluol noch etwas kleinere Tropfen als Benzol, doch gelang es mir bei keinem von ihnen, gefärbte zentrale Felder oder anomale Helligkeitsverteilungen zu erhalten, obwohl dies bei Wasser schon längst hätte eintreten müssen. Das Beugungsbild blieb stets normal, wie auch aus den Tabellen hervorgeht, welche ziemlich kleine Tropfenradien erkennen lassen. Es konnten sogar noch größere Beugungsringe als die angegebenen beobachtet werden, doch waren sie dann der Ausmessung nicht mehr zugänglich.

Bis zu einem Tropfenradius von etwa 2,8 μ, bei welchem wir im Wassernebel schon eine recht intensive Färbung des zentralen Feldes beobachten würden (ungefähr Anfang der dritten Periode, Tab. 3), sind hier noch keine Abweichungen zu bemerken, so daß hiermit der Beweis einer Abhängigkeit der anomalen Erscheinungen vom Brechungsexponenten er-

bracht sein dürfte. Allerdings fehlen noch Tropfen kleiner als 2,8 μ, wo wohl auch bei Benzol und Toluol gefärbte zentrale Felder auftreten würden. Für diese noch bestehende Lücke den Einfluß der Durchsichtigkeit der Tropfen nachzuweisen, gestatten mir nun die Versuche mit Anilin, welches verbunden mit einem hohen Brechungsexponenten infolge seiner schweren Flüchtigkeit nur kleine Tröpfchen im Nebel geben kann.

Tabelle 7. Benzol.

λ	φ_1	r_1	φ_2	r_2	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
0,65 μ	2° 3′	11,08 μ	3° 51′	10,78 μ	+ 2,7%
0,65	2° 43′	8,32	4° 59′	8,32	± 0,0
0,65	3° 14′	7,03	5° 54′	7,03	± 0,0
0,65	3° 39′	6,23	6° 48′	6,10	+ 2,1
0,65	4° 33′	4,98	8° 21′	4,98	± 0,0
0,65	5° 32′	4,08	10° 8′	4,11	− 0,7
0,571	2° 16′	8,76	4° 5′	8,95	− 2,2
0,571	3° 11′	6,26	5° 54′	6,21	+ 0,8
0,571	3° 51′	5,18	7° 13′	5,07	+ 2,1

Tabelle 8. Toluol.

λ	φ_1	r_1	φ_2	r_2	$\frac{r_1 - r_2}{r_1}$
0,650 μ	2° 38′	8,61 μ	4° 53′	8,54 μ	+ 0,8%
0,650	3° 11′	7,15	5° 54′	7,06	+ 1,2
0,650	3° 39′	6,24	6° 33′	6,34	− 1,6
0,650	5° 54′	3,86	10° 33′	3,96	− 2,5
0,650	7° 26′	3,06	13° 53′	3,02	+ 1,3
0,571	3° 39′	5,48	6° 48′	5,38	+ 1,8
0,571	5° 25′	3,69	9° 54′	3,71	− 0,5
0,571	5° 54′	3,39	10° 42′	3,43	− 1,2

e) Anilin. $C_6H_5 \cdot NH_2$. $n = 1{,}586$.

Das Beugungsbild des Anilinnebels besteht aus sehr großen, intensiv gefärbten zentralen Feldern, welche manchmal eine solche Ausdehnung annehmen, daß das ganze Gesichtsfeld gleichmäßig gefärbt erscheint. Dadurch verliert die Erscheinung etwas an Intensität und Farbenmannigfaltigkeit. Sonst ist aber die Farbenfolge und Anordnung genau dieselbe wie beim Wassernebel, nur daß hier die Ringe bei gleicher Färbung ganz bedeutend größer sind. So gelang es mir nach

vielen Expansionen, das für Wassernebel so charakteristische grüne zentrale Feld herzustellen. Auch hier wird es von einem schmalen dunkelblauen Bande begrenzt und das daran sich anschließende Rot war gerade noch sichtbar. Während aber bei Wasser die Minima Radien von $8^0\,55'$ und 19^0 (Tab. 4, Nr. 4) besaßen, entsprach hier im roten Licht der erste dunkle Ring einem Beugungswinkel von $14^0\,35'$ und der zweite war überhaupt nicht mehr zu sehen. Bei gleichem Aussehen hat also das Beugungsbild eine 1,66 mal so große Ausdehnung, was ungefähr gleich dem Verhältnis der um 1 verminderten Brechungsexponenten $0{,}586 : 0{,}333 = 1{,}758$ ist. Noch größere Tropfen herzustellen, welche etwa normale Beugungsbilder lieferten, war mir nicht möglich, doch dürfte schon zur Genüge erwiesen sein, daß die anomalen Beugungserscheinungen an um so kleineren Tropfen auftreten, desto größer der Brechungsexponent wird.

§ 5. Vergleichsmessungen mit Pilzsporen.

Am Schlusse dieser Untersuchungen möchte ich noch kurz Versuche erwähnen, welche ich mit Pilzsporen und Schwefeltröpfchen anstellte, um den Einfluß der Durchsichtigkeit zu eliminieren. Aus vielen Messungen, die ich mit Lycopodiumpulver in einer Entfernung von 1—3 m von der Lichtquelle machte, erhielt ich im Durchschnitt aus dem ersten Ringe einen Radius von $15{,}16\,\mu$ aus dem zweiten $15{,}16\,\mu$, aus dem dritten $15{,}22\,\mu$, und mikroskopisch gemessen durchschnittlich $15{,}3\,\mu$, so daß, wie selbstverständlich zu erwarten war, vollständige Übereinstimmung mit der Theorie kreisförmiger Scheibchen besteht. Allerdings würde auch homogener Nebel bei dieser Tropfengröße normale Beugungsbilder liefern; doch Barkow[1]) fand bei Schimmelsporen von $1.15\,\mu$ bis $6{,}6\,\mu$ Radius, welche also gerade von der für Nebeltröpfchen in Betracht kommenden Größenordnung sind, keine merklichen Abweichungen von den optisch nach der Beugungsformel und mikroskopisch gemessenen Werten. Ich selbst stellte mir aus angefeuchtetem Brot Schimmelpilze her, deren Sporen mikroskopisch gemessen ungefähr $1{,}5\,\mu$ groß waren, und bestreute

1) E. Barkow, Marb. Dissert. S. 67. Die dort angegebenen Werte beziehen sich auf den Durchmesser der Sporen (nicht Radius).

damit eine Glasplatte. Das Beugungsbild war vollkommen normal und so groß, daß nur der erste Ring mit einem Beugungswinkel von etwa $14^0\,50'$ im roten Licht sichtbar war.

Ferner ließ ich Schwefeldampf an einer kalten Glasplatte sich kondensieren. Nach anfänglichen Mißerfolgen bekam ich schließlich einen Beschlag, deren Teilchen hinreichend homogen waren, doch war die Beugungserscheinung eine gänzlich andere. Das zentrale Feld war dunkel, und daran schloß sich ein tiefblauer und ein roter Ring an, dann erst waren schwach die Fraunhoferschen Beugungsringe zu erkennen. Sein Analogon findet diese Beugungserscheinung in den Ringen behauchter Platten, welche Exner[1]) als ein Phänomen Fraunhoferscher Ringe beschreibt, deren Aureole infolge nicht völlig unregelmäßiger Verteilung der Tröpfchen sich zum Teil in einen dunklen Raum verwandelt hat. In der Tat erkennt man im Mikroskop, daß die Teilchen ziemlich *gleichmäßig verteilt*, aber *regellos angeordnet* sind, indem die Abstände der einzelnen Tröpfchen voneinander nahezu dieselben sind.

Zusammenfassung.

Fasse ich die Hauptergebnisse der Untersuchungen zusammen, so läßt sich folgendes sagen:

Die Beugungserscheinungen, welche homogener Nebel im durchgehenden Licht zeigt, lassen sich *nur* bis zu einer Tropfengröße von 4—5 μ Radius durch die Beugungstheorie kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen erklären.

Bei *kleineren* Tropfen treten im *weißen* Lichte andere Erscheinungen auf; das zentrale Feld, welches bis jetzt weiß war, nimmt intensive Färbungen an, die in ihrer Aufeinanderfolge den Farben dünner Blättchen ähneln. Die Lichtquelle selbst ist bei dichtem Nebel meistens ungefähr *komplementär* dazu gefärbt. Eine Gesetzmäßigkeit der Farbenfolge in den Ringen ist *nicht* zu konstatieren.

Im *monochromatischen* Licht weisen die Beugungsbilder eigenartige Anordnungen der Maxima und Minima auf, welche einen deutlich periodischen Charakter besitzen. Eine Bestimmung der Tropfengröße aus den Durchmessern der Ringe war deshalb *nicht* möglich. Die Abweichungen nehmen mit

1) K. Exner, Wied. Ann. 4. S. 531. 1878.

wachsender Tropfengröße ab und das Beugungsbild nähert sich allmählich dem normalen.

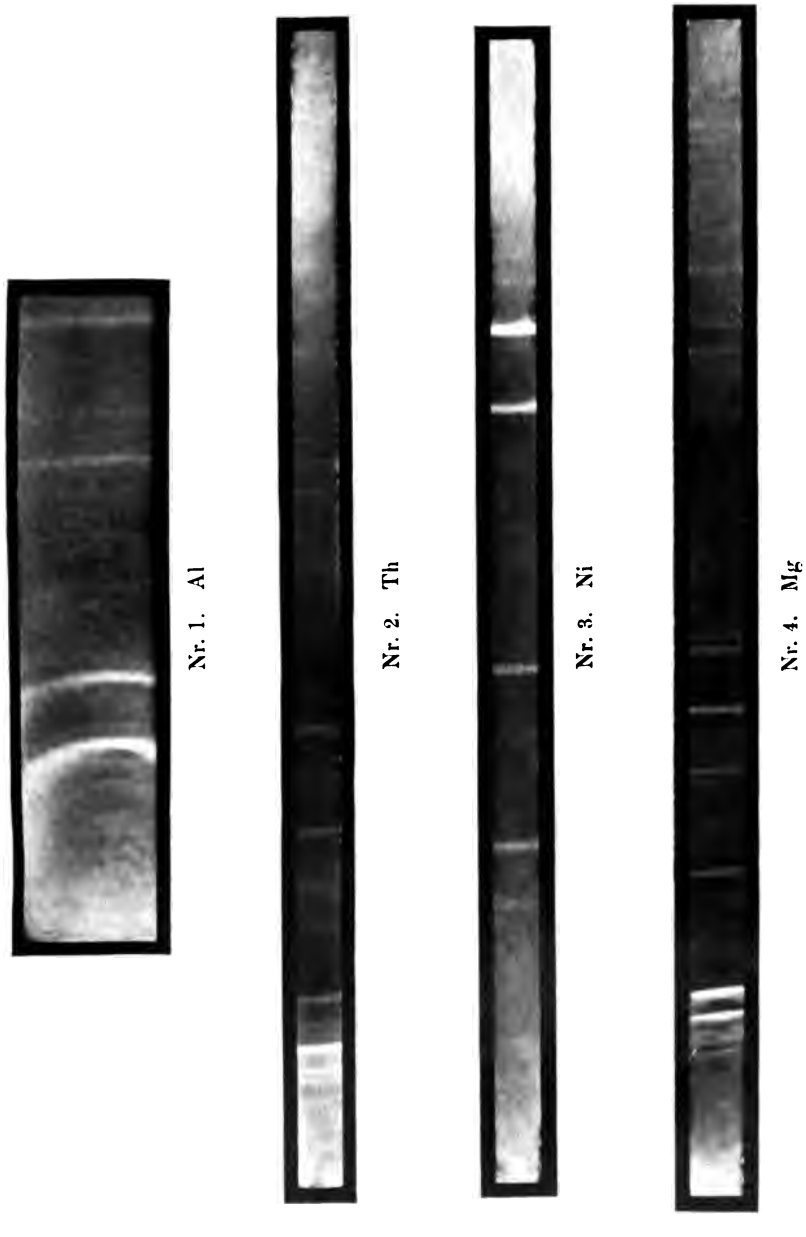
Ein Einfluß der Dicke der Nebelschicht auf diese Erscheinungen konnte nicht nachgewiesen werden. Wohl aber geht aus den Versuchen mit anderen Flüssigkeiten einwandsfrei hervor, daß die Durchsichtigkeit der Tropfen zur Entstehung der anomalen Beugungsbilder beiträgt, indem diese an um so kleineren Tropfen auftreten, desto größer der Brechungsexponent wird.

Vergleichsmessungen an Staubplatten ergaben keine Abweichungen von der Beugungstheorie kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen.

Physikal. Institut der Universität Marburg i. H., Juni 1919.

(Eingegangen 16. August 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



H. Bohlin.

1920. № 6.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Über Strukturverdrehung bei schleimig-flüssigen Kristallen;*

von O. Lehmann.

Das Wachsen der Kristalle in polyedrischen oder sonst von der Kugelform stark abweichenden Gestalten, die Abhängigkeit ihrer Elastizität, dielektrischen Polarisation, elektrischen Leitfähigkeit und anderer Eigenschaften von der Richtung, ganz besonders aber die Abbeugung durchgehender Röntgenstrahlen beweisen, daß die Kristalle aus sehr kleinen Teilchen gesetzmäßig aufgebaut sind, welche nicht nur zentrale Kräfte, ähnlich der Gravitationskraft, sondern, wie aus dem Verhalten flüssiger Kristalle folgt, auch richtende Kräfte (Kräftepaare), ähnlich elektrischen Dipolen oder Magnetnadeln aufeinander ausüben.

Die Übereinstimmung der Umwandlungstemperaturen enantiotroper Modifikationen bei Umwandlung im einen und anderen Sinn[1]), die Raumgitterstörung durch mechanische Deformation[2]) und fremde Beimischungen[3]), die Existenz flüssiger Kristalle[4]) und das Verhalten amorpher Körper[5]) beweisen ferner, daß die aus alter Zeit stammende *Identitätstheorie der Aggregatzustände* (welche noch immer in Lehrbüchern als Axiom eingeführt wird), gemäß welcher die Kristallteilchen, einfache chemische Moleküle, ebenso wie die Gasmoleküle (in Fig. 1 schematisch für zwei einwertige Atome dargestellt) sein sollen, unzutreffend ist.

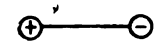


Fig. 1.

Zu gleichem Ergebnis führen die Braggschen Untersuchungen über Röntgenstrahleninterferenzen[6]), nach welchen

1) Vgl. O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. Wiesbaden, J. F. Bergmann 1918, S. 261.

2) Derselbe, ebenda, S. 264.

3) Derselbe, ebenda, S. 270.

4) Derselbe, ebenda, S. 273ff.

5) Derselbe, ebenda, S. 263 u. 507.

6) W. H. u. W. L. Bragg, Zeitschr. anorg. Chem. **90**. S. 153. 1914.

beispielsweise in Kristallen von Chlornatrium Natrium- und Chloratome regelmäßig miteinander abwechseln, daß also, wenn man sich auf eine Ebene beschränkt, die Struktur eines kleinsten Kristallpartikelchens die in Fig. 2 dargestellte sein müßte, wobei Kreise mit + Zeichen Natrium, solche mit − Zeichen Chloratome vorstellen mögen. Da Natrium und Chlor beide einwertig sind, wäre das Partikelchen nicht ein aus zwei Gasmolekülen (Fig. 1) zusammengesetztes chemisches Molekül im Sinne der gewöhnlichen, die Grundlage der Chemie bildenden Strukturtheorie. Insofern ein Chlornatriumkristall ein regulärer Würfel ist, darf überdies die Betrachtung nicht auf eine Ebene beschränkt bleiben; man müßte vielmehr dem kleinsten Kristallteilchen eine noch kompliziertere Struktur, nämlich die von Fig. 3 zuschreiben und somit beide Atomarten als dreiwertig betrachten, was mit den chemischen Er-

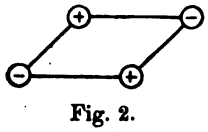


Fig. 2.

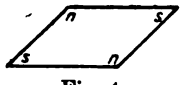


Fig. 4.

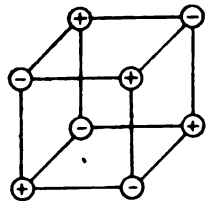


Fig. 3.

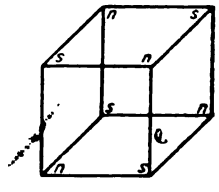


Fig. 5.

fahrungen noch weniger vereinbar ist. Die Vergrößerung des Komplexes durch Hinzufügung weiterer Atome würde sogar Erhöhung der Valenzzahl auf 4 erfordern.

Faßt man die verbundenen Atome als Ionen auf, so würde sowohl das System Fig. 2, wie das System Fig. 3 ein *astatisches elektrisches System* sein, welches keine elektrischen Fernkräfte ausübt und durch solche nicht in bestimmte Richtung gestellt wird, ähnlich wie eine gehärtete Stahlplatte (Fig. 4) oder ein Stahlwürfel (Fig. 5), deren Ecken abwechselnd entgegengesetzte Magnetpole aufweisen, *astatische Magnetsysteme* sind.

Meine eigenen Untersuchungen über die eingangs genannten Erscheinungen[1]) hatten auf ganz anderem Wege zu dem Ergebnis geführt, daß die Gasmoleküle sich zu Kom-

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallographie **1.** S. 97. 1877; Molekularphysik 1888/89; Zeitschr. phys. Chem. **71.** S. 355. 1910.

plexen, den Flüssigkeitsmolekülen und diese zu noch größeren Komplexen (andere Modifikationen) vereinigen können, obschon die Wertigkeiten der chemischen Strukturtheorie dies nicht als möglich erscheinen lassen. Doppelsalze und kristallwasserhaltige Salze waren ein anderer Fall lockerer chemischer Verbindungen, für welche die gewöhnlichen Valenzen nicht maßgebend waren, die man deshalb, im Gegensatz zu den atomistischen, als *„Molekularverbindungen"*[1]) bezeichnete. Aus diesem Grunde betrachtete ich auch die sogenannten *„drei Aggregatzustände und Modifikationen eines Körpers"* als *„molekular-isomere"* (physikalisch-isomere) *chemische Verbindungen*, da sie im Gegensatz zu den atomistisch-isomeren sehr leicht (z. B. schon durch Temperatur- und Druckänderungen) ineinander umgewandelt werden können und in manchen Fällen sich mischen (z. B. Gas- und Flüssigkeitsmoleküle bei der kritischen Temperatur) in einem stark von Temperatur und Druck abhängigen Mengenverhältnis (chemisches Gleichgewicht).

Vom Standpunkt der elektromagnetischen Theorie der Materie und auf Grund des Verhaltens der flüssigen Kristalle ergaben sich für die Konstitution der Moleküle der letzteren wieder auf ganz anderem Wege dieselben Strukturbilder.[2]) Speziell wurden hier Magnetfelder erzeugt durch kreisende Elektronen als Ursache der abwechselnd entgegengesetzten Polarität der Würfelebenen angenommen.[3])

Die Erscheinungen der Radioaktivität, der gesetzmäßigen Anordnung der Linien in Licht- u. Röntgenspektren, die Quantentheorie usw. führten in einzelnen Fällen zur Konstruktion von Atom- und Molekularmodellen (für Wasserstoff von Debye, für Sauerstoff von Sommerfeld), welche mit den Eigenschaften der betreffenden Stoffe in guter Übereinstimmung stehen und deren neueste von Born[4]) ersonnene Arten sich

1) Vgl. A. Werner, Neuere Anschauungen a. d. Geb. d. anorgan. Chemie. 3. Aufl. 1913; *„Scheinassoziationen"* von van der Waals.

2) O. Lehmann, Physik. Zeitschr. **10.** S. 553. 1909; Die neue Welt der flüssigen Kristalle. 1911. S. 344ff.; Prometheus **25.** S. 4. Fig. 3. 1913; A. Landé, Ber. d. D. Phys. Ges. **21.** S. 2, 644, 653. 1919.

3) Derselbe, Die neue Welt der flüssigen Kristalle. 1911. S. 354—356. Fig. 227 u. 231.

4) M. Born, Ber. d. D. Phys. Ges. **20.** S. 210, 230. 1918; vgl. auch A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien 1919 u. K. Fajans, Radioaktivität 1919.

wenig von den genannten unterscheiden, die von mir aus dem Verhalten der flüssigen Kristalle abgeleitet wurden, insofern sie ebenfalls räumlich astatische Systeme sind. Nahe zusammengebracht müssen astatische Magnetsysteme, wie Fig. 5, Richtkräfte aufeinander ausüben, durch welche sie, falls sie hinreichend leicht beweglich sind, gezwungen werden, sich zu *Raumgittern* zu ordnen. Könnte man annehmen, es beständen zugleich abstoßende Kräfte zwischen ihnen (etwa infolge geeigneter Verteilung der elektrischen Ladungen), welche die magnetischen Anziehungskräfte bei gewissem Abstand gerade kompensieren[1]) und wäre dieser Abstand gleich dem Durchmesser, so würden sich parallel ineinandergestellte Raumgitteranordnungen der verschiedenen Atomarten ergeben, wie sie nach der auf die Braggschen Untersuchungen gegründeten *„Atomgruppierungstheorie"*, welche die Kristalle selbst als große Moleküle betrachtet, tatsächlich vorhanden sein soll.[2])

Wie aber auf Grund dieser Annahme die Tatsachen erklärt werden sollen, welche zur Aufstellung der *„Theorie der molekularen Isomerie"* geführt haben, bleibt unklar. Voraussichtlich wird die Anwendung der Röntgenstrahlenmethode auf die genannten Fälle die letztere Theorie bestätigen, nicht aber die Atomgruppierungstheorie. Es wären insbesondere zu untersuchen: die Strukturen der fünf festen Modifikationen des Ammoniumnitrats[3]), die der Eisensalmiak-Mischkristalle[4]) und die der flüssigen Kristalle des Ammoniumoleats[5]) und anderer Stoffe.

1) Vgl. mein Buch: Die neue Welt der flüssigen Kristalle. 1911. S. 356. Fig. 231. Auch Wärme- u. Strahlungsdruck kommen in Betracht.

2) P. v. Groth, Zeitschr. f. Kristallogr. 54. S. 65. 1914; Die Naturwissenschaften 7. S. 648. 1919; W. L. Bragg, X-rays and crystal structure 1915; F. Rinne, Zeitschr. f. anorg. Chem. 96. S. 317. 1916; Sächs. Akad. d. Wiss. 71. S. 81. 1918; Zentralbl. f. Min. 1919. S. 161.

3) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallogr. 1. S. 97. 1877; Molekularphysik 1. 1888; Ann. d. Phys. 8. S. 903. 1902; Zeitschr. phys. Chem. 71. S. 355. 1910; Das Kristallisationsmikroskop. S. 20. 1610.

4) Derselbe, Zeitschr. f. Kristallogr. 1. S. 479. 1877; 8. S. 528. 1883; Zeitschr. phys. Chem. 1. S. 15. 1887; Molekularphysik 1. S. 375. 1888; Ann. d. Phys. 8. S. 905. 1902; N. Jahrb. f. Mineral. 2. S. 109. 1915.

5) Derselbe, Zeitschr. f. physik. Chem. 18. S. 91. 1895; Flüssige Kristalle 1904. S. 27; Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. 1912. Nr. 13. S. 14; 1913. Nr. 13. S. 4; Zeitschr. f. Kristallogr. 52. S. 592. 1913; Die Lehre von den flüss. Krist. 1918. S. 281.

Eine sichere Unterscheidung von Strukturen, wie sie die Theorie der molekularen Isomerie verlangt, von denjenigen der Atomgruppierungstheorie wird allerdings durch die Röntgenstrahlenmethode kaum möglich. Beschränkt man sich nämlich, der Einfachheit halber, auf zwei Dimensionen, so würde die Struktur einer größeren Masse nach der letzteren Theorie durch Fig. 6 dargestellt. Würde man nun aus dieser die außerhalb der eingezeichneten Quadrate liegenden Atome wegnehmen, so würde sich dadurch die Röntgenstrahleninterferenzfigur nicht merklich ändern, die Intensität der Lichtflecke würde nur etwas geringer werden. Nun sind aber die von den Quadraten

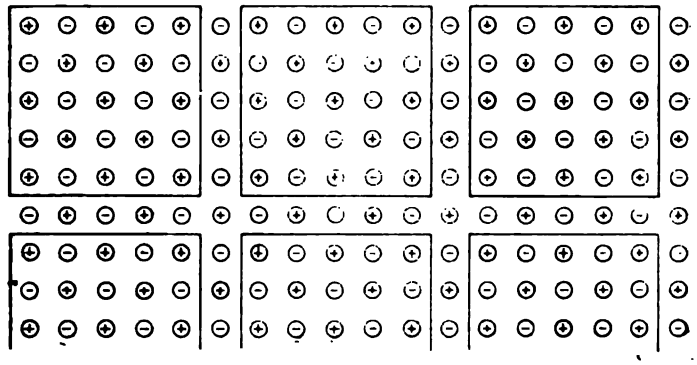


Fig. 6.

umschlossenen Atomgruppen physikalische (Kristall-) Moleküle im Sinne der Theorie der molekularen Isomerie und die Braggsche Auffassung, die Röntgenstrahlenmethode ergäbe die wahre Kristallstruktur, wäre dahin abzuändern, sie ergebe die Struktur der *Kristallmoleküle*[1]) und zwar nach v. Laues Verfahren nur dann, wenn diese sich in geringen Abständen in Raumgitteranordnung befinden, während natürlich bei größeren Abständen oder bei plastisch stark verbogenen oder verdrillten Kristallen eine Superposition der Interferenzflecke der einzelnen

1) Damit stimmen die Ergebnisse bezüglich der sogenannten „künstlichen Zwillingsbildung bei Kalkspat" (vgl. E. Schiebold, Dissert. Leipzig 1918), welche nach meinen Untersuchungen als polymorphe Umwandlung (Änderung der Moleküle) zu betrachten ist (Ann. d. Phys. **50.** S. 562. 1916). Vgl. auch W. Voigt, Ann. d. Phys. **60.** S. 638. 1919.

Kristallmoleküle nicht mehr eintreten wird. Hier kann noch die Methode Debye-Scherrer, die auch auf kristallinische Pulver anwendbar ist, Aussagen über die Struktur der einzelnen Moleküle ermöglichen, natürlich aber nicht über deren Anordnung.

Zum Studium der Anordnung ist nach wie vor die Bestimmung der Auslöschungs- bzw. Verdunklungsrichtungen zwischen gekreuzten Nicols die geeignetste Methode und gerade die *Strukturverdrehungen durch mechanische oder chemische Mittel* dürften am ehesten über die wahre Struktur der Kristalle Aufschluß geben.[1])

Kristalle, bei welchen, wie in Fig. 6 angenommen, die Abstände zwischen den einzelnen Molekülen nur sehr klein sind, dürften hohe Elastizitätsgrenze, also geringe Plastizität zeigen; für homogene schleimig-flüssige Kristalle mit Raumgitterstruktur (oder mindestens parallel gestellten Molekülen), wie sie sich durch Begrenzung mit festen kristallinischen Wänden erzwingen läßt, dürften die Abstände der Moleküle dagegen relativ groß anzunehmen sein, wie auch daraus folgt, daß Lauediagramme bisher nicht erhalten wurden.

Am einfachsten entstehen solche *„erzwungen homogene"* Schichten schleimig-kristallinischer Flüssigkeiten, wenn man diese durch Erhitzen der zwischen Objektträger und Deckglas kristallinisch erstarrten Schmelze durch Erwärmen über die Umwandlungstemperatur sich bilden läßt, wozu sich besonders Vorländers Paraazoxybenzoesäureäthylester eignet.[2])

Bei solcher enantiotroper Umwandlung entstehen die flüssig-kristallinischen Moleküle, wie sie kurz genannt werden mögen, in regelmäßiger Orientierung gegen die festen, aus welchen sie sich bilden und werden da, wo sie an das Glas angrenzen, durch dessen Adsorptionskraft in dieser Stellung festgehalten. Nach diesen so auf der Glasoberfläche gebildeten anisotropen Häutchen von molekularer Dicke und zäher Konsistenz richten sich die übrigen flüssig-kristallinischen Moleküle, so daß Pseudomorphosen der flüssig-kristallinischen Substanz nach der zuvor vorhandenen fest-kristallinischen ent-

1) Ferner die Analyse durch magnetische (oder elektrische) Kräfte, vgl. O. Lehmann, Phys. Zeitschr. 13. S. 556. 1912.

2) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 12. S. 325. 1903; Flüssige Kristalle 1904. S. 51; Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1911. S. 317.

stehen und zwischen gekreuzten Nicols dieselbe Felderteilung beobachtet wird, wie sie vor der Umwandlung vorhanden war (Fig. 7), wenn auch die Lage der Auslöschungsrichtungen im allgemeinen eine andere ist (Fig. 8) und an den Grenzen Zwischenstellungen der Moleküle auftreten können. Infolge des Dichroismus kann man bei Beleuchtung mit blauem Himmelslicht oder bei künstlichem bläulichen Licht die Grenzen der Felder auch schon bei Benutzung eines einzigen Nicols erkennen. Fig. 9 zeigt schematisch ein solches Präparat im polarisierten Licht vor, Fig. 10 nach der Umwandlung in die

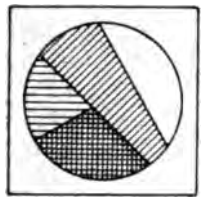


Fig. 7.

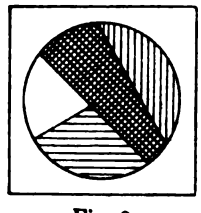


Fig. 8.

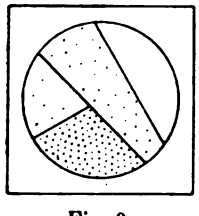


Fig. 9.

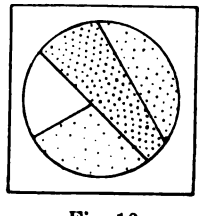


Fig. 10.

schleimig-kristallinische Modifikation, wobei mehr oder weniger intensive gelbe Farbe durch mehr oder weniger dichte Punktierung angedeutet ist.

Zwischen gekreuzten Nicols beobachtet man immer einzelne Felder, welche nicht wie die übrigen bei einer ganzen Drehung des Präparats viermal hell und dunkel werden, sondern gleichmäßig dunkel bleiben wie einachsige zur optischen Achse senkrechte feste Kristallplatten. Hieraus folgt mit Sicherheit, da die Moleküle zweifellos parallel gerichtet sind, daß die schleimig-flüssigen Kristalle der benutzten Substanz optisch einachsig sind. Ob sie dem tetragonalen oder hexagonalen System zugehören, würde sich nur entscheiden lassen, wenn es (wie bei dem schleimig-flüssig-kristallinischen Ammonium-

oleate) gelänge, wenigstens sehr kleine freischwebende Kriställchen von polyedrischer Form zu bekommen, an welchen sich das Vorhandensein von zwei oder drei Nebenachsen feststellen ließe.

Bei erzwungen-homogenen tropfbarflüssigen Kristallen kann man durch gegenseitige Verdrehung der begrenzenden Glasplatten gegeneinander *Schraubenstruktur* hervorbringen, welche sich durch Auftreten von elliptisch- oder zirkular-polarisiertem Licht, sowie durch Drehung der Polarisationsebene äußert.[1]) Die Struktur und das Verhalten solcher verdrehter Schichten kann man sich leicht vorstellen, wenn man die übereinander befindlichen Molekülschichten durch Glasplatten mit Magnetnadeln, welche die Stelle der Moleküle vertreten, ersetzt denkt. Die in Fig. 11 vertikalen Magnetnadeln mögen auf die obere Glasplatte *a b c d* aufgeklebt sein, die horizontalen auf die untere Platte *c f g h*. Zwischen beiden Glasplatten mögen sich drei andere mit beweglichen Magnetnadeln befinden. Die letzteren werden dann Zwischenstellungen einnehmen wie die Figur andeutet, vorausgesetzt, daß sie hinreichend weit voneinander entfernt sind, um nicht durch die daneben befindlichen erheblich beeinflußt zu werden. An Stelle der Magnetnadeln würde man besser, um die störende Wirkung des Erdmagnetismus auszuschalten, astatische Systeme, wie Fig. 4 oder 5 benutzen.

Wie bemerkt, erschien nun von Interesse zu prüfen, ob gleiches auch bei den erzwungen homogenen schleimig-flüssig-kristallinischen Schichten möglich ist. Ich bediente mich dazu einer Vorrichtung ähnlich der früher benutzten[2]), bei welcher das kleine quadratische Deckelglas *D* (Fig. 12) von etwa 4 mm Seitenlänge zwischen zwei steifen Drähten *a*, *b*, (gehalten durch den auf dem drehbaren Objekttisch *B* befestigten Klotz *c*) eingeklemmt war, somit stehen blieb, wenn das Drehtischchen *A*, auf welchem der Objektträger *C* (aus Tempaxglas) mit vier Schrauben unter Luftzwischenraum befestigt war, gedreht wurde. Während nun bei den tropfbar-flüssig-kristallinischen Schichten die Homogenität durch solche Verdrehung nicht gestört wurde, sondern nur elliptische oder zirkulare Polarisation auftrat, zeigte sich hier zwischen gekreuzten Nicols eine Mannig-

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1918. S. 359, 364; Ann. d. Phys. 51. S. 353. 1916; 58. S. 631. 1918.

2) Derselbe, Ann. d. Phys. 51. S. 364. Fig. 14. 1916.

faltigkeit gewundener schwarzer Streifen (vergleichbar denjenigen bei Schichten tropfbar-flüssig-kristallinischer Schichten mit fremden Beimischungen) und von Polarisationsfarben, die als Subtraktionsfarben infolge Übereinanderlagerung verschieden orientierter Schichten gedeutet werden konnten.[1]) Drehung der Polarisationsebene oder elliptische Polarisation,

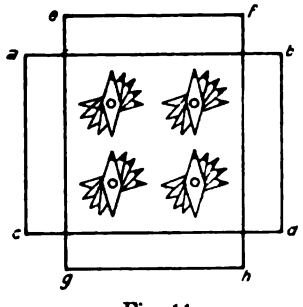


Fig. 11.

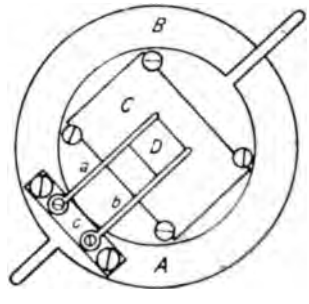


Fig. 12.

wie sie bei schraubenförmiger Strukturverdrehung hätten auftreten müssen, wurden dagegen nicht beobachtet. Ursache ist jedenfalls, daß bei schleimig-kristallinischen Flüssigkeiten die Beweglichkeit der Moleküle eine wesentlich geringere ist als bei tropfbar-kristallinischen, auch mögen die „Häutchen" nicht gleich fest haften wie bei diesen.

Ebenso wurde keine Schraubenstruktur erhalten, wenn durch Verschiebung quer zur Grenze zweier Felder (Fig. 13)

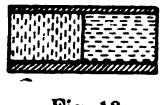


Fig. 13.

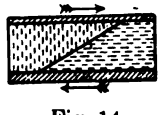


Fig. 14.

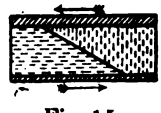


Fig. 15.

zwei verschieden orientierte anisotrope Häutchen übereinander gebracht wurden. Es schien sich hier einfach gemäß Figg. 14 und 15 die eine Hälfte über die andere zu verschieben, indem sich die Grenzfläche mehr und mehr schief stellte. Wegen Anisotropie der inneren Reibung verhält sich dabei wahrscheinlich die eine Schicht wie ein zäheres Medium gegenüber der

1) Vgl. auch die ähnlichen Streifen bei 10-Bromphenanthren-3- oder -6-sulfosäurehydrat, Ann. d. Phys. **55**. S. 51. 1918.

anderen, wie ich daraus schließe, daß die Richtung der Verschiebung nicht gleichgültig war. Während bei Zerrung etwa nach Fig. 14 zahlreiche, eine starke Trübung bedingende konische Störungen[1]) auftraten, blieben solche bei der entgegengesetzten Zerrung Fig. 15 aus oder verschwanden, falls sie infolge einer Verschiebung erster Art bereits vorhanden waren.

Zum Teil mögen die beobachteten Erscheinungen auch auf Anschmiegung der Moleküle an das Glas beruhen, namentlich bei stärkerem Anpressen des Deckglases gegen den Objektträger, wobei die Orientierung der Moleküle der „Häutchen" nicht bestehen bleibt, sondern diese sich ebenso wie die übrigen sich so einstellen, daß die optische Achse senkrecht zum Glase wird, wie wenn sie Blättchen senkrecht zur optischen Achse wären, die sich mit ihrer Fläche dem Glase anschmiegen.[2]) Auch hierdurch muß sich die Ordnung der Polarisationsfarbe erniedrigen, wenn die Anschmiegung der einen Glasfläche eintritt. Erfolgt sie an beiden, so verschwinden die Farben natürlich ganz.

Von besonderem Interesse ist der *Einfluß der Deformation auf die konischen Störungen*. Um ihn zu beobachten, stellt man sich konische Störungen mit horizontaler Achse her, wie sie sich ganz von selbst ergeben, wenn die aus reiner isotroper Schmelze gebildeten langen zylindrisch-stäbchenförmigen halbisotropen[3]) flüssigen Kristalle zusammenfließen. Treffen sie unter rechtem Winkel zusammen, wie Fig. 16a andeutet, in welcher die Richtung der Molekularachsen (optischen Achsen) durch Strichelchen gekennzeichnet ist, so wird (weil die Moleküle ihre Lage tunlichst beizubehalten suchen), ihre Stellung eine vermittelnde wie bei Fig. 16b; es bildet sich eine *einfache konische Störung*. Stellt man sich die Moleküle als Blättchen senkrecht zur Richtung der optischen Achsen vor, was mit den Erscheinungen beim Zusammenfließen und bei der Anschmiegung der Kristalle, insofern diese durch Hin- und Herschieben des Deckglases befördert wird, am besten vereinbar ist, so wäre deren Orientierung durch die Figg. 17a und 17b darzustellen. Allerdings ist nur in der gezeichneten Durchschnittsebene die Lage der Blättchen im Gebiete der

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1918. S. 304ff.

2) Derselbe, ebenda, S. 299ff.; Ann. d. Phys. 55. S. 94. Fig. 64. 1918.

3) Derselbe, ebenda, S. 283, § 7.

konischen Störung eine vermittelnde, in der dazu senkrechten Durchschnittsebene wäre sie geradezu gekreuzt. Hieran würde sich auch nichts ändern, wenn man sich die Moleküle als Stäbchen entsprechend den Strichelchen von Fig. 16a und 16b vorstellt, wie ich es früher getan hatte.[1]) Aus diesem Grunde wohl setzt sich die konische Störung über die Grenzfläche hinaus fort und wird zu einer *doppelt konischen Störung*, wodurch allenthalben der Übergang aus einer Orientierung der Moleküle in die andere ein stetiger wird.[2]) Die Entstehung doppeltkonischer Störungen beim Zusammentreffen der abgerundeten Enden von Stäbchen erklärt sich vielleicht einfacher als ich früher (a. a. O. S. 305) angenommen hatte, nämlich dadurch, daß vom Treffpunkt aus beim Zusammenfließen die Masse radial nach dem Umfang strömt. Jedenfalls ist eine so durch Abkühlung stark erhitzter Schmelze zwischen Objektträger und Deckglas entstandene flüssig-kristallinische Schicht

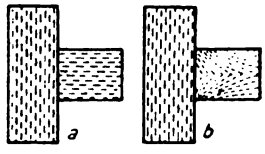


Fig. 16.

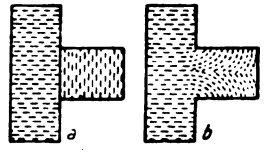


Fig. 17.

nicht wie die eingangs betrachtete aus erzwungen homogenen Feldern (Figg. 7—10) zusammengesetzt, sondern eine einheitliche Masse, deren Struktur aber infolge der Anwesenheit zahlreicher doppeltkonischer Störungen (deren Achse häufig gekrümmt ist) nicht als homogen bezeichnet werden kann. Achsen und Basislinien der doppeltkonischen Störungen sind Unstetigkeitslinien der Struktur, die an Stelle der Unstetigkeitsflächen bei den erstgenannten oder bei festen kristallinischen Stoffen treten. Da die zusammenfließenden Stäbchen naturgemäß der Glasfläche parallel, d. h. horizontal liegen, gilt dies auch von den Achsen der doppeltkonischen Störungen, sowie von den Molekülreihen einer durch Zusammenfließen von Stäbchen gebildeten Schicht. Zur Erkennung ihres Verlaufs eignen sich besonders zwischen gekreuzten Nicols bei

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1918. S. 287.

2) Derselbe, ebenda, S. 331. Figg. 134—137 u. 332.

verschiedenen Orientierungen des Präparats aufgenommene Photographien[1]), aus welchen man erkennt, daß die Molekülreihen, welche zugleich den Verlauf der optischen Achsen angeben, überall geradlinig sind. Im natürlichen Licht erscheinen die doppeltkonischen Störungen dem unbewaffneten Auge als Trübung, unter dem Mikroskop als blaßgraue Rhomben mit schwarzen Diagonalen, von welchen die längere die Achse der konischen Störungen ist, die kürzere deren Basis (als Projektion in Form einer geraden Linie gesehen). Im polarisierten Licht erscheinen je nach dem Azimut der Polarisationsebene die Rhomben sehr dunkel, umfaßt von hellen Linien oder gar nicht. Zur Beobachtung des Verhaltens einer solchen Schicht bei Verdrehung mittels des Apparates Fig. 3 eignen sich besonders Stellen letzterer Art, an welchen im polarisierten Licht nur die beiden Diagonalen erscheinen. Findet die Verschiebung der beiden Glasplatten in der Richtung der längeren Diagonale statt, so muß sich naturgemäß der Doppelkegel aufrichten,

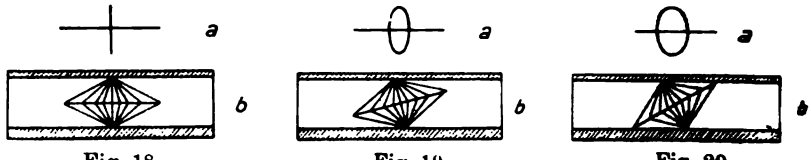


Fig. 18. Fig. 19. Fig. 20.

wie die Figg. 18a, 19a, 20a von oben gesehen (im Grundriß) und Fig. 18b, 19b und 20b im Aufriß darstellen. Man kann dies mit Leichtigkeit verfolgen, sowie auch die Senkung in die frühere Lage bei entgegengesetzter Verschiebungsrichtung und die Aufrichtung des anderen Endes bei Fortsetzung der letzteren.

Über die Stellung Fig. 20 läßt sich die Achse nicht aufrichten. Bei fortgesetzter Verschiebung spalten sich ihre Enden (Fig. 21) und schließlich setzt sich die Spaltung der ganzen Länge nach fort; auch die Ellipse zerteilt sich und die beiden so entstandenen Bogen vereinigen sich mit den Spaltungsstücken der Achse zu zwei geschlossenen Halbringen (Fig. 22), zwischen welchen dann neue kleine konische Störungen auf-

1) O. Lehmann, Flüssige Kristalle. 1904. Taf. 5. Fig. 3; Die Lehre von den flüssigen Kristallen. S. 311. Fig. 65.

treten (Fig. 23). Öfter sieht man gleichzeitig zu beiden Seiten senkrecht zur Richtung der Kegelachse kleinere parallele doppeltkonische Störungen aus der großen gewissermaßen herausspringen (Fig. 24). auch können ganze Serien solcher in Bogenform aus der ursprünglichen Kegelbasis nach beiden Seiten sich ablösen, während sich die Kegelachse spaltet (Fig. 25); zuweilen gehen in dieser Art ganze Schwärme von Ketten kleiner konischer Störungen von der großen aus. Die Lichtbrechung spielt bei diesen Vorgängen eine große Rolle und täuscht Erscheinungen vor, die in Wirklichkeit ganz anders verlaufen, als man sie zu sehen glaubt. Es ist deshalb nicht leicht zu sagen, welches hierbei die wirklichen Strukturänderungen sind.

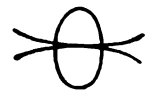


Fig. 21.

Fig. 22.

Fig. 23.

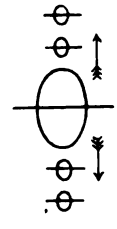


Fig. 24.

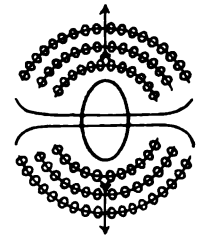


Fig. 25.

Steht die doppeltkonische Störung vor oder nach der Teilung symmetrisch zu den Diagonalen des Nicols, welcher unten (als Polarisator) eingeschaltet sein möge, so sieht man innerhalb der beiden Ellipsenbögen blaßgelbe blaßgrau umrandete rundliche Flecke (Fig. 26a). Dreht man das Präparat um 45° nach der einen oder anderen Seite, so tritt nur ein intensiv gelber Fleck mit schwarzer Umrandung im einen (Fig. 26b) bzw. anderen Ellipsenbogen (Fig. 26c) auf. Verwendet man aber das Nicolsche Prisma oben als Analysator, so erscheinen bei der symmetrischen Stellung Fig. 26a beide Flecke intensiv gelb mit dunkler Umrandung oder sie fehlen ganz, das Feld ist weiß (nach Drehung um 90°). In den 45°-Stellungen sind die Flecke dagegen nur schwach zu sehen, ähnlich wie zuvor bei Fig. 26a. Demnach ist somit hier nicht gleichgültig, ob das Nicolsche Prisma unten oder oben eingeschaltet wird, die doppeltkonische Störung verhält sich in der verdrehten Lage so, wie wenn sie Schraubenstruktur hätte.

Fig. 26.

Ob solche tatsächlich durch mechanische Verdrehung hervorgerufen wurde oder ob es sich um eine Wirkung der natürlichen Struktur der doppeltkonischen Störung handelt, ließe sich durch Beobachtung *schräger doppeltkonischer Störungen* in nicht deformierten Schichten feststellen. Im Prinzip ist dies möglich, da die Achse der konischen Störungen immer der optischen Achse der flüssigen Kristalle oder flüssig-kristallinischen Schichten, in welchen sie entstehen, parallel ist.

Beispielsweise bilden sich in einer halbisotropen auf gesättigter Lösung schwimmenden, an die Grenze gegen Luft (wohl infolge der Wirkung der „Richtkraft-Oberflächenspannung“[1]) angeschmiegten Schicht nahe gleichgroße konische Störungen aus, deren Achse ebenso wie die optische Achse senkrecht zur Oberfläche ist.[2]) Ursache ihrer Bildung dürften die infolge Verminderung der gewöhnlichen Oberflächenspannung durch die Erwärmung hervorgerufenen Kontaktbewegungen (Wirbel infolge kapillarer Ausbreitung) sein, durch welche von ungefähr gleichweit voneinander abstehenden Punkten aus radiale Strömungen in der Flüssigkeit entstehen, die ganz wie die oben erwähnten beim Zusammenfließen der stäbchenförmigen Kristalle sich bildenden radialen Strömungen die konische Anordnung der Molekülachsen zur Folge haben.

Anschmiegung läßt sich selbst noch an der Grenze flüssiger Kristalle gegen eine andere Flüssigkeit (statt gegen Luft) beobachten[3]), dagegen nicht an der Grenze gegen die isotrope Schmelze oder gegen die eigene Lösung, da hier offenbar die Zentralkraft-Oberflächenspannung zu schwach ist und nur die Bildung ellipsoidischer (oder stäbchenförmiger) Gestalt der flüssigen Kristalle hervorzubringen vermag oder umgekehrt, falls Tröpfchen der isotropen Flüssigkeit in den Kristall eingeschlossen sind, ellipsoidische Form der letzteren, derart, daß die Längsachse des Ellipsoids der optischen Achse des Kristalls parallel geht. In letzterem Fall sieht man häufig in dieser Richtung an den stark gewölbten Stellen der ellipsoidischen Tröpfchen konische Störungen auftreten, deren Achse eben-

1) O. Lehmann, Verh. d. Deutschen phys. Ges. **16**, S. 443. 1914.

2) Derselbe, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1918. S. 212. Fig. 68 u. 69.

3) Derselbe, ebenda, S. 302. Fig. 47.

falls dieselbe Richtung hat.[1]) Ursache ist wohl wieder eine dort eintretende radiale Strömung. Ferner bilden sich annähernd gleichgroße konische Störungen mit vertikaler, der optischen Achse parallelen Achse in halbisotropen an Glas angeschmiegten Schichten, falls bis zur Bildung isotroper Schmelze an der Unterseite, also bis zur Loslösung der flüssig-kristallinischen Schicht vom Glase erhitzt wird.[2]) Kontaktbewegungen scheinen auch hier die Ursache zu sein in Verbindung mit dem Umstand, daß sich infolge der Loslösung vom Glase die Richtkraft-oberflächenspannung frei betätigen kann. Die Bildung gleichgroßer „Perlen" (d. h. konischer Störungen) am freien Rande angeschmiegter Schichten[3]) steht augenscheinlich damit im Zusammenhang.

Erzeugt man in gleicher Weise in erzwungen homogenen Schichten durch Erwärmung konische Störungen, so steht deren Achse natürlich nicht senkrecht zum Glase, sondern parallel zur Kristallachse, also in jedem Feld anders.[4]) Statt kreisförmig erscheint dementsprechend im allgemeinen die Kegelbasis elliptisch oder parabolisch, nur in denjenigen Feldern, die beim Drehen des Präparates immer dunkel bleiben, bei denen also die Achse senkrecht zum Glase ist, ist sie ein Kreis wie bei angeschmiegten Schichten.

Ich habe nun, um die oben aufgeworfene Frage zu entscheiden, das Verhalten solcher Störungen mit elliptischer Basis im polarisierten Licht untersucht, konnte aber nur einfache (nicht doppelt-)konische Störungen erhalten, welche immer das Aussehen von Fig. 27a und b hatten, gleichgültig, ob das Nicolsche Prisma unter oder über dem Präparat eingeschaltet wurde. Gründe dafür, daß bei Hinzufügung des zweiten Teils einer doppeltkonischen Störung eine Änderung eintreten müßte, lassen sich nicht erkennen, so daß wohl zu schließen ist, daß die tatsächlich im fraglichen Fall beobachtete *Schraubenstruktur eine Folge der Deformation ist.*

Fig. 27.

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. S. 344. Fig. 164 u. 165.

2) Derselbe, ebenda, S. 312. Fig. 70 u. 71.

3) Derselbe, ebenda, S. 322 ff.

4) Derselbe, ebenda, S. 318. Fig. 83.

Da bei tropfbar-flüssigen Kristallen ganz ähnliche Verdrehungen, wie sie auf mechanischem Wege zu erhalten sind, auch durch fremde Beimischungen erhalten werden können[1]), versuchte ich, ob nicht durch Mischung zweier verschiedenartiger schleimig-kristallinischer Flüssigkeiten Schraubenstrukturen zu erhalten wären. Bei Mischungen der schleimig-flüssigkristallinischen Hydrate von Ammoniumoleat, Dimethylaminoleat, Trimethylaminoleat, Kaliumoleat und Lezithin, die sich anscheinend in allen Verhältnissen mischen, konnte ich keine Drehung der Polarisationsebene oder Zirkularpolarisation (wie sie bei Verdrehung doppeltbrechender Lamellen übereinander eintreten müßte, beobachten. Dies ist auch natürlich, da sich die genannten Stoffe so verhalten, wie wenn sie aus blättchenförmigen einachsigen Molekülen beständen, deren optische Achse senkrecht zur Fläche sind und deren Orientierung in ihrer Ebene sich beständig ändert (halbisotrope Struktur).[2])

Einen weiteren Versuch machte ich mit Paraazoxybenzoesäureäthylester, welcher sich in allen Verhältnissen mit Anisalaminozimtsäureäthylester mischt, obschon im festen Zustand keine Isomorphie vorhanden ist, wie man leicht daran erkennen kann, daß beim Erstarren der in Berührung gebrachten flüssigkristallinischen Schichten die sich bildenden festen Kristalle des ersteren Esters starke Krümmungen und schließlich sphärolithische Verzweigungen erleiden, sobald sie in die Mischzone beider Ester hineinwachsen. Die flüssigen Mischkristalle sind von den Kristallen der reinen Substanzen nach Form, mechanischen und optischen Eigenschaften kaum zu unterscheiden und da diese einachsig sind, war auch hier Strukturverdrehung nicht zu beobachten. Gleiches gilt für die schleimig-flüssigkristallinischen Mischungen von Paraazoxybenzoesäureäthylester und Paraazoxyzimtsäureäthylester.

Da, wie oben bemerkt (S. 507), anzunehmen ist, daß die flüssig-kristallinische Modifikation des Paraazoxybenzoesäureesters (d. h. das Kristallmolekül derselben) einem einachsigen System angehört und gleiches schon mit Rücksicht auf die chemische Verwandtschaft auch für die beiden anderen Stoffe anzunehmen sein wird (bei welchen direkte Prüfung wegen der Unmöglichkeit erzwungen homogene Schichten herzustellen,

1) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 58. S. 631. 1919.

2) Derselbe, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. 1918. S. 238.

nicht ausführbar ist), da man also annehmen muß, daß die Moleküle der gemischten Stoffe sämtlich zur optischen Achse senkrechte Blättchen sind, so ließe sich in der Tat auch hier nicht einsehen, weshalb Drehung der Polarisationsebene auftreten sollte, selbst wenn die Blättchen gegeneinander gedreht würden, denn bei den Glimmerkombinationen von Reusch, durch welche solche Drehung hervorgerufen wird, sind nicht einachsig sich verhaltende, sondern doppeltbrechende Blättchen schraubenförmig übereinandergeschichtet.

Besserer Erfolg war deshalb zu erwarten bei *Cholesterylverbindungen*, deren Schillerfarben schon früher zur Annahme von Schraubenstrukturen, hervorgebracht durch Mischung zweier flüssig-kristallinischen Modifikationen geführt hatten[1]), wodurch die Zweiachsigkeit oder mindestens doppelbrechende Natur der Molekülblättchen nach obigen Überlegungen außer Zweifel wäre. Da von manchen die Richtigkeit der von mir gegebenen Erklärung der Schillerfarben (durch Mischung zweier Modifikationen) bestritten wird[2]), wäre also zu prüfen, ob durch Mischung von zwei *verschiedenartigen* Cholesterylverbindungen Schraubenstruktur erhalten werden kann. Dies trifft in der Tat zu und zwar erklären sich dadurch die bisher rätselhaften von mir früher als „Schwebungen der Homöotropie" bezeichneten eigentümlichen optischen Erscheinungen bei Mischungen von Cholesterylchlorid und Cholesterylcinnamylat[3]), die ich damals durch beschränkte Mischbarkeit (Heterotropie) erklären zu können glaubte. An Stelle des Cholesterylcinnamylats verwendet man besser Cholesterylpropionat oder Cholesterylcaprinat.[4]) Man bringt kleine Mengen der beiden Stoffe nebeneinander auf einen Objektträger, bedeckt mit einem etwa 25 qmm großen Deckglas, schmilzt, bewirkt durch Hin- und Herschieben des Deckglases gute Mischung der beiden Stoffe und läßt dann bis zum Entstehen der flüssig-kristallinischen Modifikationen abkühlen, wobei man durch wiederholtes An-

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüss. Kristallen. 1918. S. 350.

2) W. Voigt, Physik. Zeitschr. 17. S. 159. 1916.

3) O. Lehmann, Physik. Zeitschr. 7. S. 578. 1906; 2. S. 583. 1910; Zeitschr. phys. Chem. 73. S. 598. 1910; Die neue Welt der flüssigen Kristalle. 1911. S. 235; Die Lehre von den flüss. Kristallen. 1918. S. 349.

4) Der früher empfohlene Metatolylcholesterylester ist dagegen nicht geeignet.

drücken und Verschieben des Deckglases mit der Präpariernadel die Anschmiegung der Schichten an das Glas begünstigt.

Fig. 28 stellt schematisch ein solches Präparat dar, bei welchem links Cholesterylchlorid, rechts Cholesterylpropionat (oder -caprinat) vorhanden ist. In den Feldern *g h i k* und *n o p q* (infolge von Anschmiegung schwarz) befinden sich die in höherer Temperatur stabilen Modifikationen I, in den Feldern *a b e f* und *l m c d* die bei niederer Temperatur stabilen Modifikationen II. In den Mischgebieten der beiden Modifikationen zeigen sich die Schillerfarbenspektren und zwar beginnend mit Violett bei *g h* bzw. *n o* und endigend mit Rot bei *e f*

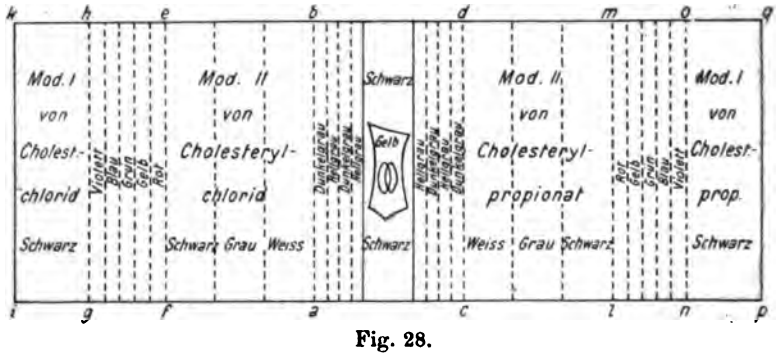


Fig. 28.

bzw. *l m*. Alle diese Felder sind von feinen „öligen Streifen" durchzogen, welche gegen *a b* bzw. *c d* hin besonders dick und einfach werden. Sie setzen sich wohl auch als graue kammartige Vorragungen über *a b* bzw. *d c* hinaus in das *Mischgebiet der II. Modifikationen beider Stoffe a b c d* hinein fort, welches, da sich die Mischung besonders leicht anschmiegt, in der Regel gleichmäßig schwarz (ohne ölige Streifen) erscheint, aber beim Andrücken des Deckglases mittels einer Prägniernadel plötzlich aufblitzt, indem sich dann die Molekülachsen vorübergehend schief stellen. Die angrenzenden Felder *e f a b* und *l m c d* sind indes nicht nur wegen des feinen Gewirrs von öligen Streifen nicht völlig dunkel, sondern auch deshalb, weil in der Nähe der Grenzen *a b* bzw. *c d* etwas von der anderen Substanz als Verunreinigung beigemischt ist, wodurch Drehung der Polarisationsebene hervorgerufen wird. Fig. 29 deutet die Zunahme der Helligkeit gegen das schwarze

Mischgebiet an unter der Annahme, daß es sich um eine Kombination von Cholesterylchlorid- und -cinnamylat handle. Ganz ebenso hat man sich bei Fig. 28 die Helligkeitsverteilung vorzustellen. Von *e f* gegen *a b* bzw. von *l m* gegen *c d* hin nimmt die infolge der Anschmiegung vorhandene Dunkelheit der Felder beständig ab und die an *a b* bzw. *c d* angrenzenden Zonen erscheinen geradezu weiß oder hellgelb. Durch Drehen des Präparates ändert sich die Helligkeit nicht, es handelt sich also um *Drehung der Polarisationsebene, die um so größer wird, je mehr der einen Substanz von der anderen beigemischt ist*, also um *Schraubenstruktur, herbeigeführt durch fremde Beimischung*, nach welcher eben gesucht wurde.

Um Dunkelheit (dunkelblau oder dunkelbraun) zu erhalten, muß man auf der Seite des Chlorids Fig. 28 an der Stelle stärkster

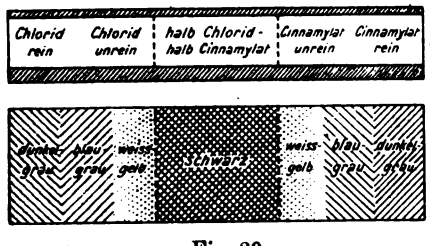


Fig. 29.

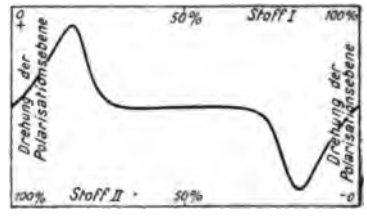


Fig. 30.

Drehung (bei *a b*) den Polarisator um etwa 25° entgegengesetzt dem Uhrzeiger drehen, auf Seite des Propionats (bei *c d*) etwa ebensoviel im Sinne des Uhrzeigers. *Die Drehungen, welche durch allmähliche Zumischung von Chlorid zu Propionat hervorgebracht worden sind, also entgegengesetzt gleich denen, welche durch Zumischung von Propional zu Chlorid entstehen*, eine Regel, die an das Gesetz von Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung erinnert und jedenfalls dazu beitragen kann, die Natur der Schraubenstruktur weiter aufzuklären. Sie läßt es auch als selbstverständlich erscheinen, daß in dem dunkeln Mischgebiet, in welchem die Stoffe in *annähernd gleichen Mengen gemischt sind, keine Drehung der Polarisationsebene auftritt*, womit wohl auch in Zusammenhang steht, daß hier besonders leicht Anschmiegung erfolgt. Fig. 30 sucht den Zusammenhang der Drehung mit dem Mischungsverhältnis (fast senkrechten Abfall gegen die Mitte) zu veranschaulichen.

Die Vorsprünge an Schwarz (Fig. 29), von welchen auf S. 518 die Rede war, bilden sich gewöhnlich erst nach einiger Zeit. In der Regel schiebt sich beim Abkühlen eine gleichmäßig hellgraue Schicht über *a b* in das schwarze Gebiet vor mit einem oder mehreren (bis zu vier dunklen zu *a b* parallelen Streifen, Fig. 31 *a*). Beim Erwärmen zieht sie sich wieder zurück, wobei die Streifen deutlicher hervortreten, dagegen schiebt sich nun eine ganz ähnliche gestreifte dunkle Schicht von *c d* aus vor (Fig. 31 b). Die Streifen verschwinden bei bestimmter Stellung (gewöhnlich, aber keineswegs immer, wenn die Längsrichtung einer Nicoldiagonale parallel ist) fast ganz, insofern dann die zwischenliegenden hellen Streifen gleich dunkel werden; sie treten umgekehrt um so stärker hervor, je mehr man sich der

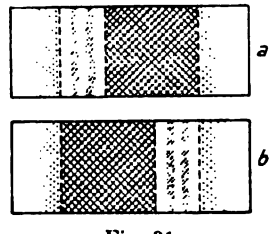


Fig. 31.

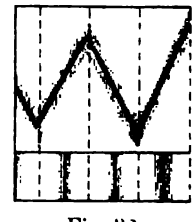


Fig. 32.

um 45° gedrehten Stellung nähert, da dann die hellen Streifen des Maximum an Helligkeit erreichen, während die dunkeln immer gleich dunkel bleiben.

Schiebt man einen Gips- oder Quarzkeil, welcher mit einer entgegengesetzt orientiert planparallelen Platte verbunden ist, so daß der dunkle Streifen, welcher der Dicke Null entspricht, sich nicht an der Schneide des Keils, sondern in einiger Entfernung davon befindet, so über die Streifen des Präparats, daß sein dunkler Streifen quer zu ersteren steht, so nimmt der letztere Streifen Zickzackform an, wie Fig. 32 zeigt, und gleiches gilt für die farbigen Streifen an anderen Stellen des Keils. Es folgt somit, daß *die hellen Streifen abwechselnd entgegengesetzte Doppelbrechung zeigen* und zwar bis zur Mitte (in Fig. 32 durch die punktierten Linien angedeutet) zunehmend bis zu einem Maximum. Die frühere Annahme, daß die Zusammensetzung der Schicht eine entsprechend wechselnde sei (Schwebungen der Homöotropie), ist unnötig, denn ein derartiges Streifensystem erhält man auch durch Kombination

eines Keils aus einer die Polarisationsebene drehenden Substanz mit einer planparallelen doppelbrechenden Platte, wie Fig. 33 andeutet, in welcher die Schwingungsrichtungen der an verschiedenen Stellen aus dem Keil austretenden Strahlen durch große Pfeile dargestellt sind und die der durch die doppelbrechende Platte gehenden (durch die Schwingungsellipse be-

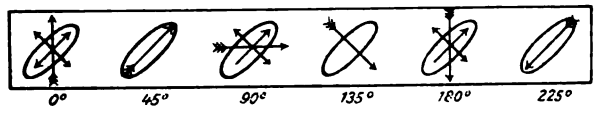


Fig. 33.

stimmten) Komponenten durch kleine Pfeile. Bei 90° und 180° erhält man (entgegengesetzt-) elliptisch- oder zirkular-polarisiertes Licht, bei 45, 135 und 225° dagegen geradlinig polarisiertes. Bei Drehung des Systems um 45° vertauschen diese Stellen ihre Rollen, so wie man auch an dem wirklichen Präparat die Streifen wandern sieht.

Als Ursache der Entstehung einer Schicht mit variabler Drehung der Polarisationsebene ähnlich der des Keils ist wohl das mit sinkender bzw. steigender Temperatur veränderliche Mischungsverhältnis der Moleküle zu betrachten, insofern bei Annäherung an die Erstarrungstemperatur auch Moleküle der festen Modifikationen sich bilden, vielleicht dadurch bedingte Änderung der Anschmiegung.

Ursache der Bildung der doppelbrechenden Schicht, welche übrigens mit der drehenden identisch sein kann, dürfte Verminderung der Anschmiegung oder Zerrung infolge der durch die Temperaturänderungen bedingten Strömungen sein. Letztere könnten auch das entgegengesetzte Verhalten auf beiden Seiten (Fig. 30a und b) erklären, welches übrigens auch das umgekehrte sein oder ganz fehlen kann. So ist bei Zeichnung von Fig. 28 angenommen, daß die hellen und dunklen Streifen auf beiden Seiten ganz symmetrisch auftreten. Nach energischem Streichen des Deckglases mit der präparierten Nadel kann das schwache Mischgebiet für einige Sekunden hell bleiben. Dabei verschwinden auch die erwähnten kammförmigen Fortsätze bei *a b* bzw. *c d*, stellen sich aber alsbald wieder her. Sie sind ihrer Natur nach identisch mit den gestreiften grauen

Schichten (Fig. 31a, b), zeigen also auch Drehung der Polarisationsebene und falls sie einer Nicoldiagonale parallel sind, in der Mitte einen dunkeln Streifen und dunkle Umrandung (Fig. 34a) bei Drehung um 45° in der Mitte einen hellen Streifen, eingefaßt von zwei dunkeln (Fig. 34b). Sie sind als Enden öliger Streifen zu betrachten.

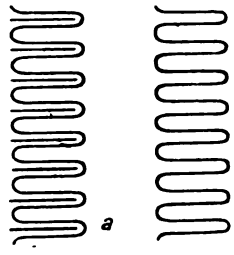


Fig. 34.

Vereinzelte solche ölige Streifen (z. B. kleine in sich geschlossene Ringe, Bögen usw. mit entsprechenden Auslöschungen[1]) finden sich manchmal auch frei im schwarzen Felde, ferner nicht angeschmiegte Stellen mit dunklen Streifen[2]), wie Fig. 35 andeutet, sowie Fig. 28 in der Mitte (nur ein Fleck mit vier Streifen, einem halben Kern- und einem Konvergenzpunkt verbindend), welche beim Drehen des Präparates viermal hell (weiß bis gelb oder rot) und dunkel werden wie Kristalle. Es kommt auch vor, daß die ganze in Fig. 28 und 29 als schwarz angenommene Mischungszone Doppelbrechung oder Drehung der Polarisationsebene zeigt, nämlich bei dickeren Schichten, wobei die Anschmiegung nur unvollkommen ist oder ganz ausbleibt. Die Erscheinungen zeigen dann manche Ähnlichkeit mit den bei 10-Bromphenanthren-3- oder -6-sulfosäurehydrat[3]) beschriebenen, lassen sich aber wie diese schwer im einzelnen entwirren.

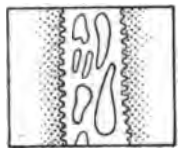


Fig. 35.

In einzelnen Fällen scheint auch Lamellenbildung vorzukommen, wenigstens zeigte sich zuweilen bei *streifend* einfallendem Licht ein schwaches *Spektrum*, vergleichbar dem Schillerfarbenspektrum. Schillerfarben selbst wurden nicht beobachtet, namentlich nicht an den einfachen, lediglich die Polarisationsebene drehenden Mischschichten.

Noch interessanter als die eben besprochenen Mischungen sind solche von Cholesterylchlorid und Cholesteryloleat, weil man hier einzelne voneinander getrennte Kristallindividuen erhält, deren Struktur mit aller Genauigkeit untersucht werden

1) Vgl. O. Lehmann, Ann. d. Phys. 55. S. 91. Fig. 44. 1918.
2) Derselbe, ebenda, S. 94. Fig. 71a, b, c, d.
3) Derselbe, Ann. d. Phys. 55. S. 100. Figg. 84—86. 1918.

kann. Die dem Oleat beigemischte freie Ölsäure wirkt nämlich als Lösungsmittel, aus welchem sich sehr kleine flüssige Kristalle ausscheiden, die sich dann allmählich durch Zusammenfließen vergrößern und durch die Wirkung der molekularen Richtkraft einfachere Struktur annehmen. Infolge der schleimigen Konsistenz nimmt das Zusammenfließen lange Zeit in Anspruch und man läßt deshalb am besten, ehe man die Beobachtungen beginnt, das Präparat, das wie die vorbesprochenen durch Nebeneinanderschmelzen der beiden Stoffe unter Deckglas und wiederholtes Hin- und Herschieben des letzteren hergestellt wurde, zunächst einige Stunden bei Zimmertemperatur liegen.

Auf der Seite des reinen Cholesteryloleats sieht man dann die normalen, kleinen stäbchenförmigen Kristalle, welche gegen die Seite des Chlorids hin immer größer werden, offenbar infolge geringer Beimischung von Chlorid, oft so groß, daß sie lange, sich durch das ganze Gesichtsfeld hindurch erstreckende, halbisotrope Zylinder bilden. Sie gleichen ganz den aus alkoholischer Lösung sich ausscheidenden schleimig-flüssigen Kristallen von Ammoniumoleathydrat und zeigen ebenso wie diese häufig doppeltkonische Störungen.[1])

Auf diese im wesentlichen homogenen, stäbchenförmigen flüssigen Oleatkristalle folgen dann nach der Seite des Chlorids hin sehr fein schraffierte ellipsoidische oder kugelige Tropfen[2]), deren Struktur um so einfacher und gröber wird, je mehr man sich der Chloridseite nähert. Manche der Stäbchen an der Übergangsstelle sind teilweise oder ganz mit dieser tropfbar flüssigen Mischkristallmasse überzogen; die Schraffierung des Überzugs ist aber nicht, wie man erwarten könnte, regelmäßig orientiert gegen die Struktur der Stäbchen, sie ist auch nicht einmal gleichmäßig, sondern zeigt sehr vielfache Wechsel und ist so fein, daß, wie in anderen Fällen starker Strukturstörung[3]), nur die Stellen plötzlicher Richtungsänderung deutlich hervortreten. Man muß hiernach die großen Stäbchen mit vereinzelten konischen Störungen als oleatreiche Mischkristalle auffassen, die fein schraffierten Tropfen und Überzüge als chloridreiche. Daraus, daß die Grenze zwischen Überzug und Grund-

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen, S. 304ff.
2) Derselbe, ebenda S. 466ff.
3) Vgl. O. Lehmann, Flüssige Kristalle. Taf. 34. Fig. 1.

masse immer sehr scharf zu sehen ist (Fig. 36), folgt, daß die Mischung der beiden flüssig-kristallinischen Stoffe nicht in beliebigem, sondern nur in beschränktem Verhältnis möglich ist.

Zwischen den ellipsoidischen chloridreichen Mischkrisfalltropfen und den auf der anderen Seite des Präparats auftretenden winzigen stäbchenförmigen flüssigen Kristallen der Mod. II des reinen Cholesterylchlorids läßt sich eine Grenze nicht auffinden. Auch hier wächst von der Seite der reinen Substanz an die Größe der Individuen infolge der Aufnahme des Oleats, doch kommt es nicht zur Bildung deutlicher Stäbchen, sondern die ersten unterscheidbaren Individuen sind bereits äußerst fein schraffierte Tropfen mit häufigem Wechsel der Schraffierungsrichtung, ganz wie auf der Oleatseite. Gegen letztere hin wird die Schraffierung gröber und regelmäßiger, ebenso wie auch die Schraffierung der Tropfen auf der Oleatseite gegen die Chloridseite hin gröber und regelmäßiger wird. Gegen die Mitte hin gehen also die schraffierten Tropfen auf beiden Seiten zunächst in solche mit stark- und dann in solche mit schwachverdrehter Struktur über, in der Mitte selbst finden sich Tropfen fast ohne Verdrehung, allerdings meist wie auch die übrigen auf einer Seite an das Glas angeschmiegt und deshalb von anderem Aussehen und anderer Struktur als freischwebende Kristalltropfen. Die in zweiter Hauptlage befindlichen gehen aus den angeschmiegten schraffierten Tropfen dadurch hervor, daß die Zahl der Streifen ab- und ihre Breite zunimmt, bis schließlich nur noch ein einziger sehr breiter Streifen in der Mitte vorhanden ist, wie die Figg. 37a, b, c andeuten. Diese Figuren sind gezeichnet in der Annahme, daß die Längsrichtung der Streifen der kurzen Nicoldiagonalen parallel ist; bei Verdrehung um 90° erscheinen die Streifen nur sehr blaß, z. B. tritt an Stelle der Fig. 37c, welche die einfachste Tropfenform darstellt, Fig. 38. Zwischen gekreuzten Nicols wird der Anblick der in Fig. 39 skizzierte. Zu beiden Seiten sind schwarze Streifen, in der Mitte eine langgezogene blaue Ellipse (entsprechend dem Streifen Fig. 37c) mit roter Umsäumung

Fig. 36.

Fig. 37.

(punktiert). Bei Drehung des Präparats um 45° werden die zuvor weißen Felder schwarz, die schwarzen Streifen weiß und die blaue Ellipse hellgelb (Fig. 40). Bei parallelen Nicols erscheint, wie Fig. 41 andeutet, die Mitte der Ellipse rotgelb, ihr Rand tief dunkelblau, fast schwarz und die Spitzen der

Fig. 38. Fig. 39. Fig. 40. Fig. 41. Fig. 42.

beiden von ihr abgegrenzten Sicheln sind grau. Bei den angeschmiegten Tropfen mit zahlreichen Streifen, Fig. 37a, b, verhalten sich die letzteren beim Drehen des Präparats zwischen gekreuzten Nicols wie einachsige Kristallnadeln, d. h. sie werden bei einmaliger Drehung viermal hell und dunkel, letzteres dann, wenn sie den Nicoldiagonalen parallel sind; die Zwischenräume bleiben zuweilen (nicht immer) dunkel, wie es der Anschmiegung entspricht (Fig. 42).

Durch Beobachtung im Kapillarrotator[1]) kann man sich davon überzeugen, daß die Tropfen mit einfacher Schraffierung wirklich angeschmiegt sind, da die an vertikaler Rohrwand sitzenden erscheinen, wie Fig. 43 zeigt. Freischwebende Tropfen

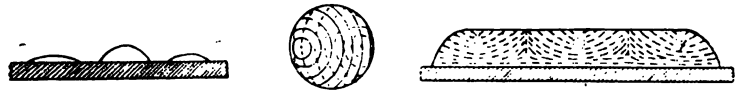


Fig. 43. Fig. 44. Fig. 45.

lassen auch die Schraffierung auf der Rückseite erkennen, wie z. B. der Tropfen mit schräger Achse (Fig. 44) mit ringförmiger Schraffierung oder Tropfen mit Spiralschraffierung, wie sie früher eingehend untersucht und beschrieben wurden.[2])

Aus jenen älteren Untersuchungen und den neuesten[3]) folgt, daß die Struktur der angeschmiegten Tropfen die in Fig. 45 dargestellte sein muß, wobei die Linien die Normalen zu den optischen Achsen (die Richtungen der blättchenförmig

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. S. 368.
2) Derselbe, ebenda S. 450 ff.
3) Derselbe, Ann. d. Phys. 58. S. 644 ff. 1919.

gedachten Moleküle) bedeuten und Punktierung Stellen mit regellos gelagerten Molekülen (also kleinem Brechungsindex), welche die starke Lichtbrechung der Streifen bedingen. Die dazwischenliegenden Konvergenzstellen der Moleküle sollten als feine Trennungslinien erscheinen, doch treten solche hier (vermutlich der geringen Lichtbrechung wegen) nur undeutlich hervor oder entziehen sich vollständig der Beobachtung.

Fig. 46 stellt einen Tropfen mit nur zwei Streifen in natürlichem Licht dar. Zwischen gekreuzten Nicols erscheinen die

Fig. 46.

Fig. 47.

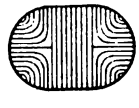


Fig. 48.

beiden Streifen in der Hellstellung gelbrot, zwischen parallelen in derselben Stellung blau. Das dazwischenliegende angeschmiegte Gebiet kann im ersten Fall schwarz, im anderen weiß erscheinen; es kann aber auch entsprechend der Struktur eines Konvergenzpunktes ein schwarzes bzw. weißes (schiefgezogenes) Kreuz zeigen, ähnlich wie in ausgedehnten homo-

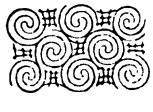


Fig. 49.

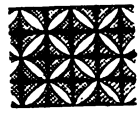


Fig. 50.

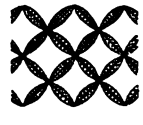


Fig. 51.

genen angeschmiegten Schichten da und dort einzelne Kern- und Konvergenzpunkte (ganze oder halbe) mit entsprechenden Streifen aufzutreten pflegen.

Gewöhnlich sind zwei oder mehr schraffierte Tropfen regelmäßig vereinigt, besonders häufig drei oder vier. Letzteren Fall stellen die Figg. 47 und 48 dar. Ferner ist häufig die Anordnung der Streifen eine spiralige und aus solchen Spiralen können sich regelmäßige quadratische Systeme bilden (Fig. 49), welche zwischen gekreuzten Nicols Systeme von schwarzen Kreuzen bilden (Figg. 50 u. 51), wie sie auch in anderen Fällen beobachtet wurden.

Bei großer Konzentration können zahlreiche Tropfen zu zusammenhängenden Schichten sich vereinigen, bei welchen je nach der Zusammensetzung die Dichte der Schraffierung von Stelle zu Stelle sich ändert. Beispielsweise ist in Fig. 52 eine solche Schicht skizziert, welche auf der einen Seite vorwiegend Oleat, auf der anderen vorwiegend Chlorid enthält und deshalb auf diesen Seiten feine Schraffierung zeigt, welche gegen die Mitte zu gröber wird und in der Mitte unter starker Verbreiterung sich allmählich verliert. Da die Streifen Aus-

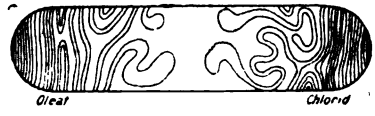


Fig. 52.

löschungen parallel ihrer Längsrichtung zeigen, bildet sich bei ringförmig geschlossenen Streifen zwischen gekreuzten Nicols natürlich ein schwarzes Kreuz, welches bei verwaschen auslaufenden Streifen sich in die streifenlose angeschmiegte Masse hinein fortsetzen kann, da diese im allgemeinen wegen Drehung der Polarisationsebene nicht dunkel, sondern hell erscheint.

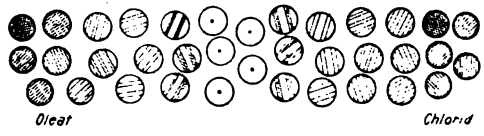


Fig. 53.

Um die Verhältnisse besser übersehen zu können, ist in Fig. 53 von solchen Komplikationen abgesehen und der einfache Fall angenommen worden, der auch wirklich vorkommt, daß sich überall nur einfache runde angeschmiegte Tropfen ausgeschieden haben und zwar bei vorherrschendem Oleat auf der linken Seite und vorherrschendem Chlorid auf der rechten Seite. In der Mitte sind, was ebenfalls häufig zutrifft, angeschmiegte Tropfen in 1. Hauptlage, welche naturgemäß zwischen gekreuzten Nicols ein schwarzes Kreuz zeigen, dessen Arme sich aber nicht bis zum Rande erstrecken. Fig. 54 zeigt einen besonders großen Tropfen dieser Art zwischen gekreuzten

Nicols. Er erscheint im wesentlichen weiß, den fehlenden Kreuzarmen entsprechend finden sich aber in der Nähe des Randes elliptische rotgelbe Flecken. Bei parallelen Nicols tritt, wie in Fig. 55 angedeutet, ein graues Kreuz in der Randzone unter 45° auf, die Randzone selbst ist blaugrün (punktiert) gefärbt. Die Mitte des Tropfens ist gleichförmig gelb und durch einen dunkelvioletten Ring von der Randzone geschieden. Beim Drehen des Präparates ändern sich in beiden Fällen natürlich die Erscheinungen nicht, da alles rings um die Mitte symmetrisch ist.

Es kommen auch Tropfen mit schiefstehender Achse vor, bei welchen deutlich erkennbar ist, daß die Randzone in ihrer Struktur einem Streifen äquivalent ist, indem die elliptisch gewordene Randzone geradezu den ersten Streifen darstellt, auf welchen ein zweiter paralleler folgt (Fig. 56). Das schwarze Kreuz zeigt sich innerhalb der Ellipse im wesentlichen unverändert. Es gibt übrigens auch symmetrische Tropfen, bei welchen das schwarze Kreuz ganz fehlt, die zwischen gekreuzten Nicols z. B. als gelbrote Scheiben erscheinen, deren Farbe sich beim Drehen des Präparates nicht ändert, wohl aber beim Drehen des Analysators, wobei sie in die komplementäre blauviolette übergeht, ganz wie bei einer die Polarisationsebene drehenden Quarzplatte.

Fig. 54.

Fig. 55.

Fig. 56.

Man könnte sich nun hinsichtlich des Grundes der eigenartigen Erscheinung die Vorstellung machen, die einfachen Kristalltropfen seien eine chemische Verbindung von Oleat und Chlorid, etwa eine Molekularverbindung, und diese Verbindung habe die Fähigkeit, sowohl Chlorid wie Oleat als Beimischung aufzunehmen und erfahre dadurch eine um so stärkere Strukturverdrehung, je größer der Gehalt an fremder Substanz, was eben durch die zunehmende Feinheit der Schraffierung sowohl nach der Chlorid- wie nach der Oleatseite (Figg. 52 u. 53) zum Ausdruck käme.

Dieser Annahme widerspricht aber, daß die Kristalltropfen *zunehmende Drehung der Polarisationsebene gegen die Mitte hin* zeigen und zwar *zu beiden Seiten der Mitte von entgegengesetztem Sinn* ganz wie die oben behandelten Präparate (Figg. 28 u. 29).

In der Mitte liegen Kristalltropfen von entgegengesetztem Drehungssinn unmittelbar nebeneinander, wie man leicht ersieht, wenn der zum Analysator gekreuzte Polarisator einmal etwa um 45° nach rechts, dann um 45° nach links gedreht wird. Die bei gekreuzten Nicols schwarzen bzw. grauen Kreuze (Fig. 57a) drehen sich mit halber Geschwindigkeit mit, *verhalten sich aber ganz verschieden*, insofern bei Drehung nach *rechts die Kreuze auf der Oleatseite dunkelblau werden* und sich

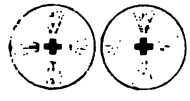


Fig. 57a.

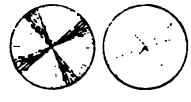


Fig. 57b.

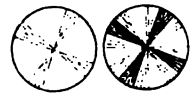


Fig. 57c.

stark ausdehnen, ferner die zwischenliegenden Felder grau, während sie auf der *Chloridseite fast verschwinden*, so daß die Tropfen als weiße Scheiben erscheinen (Fig. 57b). Bei Drehung nach *links* ist das Verhalten genau umgekehrt, es werden die Tropfen der *Chloridseite dunkel*, die der *Oleatseite hell* (Fig. 57c). Analoges gilt für Tropfen in II. Hauptlage, welche jeweils dann dunkelblau werden, wenn die Verbindungslinie der Pole einem blau gewordenen Kreuzarm parallel ist, weiß dagegen, wenn sie einem weißen Kreuzarm parallel geht (Fig. 58). Ist nur wenig Lösungsmittel vorhanden, so daß sich die Tropfen zu einer zusammenhängenden Schicht vereinigen, so gilt auch für diese das gleiche. Dieselbe zeigt, wie schon oben bemerkt, gegen die Oleat- bzw. Chloridseite hin äußerst feine Schraffierung (Fig. 52) mit häufigem Richtungswechsel, der besonders zwischen gekreuzten Nicols auffällt, da alle die Felder, in welchen die Schraffierung einer Nicoldiagonale parallel läuft, dunkel erscheinen, ebenso wie diejenigen Felder, in welchen Anschmiegung stattgefunden hat, so daß die optische Achse in die Schrichtung fällt. Gegen die Mitte zu zeigen namentlich die angeschmiegten Felder deutliche mehr und mehr wachsende Aufhellung und die Mitte selbst ist bei der gewöhnlichen Dicke der Präparate gelbrot. Sie zeigt aber dunkle Streifen entsprechend Kern- und Konvergenzpunkten, wie bei gewöhnlichen tropfbar-

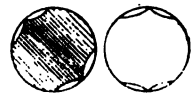


Fig. 58.

flüssig-kristallinischen Schichten[1]) und auch entsprechend halben Kern- und Konvergenzpunkten wie bei Promphenanthrensulfosäurehydrat[2]), bei welch letzterem ebenfalls starke Drehung der Polarisationsebene zu beobachten ist. Je nachdem man den Polarisator nach rechts oder links dreht, werden die dunkeln Streifen dunkelblau bzw. hellgrau oder umgekehrt (wie bei Fig. 57b und 57c) und auch die Felder nehmen im ersten Fall einen dunklen gewöhnlich braunen Ton an, die auf der anderen Seite werden umgekehrt hell, fast weiß. Die Grenze zwischen rechts- und linksdrehender Masse ist nicht geradlinig, sondern ganz unregelmäßig, es gibt wohl auch dazwischen Gebiete ohne Drehung entsprechend den unverdrehten Tropfen.

Man hat also ganz wie bei den zuerst behandelten Präparaten die eigentümliche Erscheinung, daß Zumischung von wenig Chlorid zu Oleat Drehung der Polarisationsebene nach links hervorruft, Zumischung von wenig Oleat zu Chlorid ebenso starke Drehung nach rechts. Daß die Mitte keine Drehung zeigt, könnte also so gedeutet werden, daß hier beide Stoffe in solcher Menge gemischt sind, daß sich die Drehungen aufheben. Es würden also die unverdrehten Tropfen in der Mitte nicht eine chemische Verbindung von Chlorid und Oleat sein, sondern eine Mischung zu etwa gleichen Teilen. Die Erscheinung, daß zu beiden Seiten der Mitte (ohne Drehung der Polarisationsebene und ohne Strukturverdrehung) zunächst starke Drehung der Polarisationsebene auftritt und wie hier stetige Abnahme der Drehung bei gleichzeitiger Zunahme der Feinheit der Schraffierung zu beobachten ist, fand sich ebenso bei den oben behandelten anderen Stoffpaaren, wobei kein Grund zur Annahme einer chemischen Verbindung vorlag, was somit für diese Erklärungsweise sprechen würde. Wäre sie richtig, so müßte es wirklich kontinuierlichen Übergang von den stäbchenförmigen schleimig-flüssigen Kristallen des Cholesterylchlorids (mit konischen Störungen) bis zu den kugeligen Mischkristalltropfen (welche im wesentlichen dieselbe Struktur aufweisen wie normale Kristalltropfen[3]) geben und zwar unter

1) Vgl. O. Lehmann, Die Lehre von d. flüss. Kristallen. S. 421 ff.
2) O. Lehmann, Ann. d. Phys. 55. S. 97. 1918.
3) In einem Fall beobachtete ich sogar bei einem Tropfen in II. Hauptlage eine windschief gebogene Trennungslinie wie bei Kristalltropfen von Paraazoxyphenetol und Anisaldazin. Vgl. die Lehre von den flüssigen Kristallen. S. 421. Fig. 361.

Vermittlung der ellipsoidischen sehr fein schraffierten Mischkristalltropfen, wie ich schon früher vermutete und zwar wäre der Übergang hier noch vollkommener als bei den früher beobachteten Mischungen (Cholesterylbenzoat und Paraazoxyphenetol), weil die gemischten Stoffe chemisch näher verwandt sind. Da indes, wie die Untersuchungen ergeben haben, die Schraffierung nicht in die Tiefe dringt, der Kern der Kristalle, welche richtiger als geschichtete Mischkristalle bezeichnet würden, viel mehr homogene Struktur besitzt, so erklärt sich die Zunahme der Drehung der Polarisationsebene gegen die Mitte hin wohl einfach durch die Abnahme der Strukturverdrillung (Schraffierung), da sie um so vollkommener auftreten muß, je mehr die Richtung der optischen Achsen der Schichtung sich nähert. Die Drehung der Polarisationsebene hat also mit der durch die Schraffierung zum Ausdruck kommenden Strukturverdrillung direkt nichts zu tun. Letztere müßte eigentlich der chemischen Zusammensetzung gemäß mit der Feinheit der Schraffierung zunehmen, nimmt aber in Wirklichkeit ab (vgl. Fig. 30), weil sie ihrer Natur nach überhaupt nur in der Richtung der optischen Achse und wenig davon abweichenden Richtungen beobachtet werden kann.

Da ihr Auftreten auf Cholesterylverbindungen und die bekannten Vorländerschen Stoffe beschränkt ist, muß wohl angenommen werden, daß die betreffenden flüssigen Kristalle dieser Stoffe, obschon im halbisotropen angeschmiegten Zustande scheinbar optisch einachsig, in Wirklichkeit optisch zweiachsig sind, und daß bei Mischung derselben schraubenartige Verdrehungen der zweiachsigen blättchenförmigen Moleküle auftreten analog den Glimmerkombinationen von Reusch und zwar so, daß beim Überwiegen des einen Stoffes die Verdrehung im Sinne des Uhrzeigers stattfindet, beim Überwiegen des anderen in entgegengesetztem Sinne. Daß auch der Windungssinn der spiralförmigen Schraffierungen zu beiden Seiten der Mitte, wie man vermuten könnte, und demgemäß der etwaige Rotationssinn der Tropfen[1]) die entgegengesetzte wäre, habe ich nicht beobachten können. Die Tropfen ertragen keine Erwärmung, welche hinreichend wäre die Erscheinung der Rotation hervorzubringen.

---

1) O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen. S. 437.

Zusammenfassung.

Erzeugung von Schraubenstruktur durch mechanische Verdrehung ist bei erzwungen homogenen schleimig-flüssigen Kristallen nicht möglich, bei solchen mit konischen Strukturstörungen nur in geringem Maße und nur bei starker Deformation der letzteren. Durch fremde Beimischungen (Bildung von Mischkristallen) entsteht Schraubenstruktur dann, wenn sich die Moleküle (die nicht als einfache chemische Moleküle aufzufassen sind, sondern als größere Atomaggregate), nicht wie einachsige Blättchen verhalten, was z. B. für die Cholesterylverbindungen zutrifft. Sie äußert sich in Drehung der Polarisationsebene bei angeschmiegten Schichten, welche sich trotz der Zweiachsigkeit der Moleküle als einachsig verhalten, weil nur die Ebenen der Blättchen parallel bleiben, während die Kantenrichtungen sich beständig ändern. Diese Drehung *wächst bei geringem Zusatz eines Stoffes II zum Stoff I mit der Menge des Zusatzes* bis zu einem *Maximum* und verschwindet dann, falls Anschmiegung eintritt, weil sie bei Zusatz von Stoff I zu Stoff II im Fall des Maximums ungefähr *ebenso groß ist, aber den entgegengesetzten Sinn hat.* Findet keine Anschmiegung statt, so zeigt sich im Fall des Maximums ein *schroffer Umschlag von Rechts- und Linksdrehung.* Wird in einer keilförmigen Schicht gleichzeitig gewöhnliche Doppelbrechung durch Schiefstellung der Moleküle hervorgerufen, so zeigen sich die optischen Erscheinungen, welche früher durch Schwebungen der Homöotropie zu erklären versucht wurden.

Karlsruhe, Physik. Institut der techn. Hochschule.
30. August 1919.

(Eingegangen 3. September 1919.)

2. *Die Dispersion der Luft im ultravioletten Spektrum;*
von Wilhelm Traub.

(Tübinger Dissertation.)

Das theoretische Interesse, das die Refraktion und Dispersion in Gasen bietet, ist ein erhöhtes geworden durch die Arbeiten über den Molekülbau von Debeye[1]) und Sommerfeld.[2]) Die Refraktion und Dispersion der Luft hat vorwiegend praktische Bedeutung. Was das zahlreiche Beobachtungsmaterial anbelangt, so weichen die absoluten Werte bei allen Gasen stark voneinander ab. Bei Luft schwanken die Angaben für $(n-1)\,10^7$ zwischen 2918 (Lorenz) und 2954 (Ketteler) für $\lambda = 5462$. Bei genauer Betrachtung dürfte ja einigen Arbeiten nicht allzuviel Gewicht beigelegt werden, sei es, daß sie weniger sorgfältig ausgeführt worden sind, sei es, daß die angewandte Methode keine größere Genauigkeit zuläßt.

Völlige Unsicherheit in die Beobachtungen der Refraktion der Luft brachte die Arbeit von Posejpal.[3]) In $n-1 = Kp(1+\beta p)$ findet er für Drucke unterhalb 1 Atmosphäre für β einen mehr als viermal so großen Wert wie die seitherigen Beobachter. Seine Methode, den Koeffizienten β zu bestimmen, ist den bisher angewandten überlegen. Aus seinen Beobachtungen erhält Posejpal für 0^0 und 760 mm Druck $(n-1)\,10^7 = 2916{,}7 \pm 1{,}4$ (für $\lambda = 5462$ Å.E.), den er als „korrigierten Wert der Luftrefraktion" bezeichnet. Posejpal sieht eine Bestätigung seiner Messungen darin, daß sein Wert mit dem von Lorenz[4]) übereinstimmt. Lorenz beobachtet die Verschiebung des in einem Jaminschen Interferenzialrefraktor zustande gekommenen Interferenzsystems bei einer Druckänderung von 0 bis etwa 760 mm, und es ergibt sich

1) P. Debeye, Sitzungsberichte der Bayer. Akademie zu München 1915. S. 1.

2) A. Sommerfeld, Annalen d. Phys. **53.** S. 508. 1917.

3) V. Posejpal, Annalen d. Phys. **58.** S. 629. 1917.

4) L. Lorenz, Wied. Annalen **11.** S. 70. 1880.

so unabhängig von β der richtige Wert für $n-1$ (denn es ist dann in Formel (4) S. 538 $p_1 + p_2 \sim 760$). Allerdings haben andere Forscher größere Druckunterschiede angewandt und Posejpal sieht hierin den Grund größerer Werte für $n-1$. Aber gerade bei Koch[1]) war $p_1 + p_2$ wenig von 760 mm verschieden, worauf Koch ausdrücklich aufmerksam macht. Koch findet aber für $(n-1)\,10^7$ den Wert 2937. Dieser Widerspruch ist vollständig.

Was die Dispersion im Ultraviolett anbelangt, so ist sie für kein Gas weiter als bis 2300 Å.E. untersucht worden. Den Dispersionsverlauf der Luft haben verfolgt: Koch[2]) bis 2379 Å.E., Kayser und Runge[3]) bis 2360 Å.E. Außer den Absolutwerten zeigen auch die Dispersionsmessungen erhebliche Abweichungen:

λ Å.E.	Kayser u. Runge $(n-1)\,10^7$	Koch $(n-1)^7$	Diff.
5462	2926,5	2937,0	10,5
2577	3146,9	3165,0	18,1

Außer Koch und Kayser und Runge haben noch Rentschler[4]) und Howell[5]) die Dispersion der Luft im Ultraviolett untersucht (mittelst Perot-Fabry-Interferometer). Rentschler kam nur bis 3341 Å.E., Howell bis 2652 A.E. (Statt versilberter Interferometerplatten und eines Konkavgitters wie Rentschler, benützt Howell vernickelte Platten und einen Quarzspektrographen.) Beide konnten keine größere Genauigkeit erreichen.

Aus oben erwähnten Gründen veranlaßte mich Herr Professor Paschen, die Absolutwerte möglichst genau zu bestimmen (die Absicht war, die vierte Stelle in $(n-1)\,10^7$ festzustellen) und den Dispersionsverlauf möglichst weit ins Ultraviolett zu verfolgen. Ich habe die Untersuchung für Luft ausgeführt.

Versuchsanordnung.

Bevor ich die angewandte Methode bespreche, möchte ich kurz über eine andere Methode berichten, die ich zuerst

1) J. Koch, Nova acta Regiae Soc. Scient. Upsaliensis, Ser. IV, Vol. 2, No. 5, S. 24.
2) J. Koch, Arkiv för Mat., Astron. och Fysik 8. S. 20. 1912.
3) H. Kayser u. C. Runge, Wied. Annalen 50. S. 293. 1893.
4) H. C. Rentschler, Astrophys. Journ. 28. S. 435. 1908.
5) J. Howell, Physical Review Ser. 2. 6. S. 81. 1915.

ausprobiert und die sich ihrer großen Einfachheit halber (das ganze Interferometer besteht aus einem einzigen Objektiv) auszeichnet, die ich aber aus gleich zu besprechenden Gründen schließlich doch nicht angewandt habe. Sie schließt sich eng an die von Rayleigh, Ramsay und Travers[1]) und Dorns Schülern[2]) angewandte Methode an (Beugung an einem Doppelspalt) und ist die folgende (Fig. 1): S ist ein mikro-

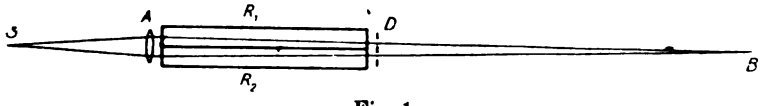


Fig. 1.

metrisch fein verstellbarer Spalt (Spaltöffnung horizontal). Sein von dem achromatischen Objektiv A (Brennweite 25 cm) entworfenes Bild würde bei B entstehen ($A\,B \sim 150$ cm). D ist ein Doppelspalt (ebenfalls horizontal). Seine Zwischenwand war 1,5 mm, die Öffnungen je 0,75 mm breit. Macht man den Spalt S genügend eng, so treten bei B (horizontale) Interferenzen auf. Zwischen A und D befand sich das 60 cm lange Doppelrohr $R_1\,R_2$ aus Messing. Die (horizontale) Trennungswand von R_1 und R_2 hatte eine Dicke von 1 mm. Die Verschlußplatten waren so aufgekittet, daß die Kittschicht an der Zwischenwand zwischen R_1 und R_2 nicht breiter als 1 mm war. An dem Orte größter Schärfe der Interferenzen (etwa bei B) befand sich der Spalt des Spektralapparates, der die horizontalen Interferenzen spektral zerlegte.

Die Interferenzen waren bei obigen Dimensionen noch sehr eng. Sie hatten bei $\lambda = 2140$ Å.E. einen Abstand von 0,09 mm. Noch stärkere Vergrößerung hatte zu große Lichtschwächung zur Folge und die Zwischenwand des Doppelspaltes konnte auch kaum schmäler als 1,5 mm gemacht werden. Der kleine Abstand der Interferenzen ist der Nachteil der Methode: Steht z. B. der Spektralapparat nicht absolut fest und verschiebt sich dadurch etwa die über den Spalt des Spektralapparates angebrachte Marke (Spinnfaden) nur um $^1/_{100}$ mm, so gibt das bei $\lambda = 2100$ Å.E. schon einen Fehler

1) Lord Rayleigh, W. Ramsay und M. W. Travers, Proc. Roy. Soc. **62.** S. 228. 1898; **64.** S. 198. 1899.

2) Vgl. z. B. K. Herrmann, Verhandl. d. Deutschen Phys. Gesellsch. 1908. S. 210.

von $^1/_{10}$ einer Streifenbreite. Außerdem gelang es mir nicht, unterhalb 2100 Å.E. brauchbare Interferenzen zu bekommen. Es wurde deshalb die Jaminsche Anordnung vorgezogen. Im wesentlichen wurde Flußspatoptik verwendet. Jaminsche Refraktorplatten aus Flußspat von den gewöhnlichen Dimensionen standen natürlich nicht zur Verfügung. Als solche diente vielmehr eine in zwei Teile zerschnittene exakt planparallele Flußspatplatte von 5 mm Dicke. Auch hier wie bei der zuerst besprochenen Methode mußte die Wand des Interferenzdoppelrohrs möglichst dünn sein; sie hatte eine Dicke von 1 mm und die planparallelen Flußspatverschlußplatten waren wieder so aufgekittet, daß die Kittschicht zwischen den beiden Röhren nicht breiter als 1 mm war. Die Anordnung war im einzelnen die folgende (Fig. 2):

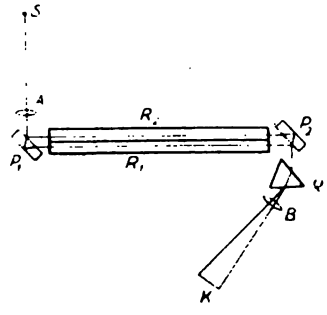


Fig. 2.

Der vertikale Spalt S stand im Brennpunkt des achromatischen Objektivs A (Brennweite 25 cm). P_1 und P_2 sind die Refraktorplatten; R_1 R_2 das 51 cm lange Doppelrohr aus Messing. Das achromatische Objektiv B (Brennweite ebenfalls 25 cm) entwarf bei K, dem Ort der photographischen Platte, ein scharfes Bild der horizontalen, durch das Prisma Q (im sichtbaren Spektrum ein Glasprisma mit großer Dispersion, im Ultraviolett bis 2026 Å.E. ein Quarzprisma, bis 1854 ein Flußspatprisma) spektral zerlegten Interferenzen. Befindet sich der achromatische Streifen (Gangunterschied 0) im Gesichtsfeld bei K, so erscheint das Spektrum bei Belichtung mit weißem Licht von nach Violett konvergierenden Interferenzen durchzogen — ein zum achromatischen Streifen symmetrisches Bild.

Über die Mitte des Spaltes S war als Marke ein Kokonfaden gezogen und der Refraktor so justiert, daß bei kommunizierenden Interferenzröhren (die Röhren R_1 und R_2 konnten in der gewöhnlichen Weise unter sich, sowie mit Zuleitungsröhren für die Gase, mit Manometer und Pumpe in Verbindung gesetzt werden) das Bild des Kokonfadens in

der Mitte des achromatischen Streifens bei K zu sehen war. Bei Beobachtungen im äußersten Ultraviolett war außerdem noch bei K eine Marke angebracht, da hier die Spaltmarke auf der photographischen Platte nicht immer mit gewünschter Deutlichkeit hervortrat.

Wird etwa durch Druckänderung in der einen Röhre ein Gangunterschied hervorgebracht, so liegen im kontinuierlichen Spektrum die Interferenzen schief und es kann mit Hilfe des kontinuierlichen Spektrums festgestellt werden, wieviel Interferenzbanden für irgendeine Wellenlänge mehr gewandert sind als für eine andere.

Zur genauen Bestimmung und Konstanthaltung der Temperatur waren die Interferenzröhren in ein Wasserbad gesetzt. Das Thermometer war in fünfzigstel Grade geteilt und mit dem Normalthermometer verglichen. Das zur Druckablesung benutzte Manometer hatte einen lichten Durchmesser von etwa 16 mm, so daß der Fehler infolge Kapillardepression sicher kleiner als $^1/_{10}$ mm war. Zur völligen Trocknung der Interferenzröhren waren an ihnen Behälter mit Phosphorpentoxyd angebracht.

Um eine etwaige Durchbiegung der planparallelen Verschlußplatten der Interferenzröhren festzustellen, wurde das Interferenzsystem bei kommunizierenden luftleeren, sowie bei kommunizierenden, mit Luft von Atmosphärendruck gefüllten Röhren photographiert. Weder eine Verschiebung, noch ein Unschärferwerden der Interferenzen konnte festgestellt werden, ein Zeichen, daß sich die Platten nicht durchbogen.

Die Formel für $n - 1$.

Es sei L die Länge der Interferenzröhren,
s die Zahl gewanderter Streifen,
λ_0 die Wellenlänge im Vakuum,
λ_1 die Wellenlänge beim Druck p_1,
λ_2 die Wellenlänge beim Druck p_2,

(die Temperatur sei zunächst als konstant vorausgesetzt), dann ist:

$$\frac{L}{\lambda_1} - \frac{L}{\lambda_2} = s$$

oder

$$L\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_2}\right) = s\lambda_0$$

oder

$$n_1 - n_2 = \frac{s \cdot \lambda_0}{L}$$

oder

$$(1) \qquad (n_1 - 1) - (n_2 - 1) = \frac{s \cdot \lambda_0}{L} .$$

Nun gilt allgemein

$$(2) \qquad n - 1 = c\,(p + \beta p^2) .$$

also auch

$$n_1 - 1 = c\,(p_1 + \beta p_1^2) ,$$

$$n_2 - 1 = c\,(p_2 + \beta p_2^2) ,$$

damit nach (1)

$$(3) \qquad c\left\{(p_1 - p_2) + \beta(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)\right\} = \frac{s \cdot \lambda_0}{L} .$$

Ist n_0' der Brechungsexponent bei 760 mm, so ist nach (2) und (3)

$$n_0' - 1 = \frac{s \cdot \lambda_0 \cdot 760\,(1 + \beta \cdot 760)}{L(p_1 - p_2)[1 + \beta(p_1 + p_2)]} .$$

Will man den Brechungsexponenten auf 0^0 reduzieren, so hat man $n_0' - 1$ mit $1 + \alpha t$ zu multiplizieren; es ist also

$$n_0 - 1 = \frac{s \cdot \lambda_0 \cdot 760\,(1 + \beta\,760)(1 + \alpha t)}{L(p_1 - p_2)[1 + \beta(p_1 + p_2)]}$$

oder

$$n_0 - 1 = \frac{s \cdot \lambda_0 \cdot 760\,(1 + \alpha t)}{L(p_1 - p_2) \cdot \dfrac{1 + \beta(p_1 + p_2)}{1 + \beta \cdot 760}}$$

oder, da β eine kleine Größe,

$$(4) \qquad n_0 - 1 = \frac{s \cdot \lambda_0 \cdot 760\,(1 + \alpha t)}{L(p_1 - p_2)\{1 - \beta[760 - (p_1 + p_2)]\}} .$$

Nach Mascart ist nun $\beta = 0{,}0000007$, nach Kayser 0,00000095. Die neueste Arbeit über die Abhängigkeit des Brechungsexponenten vom Druck ist die schon erwähnte von Posejpal. Er findet $\beta = 0{,}00000396$. Aber selbst dann würde die Korrektion $\beta\,[760 - (p_1 + p_2)]$ die Fehlergrenze nicht übersteigen, da bei meinen Messungen $760 - (p_1 + p_2)$ durchschnittlich weniger als 30 mm betrug. An Stelle der Formel (4) benutzte ich deshalb die Formel

$$(5) \qquad n_0 - 1 = \frac{s \cdot \lambda_0 \cdot 760\,(1 + \alpha t)}{L(p_1 - p_2)} ,$$

die man unter der Annahme $n - 1 = c\,p$ abgeleitet hätte.

Für a wurde nach übereinstimmenden Messungen von Regnault und Chappuis der Wert 0,00367 benutzt.

Beobachtungen.

Aus Formel (4) oder (5), S. 538, folgt, wenn n_1 bzw. n_2 die Brechungsexponenten für die Wellenlängen λ_1 bzw. λ_2 bedeuten:

$$\frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} = \frac{s_1 \lambda_1}{s_2 \lambda_2}.$$

Weiß man also, wieviele Interferenzen für die verschiedenen Wellenlängen bei einer Druckänderung in einer Röhre gleichzeitig über den Kokonfaden gewandert sind, so ist die Dispersion damit charakterisiert. Zur Bestimmung des Absolutwertes des Brechungsexponenten für irgendeine Wellenlänge ist noch die genaue Kenntnis der Druckänderung, Temperatur und Länge der Interferenzröhren erforderlich [Formel (5)].

Als Ausgangspunkt wurde die grüne Hg-Linie gewählt. Für sie wurde der Absolutwert genau bestimmt, relativ zu ihr wurden die Brechungsexponenten für die anderen Wellenlängen gemessen.

Zunächst beobachtete ich im Hg-Spektrum. Die Interferenzröhren wurden ausgepumpt, bis ein mit ihnen in Verbindung stehendes Geißlerrohr Kathodenstrahlen zeigte, hierauf langsam Luft so lange eingeführt, bis die Luft in den Interferenzröhren einen kleinen Überdruck (etwa 5 mm) gegen die Atmosphäre hatte. Die Luft wurde durch eine Flasche mit NaOH, ein Ätznatron-, ein Chlorkalzium- und ein Phosphorpentoxydrohr geleitet. Sie war also trocken und kohlensäurefrei. Das Interferometer wurde sich einige Zeit überlassen, bis Temperaturgleichgewicht eingetreten war. Jetzt wurde bei kommunizierenden Interferenzröhren eine Aufnahme des Hg-Spektrums gemacht; hierauf, um in den Röhren Atmosphärendruck herzustellen, die Röhren mit der Atmosphäre etwa eine Minute in Verbindung gesetzt (die Verbindung geschah durch ein längeres Glasrohr durch die Gaede-Kolbenpumpe hindurch, in die auch kohlensäurefreie Luft eingeleitet war), eine Röhre abgeschlossen, Temperatur abgelesen, die andere Röhre ausgepumpt, Manometer abgelesen und nun das Hg-Spektrum zum zweitenmal photographiert. Über diese zweite Aufnahme wurde noch ein kontinuierliches Spek-

trum photographiert (im sichtbaren Spektrum Azolampe, im Ultravioletten ein Cd-Funke). Aus der photographischen Platte, die unter dem Komparator ausgemessen wurde, konnten durch das Linienspektrum für die einzelnen Wellenlängen die Bruchteile der über den Kokonfaden gewanderten Streifen entnommen werden. Es wurden beispielsweise bei einer Aufnahme, bei der die Druckänderung 731,01 mm betrug und die Temperatur 16,52° abgelesen wurde, für die grüne Hg-Linie eine Streifenwanderung von ...,39 gemessen. Die ganze Zahl gewanderter Streifen bekam ich folgendermaßen:

Bevor mit photographischen Aufnahmen und Messungen begonnen wurde, hatte ich aus vier Vorversuchen den Brechungsexponenten der Luft für die grüne Hg-Linie provisorisch bestimmt, indem ich in einem hinter der Kamera aufgestellten mikrometrisch verschiebbaren Fernrohre direkt die bei einer bestimmten Druckänderung vorbeiwandernden Streifen gezählt hatte. Es ergab sich als vorläufiger Wert $(n-1)\,10^7 = 2932{,}2$. Die Länge der Interferenzröhren wurde ebenfalls provisorisch gemessen (mit Kathetometer) zu 510,16 mm. Aus vorläufig bekanntem Brechungsexponenten (2932,2), Länge der Röhren (510,16), abgelesener Druckänderung und Temperatur (in unserem Beispiel 731,01 mm bzw. 16,52°) berechnete ich nach Gleichung (5), S. 538, die Zahl gewanderter Streifen

$$s = \frac{(n-1)\cdot L\cdot(p_1-p_2)}{\lambda_0\cdot 760\cdot(1+\alpha t)},$$

in unserem Beispiel

$$s = \frac{2932{,}2\cdot 510{,}16\cdot 731{,}01}{5462{,}26\cdot 760\cdot 1{,}06063} = 248{,}36.$$

Es waren somit für die grüne Hg-Linie 248,39 Streifen gewandert. Um einen ganzen Streifen konnte man sich nicht täuschen: Die beobachteten und berechneten Bruchteile der gewanderten Streifen differierten in der Regel um weniger als $^1/_{10}$ einer Streifenbreite. Der provisorische Wert für $(n-1)\,10^7$, sowie die provisorische Längenmessung der Röhren dienten nur dazu, die ganze Zahl der bei den photographischen Messungen gewanderten Streifen festzustellen. Sämtlichen im folgenden mitgeteilten Beobachtungen sind nur photographische Messungen zugrunde gelegt.

Hatte ich so für die grüne Hg-Linie die Zahl der gewanderten Streifen bestimmt, so konnte mit Hilfe des kontinuierlichen Spektrums auch für die anderen Wellenlängen die Zahl gewanderter Streifen festgestellt werden. Schon nach zwei Aufnahmen war das kontinuierliche Spektrum zu entbehren, man konnte sich nicht um einen ganzen Streifen täuschen.

Das Hg-Spektrum benützte ich bis 2753 Å.E. Von 2573 bis 2026 Å.E. diente als Lichtquelle der durch hochgespannten Wechselstrom erzeugte Funke einer Legierung von 10 Proz. Cd mit 90 Proz. Zn. Als Kapazität dienten vier Leidener Flaschen. Selbstinduktion wurde keine benützt. Hier verfuhr ich folgendermaßen:

Es wurde bei kommunizierenden, mit Luft gefüllten Röhren photographiert: 1. das Hg-Spektrum. 2. das Cd-Zn-Spektrum, 3. wieder das Hg-Spektrum. Nun wurde eine Röhre ausgepumpt und photographiert: 4. das Hg-Spektrum, 5. das Cd-Zn-Spektrum, 6. nochmals das Hg-Spektrum. Die Aufnahmen 3. und 4. lieferten die gleichzeitig gewanderte Interferenzenzahl für die Wellenlängen des Hg-Spektrums, die Aufnahme 2. und 5. für die Wellenlängen des Cd-Zn-Spektrums. Um den Anschluß des Cd-Zn-Spektrums ans Hg-Spektrum zu erhalten, berechnete ich sowohl aus 1. und 6., sowie aus 3. und 4. für $\lambda = 4046$ Å.E. die Zahl gewanderter Streifen und nahm aus beiden Beobachtungen das arithmetische Mittel. Nur so hatte ich für eine Hg-Linie die Zahl gewanderter Streifen, die den gewanderten Streifen der verschiedenen Wellenlängen des Cd-Zn-Spektrums entsprach; denn, während die Belichtungszeit für das Hg-Spektrum etwa 3 Minuten betrug, betrug sie für das Cd-Zn-Spektrum eine schwache Stunde, in welcher Zeit kleine Änderungen denkbar waren. Meistens konnte allerdings zwischen den Aufnahmen 1. und 3. bzw. 4. und 6. kein Unterschied festgestellt werden.

Bei zwei Aufnahmen bekam ich (bei einer Belichtungszeit von $1^1/_2$ Stunden) kontinuierlichen Grund bis 2026, so daß die Zahl der gewanderten Interferenzen ohne weiteres einwandfrei festgestellt werden konnte.

Die Dispersion von 1990 bis 1854 bekam ich auf folgende Weise. Es wurde wieder wie oben bei kommunizierenden, mit Luft gefüllten Röhren photographiert 1. das Hg-Spektrum,

2. das Aluminiumfunkenspektrum, 3. das Hg-Spektrum. Von einer Röhre wurde Luft ausgepumpt und 4. das Hg-Spektrum, 5. der Al-Funke, 6. das Hg-Spektrum photographiert. Aus 1., 3., 4. und 6. wurde für die Hg-Linie 2968 Å.E. die Zahl gewanderter Streifen bestimmt. Aus ihr berechnete ich mit Hilfe der Kochschen Dispersionsformel (S. 545) die Zahl gewanderter Streifen für die Al-Linien 1990 bis 1854. Nun zeigten schon bei 2145 und 2026 Å.E. meine Dispersionsmessungen von den extrapolierten Kochschen kleine systematische Abweichungen (Tab. 3, S. 546). Diese Abweichungen mußten bei 1990 etwa dieselben sein wie bei 2026. Dies war auch der Fall. Von jetzt ab wurden sie systematisch weiter größer, so daß die Zahl gewanderter Streifen mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit angenommen werden konnte. Zur sicheren Feststellung photographierte ich bei kleineren Druckänderungen (etwa $^1/_4$, dann $^1/_8$ Atmosphäre). Die Annahme wurde bestätigt. Schließlich erschien bei einer Druckänderung von 71 mm, was 87 gewanderten Streifen der Linie 1854 Å.E. entsprach, kontinuierlicher Grund, so daß auch der leiseste Zweifel noch beseitigt wurde.

Bei den Dispersionsmessungen bis $\lambda = 2026$ Å.E. wurde das eine Rohr vollständig ausgepumpt. Für $\lambda = 5462$ Å.E. wanderten etwa 250 Streifen, für $\lambda = 2026$ Å.E. nahezu 800. Die Interferenzen der Linien 1990 bis 1854 zeigten bei vollständigem Auspumpen einer Röhre infolge der kleinen Dispersion des Flußspatprismas nicht mehr die gewünschte Schärfe: es hätte, um sie zu erreichen, der Spalt S (Fig. 2) sehr enge gemacht werden müssen, was mit einer Lichtschwächung verbunden war. (Die Al-Linien im äußersten Ultraviolett sind alle verbreitert, da der größeren Intensität halber keine Selbstinduktion benützt wurde. Als Kapazität dienten sechs Leidener Flaschen.) Ich zog es deshalb vor, bei kleineren Druckänderungen zu messen; immerhin wanderten im Maximum für 1854 noch 486 Streifen.

Die Expositionszeit betrug hier etwa $1^1/_2$ Stunden. Der Al-Funke wurde nicht, wie die Hg-Lampe oder der Cd-Zn-Funke, durch ein Objektiv auf den Spalt S abgebildet (Fig. 2), sondern befand sich direkt hinter S. Da die Überschlagsstelle an den Elektroden nicht konstant gehalten werden konnte, mußte während der ganzen Expositionszeit in einer dem Ob-

jektiv *A* gegenübergestellten Glasplatte das Aluminiumlicht beobachtet und die Stelle des Al-Funkens dauernd nachreguliert werden, um größtmöglichste Intensität zu bekommen.

Ergebnisse.

Bei den verschiedenen Messungen wurde abwechselnd das eine oder andere Interferenzrohr ausgepumpt. Um ein Bild der Genauigkeit zu geben, ist in Tab. 1 angegeben, wieviele Streifen (s) der obenstehenden Wellenlängen (λ) 10000 Streifen der grünen Hg-Linie nach meinen einzelnen Beobachtungen entsprachen.

Tabelle 1.

$\lambda = 4047$ s	$\lambda = 2968$ s	$\lambda = 2026$ s	Gewicht	$\lambda = 1854$ s	Gewicht
13717,7	19337,9	31251,6	(2)	35817,7	(2)
13717,7	19336,5	31250,8	(1)	35827,1	(2)
13718,5	19336,7	31250,2	(1)	35838,0	(1)
13717,9	19336,9	31250,2	(2)	35819,2	(1)
13718,2	19337,9	31257,6	(2)	35817,6	(3)
13718,5	19337,2	31255,8	(2)	35835,7	(3)
13717,6		31251,3	(2)		
Mittel 13718,0	19337,2	31252,9		35825,6	

Der mittlere Fehler des Mittelwertes würde darnach betragen:

bei $\lambda = 4047$ Å.E. $\pm$ 0.14. also etwa 0,001 Proz.,
„ $\lambda = 2968$ Å.E. $\pm$ 0.24. „ „ 0,0013 „
„ $\lambda = 2026$ Å.E. $\pm$ 1.13. „ „ 0,0037 „

Bei $\lambda = 1854$ sind die Abweichungen etwas größer, da die Röhren nicht mehr ganz ausgepumpt wurden; immerhin beträgt der mittlere Fehler auch hier nur $\pm$ 3.8, also etwa 0,01 Proz.

Die große Genauigkeit, die hier bei den Dispersionsmessungen zu erzielen ist, ist durch die Methode bedingt: Die photographische Platte allein gibt die Dispersion; Temperatur- und Druckablesungen, Länge der Interferenzröhren kommen gar nicht in Rechnung. Irgendwelche Veränderungen während einer Aufnahme wirken bei allen Wellenlängen gleichzeitig und in gleicher Richtung.

Was die Absolutwerte anbelangt, so kommt hier der

Fehler durch Temperatur- und Druckbeobachtung, sowie der konstante Fehler der Messung der Röhrenlänge in Rechnung. Die einzelnen Beobachtungen finden sich in Tab. 2.

Tabelle 2.

$(n-1)10^7$ für $\lambda = 5462$
2932,89
2932,42
2932,97
2932,69
2932,24
2932,95
2932,75
2932,99
Mittel 2932,74

Der mittlere Fehler würde demnach $\pm$ 0,1, also 0,0034 Proz. betragen.

Die Länge der Röhren wurde auf folgende Weise gemessen: Auf einem Messingstabe waren zwei gegen einander gerichtete Spitzen aus Kupfer verschiebbar (die eine Spitze noch mikrometrisch). Mit ihnen wurden die mit Verschlußplatten versehenen Röhren an der Stelle der Zwischenwand abgetastet und die Entfernung der Spitzen mit dem Kathetometer gemessen; die Dicke der Verschlußplatten davon abgezogen. Die Messungen ergaben:

an der einen Röhrenseite	an der gegenüberliegenden
515,88	516,02
515,91	515,99
515,89	516,02
Mittel 515,89 mm	Mittel 516,01 mm

Die Verschlußplatten waren also etwas schief aufgekittet. Die Höhe des benutzten Lichtbündels war aber nicht ganz halb so groß als die Entfernung der Punkte, an denen bei den obigen zwei Messungen die Kupferspitzen angesetzt wurden, so daß die Lichtwege der entferntesten Lichtstrahlen innerhalb der Interferenzröhren um 0,5 mm, vom mittleren Lichtstrahl also um 0,25 mm differierten. $^1/_{20}$ mm dürfte bei der Messung der Röhrenlänge gesichert sein; das ist 0,01 Proz.

Der Durchschnitt der obigen zwei Messungen ist 515,95. Die Dicke der Verschlußplatten betrug $2 \cdot 2{,}95 = 5{,}90$ mm, also die Länge der Luftschicht in den Röhren 510,05 mm. Der Glasmaßstab des Kathetometers ist auf 0° zu reduzieren. Damit wird die Länge der Luftschicht 510,10 mm. Nimmt man an, der Fehler von 0,01 Proz. in der Längenmessung der Röhren addiere sich zu dem Beobachtungsfehler von 0,0034 Proz., so macht das immer noch nur vier Einheiten in der fünften Stelle aus. Die vierte Stelle in $(n-1)10^7$ dürfte demnach für sämtliche Brechungsexponenten sicher sein.

In Tab. 3 sind die Brechungsexponenten sowie die 10000 Streifen der grünen Hg-Linie entsprechende Streifenzahl der verschiedenen Wellenlängen λ angegeben. Außerdem stehen dort die von Koch und Kayser und Runge gefundenen Werte.

Koch arbeitet nach derselben Methode wie ich. Er gibt den Fehler seiner Dispersionsmessungen auf weniger als 0,01 Proz. an. Den Absolutwert bestimmt Koch bei seinen Dispersionsmessungen im Ultraviolett nicht genau; er nimmt einen früher von ihm auf nicht photographischem Wege bestimmten Wert des Brechungsexponenten für $\lambda = 5462$ an. Koch verwendet das Hg-Spektrum und ein Vergleich ist teilweise direkt möglich. Für die anderen von mir benützten Wellenlängen habe ich nach der von Koch angegebenen Dispersionsformel:

$$\frac{3}{2}\,\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{5711190\cdot 10^{-5}}{211{,}146 - 10^{-8}\lambda^{-2}} + \frac{87003\cdot 10^{-5}}{49{,}5608 - 10^{-9}\lambda^{-2}}$$

(λ in cm) die Brechungsexponenten, sowie die 10000 Streifen der grünen Hg-Linie entsprechende Streifenzahl berechnet. Die intrapolierten Werte sind mit einem Stern, die extrapolierten mit einer Klammer versehen (Koch beobachtet bis 2379 Å.E.). Bis 2300 Å.E. stimmen die Dispersionsmessungen (*s*) gut überein (bis auf 0,01 Proz.). Die Abweichung bei 2026 ist schon merklich; sie entspricht bei 800 gewanderten Streifen 0.4 einer Streifenbreite. Von jetzt ab nehmen die Abweichungen rasch zu, was ja durch die nun beginnende Absorption der Luft verständlich ist.

Die Absolutwerte weichen voneinander ab. Koch nimmt zwar kohlensäurehaltige Luft, was aber die Werte von $(n-1)\,10^7$ nur um etwa eine Einheit der vierten Stelle größer macht, die Abweichungen würden dann immer noch drei Einheiten der vierten Stelle, also 0,1 Proz., betragen.

Kayser und Runge haben mittelst Hohlprisma, eingeführt zwischen Gitter und Kassette, die Dispersion der Luft bis 2360 Å.E. bestimmt. Ich habe ebenfalls nach der von ihnen angegebenen Dispersionsformel

$$(n-1)10^8 = 28787 + 131{,}610^{-4}\lambda^{-2} + 3{,}16\cdot 10^{-8}\lambda^{-4} \quad (\lambda \text{ in cm})$$

für die von mir benützten Wellenlängen die Werte ausgerechnet

Tabelle 3.

λ (Vakuum) Å.E.	Traub		Koch				Kayser u. Run	
	s	$(n-1)10^7$	s	Diff.	$(n-1)10^7$	Diff.	$(n-1)10^7$	Diff
5462,26	10000	2932,74	10000		2937,00	+4,26	2926,4*	−6,3
4359,56	12671,9	2966,09	12672,7	+0,8	2970,60	+4,51		
4047,70	13718,0	2981,26	13717,7	−0,3	2985,53	+4,27	2970,7	−10
3342,44	16908,0	3034,29	16909,3	+1,3	3038,93	+4,64	3021,8*	−12
2968,15	19337,2	3081,63	19338,5	+1,3	3086,31	+4,68		
2753,61	21101,2	3119,68	21103,7	+2,5	3124,59	+4,91	3107,2*	−12
2573,83	22872,5	3160,78	22874,7*	+2,2	3165,71*	+4,93		
2313,53	26121,6	3244,70	(26121,0)	−0,6	(3249,37)	+4,67		
2145,06	28861,0	3323,93	(28854,4)	−6,6	(3328,02)	+4,09		
2026,05	31252,9	3399,71	(31238,4)	−14,5	(3403,07)	+3,36	(3386,8)	−12
1990,52	32072,1	3427,63	(32047,4)	−24,7	(3429,97)	+2,34		
1935,85	33445,2	3476,21	(33401,0)	−44,2	(3476,67)	+0,46		
1862,77	35556,8	3556,16	(35464,1)	−92,7	(3552,06)	−4,10	(3520,4)	−35
1854,73	35825,6	3567,58	(35712,0)	−113,6	(3561,50)	−6,08	(3528,3)	−39

(Tab. 3). Die Luft war bei Kayser und Runges Messungen kohlensäurehaltig und nicht getrocknet. Für trockene Luft wäre nach Kayser und Runge $(n-1)10^7$ um etwa drei Einheiten der vierten Stelle zu erhöhen. Die Abweichung von meinen Messungen wäre demnach bei $\lambda = 5462$ noch vier Einheiten der vierten Stelle, so daß sich mein Wert in der Mitte der von Koch und Kayser-Runge gefundenen befindet. Es sei noch der Wert von Cuthbertson erwähnt; er findet für kohlensäurehaltige Luft $(n-1)10^7 = 2936$. Cuthbertson beobachtet bei verschiedensten Drucken (er läßt 400, 600, 800 Streifen vorbeiwandern).

Kayser und Runge haben Druckänderungen von etwa 10 Atmosphären.

Mit dem Werte von Posejpal $(2916{,}7 \pm 1{,}4)$ ist der von mir gefundene ebenfalls (wie der Kochsche) im Widerspruch.

Die Beobachtungen lassen sich durch die Dispersionsformel

$$n - 1 = \frac{5\,517\,160 \cdot 10^{-8}}{199{,}5534 - 10^{-8}\lambda^{-2}} + \frac{48\,803 \cdot 10^{-8}}{43{,}8193 - 10^{-8}\lambda^{-2}}$$

(λ in cm) wiedergeben. Die beobachteten und wiederberechneten Werte finden sich in Tab. 4. Selbst die Differenzen bei 186 und 185 betragen weniger als 0,02 Proz.; immerhin sind sie auffallend. Es könnte sein, daß sie der bei 186 beginnenden

Tabelle 4.

λ	$(n-1)\,10^7$ beobachtet	$(n-1)\,10^7$ berechnet	Differenz
5462	2932,74	2932,58	−0,16
4359	2966,09	2966,19	+0,10
4047	2981,26	2981,38	+0,12
3342	3034,29	3034,55	+0,26
2968	3081,63	3081,80	+0,17
2753	3119,68	3119,73	+0,05
2573	3160,78	3160,91	+0,13
2313	3244,70	3244,49	−0,21
2145	3323,93	3323,63	−0,30
2026	3399,71	3400,02	+0,31
1990	3427,63	3427,71	+0,08
1935	3476,21	3476,33	+0,12
1862	3556,16	3556,78	+0,62
1854	3567,58	3567,05	−0,53

starken Absorption der Luft und dem damit verbundenen raschen Ansteigen des Brechungsexponenten zuzuschreiben sind. C. Runge[1]) hat die Wellenlängen dieser Aluminiumlinien im Vakuum und bei Atmosphärendruck bestimmt. Er findet die Unterschiede 0,68 bei 1854 und 0,61 bei 1862, während nach der extrapolierten Kayser und Rungeschen Dispersionsformel beidemal sich die Unterschiede 0,61 Å. E. ergeben sollten. Runge weist hier auf die Möglichkeit hin, dieser Unterschied könnte in der bei 1862 scharf einsetzenden Absorption der Luft und dem damit verbundenen raschen Ansteigen des Brechungsexponenten seinen Grund haben. Die vorliegenden Messungen haben gezeigt, daß ein solch rasches Ansteigen des Brechungsexponenten, wie Runge es für möglich hält, nicht stattfindet. Es dürfte vermutlich bei den Messungen Runges entweder die im Vakuum gemessene Linie 1854 um 0,07 Å. E. zu groß oder die in Luft gemessene um soviel zu klein sein.

Aus der Dispersionsformel berechnet sich die Eigenwellenlänge der einen Elektronengattung zu $\lambda_1 = 1511$ Å. E., die der zweiten zu $\lambda_2 = 708$ Å. E. (Koch findet $\lambda_1 = 1421$ Å. E. und $\lambda_2 = 688$ Å. E.). Die erstere ist dem Sauerstoff zuzuschreiben, da nach Lyman[2]) Sauerstoff einen kräftigen Ab-

1) C. Runge, Wied. Annalen **55**. S. 44—48. 1895.
2) Th. Lyman, Astrophys. Journ. **27**. S. 87. 1908.

sorptionsstreifen zwischen 1760 und 1270 Å.E. zeigt, während Stickstoff zwischen 1800 und 1250 Å.E. nur schwache Absorption aufweist. Die aus der Dispersionsformel berechnete Eigenwellenlänge (1511 Å.E.) fällt genau in die Mitte des fraglichen Absorptionsgebietes (1515 Å.E.).

Zusammenfassung.

Es wurde der absolute Wert des Brechungsexponenten der kohlensäurefreien trockenen Luft für die grüne Hg-Linie möglichst genau bestimmt [$(n-1)\,10^7 = 2932{,}74$]. Die vierte Stelle dürfte gesichert sein. Die Messung ergibt (wie auch die Kochsche) einen vollständigen Widerspruch mit den Messungen Posejpals (Bestimmung von K und β in $n - 1 = K\,p\,(1 + \beta\,p)$ und damit von $n - 1$).

Die Dispersion der Luft wurde bis 1854 Å.E. untersucht. Die Beobachtungen lassen sich sehr befriedigend durch eine dielektronische Dispersionsformel wiedergeben. Die Dispersionsmessungen stimmen mit denen von Koch im gemeinsam beobachteten Spektralbereich sehr gut überein; im Bereich kürzerer Wellen finden von den extrapolierten Kochschen Werten Abweichungen statt.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, Herrn Prof. Paschen auch an dieser Stelle für die Anregung und Hilfe bei der Arbeit herzlichen Dank zu sagen.

Tübingen, Physikalisches Institut, August 1919.

(Eingegangen 9. September 1919.)

3. *Spezifische Wärme und Zustandsgleichung von Kristallen;*

von K. Försterling.

Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1]) hatte ich gelegentlich anderer Überlegungen das Gesetz der thermischen Dilatation isotroper einatomiger Körper aus dem Hamiltonschen Prinzip hergeleitet. Die inzwischen von M. Born[2]) ausgebaute Dynamik der Kristallgitter gestattet, die dort angewandte Methode auch auf ein- und mehratomige Kristalle zu übertragen.

Die thermische Dilatation steht in engem Zusammenhang mit dem Energieinhalt des betreffenden Körpers. Da die von Born und v. Karman ausgearbeitete Theorie der spezifischen Wärmen, welche von Born ihre endgültige Fassung in den Gleichungen (189) und (198) (S. 75—76) des angeführten Werkes erhalten hat, noch nicht in einwandfreier Weise mit den Beobachtungen verglichen ist, habe ich zunächst versucht, diese Theorie an einigen Beispielen zu prüfen, zumal nach einer Bemerkung von Grüneisen[3]) die Bornsche Theorie versagen sollte. Indessen knüpft die Rechnung von Grüneisen an die Näherungsformel (200) (S. 77) an, welche, wie unten gezeigt wird, auf die bei Flußspat vorliegenden Bedingungen nicht zulässig ist. Besonders lag mir daran, in dieser Arbeit die aus der Bornschen Theorie sich ergebenden Atomfrequenzen festzustellen, deren Lage gegenüber den Reststrahlenwellenlängen in der nachstehenden Arbeit auf Grund der Reflexionstheorie berechnet werden soll.

Nach Born zerfällt der Energieinhalt in 2 Teile, die im wesentlichen den beiden bereits von Nernst[4]) auseinander gehaltenen Anteilen entsprechen: der Bewegungen der Moleküle

1) K. Försterling, Ann. d. Phys. 47. S. 1127. 1915.
2) M. Born, Dynamik der Kristallgitter. Teubner, 1915.
3) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 55. S. 384. Anm. 2. 1918.
4) W. Nernst, Wolfskehlvortrag Göttingen (Teubner 1914) S. 79.

als Ganze und der Atome eines Moleküls gegeneinander. Während der letztere Anteil dem Einsteinschen Gesetz unterworfen ist, wird der andere Anteil nach der Methode von Debye[1]) entwickelt. Allerdings besteht hier schon bei isotropen Körpern ein wichtiger Unterschied: Während Debye für die transversalen und longitudinalen Wellen eine gemeinsame Grenzfrequenz ansetzt, wird in der Bornschen Theorie für eine jede der Wellengattungen eine besondere angenommen. Eine Entscheidung zwischen diesen beiden Annahmen ist experimentell bisher nicht möglich gewesen. Dagegen werden wir in der Theorie der thermischen Dilatation zeigen können, daß der Bornsche Ansatz, aber nicht der Debyesche mit dem II. Hauptsatz der Thermodynamik verträglich ist.

Bei einem Kristall liegen die Verhältnisse recht kompliziert. Hier pflanzen sich in jeder Richtung 3 Wellen fort. Betrachten wir einen dieser Wellentypen und zwar nur solche Wellen dieser Art, deren Fortpflanzungsrichtung in einem Kegel vom Öffnungswinkel $d\Omega$ liegt, so kann man auf jede solche Gruppe die Debyeschen Betrachtungen anwenden und für sie eine Grenzfrequenz aufstellen, die aber von der Richtung des herausgegriffenen Kegels $d\Omega$ abhängig ist. Die Summation läßt sich bisher nur für nicht zu tiefe Temperaturen durchführen, nämlich nur in dem Bereich, wo die von Debye[2]) angegebene Reihe für die spezifische Wärme, welche nach geraden Potenzen der reziproken Temperaturen fortschreitet, konvergiert. In diesem Falle braucht man nämlich, wie man sogleich sieht, die Gleichungen für die Geschwindigkeiten der Wellen nicht explizit aufzulösen, ein Kunstgriff, von dem bereits Thirring[3]) Gebrauch gemacht hat. Während auf diese Weise der Anteil der Molekülschwingungen der spezifischen Wärme aus anderen Daten vollständig zu berechnen ist, besteht bei der Anwendung der Einsteinschen Funktion in der Wahl der Frequenz der Atomschwingungen eine gewisse Willkür, da die Rubensschen Beobachtungen nur einen Anhalt für die ungefähre Lage dieser Frequenz bieten. Wir werden sehen, daß in dem eben abgegrenzten der Theorie zugänglichen

1) P. Debye, Ann. d. Phys. **39**. S. 789. 1912.
2) P. Debye, a. a. O. S. 799. Formel 12.
3) H. Thirring, Phys. Zeitschr. **14**. S. 867. 1913.

Gebiete die Born-Karmansche Theorie sich ausgezeichnet ewährt.

Für die Theorie der Zustandsgleichung isotroper einatomiger örper liegen eine Reihe Versuche vor, welche sich zum Teil f Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen [S. Ratnowski[1]), P. ebye[2])], zum Teil auf die Anwendung des Virialsatzes . Mie[3]), E. Grüneisen[4])] stützen. Die ursprünglichen rüneisenschen Entwicklungen gehen von den Schwingungen es Atoms unter dem Einfluß anziehender und abstoßender räfte aus, während Debye sich auf die Vorstellung von stischen Wellen, welche den Körper durchziehen, stützt. urch thermodynamische Betrachtungen hat Grüneisen seine rmeln in verschiedener Richtung erweitert.

Debye bildet zunächst die freie Energie des betreffenden örpers. Deren Existenz und damit die Gültigkeit des zweiten auptsatzes wird also vorausgesetzt, statt daß sie sich als onsequenz der molekulartheoretischen Vorstellung von selbst gäbe. In Wirklichkeit liegt die Sache sogar so, daß die rundvorstellungen der Debyeschen Theorie zusammen mit r Annahme *einer* Grenzfrequenz im Widerspruch zum zweiten auptsatz stehen, wie bereits erwähnt wurde. Die folgenden trachtungen versuchen eine Darstellung der thermischen latation zu geben allein auf Grund molekulartheoretischer rstellungen ohne Zuhilfenahme thermodynamischer Be- hungen. Nur eine Annahme muß außerdem hinzugezogen rden: das Plancksche Gesetz für die mittlere Energie eines riodischen Freiheitsgrades. Eine innere Vollkommenheit, e sie die kinetische Theorie der idealen Gase besitzt, läßt h also der Molekulartheorie des festen Körpers infolge des ineinspielens der Quantentheorie zurzeit nicht geben.

Spezifische Wärme.

§ 1. Allgemeine Formeln.

Die folgenden Betrachtungen mögen sich auf ein Gramm- lekül der betreffenden Substanz beziehen, das entsprechende

1) S. Ratnowski, Ann. d. Phys. **38**. S. 637. 1912.
2) P. Debye, Wolfskehlvortrag. Göttingen 1914. S. 27.
3) G. Mie, Ann. d. Phys. **11**. S. 657. 1903.
4) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. **39**. S. 257. 1912.

Volumen sei V; es bedeute ferner N die Zahl der Moleküle in einem Grammolekül, h und k die beiden Konstanten in der Planckschen Strahlungsformel und ϑ die absolute Temperatur. Faßt man eine der drei Wellenarten (j) ins Auge, so sei ihre Geschwindigkeit ω_j. Die Maximalfrequenz $\bar{\nu}_j$ sei definiert durch:

$$\bar{\nu}_j = \omega_j \sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi V}}.$$

Mit Debye sei die charakteristische Temperatur

$$\Theta_j = \frac{h}{k}\bar{\nu}_j \tag{1}$$

eingeführt, wobei aber jetzt Θ_j ebenso wie $\bar{\nu}_j$ von der Richtung der Welle abhängt. Der Energieinhalt aller Wellen einer Gattung mit der Fortpflanzungsrichtung im Kegel $d\Omega$ sei

$$\frac{1}{4\pi}\varepsilon_j \, d\Omega = \frac{1}{4\pi} 3Nk\vartheta\left(\frac{\vartheta}{\Theta_j}\right)^3 \int_0^{\Theta_j/\vartheta} \frac{x^3}{e^x - 1} \, dx \cdot d\Omega \tag{2}$$

und der partielle Differentialquotient nach ϑ bei konstantem Θ werde mit γ_j bezeichnet, also

$$\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \vartheta} = \gamma_j. \tag{3}$$

Die Energie der Atomschwingungen (Einsteinsche Funktion) der $i$ten Art Atome mit der Frequenz ν_i sei:

$$\varepsilon_i = N \frac{h\nu_i}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1}. \tag{4}$$

Ähnlich wie oben sei

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \vartheta} = \gamma_i \tag{5}$$

definiert. Der Energieinhalt U eines festen Körpers ist dann nach der Born-Karmanschen Theorie gegeben durch

$$U = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{3} \int \varepsilon_j \, d\Omega + \sum_i \varepsilon_i. \tag{6}$$

Das Integral ist über die gesamte Einheitskugel zu erstrecken. A's spezifische Wärme bei konstantem Volumen c_v wollen wir zunächst mit Debye den partiellen Differentialquotienten $\partial U/\partial \vartheta$ bei konstantem Θ ansehen, also annehmen, daß die Elastizitätskonstanten nicht direkt von der Temperatur, sondern nur vom Volumen abhängen können. (Auf eine

Erweiterung der Theorie in dieser Hinsicht soll in einem späteren Paragraphen eingegangen werden.) Für die spezifische Wärme findet man dann:

$$(7) \qquad c_v = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3}\int \gamma_j \, d\Omega + \sum_i \gamma_i = c_1 + c_2 .$$

Eine Prüfung dieser Formel ist nur im Gebiete tiefster Temperaturen durchgeführt worden, wobei die auftretenden Integrale durch ein Interpolationsverfahren numerisch ausgewertet wurden.[1]) An dieser Stelle soll eine Beschränkung auf nicht zu tiefe Temperaturen stattfinden auf ein Gebiet, wo die von Debye[2]) angegebene Reihe ($\gamma_\infty = k\,N$)

$$(8) \qquad \frac{\gamma}{\gamma_\infty} = 1 - \frac{\left(\frac{\Theta}{\vartheta}\right)^2}{20} + \frac{\left(\frac{\Theta}{\vartheta}\right)^4}{560} - \frac{\left(\frac{\Theta}{\vartheta}\right)^6}{18144} + \frac{\left(\frac{\Theta}{\vartheta}\right)^8}{633600} - \frac{\left(\frac{\Theta}{\vartheta}\right)^{10}}{23063040} + \cdots$$

für jede Richtung der fortschreitenden Wellen konvergiert. Wenn wir die Dichte mit ϱ bezeichnen und abkürzen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{h}{k\sqrt[6]{\varrho}}\sqrt[3]{\dfrac{3N}{4\pi V}} = g \\ \text{und} \qquad \varrho\,\omega_j^2 = q_j \\ \text{so ist} \qquad \Theta_j = g\sqrt{q_j} . \end{cases}$$

Die Größe g ist ähnlich wie bei Debye zu berechnen; ist M das Molekulargewicht, so ist

$$g = \frac{h}{k}\,\frac{N}{4\pi}\,\frac{1}{\varrho^{1/6}M^{1/3}} = \frac{35{,}74\cdot 10^{-4}}{(3\varrho^{1/6}M)^{1/3}} .$$

Die Werte für ω_j, bzw. für q_j sind aus der Elastizitätstheorie zu berechnen.

Das Koordinatensystem X, Y, Z sei den eventuell vorhandenen Symmetrieachsen des Kristalls zugeordnet.[3]) Das Koordinatensystem X', Y', Z' sei so orientiert, daß die Fortpflanzungsrichtung der betrachteten Welle mit der Z'-Achse zusammenfällt; die zugehörigen Elastizitätskonstanten seien

1) Hopf u. G. Lechner, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. S. 643. 1915.
2) P. Debye, a. a. O. S. 799.
3) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik. S. 99.

c_{hk} bzw. c_{hk}': die Verrückungskomponenten im gestrichenen Koordinatensystem u', v', w'. Die Bewegungsgleichungen beim Fehlen äußerer Kräfte lauten dann:

$$(10)\quad \begin{cases} \varrho\,\dfrac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = c_{55}'\dfrac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + c_{54}'\dfrac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + c_{53}'\dfrac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}, \\ \varrho\,\dfrac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = c_{45}'\dfrac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + c_{44}'\dfrac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + c_{43}'\dfrac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}, \\ \varrho\,\dfrac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = c_{35}'\dfrac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + c_{34}'\dfrac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + c_{33}'\dfrac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}. \end{cases}$$

Hierbei hängen die c_{hk}' mit den c_{hk} durch die folgenden Beziehungen zusammen, falls α, β, γ die Richtungskosinus der Z'-Achse gegen X, Y, Z ist.

$$(11)\quad \begin{cases} c_{55}' = c_{11}\alpha^2 + c_{66}\beta^2 + c_{55}\gamma^2 + 2c_{65}\beta\gamma + 2c_{51}\gamma\alpha + 2c_{16}\alpha\beta, \\ c_{44}' = c_{66}\alpha^2 + c_{22}\beta^2 + c_{44}\gamma^2 + 2c_{24}\beta\gamma + 2c_{46}\gamma\alpha + 2c_{62}\alpha\beta, \\ c_{33}' = c_{55}\alpha^2 + c_{44}\beta^2 + c_{33}\gamma^2 + 2c_{43}\beta\gamma + 2c_{35}\gamma\alpha + 2c_{54}\alpha\beta. \end{cases}$$

$$c_{54}' = c_{45}' = c_{16}\alpha^2 + c_{62}\beta^2 + c_{54}\gamma^2 + (c_{64}+c_{52})\beta\gamma + (c_{56}+c_{14})\gamma\alpha + (c_{12}+c_{66})\alpha\beta.$$

$$c_{53}' = c_{35}' = c_{15}\alpha^2 + c_{64}\beta^2 + c_{53}\gamma^2 + (c_{63}+c_{54})\beta\gamma + (c_{55}+c_{13})\gamma\alpha + (c_{14}+c_{65})\alpha\beta.$$

$$c_{43}' = c_{34}' = c_{65}\alpha^2 + c_{24}\beta^2 + c_{43}\gamma^2 + (c_{23}+c_{44})\beta\gamma + (c_{45}+c_{63})\gamma\alpha + (c_{64}+c_{25})\alpha\beta.$$

$$c_{hk} = c_{kh}.$$

Führt man in die Bewegungsgleichungen (10) periodische Lösungen ein, so erhält man als Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeit ω bzw. für q eine Gleichung 8. Grades von der Form:

$$(12)\qquad q^3 + a\,q^2 + b\,q + c = 0.$$

deren Lösungen q_1, q_2, q_3 sein mögen. Hierin ist

$$(13)\quad \begin{cases} a = -(q_1 + q_2 + q_3) = -(c_{33}' + c_{44}' + c_{55}'), \\ b = +q_2 q_3 + q_1 q_3 + q_1 q_2 = +(c_{44}'c_{55}' + c_{33}'c_{44}' + c_{33}'c_{55}' - [c_{45}'^2 + c_{35}'^2 + c_{34}'^2]), \\ c = -q_1 q_2 q_3 = -[c_{33}'c_{44}'c_{55}' + 2c_{34}'c_{35}'c_{45}' - (c_{33}'c_{45}'^2 + c_{44}'c_{35}'^2 + c_{55}'c_{34}'^2)]. \end{cases}$$

Für den vorliegenden Zweck sind nur die Summen $\sum_{j=1}^{3} q^n$ zu berechnen. Es findet sich

$$(14)\qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{3} q_j = -a, \\ \sum_{j=1}^{3} q_j^2 = a^2 - 2b, \\ \sum_{j=1}^{3} q_j^3 = -(a^3 - 3ab + c). \end{cases}$$

Die höheren Potenzen lassen sich nach folgender Rekursionsformel berechnen

$$(14a)\qquad \sum_{j=1}^{3} q_j^n = -\left[a \sum_{j=1}^{3} q_j^{(n-1)} + b \sum_{j=1}^{3} q_j^{(n-2)} + c \sum_{j=1}^{3} q_j^{(n-3)}\right].$$

Diese Summen lassen sich leicht bilden und aus ihnen sind dann die Integrale

$$(15)\qquad \begin{cases} J_1 = \frac{1}{4\pi} \int \sum_{j=1}^{3} q_j \, d\Omega, \\ J_2 = \frac{1}{4\pi} \int \sum_{j=1}^{3} q_j^2 \, d\Omega, \\ \cdots\cdots\cdots \\ J_n = \frac{1}{4\pi} \int \sum_{j=1}^{3} q_j^n \, d\Omega \end{cases}$$

zu berechnen.[1])

1) Bei der Integration über die Einheitskugel fallen alle Integrale, welche ungerade Potenzen von α, β, γ enthalten, fort. Ferner sind alle Integrale gleich, welche durch zyklische Vertauschung von α, β, γ auseinander hervorgehen. Die wichtigsten Integrale sind die folgenden:

$$\int \alpha^2 \, d\Omega = \frac{4\pi}{3}, \qquad \int \alpha^6 \beta^2 \, d\Omega = \frac{4\pi}{63},$$

$$\int \alpha^4 \, d\Omega = \frac{4\pi}{5}, \qquad \int \alpha^4 \beta^2 \, d\Omega = \frac{4\pi}{35},$$

$$\int \alpha^6 \, d\Omega = \frac{4\pi}{7}, \qquad \int (\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)^2 \, d\Omega = \frac{4\pi \cdot 41}{105},$$

$$\int \alpha^8 \, d\Omega = \frac{4\pi}{9}, \qquad \int (\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) \, d\Omega = \frac{4\pi \cdot 11}{105},$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) folgt nun nach Einführung der Integrale (14) für die spezifische Wärme bei konstantem Volumen des Grammoleküls eines beliebigen Kristalls:

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{c_v}{kN} = 3 - \frac{J_1 g^2}{20}\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{J_2 g^4}{560}\frac{1}{\vartheta^4} - \frac{J_3 g^6}{18\,144}\frac{1}{\vartheta^6} + \frac{J_4 g^8}{633\,600}\frac{1}{\vartheta^8} \\ \qquad\qquad - \frac{J_5 g^{10}}{28\,068\,040}\frac{1}{\vartheta^{10}} + \cdots \end{cases}$$

oder mit leicht ersichtlicher Abkürzung:

$$(16\,a)\qquad \frac{c_v}{kN} = 3 - \frac{a_1}{\vartheta^2} + \frac{a_2}{\vartheta^4} - \frac{a_3}{\vartheta^6} + \frac{a_4}{\vartheta^8} - \cdots$$

§ 2. Reguläre Kristalle.

Das Schema für die Elastizitätskonstanten hat für reguläre Kristalle die folgende Form:

$$\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{44} \end{array}$$

Es vereinfachen sich die Beziehungen zwischen den c_{hk} und c_{hk}', so daß gilt:

$$\begin{aligned} c_{55}' &= c_{11}\,\alpha^2 + c_{44}\,(\beta^2+\gamma^2), & c_{45}' &= c_{54}' = (c_{12}+c_{44})\,\alpha\,\beta, \\ c_{44}' &= c_{11}\,\beta^2 + c_{44}\,(\alpha^2+\gamma^2), & c_{53}' &= c_{35}' = (c_{12}+c_{44})\,\alpha\,\gamma, \\ c_{33}' &= c_{11}\,\gamma^2 + c_{44}\,(\alpha^2+\beta^2), & c_{43}' &= c_{34}' = (c_{12}+c_{44})\,\beta\,\gamma. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Gleichung dritten Grades für $q : a, b, c$ drücken sich durch die c_{hk} in folgender Weise aus:

$$\begin{aligned} a &= -(c_{11}+2c_{44}), \\ b &= +c_{44}(2c_{11}+c_{44}) + [c_{11}^2 - 2c_{11}c_{44} - c_{12}(c_{12}+2c_{44})] \\ &\qquad (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2). \end{aligned}$$

$$\int \alpha^4\beta^4\,d\Omega = \frac{4\pi}{105}, \qquad \int \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2)^2\,d\Omega = \frac{4\pi}{21},$$

$$\int \alpha^4\beta^2\gamma^2\,d\Omega = \frac{4\pi}{315}, \qquad \int \alpha^2\beta^2\gamma^2\,d\Omega = \frac{4\pi}{105},$$

$$\int (\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2)\,d\Omega = \frac{4\pi}{5}.$$

Tabelle I.

	$c_{11} \cdot 10^{-8}$	$c_{44} \cdot 10^{-8}$	$c_{12} \cdot 10^{-8}$	J_1	J_2	J_3	J_4	ϱ	M	$g^2 \cdot 10^{+8}$
Flußspat	16,7	3,45	4,57	$2{,}36 \cdot 10^{9}$	$2{,}54 \cdot 10^{18}$	$3{,}49 \cdot 10^{27}$	$6{,}61 \cdot 10^{36}$	3,18	78,18	31,28
Steinsalz	4,77	1,29	1,32	$7{,}35 \cdot 10^{8}$	$2{,}40 \cdot 10^{17}$	$7{,}50 \cdot 10^{25}$	$2{,}60 \cdot 10^{34}$	2,18	58,51	27,59
Sylvin	3,75	0,655	0,198	$5{,}06 \cdot 10^{8}$	$1{,}244 \cdot 10^{17}$	$3{,}27 \cdot 10^{25}$	$9{,}91 \cdot 10^{33}$	1,98	74,59	22,83
Natriumchlorat	6,63	1,22	−2,14	$9{,}07 \cdot 10^{8}$	$3{,}324 \cdot 10^{17}$	$9{,}73 \cdot 10^{25}$	$2{,}51 \cdot 10^{34}$	2,49	106,5	20,16
Pyrit	36,8	10,8	−4,83	$5{,}84 \cdot 10^{9}$	$1{,}33 \cdot 10^{19}$	$2{,}29 \cdot 10^{28}$	$2{,}98 \cdot 10^{37}$	5,08	120,1	15,06

Tabelle II.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Flußspat	$3{,}62 \cdot 10^{4}$	$4{,}27 \cdot 10^{6}$	$5{,}56 \cdot 10^{12}$	$9{,}24 \cdot 10^{16}$	$1{,}84 \cdot 10^{21}$	$(3{,}56 \cdot 10^{25})$
Steinsalz	$1{,}30 \cdot 10^{4}$	$5{,}38 \cdot 10^{7}$	$1{,}85 \cdot 10^{11}$	$6{,}35 \cdot 10^{14}$	$1{,}01 \cdot 10^{18}$	$(5{,}40 \cdot 10^{21})$
Sylvin	$7{,}42 \cdot 10^{3}$	$1{,}92 \cdot 10^{7}$	$4{,}55 \cdot 10^{10}$	$1{,}16 \cdot 10^{14}$	$8{,}50 \cdot 10^{16}$	
Natriumchlorat . .	$8{,}97 \cdot 10^{3}$	$1{,}12 \cdot 10^{7}$	$4{,}15 \cdot 10^{10}$	$6{,}06 \cdot 10^{13}$		
Pyrit	$4{,}22 \cdot 10^{4}$	$4{,}96 \cdot 10^{8}$	$3{,}80 \cdot 10^{12}$	$2{,}18 \cdot 10^{17}$		

Die eingeklammerten Werte sind nur in roher Weise durch Einführung von Mittelwerten berechnet.

$$c = -\{\alpha^2\beta^2\gamma^2[(c_{11}-c_{44})^3 - 3(c_{12}+c_{44})^2(c_{11}-c_{44}) + 2(c_{12}+c_{44})^3] + [\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2]\, c_{44}[(c_{11}-c_{44})^2 - (c_{12}+c_{44})^2] + c_{11}c_{44}^2\}.$$

Die Werte der Elastizitätskonstanten nach den Messungen von W. Voigt[1]) und die daraus berechneten Werte der Integrale $J_1 \ldots J_4$ sind in der vorstehenden Tabelle angegeben. Die Druckeinheit ist g/cm². Um also die betreffenden Größen im absoluten Maß zu haben, sind die c_{kk} mit 981, die J_1, J_2 . . mit 981, 981² . . . zu multiplizieren. Die letzten 3 Spalten enthalten die Größen ϱ, M, g^2. (Vgl. Tabelle I.)

Würde sich der Anteil der akustischen Schwingungen an der spezifischen Wärme durch eine einzige Debyesche Funktion ausdrücken lassen, so müßte $J_n = J^n_1$ sein. Die vorstehende Tabelle zeigt, daß diese Bedingung auch nicht einmal in grober Annäherung erfüllt ist. Tab. II gibt die Werte a_1, a_2 . . der Formel (16a) an.

Zu der Energie der molekularen Schwingungen oder akustischen Wellen tritt noch ein zweites Glied, welches von den Atomschwingungen herrührt. Die Frequenz derselben ist so gewählt, daß sich die berechneten Werte c_v den Beobachtungen möglichst gut anpassen. Die entsprechenden Werte von c_v sind den Tabellen entnommen, welche W. Nernst[2]) in seinem Buche „Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes" mitteilt. Die folgenden Tabellen enthalten den Anteil der Atomschwingungen c_2, den Anteil der akustischen Wellen c_1 und die beobachteten und berechneten Werte von c_v. Die ersteren sind den Angaben von W. Nernst auf dem 1. Solvay-Kongreß entnommen. ($\beta = h/k$.)

Tabelle III.

Steinsalz: $\beta_\nu = 226$.

ϑ	β_ν/ϑ	c_2	c_1	c_v ber.	c_v beob.
110°	2,06	4,21	4,42	8,63	8,65*
138°	1,64	4,78	4,87	9,65	9,58
285°	0,96	5,52	5,56	11,08	10,98

* Interpolierter Wert.

1) W. Voigt, Lehrbuch d. Kristallphysik. S. 744.
2) Verlag W. Knapp. Halle a. S. 1918.

Tabelle III (Fortsetzung).

Sylvin: $\beta_\nu = 190$.

ϑ	β_ν/ϑ	c_2	c_1	c_v ber.	c_v beob.
70°	2,72	3,33	4,19	7,52	7,54
87°	2,19	4,06	4,57	8,63	8,66
187°	1,39	5,08	5,30	10,38	10,36
285°	0,81	5,64	5,74	11,38	11,46

Bei Flußspat als einem dreiatomigen Kristall sind zwei verschiedene Eigenfrequenzen zu erwarten. Zwar läßt sich die spezifische Wärme mit einer einzigen Eigenwellenlänge $\lambda = 41{,}5\,\mu$ wiedergeben, aber diese Darstellung würde nicht der Raumgittertheorie entsprechen, nach der Flußspat eine optisch wirksame Eigenfrequenz und eine zweite optisch nicht nachweisbare Eigenfrequenz besitzt. Dementsprechend ist bei der folgenden Berechnung verfahren. Die beobachteten Werte sind der Arbeit von Eucken und Schwers[1]) entnommen.

Tabelle IV.

Flußspat: $\beta_\nu' = 286$, $\beta_\nu'' = 420$.

ϑ	β_ν'/ϑ	β_ν''/ϑ	c_2'	c_2''	c_1	c_v ber.	c_v beob.
180°	1,59	2,33	4,85	3,86	4,34	18,05	18,20*
236,5°	1,21	1,78	5,27	4,61	4,98	14,81	14,60
328°	0,87	1,28	5,59	5,20	5,39	16,18	16,10

* Interpolierter Wert.

Leider ist die Zahl der gemessenen Punkte innerhalb des Bereichs, wo unsere Formel konvergiert, gering. In der folgenden Tabelle sind die optisch wirksamen Wellenlängen λ_0 angegeben, welche den β_ν der Tab. III und IV entsprechen.

Tabelle V.

	β_ν	ν	λ_0
Flußspat	286	$5{,}89 \cdot 10^{12}$	51,0 μ
Steinsalz	226	$4{,}65 \cdot 10^{12}$	64,5 μ
Sylvin	190	$3{,}9 \cdot 10^{12}$	77,0 μ

Die λ_0 sind stets größer als die von Rubens beobachteten Reststrahlenwellenlängen. In der Tat ergibt die Theorie der

1) A. Eucken u. Schwers, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**. S. 578. 1913.

Reflexion, daß die Eigenschwingung gegenüber dem Maximum des Reflexionsvermögens um recht erhebliche Beträge nach größeren Wellenlängen verschoben ist. Auf diese optischen Fragen gehe ich in der folgenden Arbeit ein. Auf alle Fälle liefern die Rubensschen Reststrahlenbeobachtungen einen unentbehrlichen Fingerzeig bei der Berechnung von c_2. Bei komplizierter gebauten Körpern, für die keine Reststrahlmessungen vorliegen, würde diese Berechnung ganz willkürlich sein. Aus diesem Grunde ist von der Ausrechnung von c_4 für Natriumchlorat und Pyrit, deren Reststrahlen noch nicht bekannt sind, abgesehen worden.

§ 3. Trigonales Kristallsystem.

In diesem Paragraphen sollen die Formeln für das trigonale Kristallsystem, soweit es eine zweizählige Symmetrieachse besitzt, aufgestellt werden. Das Schema der elastischen Konstanten ist folgendes:

$$\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & c_{14} \\ & & & & & c_{66} \end{array} \qquad c_{66} = \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

Von der Relation $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ ist zunächst kein Gebrauch gemacht worden, so daß unsere Formeln ohne weiteres auf das tetragonale System, soweit es eine zwei- und vierzählige Symmetrieachse besitzt, sowie auf das hexagonale System spezialisiert werden können. Es gilt:

$$\begin{aligned} c_{55}' &= c_{11}\alpha^2 + c_{66}\beta^2 + c_{44}\gamma^2 + 2c_{14}\beta\gamma, \\ c_{44}' &= c_{66}\alpha^2 + c_{11}\beta^2 + c_{44}\gamma^2 - 2c_{14}\beta\gamma, \\ c_{33}' &= c_{44}\alpha^2 + c_{44}\beta^2 + c_{33}\gamma^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{45}' &= 2c_{14}\gamma\alpha + (c_{12} + c_{66})\alpha\beta, \\ c_{35}' &= 2c_{14}\alpha\beta + (c_{44} + c_{13})\alpha\gamma, \\ c_{34}' &= c_{14}(\alpha^2 - \beta^2) + (c_{13} + c_{44})\beta\gamma. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Gleichung 3. Grades für q: a, b, c werden:

$$-a = (c_{11} + c_{44} + c_{66}) + [(c_{33} + c_{44}) - (c_{11} + c_{66})]\,\gamma^2$$

$$\begin{aligned} b = {} & (\alpha^4+\beta^4)\,(c_{11}\,c_{66}+c_{11}\,c_{44}+c_{44}\,c_{66}-c_{14}^2) + \gamma^4\,(c_{44}^2+2c_{33}\,c_{44}) \\ & + [2c_{44}\,(c_{11}+c_{66}) + c_{11}^2 + c_{66}^2 - (c_{12}+c_{66})^2 - 2c_{14}^2]\,\alpha^2\,\beta^2 \\ & + [(c_{11}+c_{66})\,(c_{44}+c_{33}) + 2c_{44}^2 - (c_{13}+c_{44})^2 - 4c_{14}^2] \\ & \quad [\alpha^2\,\gamma^2 + \beta^2\,\gamma^2] - 4c_{14}[\alpha^2\,\beta\,\gamma\,(c_{11}+c_{44}+c_{66}+c_{12}) \\ & + \tfrac{1}{2}\,(\alpha^2-\beta^2)\,\beta\,\gamma\,(c_{44}+c_{11}+c_{13}-c_{66})]. \end{aligned}$$

Der recht komplizierte Ausdruck für c soll nicht ausführlich angegeben werden. Berücksichtigt man das in der Anmerkung (S. 555) Gesagte, so ergibt sich

$$\begin{aligned} -\int c\,d\,\Omega = {} & \int \alpha^6\,d\,\Omega\,\{c_{44}\,(c_{33}\,c_{44}+2\,c_{11}\,c_{66}) - c_{14}^2\,(c_{11}+c_{66})\} \\ & + \int \alpha^4\,\beta^2\,d\,\Omega\,\{2c_{44}\,(c_{44}^2+c_{66}^2+(c_{11}+c_{66})(c_{11}+c_{33} \\ & \quad + c_{44}) - [(c_{12}+c_{66})^2 + (c_{13}+c_{44})^2]) \\ & \quad + 2c_{66}\,[c_{11}\,c_{33} - (c_{44}+c_{13})^2] - c_{14}^2\,[3\,(c_{11}+c_{66}) \\ & \quad\quad + 6\,c_{44} - 4\,c_{13} + 8\,c_{33}]\} \\ & + \int \alpha^2\,\beta^2\,\gamma^2\,d\,\Omega\,\{2\,c_{44}^2\,(c_{66}+c_{11}) + c_{33}\,(c_{11}^2+c_{66}^2) \\ & \quad - 2\,c_{11}\,(c_{13}+c_{44})^2 - c_{33}\,(c_{12}+c_{66})^2 \\ & \quad - 2\,c_{14}^2\,(3\,c_{44}-2\,c_{13})\}\,. \end{aligned}$$

Wir wollen diese Formeln auf die spezifische Wärme des Quarzes anwenden. Die Werte von $J_1 \ldots J_3$ lassen sich ohne Schwierigkeit aus den a, b, c streng berechnen. Bei J_4 wurden einige Annäherungen, welche sich aus den Parameterwerten der c_{ik} darboten, eingeführt, indem für a ein konstanter Mittelwert — statt $18{,}5 + 3{,}9\,\gamma^2$ ist 19,8 gesetzt — eingeführt wurde und außerdem zur Bildung von b^2 die Größe b auf die Form annäherungsweise gebracht werden konnte:

$$b = A\,(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4) + B\,(\alpha^2\gamma^2+\gamma^2\beta^2+\beta^2\alpha^2) - (C\alpha^2 - D\beta^2)\,\beta\,\gamma\,,$$

worin A, B, C, D geeignete Mittelwerte bedeuten. J_5 wurde nur in roher Annäherung durch Mittelwertsbildung berechnet.

Tabelle VI.

c_{11}	c_{33}	c_{44}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{66}
$8{,}68 \cdot 10^5$	$10{,}75 \cdot 10^5$	$5{,}82 \cdot 10^5$	$0{,}71 \cdot 10^5$	$1{,}44 \cdot 10^5$	$1{,}72 \cdot 10^5$	$3{,}99 \cdot 10^5$

J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
$1{,}98 \cdot 10^9$	$1{,}61 \cdot 10^{13}$	$1{,}52 \cdot 10^{27}$	$1{,}52 \cdot 10^{26}$	$1{,}50 \cdot 10^{45}$

Die Einheiten in dieser Tabelle sind dieselben wie in Tab. I; die c_{hk} sind ebenfalls den Beobachtungen von W. Voigt entnommen. Bei einer Dichte $\varrho = 2{,}65$ und einem Molekulargewicht $M = 60{,}8$ findet sich für Quarz: $g^2 = 6{,}0 \cdot 10^{-7}$.

Die folgende Tabelle gibt die Koeffizienten der Reihe (16a) für c_v wieder.

Tabelle VII.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$5{,}88 \cdot 10^{4}$	$9{,}96 \cdot 10^{9}$	$1{,}72 \cdot 10^{13}$	$2{,}88 \cdot 10^{17}$	$4{,}61 \cdot 10^{21}$

Entsprechend den zwei bekannten Reststrahlgebieten läßt sich die spezifische Wärme mit Hilfe zweier Atomschwingungen darstellen. Die folgende Tabelle gibt die Anteile derselben c_2' und c_2'', ferner den Anteil der akustischen Schwingung c_1 und schließlich die berechneten und die beobachteten Werte für c_v wieder.

Tabelle VIII.

Quarz: $\beta_\nu' = 556$; $\beta_\nu'' = 1350$.

ϑ	β_ν'/ϑ	β_ν''/ϑ	c_2'	c_2''	c_1	c_v ber.	c_v beob.
233°	2,38	5,80	3,79	0,61	4,36	8,76	8,78
330°	1,69	4,08	4,72	1,74	5,08	11,54	11,29
416°	1,34	3,26	5,14	2,63	5,38	13,15	12,97
556°	1,0	2,43	5,48	3,72	5,64	14,84	14,73

Die optischen Wellenlängen, welche den angegebenen β_ν entsprechen, sind 26 μ und 10,7 μ.

Es sei bemerkt, daß infolge der Doppelbrechung statt mit den zwei Atomschwingungen streng genommen mit vier zu rechnen wäre.

Die erreichte Übereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werten für c ist sehr gut. Allerdings ist zu beachten, daß die Frequenzen der Atomschwingungen, wenn auch durch die Rubensschen Reststrahlenmessungen ungefähr bestimmt, doch in gewissen Grenzen den Beobachtungen angepaßt werden konnten. Ferner ist der Bereich, in welchem die Reihe (16a) konvergiert, relativ klein, da für die Konvergenz nicht die Größe der mittleren Geschwindigkeit, sondern die ungünstigste, d. h. in unserem Fall die größte in irgend-

einer Richtung vorkommende Geschwindigkeit maßgebend ist. Andererseits muß hervorgehoben werden, daß bei den berechneten regulären Kristallen mit den angenommenen Parameterwerten der c_{hk} die Beobachtungen von Eucken und Schwers im Gebiet tiefster Temperaturen (ϑ^3-Gebiet) ohne neue Hilfsannahmen mit guter Genauigkeit dargestellt werden.

Es sei noch hinzugefügt, daß sich ohne vollständige Auflösung der Gleichung (12) und Diskussion der Lösungen ebensowenig wie das Konvergenzgebiet der Reihe (16a) der Gültigkeitsbereich des Debyeschen ϑ^3-Gesetzes abgrenzen läßt; denn hierfür ist die kleinste in irgendeiner Richtung vorkommende Geschwindigkeit maßgebend.

§ 4. Über eine Erweiterung der bisherigen Annahmen.

Bisher war angenommen, daß die elastischen Konstanten bei konstant gehaltenem Volumen nicht von der Temperatur abhängen, eine Annahme, die aus verschiedenen Gründen — z. B. wenn man der Theorie der Wärmeleitung die Debyesche Auffassung zugrunde legen will — nicht streng erfüllt zu sein scheint. Es soll daher diese Annahme in diesem Paragraphen fallen gelassen werden und die Formel für die spezifische Wärme eines einatomigen isotropen Körpers dementsprechend entwickelt werden.

Der Energieinhalt eines einatomigen Körpers U ist gegeben durch:

$$U = \vartheta \sum_{j=1}^{3} \varphi_j \left(\frac{\vartheta}{\Theta_j} \right),$$

wobei φ_j nur eine Funktion des Argumentes ϑ/Θ ist. Bezeichnet man den ursprünglichen Debyeschen Wert für die spezifische Wärme

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\varphi_j + \frac{\vartheta}{\Theta_j} \varphi_j' \right) = c_0, \qquad \varphi_j' = \frac{d\varphi_j}{d\frac{\vartheta}{\Theta_j}}$$

und bedenkt, daß nach (9)

$$\frac{\partial \log \Theta_j}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \log q_j}{\partial \vartheta}$$

ist, so wird jetzt

$$c_v = c_0 - \sum_{j=1}^{3} \frac{\vartheta}{2} \left(c_j - \frac{U_j}{\vartheta} \right) \frac{\partial \log q_j}{\partial \vartheta},$$

wenn U_j die Gesamtenergie der $j$ten Wellenart ist. Für sehr tiefe Temperaturen verschwindet das Zusatzglied, da es wie ϑ^4 klein wird; für sehr hohe Temperaturen, bei denen man in der Reihe (8) nur das zu $1/\vartheta^2$ proportionale Glied beizubehalten braucht, geht c_v über in:

$$c_v = c_0 - 3\,\frac{Nk}{16}\sum_{j=1}^{3}\Theta_j\,\frac{\partial \log q_j}{\partial\,\vartheta}\,. \tag{17}$$

Da die elastische Kraft mit der Größe der Ausschläge der Schwingungen abnimmt, so ist auch

$$\frac{\partial \log q_j}{\partial\,\vartheta}$$

negativ; c_v übersteigt also den Wert: $c_\infty = 3Nk$. Die beobachteten Überschreitungen des Dulong-Petitschen Wertes finden also auf diese Weise ihre Erklärung. Am Schluß dieser Arbeit kommen wir auf diese Frage noch einmal zurück.

Zustandsgleichung von Kristallen.

§ 1.

Um zu der Zustandsgleichung des festen Körpers zu gelangen, ist es nötig, auf die Grundvorstellungen der Born-Karmanschen Theorie der Kristallgitter, welche ja auch der im ersten Abschnitt behandelten Theorie der spezifischen Wärme zugrunde liegt, etwas näher einzugehen. Nach dieser Auffassung besteht ein Kristall im allgemeinen aus s ineinander gefügten Kristallgittern, so daß einem Elementarbereich s-Atome zukommen. Wir sprechen dann von einem s-atomigen Kristall. Unsere Betrachtungen mögen sich auf ein Grammolekül der Substanz beziehen; die Zahl der Moleküle sei N. Die Wärmebewegung besteht nach der Born-Karmanschen Vorstellung in einer großen Anzahl von Wellenzügen, welche den Kristall durchsetzen. Zunächst handelt es sich darum, die gesamte Bewegung in eine Reihe von voneinander unabhängigen Wellen aufzulösen, d. h. in solche Schwingungen, deren Energie nur von den Koordinaten (x_k) und den Geschwindigkeiten (x_k') je eines einzigen Freiheitsgrades abhängt. Im allgemeinen werden diese Wellen nicht linear polarisiert sein und daher sind die x und x' als komplexe Größen aufzufassen. Ist ν_k die Frequenz der $k$ten Schwingung, T_k und φ_k die kinetische und potentielle Energie derselben, so ist [1]):

1) M. Born, Dynamik der Kristallgitter. S. 60. Dort ist das φ_k und ν_k mit P_j und ω_j bezeichnet.

(18) $$T_k = x_k'^2 \qquad \Phi_k = \nu_k^2 x_k^2.$$

Die Schwingungen zerfallen nun in 2 Gattungen:

1. Die akustischen Wellen oder Schwingungen der Moleküle; für diese hängt die Frequenz ν_k von der Wellenlänge λ_k ab und es ist in erster Annäherung

(19) $$\nu_k = 2\pi \frac{\omega_k}{\lambda_k},$$

wobei ω_k wieder die Geschwindigkeit der $k$ten Welle bedeutet.

2. Die Schwingungen der Atome; bei ihnen ist für die hier in Betracht kommenden Wellenlängen die Frequenz unabhängig von der Wellenlänge.

Denkt man sich nun die äußere Gestalt des Kristalls, welche durch die Lagrangeschen Koordinaten p_h gegeben sein mag, verändert und zwar so langsam, daß der zeitliche Differentialquotient der p_h klein ist gegen die Periode der oben besprochenen Schwingungen, so wird einer Veränderung der Koordinate p_h eine Lagrangesche Kraft P_h entsprechen:

$$P_h = -\frac{\partial (T - \Phi)}{\partial p_h} + \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_h'}.$$

P_h bedeutet hier die äußere Kraft und die Differentiation ist so zu verstehen, daß die Koordinaten und Geschwindigkeiten der schwingenden Teilchen (x_k, x_k') unverändert bleiben. Multipliziert man die Lagrangesche Gleichung mit dt und integriert über ein sehr großes Zeitintervall, so verschwindet

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\frac{\partial T}{\partial p_h'}.$$

Sind $\bar{T}$, $\bar{\Phi}$, $\bar{P}$ die Mittelwerte der betreffenden Größen, so gilt dann:

(20) $$\bar{P}_h = -\frac{\partial (\bar{T} - \bar{\Phi})}{\partial p_h}.$$

Führen wir in diese Gleichung die Werte (18) ein, so wird

(21) $$\bar{P}_h = +\overline{x_k^2}\cdot\frac{\partial \nu_k^2}{\partial p_h} = 2\bar{\Phi}_k\frac{\partial \log \nu_k}{\partial p_h}.$$

Um die resultierende Kraft zu erhalten, hat man alle die P_h zu summieren, welche herrühren:

1. von den akustischen Wellen.
2. von den Atomschwingungen;

als drittes kommen noch die Kräfte hinzu, welche von den statischen Spannungen herrühren.

1. Es existieren 3 akustische Wellen. Wir greifen eine (j) davon heraus. Die Zahl der Eigenschwingungen (dZ) einer solchen Welle, deren Frequenz zwischen (ν) und ($\nu + d\nu$) liegen und deren Fortpflanzungsrichtung in den Kegel $d\Omega$ fällt, läßt sich durch die Maximalfrequenz folgendermaßen ausdrücken:

$$dZ_j = \frac{A}{\bar{\nu}_j^3} \nu^2 \, d\nu \, d\Omega, \qquad A = \frac{4\pi}{3N}.$$

Die gesamte äußere Kraft, welche diesem Wellentyp entspricht, ist also

$$K_{hj} = \sum (P_h)_j = 2 \int_0^{\bar{\nu}_j} \int \frac{A}{\bar{\nu}_j^3} \left(\nu_k^2 \Phi_k \frac{\partial \log \nu_k}{\partial p_h} \, d\nu \right)_j d\Omega. \tag{22}$$

Der Index (j) gibt an, daß nur über solche (k) zu summieren ist, welche zur $j$ten akustischen Welle gehören.

Nun ist

$$-\frac{\partial \log \nu}{\partial p_h} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial p_h} - \frac{\partial \log \omega}{\partial p_h}. \tag{23}$$

Da ω für ein und denselben Wellentyp den gleichen Wert hat und λ für alle Oberschwingungen sich nur durch einen von p_h unabhängigen Faktor unterscheidet, also $d \log \lambda$ für alle denselben Wert hat, so gilt dasselbe von $\frac{\partial \log \nu}{\partial p_h}$. Man kann also diese Größe vor das über ν erstreckte Integral nehmen und durch $\frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial p_h}$ ersetzen. Bedenkt man ferner, daß die potentielle Energie im Mittel gleich der halben Gesamtenergie ist und setzt man die gesamte Energie aller Wellen des $j$ten Wellentypus, deren Fortpflanzungsrichtung in den Kegel $d\Omega$ fällt:

$$\frac{1}{4\pi} \varepsilon_j \, d\Omega = 2 \, \frac{d\Omega}{4\pi} \, \frac{A}{\bar{\nu}_j^3} \int_0^{\bar{\nu}_j} (\nu_k^2 \Phi_k \, d\nu)_j, \tag{24}$$

so wird

$$K_{hj} = \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon_j \frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial p_h} \, d\Omega. \tag{25}$$

2. Falls s Atomarten im Elementarbereich des Kristalls vorkommen, bestehen im allgemeinsten Falle entsprechend den 3 Freiheitsgraden jedes Atoms ($3s$) Atomfrequenzen, die in

Annäherung als unabhängig von der Geschwindigkeit und Wellenlänge vorausgesetzt werden. Sei ε_i die Energie, welche einer Atomschwingung zukommt: dann wird einfach

$$K_{ih} = \varepsilon_i \frac{\partial \log \nu_i}{\partial p_h} . \tag{26}$$

3. Statische Spannungen. Die Deformationsgrößen x_x, y_y, z_z, z_y, z_x, x_y mögen in diesem Kapitel der Reihe nach mit den Lagrangeschen Koordinaten $p_1 \ldots p_6$ bezeichnet werden. Natürlich könnte man auch ebensogut gewisse Kombinationen der Deformationsgrößen mit den p_h identifizieren und wir werden das gelegentlich auch tun. Sind wieder die c_{hk} die Elastizitätskonstanten des betreffenden Körpers, so ist die potentielle Energie gegeben durch:

$$\Phi = F \sum_h \sum_k c_{hk} p_h p_k . \tag{27}$$

Die äußeren Kräfte $X_1 \ldots X_6$, welche den inneren Spannungen $X_1' \ldots X_6'$ das Gleichgewicht halten, sind dann gegeben durch:

$$X_h = - X_h' = + \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} .$$

Die gesamte Kraft, welche an die Koordinate p_h angreift, ist durch Summation über die Bestandteile 1, 2 und 3 zu bilden. Die resultierenden Kräfte seien $\Xi_1 \ldots \Xi_6$. Die Zustandsgleichung erhält dann die Form:

$$\Xi_h = + \frac{\partial \Phi_h}{\partial p_h} + \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon_j \frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial p_h} d\Omega + \sum_{i=4}^{3s} \varepsilon_i \frac{\partial \log \nu_i}{\partial p_h} . \tag{28}$$

Würde also an einem Körper eine Deformation ausgeführt werden, so widerstreben ihr 1. die rein elastische Kraft X, welche durch die wahren Elastizitätskonstanten bestimmt ist, 2. die Druckkräfte der Wärmebewegung, welche in den beiden letzten Gliedern der Gleichung (27) enthalten sind. In besonders einfachen Fällen kann man den Vorgang so auffassen, daß die Gesamtkraft Ξ durch Konstanten c_{hk} bestimmt wird, welche eben infolge der Wärmebewegung etwas von den c_{hk} abweichen. Erhöht man die Temperatur unter Vermeidung der thermischen Dilatation, so bleiben die c_{hk}' konstant, während die c_{hk}' variieren. Die so definierte Temperaturabhängigkeit der c_{hk}' läßt sich nun mit Hilfe der Formel (27)

diskutieren und dieses ist von Debye[1]) für isotrope Körper geschehen. Indessen ist die wirklich beobachtete Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten eine andere, da die Wirkung der thermischen Dilatation noch zu berücksichtigen ist. Denn zufolge der Volumen- und eventuell auch Gestaltsänderung ändern sich auch die c_{hk}, worauf Debye gerade seine Theorie der thermischen Dilation gegründet hat.

§ 2. Folgerungen aus der Zustandsgleichung.

Die Formel (27) konnte ohne Hinzuziehung der Quantentheorie allein aus den Gleichungen der Mechanik hergeleitet werden. Für das Folgende brauchen wir speziellere Annahmen über ε_j und ε_i. Wir wollen in Übereinstimmung mit dem Planckschen Ansatz annehmen, daß die mittlere Energie eines Freiheitsgrades die Form hat

$$u = \nu\, \varphi\left(\frac{\nu}{\vartheta}\right). \tag{29}$$

Nach den Entwicklungen von Einstein und Debye hat dann ε_j und ε_i dieselbe Form wie u.

Aus dieser Beziehung ergibt sich die Identität:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \log \nu} = \varepsilon - \vartheta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta}. \tag{30}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß ν nicht expliziert von ϑ abhängt. Der gesamte Energieinhalt U ist

$$U = \Phi + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3}\int \varepsilon_j\, d\Omega + \sum_{i=1}^{3s}\varepsilon_i. \tag{31}$$

Fehlen äußere Kräfte ($\Xi_h = 0$), so wird (28)

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} + \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{4\pi}\int \varepsilon_j \frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial p_h}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{3s}\varepsilon_i \frac{\partial \log \nu_i}{\partial p_h}. \tag{28a}$$

Aus (30) folgt die spezifische Wärme bei konstantem Druck c_p

$$c_p = \sum_h \frac{\partial \Phi}{\partial p_h}\frac{dp_h}{d\vartheta} + \frac{1}{4\pi}\sum_j\int\left(\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \log \bar{\nu}_j}\sum_h \frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial p_h}\frac{dp_h}{d\vartheta}\right)d\Omega + \sum_i\left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \log \nu_i}\sum_h \frac{\partial \log \nu_i}{\partial p_h}\cdot\frac{dp_h}{d\vartheta}\right).$$

Hieraus erhält man c_v, indem man

1) P. Debye, Wolfskehlvortrag. S. 38 u. 42.

$$\frac{d p_h}{d \vartheta} = 0$$

setzt. Berücksichtigt man noch die Gleichung (30), so erhält man:

$$c_p - c_v = -\vartheta \sum_h \frac{d p_h}{d \vartheta} \left[\sum_j \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \vartheta} \frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial p_h} d\Omega + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \vartheta} \frac{\partial \log \nu_i}{\partial p_h} \right].$$

Unter Heranziehung von (28a) ergibt sich daraus:

$$c_p - c_v = -\vartheta \sum \frac{\partial p_h}{\partial \vartheta} \frac{\partial X_h^i}{\partial \vartheta}. \tag{32}$$

Die bekannte Relation, die sich mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik allgemein beweisen läßt. Für isotrope Körper geht diese Relation, falls man als Lagrangesche Koordinate

$$p_h = \frac{v - v_0}{v_0} \quad \text{und entsprechend} \quad X_h = -\frac{v_0}{\varkappa} \left(\frac{v - v_0}{v_0} \right)$$

($\varkappa$ = Kompressibilität) setzt, über in:

$$c_p - c_v = 9 \frac{v_0 \vartheta}{\varkappa} \alpha^2, \tag{33}$$

wenn α die thermische lineare Dilatation bedeutet.

Auch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 X_h^i}{\partial \vartheta^2} = \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial c_v}{\partial p_h}$$

gewinnt man ohne weiteres aus (27a) durch zweimaliges Differentieren nach der Temperatur, falls man die aus (28) folgende Beziehung

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \vartheta^2} = -\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \log \vartheta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} \tag{34}$$

berücksichtigt. —

Die Zustandsgleichung (28) läßt sich in folgender Weise umformen; es sei h eine ganze Zahl, so daß $\nu_j = h \bar{\nu}_j$ ist. Wie schon benutzt worden ist, ist $d \log \nu$ unabhängig von h. Statt auf Formel (25) läßt sich also auf Formel (22) zurückgreifen. Da nun ferner der Quotient

$$\frac{\nu^2 d \nu}{\bar{\nu}^3} \qquad (d \nu = \bar{\nu} \, d h)$$

von p_h unabhängig ist, so ist:

$$\varepsilon_j \frac{\partial \log \bar{\nu}_j}{\partial p_h} = \frac{\partial}{\partial p_h} \left[\int_0^{\bar{\nu}} \frac{\nu^2 d \nu}{\bar{\nu}^3} - \int \frac{u}{\nu} d \nu \right]_j = \frac{\partial}{\partial p_h} \psi_j.$$

Hierin ist ψ_j eine neue Abkürzung; entsprechend sei ψ_i definiert durch

$$\psi_i = \int \frac{\varepsilon_i}{\nu_i} \, d\nu_i .$$

Somit nimmt die Zustandsgleichung die Form an:

$$\Xi_h = \frac{\partial}{\partial p_h} \left\{ \Phi + \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{4\pi} \int \psi_j \, d\Omega + \sum_i \psi_i \right\} = \frac{\partial H}{\partial p_h} .$$

Hierbei ist der Klammerausdruck die freie Energie H. In der Tat läßt sich zeigen, daß der partielle Differentialquotient von H nach der Temperatur die negative Entropie des Körpers ist. Es ist dabei nur zu berücksichtigen, daß die Entropie eines Freiheitsgrades (s) bei der Annahme (29) über u die Form hat:

$$s = \int \frac{\nu}{\vartheta} \varphi' \left(\frac{\nu}{\vartheta} \right) d \left(\frac{\nu}{\vartheta} \right) .$$

Die zugrunde gelegten Vorstellungen über die molekulare Struktur der Kristalle führen also unter Berücksichtigung des der Planckschen Formel entsprechenden Ausdrucks für die mittlere Energie eines Freiheitsgrades zu einer vollständigen Übereinstimmung mit der allgemeinen Thermodynamik. Wesentlich für den Gang der Rechnung ist indessen, daß die Maximalfrequenz $\bar{\nu}_j$ genau in derselben Weise von den p_h abhängt, wie jedes ν_j des betreffenden Wellentypus, wie es naturgemäß ist, da die Grenzfrequenz eine der unendlich vielen Frequenzen der betreffenden Wellenart im Kontinuum ist.

Offenbar genügt die von Debye ursprünglich eingeführte, für alle 3 Wellen gemeinsame Grenzfrequenz dieser Bedingung nicht. Der Born-Karmanschen Auffassung entsprechen 3 Grenzfrequenzen, welche definiert sind durch:

$$\nu_j = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \, \frac{\omega_j}{\delta}$$

Hierin ist δ der Elementarabstand im Kristallgitter, der bei nicht deformierten Kristallen ein Skalar ist. Die gleichförmigen Volumendeformationen, welche für uns in Frage kommen, kann man sich in einer entsprechenden Änderung von δ bestehend denken. Daher hängt δ genau in derselben Weise von der Deformation ab wie die Wellenlänge λ. Der Born-Karmansche Ansatz ist also auch in dieser Beziehung im Einklang mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und er-

scheint somit als eine Verbesserung der ursprünglichen Debyeschen Fassung. —

Eine allgemeine Diskussion der Formel (28) bei Kristallen ist sehr schwierig und zurzeit nicht einmal möglich, da weder die Änderung der elastischen Konstanten mit dem Volumen oder der Temperatur noch die der Eigenfrequenz der Atomschwingungen ν_i bekannt ist. Wesentlich einfacher werden die Vorgänge bei sehr tiefen Temperaturen, wo ε_j proportional ϑ^4 und ε_i verschwindend klein wird. Dann läßt sich (27) schreiben

$$\Xi_h = \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} + \vartheta^4 C_h .$$

Hierin ist C_h von der Temperatur unabhängig und enthält nur die elastischen Konstanten und deren Ableitungen nach p_h.

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich leicht zeigen, daß der Temperaturverlauf der thermischen Änderung aller Deformationsgrößen x_x. x_y ... bei hinreichend tiefen Temperaturen der spezifischen Wärme proportional geht. Fehlen nämlich äußere Kräfte ($\Xi_h = 0$), so gilt

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial p_h} = \sum_k c_{hk} p_k = \vartheta^4 C_h .$$

Im ganzen erhält man sechs solcher linearen Gleichungen in den p_h. Bei Auflösung nach p_h ergibt sich für die einzelnen p_h die Form:

$$p_h = \vartheta^4 C_h' ,$$

worin C_h' wieder unabhängig von der Temperatur ist. Für $\frac{d p_h}{d \vartheta}$ erhält man

$$\frac{d p_h}{d \vartheta} = 3 \vartheta^3 C_h' + \vartheta^4 \frac{d C_h'}{d \vartheta} .$$

Da man hinreichend tiefen Temperaturen ϑ^4 neben ϑ^3 vernachlässigen kann, so wird in der Tat: $\frac{d p_h}{d \vartheta}$ proportional mit ϑ^3, also mit der spezifischen Wärme c_v. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für alle linearen Kombinationen aus den Deformationsgrößen.

§ 3. Isotrope einatomige Körper.

Für isotrope einatomige Körper verschwindet ε_i, ferner werden alle Größen von der Richtung unabhängig, so daß (28) auf die einfache Form kommt:

$$\Xi_h = \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \frac{\partial \log \nu_j}{\partial p_h} .$$

Bedeutet k den Torsionsmodul, $\varkappa$ die Kompressibilität, ϱ die Dichte, so sind die Geschwindigkeiten der drei akustischen Wellen gegeben durch:

$$\varrho \omega_1^2 = \varrho \omega_2^2 = q_1 = k$$
$$\varrho \omega_3^2 = q_3 = \frac{1}{2\varkappa} + \frac{2}{3} k$$

und die potentielle Energie der Volumeneinheit in der Helmholtzschen[1]) Normalform:

$$\varphi = \left\{ \frac{1}{2\varkappa}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \frac{1}{3} k [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] \right\} .$$

Für $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ führen wir den Wert $\frac{V - V_0}{V_0}$ ein und verstehen unter V_0 das Volumen beim absoluten Nullpunkt. Als Gleichgewichtsbedingung für einen isotropen einatomigen Körper bei einem allseitig gleichgroßen Druck Π ergibt sich ($p_h = v$):

$$\Pi = \frac{1}{\varkappa} \frac{V - V_0}{V_0} + \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j / v \frac{\partial \log \nu_j}{\partial \lg V} . \tag{35}$$

Man kann diese letzte Formel ohne Benutzung molekulartheoretischer Annahmen ableiten, etwa den Grundlagen entsprechend, wie sie P. Debye seiner Theorie der spezifischen Wärmen zugrunde gelegt hat. Im folgenden soll diese Rechnung durchgeführt werden, welche ich in meiner eingangs zitierten Arbeit kurz angedeutet hatte. Einige Ungenauigkeiten in dieser früheren Darstellung werden damit zugleich berichtigt.

Die potentielle Energie pro Volumeneinheit einer einzelnen transversalen Welle ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) sei:

$$\varphi_1 = \frac{1}{3} k \int [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2] \, dV, \quad \text{wo } k = q_1 ,$$

während sich für jede longitudinale Welle ergibt:

$$\varphi_3 = \left[\frac{1}{2\varkappa} + \frac{2}{3} k \right] \int \sigma_1^2 \, dV = q_3 \int \sigma_1^2 \, dV ,$$

wenn σ_1 senkrecht zur Ebene konstanter Phase liegt, so daß

1) H. v. Helmholtz, Vorlesungen über die Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen, S. 120.

$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Die gesamte potentielle Energie der transversalen Wellen im Volumen V ist dann:

$$\Phi_1 = 2V\Sigma q_1.$$

die der longitudinalen Wellen:

$$\Phi_3 = V\Sigma q_3.$$

Der gesamte Druck K aller akustischen Wellen, welcher das Volumen V zu verändern strebt, ist dann nach Formel (19) zu berechnen. Da die kinetische Energie gleich dem Produkt aus Dichte ϱ und Volumen V multipliziert mit dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit ist, die Gesamtmasse ϱV sowohl wie die mittlere Geschwindigkeit bei der Differentiation nach p_h ungeändert bleibt, so verschwindet $\frac{\partial T}{\partial V}$ und es bleibt übrig:

$$K = -\frac{\partial(\Phi_1 + \Phi_3)}{\partial V}.$$

Die Differentiation nach V ist hierbei so zu verstehen, daß überall die Verrückungen aus der Gleichgewichtslage unverändert bleiben. Fassen wir also zwei Punkte, deren Entfernung r sei, und in denen die Verrückungen ξ_1 und ξ_2 seien, ins Auge, so sind bei der Differentiation die Verrückungen ξ_1 und ξ_2 unverändert zu lassen, dagegen der Abstand r entsprechend der gleichförmigen Volumendilatation wie $V^{1/3}$ zu verändern. Nun ist die potentielle Energie φ homogen vom 2. Grade in den Deformationsgrößen $x_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, ist also wie $V^{-2/3}$ zu variieren. Bei der Differentiation partiell nach V bleiben also konstant die Größen

$$R_1 = \frac{1}{q_1}\frac{\Phi_1}{V^{1/3}}; \qquad R_3 = \frac{1}{q_3}\frac{\Phi_3}{V^{1/3}}.$$

Daher wird:

$$K = \Phi_1 \frac{\partial \log q_1 V^{2/3}}{\partial V} + \Phi_3 \frac{\partial \log q_3 V^{2/3}}{\partial V}$$
$$= 2\frac{\varepsilon_1}{V_0}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log q_1}{\partial \log V}\right] + \frac{\varepsilon_3}{V_0}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log q_3}{\partial \log V}\right].$$

Addiert man hierzu noch den Anteil der statisch elastischen Kräfte

$$\varkappa \frac{V - V_0}{V_0},$$

so erhält man den gesamten inneren Druck, welcher dem

äußeren H das Gleichgewicht hält. Das Resultat ist dasselbe wie das in Formel (35) zum Ausdruck gebrachte, denn es besteht die Beziehung

$$\frac{\partial \log \nu_j}{\partial \log V} = \frac{\partial \log \omega_j}{\partial \log V} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log q_j}{\partial \log V} = -w_j,$$

wobei w eine neue Abkürzung ist.

Bei fehlendem äußeren Druck lautet dann die Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \varkappa \cdot \sum_{j=1}^{3} \frac{\varepsilon_j}{V} w_j$$

(an Stelle von w_j schreibt Grüneisen γ).

Durch totales Differentieren dieser Gleichung nach ϑ findet man die thermische Volumendilatation.

Bezeichnet man die Energie der Volumeneinheit

$$\frac{\varepsilon_j}{V} = E_j,$$

und nimmt an, daß $\varkappa$ und γ sich relativ wenig mit der Temperatur ändern, so folgt:

$$\frac{dV}{d\vartheta} = \varkappa \sum_{j=1}^{3} w_j \frac{dE_j}{d\vartheta}.$$

Wie schon Grüneisen bemerkt, liefert also die Born-Karmansche Theorie zwar ein Parallelgehen der thermischen Dilatation mit der spezifischen Wärme, aber keineswegs eine direkte Proportionalität. Letztere wird nur bei sehr tiefen und sehr hohen Temperaturen existieren.

Man kann nun versuchen, die hier entwickelten Gleichungen mit anderweitigen Beobachtungen in Beziehung zu setzen. Grüneisen hat gezeigt, daß man die experimentellen Tatsachen darstellen kann durch eine Gleichung von der folgenden Form

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{V - V_0}{V_0} = w_0 \frac{\varepsilon}{V}.$$

Hierin ist w_0 eine Konstante und ε die gesamte Wellenenergie ($\varepsilon = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3$). Diese Gleichung gilt in der Gegend von $+150^0$ bis auf 1 Proz. genau. Es müßte also angenähert gelten

$$-w_0 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\frac{\partial \log q_1}{\partial \log V} + \frac{\varepsilon_3}{2\varepsilon}\frac{\partial \log q_3}{\partial \log V} + \frac{1}{6}.$$

Da vorausgesetzt ist, daß die elastischen Konstanten nicht direkt von der Temperatur abhängen, sondern nur insofern als das Volumen sich mit der Temperatur ändert, so läßt sich die letzte Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$-w_0 = \frac{1}{d\,V/d\,\vartheta} \cdot \left[\frac{e_1}{e} \frac{d \log q_1}{d\,\vartheta} + \frac{e_3}{2e} \frac{d \log q_3}{d\,\vartheta}\right] + \frac{1}{6}.$$

Die Veränderungen der elastischen Größen q_1 und q_3 lassen sich nun aus Beobachtungen von Clemens Schaefer[1]) berechnen. Hierbei ergibt sich, daß $\frac{d \log q_1}{d\,\vartheta}$ immer negativ, $\frac{d \log q_3}{d\,\vartheta}$ dagegen bald positive, bald negative Werte annimmt. Die Größe w_0 ist stets positiv, wie sie nach Grüneisen sein soll, während aber der Zahlenwert bei Platin ziemlich gut stimmt, ist das berechnete w_0 bei Kupfer etwa doppelt, bei Aluminium etwa 8 mal größer als es nach Grüneisen zur Darstellung der Beobachtungen sein müßte. Der Grund könnte zum Teil daran liegen, daß die Annahme, daß die Elastizitätskonstanten nicht explizit von der Temperatur abhängen, streng genommen nicht richtig ist, eine Möglichkeit, die wir bereits im letzten Paragraphen des ersten Teils dieser Arbeit diskutiert haben. Ferner hat Eucken[2]) darauf hingewiesen, daß sich für die numerische Berechnung der spezifischen Wärmen nach der Debyeschen Theorie die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten bei Metallen Schwierigkeiten ergeben. Bei dem physikalisch schwer zu definierenden Aufbau der Metalle bieten diese, wie auch Eucken betont, offenbar kein brauchbares Material zur Prüfung der Theorie. Hierfür kämen wohl allein Kristalle in Frage, über die jedoch keine Beobachtungen vorliegen.

Nach den von Born und v. Kármán und von Debye in die Theorie des festen Körpers eingeführten Vorstellungen halten sich also bei einem einatomigen isotropen Körper, welcher keinen äußeren Kräften unterworfen ist, die durch die thermische Dilatation hervorgerufenen elastischen Spannungen und der Druck, welchen die elastischen Wellen bei ihrer Reflexion an der Oberfläche des Körpers hervorrufen, das Gleichgewicht.

1) Clemens Schäfer, Ann. d. Phys. **5**. S. 220. 1901.
2) A. Eucken, Verh. d. Deutschen Phys. Ges. **15**. S. 571. 1913.

Dieser innere Druck steht durchaus in Analogie mit dem Strahlungsdruck, den in einem spiegelnden, mit einem durchsichtigen Dielektrikum angefüllten Hohlraum die elektromagnetischen Wellen auf die Wände ausüben, zumal wenn die Größe der Dielektrizitätskonstante von der Dichte abhängt. Ist die Geschwindigkeit der Wellen unabhängig vom Volumen (wie es für Schallwellen bei Gasen, für elektromagnetische Wellen im Vakuum der Fall ist), so ist der Druck proportional dem dritten Teil der Wellenenergie.

Wären die elastischen Konstanten sehr wenig oder gar nicht abhängig von der Dichte, so würde ein negativer Druck proportional dem sechsten Teil der Wellenenergie vorhanden sein, welcher das Volumen zu verkleinern strebt. Ein solcher Körper würde also eine negative thermische Dilatation zeigen.

Danzig-Langfuhr, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule,
28. August 1919.

(Eingegangen 2. September 1919.)

4. Über die Verschiebung des Maximums der Reflexion gegen die Lage der Eigenfrequenz; von K. Försterling.

Einleitung.

Für die Kenntnis des Aufbaues eines mehratomigen Kristalls ist nach den heutigen Anschauungen die Frequenz der Atomschwingungen im Molekülverbande eine wichtige charakteristische Größe. Die am unmittelbarsten zu beobachtende Wirkung dieser Schwingungen, soweit sie auf geladene Teilchen zurückzuführen sind, liegt auf optischem Gebiet. Es handelt sich dabei um die bekannte Erscheinung, daß das Reflexionsvermögen in der Nähe der Eigenschwingung besonders große Werte annimmt. Mit Hilfe der Rubensschen Reststrahlmethode ist es gelungen, die Maxima des Reflexionsvermögens bei einer Reihe von Substanzen zu bestimmen. Eine quantitative Berechnung der Verschiebung des Reflexionsmaximums gegenüber der Eigenfrequenz scheint wegen der großen Kompliziertheit der darauf bezüglichen Formeln noch nicht bekannt zu sein, obwohl schon mehrfach auf die Existenz dieser Verschiebung hingewiesen ist, um zahlreiche Unstimmigkeiten mit anderweitigen Resultaten zu erklären.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich die in Frage kommenden Formeln ohne komplizierte Rechnungen ableiten lassen unter Einführung einiger Vernachlässigungen, die durchaus unbedenklich erscheinen.

§ 1. Grundgleichungen für Reflexion und Dispersion.

Es sei n_1 der Brechungsindex des ersten Mediums, welches als durchsichtig vorausgesetzt wird, n_2 und $\varkappa_2$ Brechungsindex und Absorptionsindex des zweiten Mediums. Führt man die Abkürzung ein

$$\delta = \frac{2\, n_1\, n_2}{n_2^2 (1 + \varkappa_2^2) + n_1^2}, \tag{1}$$

so ist das Reflexionsvermögen gegeben durch:

(2) $$R = \frac{1-\delta}{1+\delta},$$

eine Formel, die bei großem Reflexionsvermögen, d. h. kleinem δ näherungsweise übergeht in:

(2a) $$1 - R = 2\delta.$$

Es soll nun vorausgesetzt werden, daß in dem betrachteten Spektralbereich sich nur eine isolierte Eigenfrequenz befindet und die übrigen Eigenfrequenzen so weit entfernt sind, daß ihr Beitrag zum Brechungsindex als konstant angesehen werden kann. Ebenso soll von der Dispersion des ersten Mediums abgesehen werden. Die Formeln für die Dispersion einer im Kristallgitter fortschreitenden Welle sollen der Bornschen Theorie entnommen werden, unter Hinzufügung eines Dämpfungsgliedes ν'. Man kommt so auf die üblichen Drudeschen Dispersionsformeln zurück, welche wir nur in einer Hinsicht idealisieren wollen: Während in der ursprünglichen Formel das Dämpfungsglied mit der variabelen Frequenz multipliziert vorkommt, soll hier statt dessen ein konstanter Mittelwert der Frequenz gesetzt werden, eine Annahme, die bei der summarischen Einführung der Dämpfung in die Dispersionstheorie sicherlich unbedenklich ist. Die Gleichungen lauten dann:

(3) $$\begin{cases} n_2^2(1-\varkappa_2^2) = n_0^2 + \dfrac{\varrho(\nu_0^2-\nu^2)}{(\nu_0^2-\nu^2)^2+\nu_0^2\nu'^2}, \\ 2n_2^2\varkappa_2 = \dfrac{\varrho\nu_0\nu'}{(\nu_0^2-\nu^2)^2+\nu_0^2\nu'^2}. \end{cases}$$

Hierin sind ϱ, ν_0 und ν' konstante Größen.

Setzt man

(4) $$\frac{\nu_0^2-\nu^2}{\nu_0\nu'} = x; \qquad \frac{\varrho}{n_0^2\nu_0\nu'} = P,$$

so nehmen die Gleichungen (3) die Form an:

(3a) $$\begin{cases} \dfrac{n_2^2}{n_0^2}(1-\varkappa_2^2) = 1 + \dfrac{Px}{1+x^2}, \\ 2\dfrac{n_2^2}{n_0^2}\varkappa_2 = \dfrac{P}{1+x^2}. \end{cases}$$

Diese Größen sind in den Ausdruck (1) für δ:

(1a) $$\delta = \frac{2\dfrac{n_2}{n_0}\dfrac{n_1}{n_0}}{\dfrac{n_2^2}{n_0^2}(1+\varkappa_2^2)+\dfrac{n_1^2}{n_0^2}}$$

einzuführen. Zuvor soll aber in der Formel für δ eine weitere Vernachlässigung eintreten, indem im Nenner von (1a)

$$\frac{n_1^2}{n_0^2} = 1$$

gesetzt wird. Diese Vernachlässigung entspricht etwa der bekannten Annäherung, welche P. Drude so erfolgreich in die Theorie der Reflexion des Lichtes an Metallen eingeführt hat. Sie ist um so mehr berechtigt, je größer $n_2^2(1 + \varkappa_2^2)$ neben 1 ist. Führt man weiterhin zur Abkürzung ein

$$y = 1 + x(x + P) + \sqrt{(1 + x^2)(1 + [x + P]^2)}, \tag{5}$$

so findet sich zunächst:

$$2\frac{n_2^2}{n_0^2} = \frac{y}{x^2 + 1},$$

$$\left[\frac{n_2^2}{n_0^2}(1 + \varkappa_2^2) + 1\right]^2 = 2\,\frac{y + P^2/2}{x^2 + 1}$$

und hieraus

$$\delta^2 = \frac{n_1^2}{n_0^2}\,\frac{y}{y + P^2/2}. \tag{6}$$

§ 2. Maximum der Reflexion.

Das Reflexionsvermögen R hat ein Maximum, wenn δ einen möglichst kleinen Wert annimmt. Es muß also gelten

$$\frac{d\,\delta^2}{dx} = \frac{P^2}{2}\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

also auch

$$\frac{dy}{dx} = (2x + P)\left(\frac{1 + Px + x^2}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + [x + P]^2)}} + 1\right) = 0.$$

Solange $P \neq 0$, ist ein Verschwinden der zweiten Klammer nicht möglich. Das Maximum des Reflexionsvermögens liegt demnach bei

$$x_M = -P/2, \tag{7}$$

also nach (4)

$$v_M^2 = v_0^2 + \frac{\varrho}{2n_0^2}. \tag{7a}$$

An dieser Stelle wird

$$\begin{cases} y_M = 2 \\ \delta_M = \dfrac{n_1}{n_0\sqrt{1 + P^2/4}}. \end{cases} \tag{8}$$

Das bei den Reststrahlfrequenzen beobachtete Reflexionsvermögen ist relativ hoch, z. B. gibt Rubens für das mittlere Reflexionsvermögen des Steinsalzes 0,8 an, dem etwa $P = 20$ entsprechen würde.

Bei hohem Reflexionsvermögen wird also in Annäherung

$$\text{(8a)} \qquad \begin{cases} \delta_M = 2\frac{n_1}{n_0}\frac{1}{P}, \\ R_M = 1 - 4\frac{n_1}{n_0}\frac{1}{P}. \end{cases}$$

Mit diesen Werten δ_M und R_M mögen die entsprechenden Größen δ_0 und R_0, welche für die Eigenfrequenz $\nu = \nu_0$ gelten, verglichen werden, wenigstens in Annäherung für den Fall, daß P groß ist neben 1. Es ist

$$y_0 = 1 + P$$

$$\delta_0^2 = \frac{n_1^2}{n_0^2}\frac{2(1+P)}{1+(1+P)^2} = \frac{n_1^2}{n_0^2}\frac{2}{1+P},$$

also näherungsweise

$$\delta_0 = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{2/P}.$$

Unter der Voraussetzung, daß das erste Medium das Vakuum ist (also $n_1 = 1$) und unter Berücksichtigung von (8a) geht die letzte Gleichung über in:

$$\text{(9)} \qquad \delta_0 = \sqrt{\delta_M}/n_0.$$

Wäre also die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von der Frequenz bekannt, so ließe sich hieraus allein die Lage von ν_0 gegen ν_M ermitteln. Wenn beispielsweise $n_0 = 1{,}5$ und

$$R_M = \begin{cases} 0{,}8 \\ 0{,}9 \end{cases}, \quad \text{so folgt für} \quad \frac{R_0}{R_M} = \begin{cases} 0{,}72 \\ 0{,}75. \end{cases}$$

Läßt man das Licht nacheinander an 4 Flächen der zu untersuchenden Substanz reflektieren, so läge also ν_0 an derjenigen Stelle, wo die Kurve der reflektierten Intensität rund auf $^1/_4$ bzw. auf $^1/_3$ des maximalen Wertes gesunken ist; und zwar, wie aus Formel (7a) hervorgeht, nach der Richtung größerer Wellenlängen verschoben. Legt man die Kurven von Rubens für Steinsalz und Sylvin zugrunde, so würden sich die Eigenfrequenzen ergeben für

Steinsalz etwa 60 μ (Maximum der Reflexion bei 52 μ).
Sylvin „ 74 μ („ „ „ „ 64 μ).

Die so geschätzten Werte für ν_0 sind aber äußerst unsicher, weil einmal, wie Hr. Rubens selbst betont, seine Darstellungsmethode der Intensitätsverteilung nur eine ziemlich rohe Annäherung ist[1]), ferner aber besonders, weil fremde Einwirkungen (Wasserdampf) die Gestalt der Kurve stark beeinflussen. Es ist daher von großer Wichtigkeit, daß die in Formel (7a) vorkommende Konstante ϱ sich aus anderweitigen Daten berechnen läßt, während das unbekannte ν' in ihr nicht auftritt.

§ 3. Anwendung auf zweiatomige Kristalle.

Die folgenden Betrachtungen sind durch eine Arbeit von M. Born[2]) veranlaßt, in welcher er nach dem Vorgange Dehlingers[3]) die Eigenfrequenzen der Atome ν_0 aus anderweitigen Beobachtungen, gestützt auf die Raumgittertheorie der Kristalle zu berechnen sucht. Aus den dort angegebenen Daten ist nun auch die für den vorliegenden Fall so wichtige Größe ϱ zu berechnen. Ist F die Summe der Ladungen einer Atomart im Grammolekül, δ die Dichte, μ_1 und μ_2 die Atomgewichte, so findet sich für ϱ

$$\varrho = \frac{4\pi F^2 \delta}{\mu_1 \mu_2}.$$

Aus (7a) folgt dann für die Wellenlängen λ_0 und λ_M:

$$\frac{1}{\lambda_M^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{\varrho}{2 n_0^2 4\pi^2 c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} + \varrho', \tag{10}$$

wobei ϱ' eine neue Abkürzung bedeutet. M. Born hat auch die λ_0 berechnet und Werte gefunden, welche von dem Maximum der Reststrahlen erheblich abweichen. Während Hr. Born aber in der genannten Abhandlung bereits auf die Verschiebung des Reststrahlenmaximums gegen die Eigenwellenlärge hinweist, hat er in einer späteren Abhandlung[4]) doch hierin einen Widerspruch gegen die Grundannahme seiner damaligen Rechnung zu finden geglaubt, mit Unrecht, wie wir im folgenden zeigen werden. Die folgende Tabelle enthält in der ersten Spalte die aus den von Born benutzten Daten berechneten Werte von ϱ'; in der zweiten die von Born gefundenen λ_0,

1) Rubens, Sitzungsber. d. Berliner Akad. S. 523. 1913.

2) M. Born, Sitzungsber. d. Berliner Akad. S. 608. Formel (1). 1918.

3) W. Dehlinger, Phys. Zeitschr. 15. S. 276. 1914.

4) M. Born, Phys. Zeitschr. 19. S. 539. 1918.

in der dritten die nach Formel (10) hieraus berechneten λ_M und schließlich in der letzten Spalte die von Rubens beobachteten Reststrahlenwellenlängen λ_R.

	ϱ'	λ_0	λ_M	λ_R
Steinsalz . . .	$1{,}74 \cdot 10^4$	66,7 μ	50,9 μ	52,0 μ
Sylvin . . .	$1{,}00 \cdot 10^4$	78,0 „	61,6 „	63,4 „
Bromkalium .	$0{,}562 \cdot 10^4$	94,0 „	76,8 „	82,6 „
Jodkalium . .	$3{,}46 \cdot 10^3$	115,0 „	95,3 „	94,1 „

Die Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Reststrahlenwellenlängen ist angesichts der verschiedenartigen zur Berechnung verwandten Daten eine sehr gute. Bei Bromkalium waren die Beobachtungen der Reststrahlen besonders schwierig.[1]) Um noch weitere Beobachtungen heranzuziehen, könnte man z. B. auf die von Paschen berechneten Dispersionsformeln für Steinsalz und Sylvin zurückgreifen. Diese Formeln sind so berechnet, daß sie die sehr genauen Paschenschen Beobachtungen möglichst exakt darstellen. Es muß indessen darauf hingewiesen werden, daß die in den Formeln auftretenden Konstanten nicht unbedingt einen physikalischen Sinn haben. Die Dielektrizitätskonstante berechnet sich nach der Paschenschen Formel für Steinsalz zu 5,68, während der experimentelle Wert 5,55[2]) ist. Bei Sylvin hingegen folgt aus der Paschenschen Formel 3,87, der experimentelle Wert aber ist 4,70. Man wird daher zu allgemeinen Schlußfolgerungen die Konstanten der auf Sylvin bezüglichen Formel nicht benutzen können; für Steinsalz würde aus der Paschenschen Formel $\varrho' = 2{,}02 \cdot 10^{+4}$ folgen, für λ_0 ungefähr 60 μ, was von den oben angegebenen Werten nicht allzu verschieden ist.

Schließlich mögen diejenigen Werte für die Eigenschwingung λ_0 zum Vergleich herangezogen werden, welche ich für Steinsalz und Sylvin in der vorangehenden Arbeit aus der Darstellung der spezifischen Wärmen nach der Born-Kármánschen Theorie erhielt:

$$\text{Steinsalz } \lambda_0 = 64{,}5\ \mu,$$
$$\text{Sylvin } \lambda_0 = 77\ \mu.$$

1) H. Rubens, Sitzungsber. d. Berliner Akad. S. 527. 1913.
2) Vgl. W. Voigt, Kristallphysik. S. 457.

Die Übereinstimmung mit den in Tab. 1 angegebenen Werten für λ_0 ist wiederum recht gut.

§ 4. Flußspat.

Komplizierter sind die Verhältnisse beim Flußspat. Die Raumgittertheorie läßt hier nur eine Reststrahlenwellenlänge zu. Diese Aussage steht wohl kaum in unbedingtem Widerspruch zu den Beobachtungen von Rubens[1]), welcher bei einer größeren Zahl von Reflexionen ein doppeltes Maximum der Intensität wahrnahm. Da nämlich die Intensität der benutzten Lichtquelle innerhalb des Streifens sehr stark variiert (die Intensitäten an den beiden Enden desselben verhalten sich wenigstens wie 1 : 3), kann ein zweites Maximum entstehen, wenn der steilste Absturz sich an einer Stelle des Spektrums befindet, wo das Reflexionsvermögen noch im Steigen begriffen ist. Man kann durch Aufzeichnung und Durchrechnung eines speziellen Beispiels leicht die Kurven Fig. 2 der oben zitierten Rubensschen Arbeit erhalten.

Aus den von M. Born benutzten Daten ergibt sich:

	ϱ'	λ_0	λ_M	λ_R
Flußspat . . .	$4{,}18 \cdot 10^4$	$53{,}1\,\mu$	$35{,}9\,\mu$	$31{,}6\,\mu$

Der von Rubens beobachtete Wert kann infolge der oben erörterten Intensitätsverteilung sehr wohl etwas zu klein sein; doch wird kaum hierauf allein die Differenz zwischen λ_M und λ_R zurückzuführen sein, sondern es wird die immerhin vorhandene Unsicherheit in den benutzten Daten eine Rolle spielen. Der aus der spezifischen Wärme abgeleitete Wert $\lambda_0 = 51{,}0\,\mu$ liegt dem von Born berechneten λ_0 sehr nahe. Zweifellos besteht bei der Wahl der beiden Eigenfrequenzen zur Darstellung der spezifischen Wärme eine gewisse Willkür; besonders da nur bei wenigen Temperaturen Beobachtungen vorliegen. Immerhin wäre eine Wiedergabe des Temperaturverlaufs der spezifischen Wärme bereits mit einer Eigenwellenlänge $\lambda_0 = 45\,\mu$ nicht mehr ohne erhebliche Fehler möglich.

Zusammenfassung.

In der vorstehenden Arbeit wurde die Lage des Maximums des Reflexionsvermögens, welche nach der Reststrahlen-

1) H. Rubens, Ann. d. Phys. 69. S. 576. 1899.

methode gemessen wird, gegenüber der Eigenfrequenz des Körpers berechnet. Die Verschiebung ist sehr beträchtlich und darf keineswegs vernachlässigt werden; sie konnte bei einer Reihe der wichtigsten Kristalle aus vorhandenen Daten berechnet werden. Es zeigt sich nunmehr eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Rubensschen Reststrahlbeobachtungen, den Frequenzen, welche aus der Theorie der spezifischen Wärme folgen und schließlich denjenigen Werten, welche M. Born aus der Größe der Dielektizitätskonstanten und gewisser optischer Daten berechnet hat.

Danzig-Langfuhr, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule,
28. August 1919.

(Eingegangen 2. September 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 7.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Die magnetische Suszeptibilität von Antimon und Wismut; ein Beitrag zur Kenntnis der Form der Magnetonen*[1]*;*

von Héctor Isnardi und Richard Gans.

(Nach Messungen von Héctor Isnardi.)

Nach der Langevinschen[2]) kinetischen Theorie des Magnetismus muß die spezifische Suszeptibilität χ diamagnetischer Körper von der Intensität des Feldes H unabhängig sein, während die experimentellen Arbeiten von Honda[3]) und Owen[4]) in einigen Fällen einen ausgesprochenen Einfluß von H auf χ zeigen (vgl. Fig. 1 und 2).

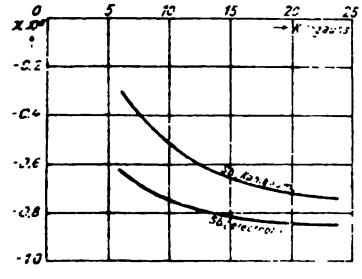


Fig. 1.

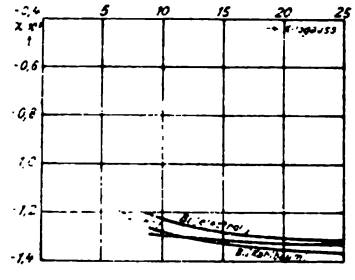


Fig. 2.

Beide Forscher schreiben diese Nichtkonstanz der Suszeptibilität der Gegenwart kleiner Mengen Eisen zu und deuten ihre Resultate als Überlagerung der negativen, konstanten Suszeptibilität des diamagnetischen Körpers (die gerade Linie A

1) Auszug aus der Veröffentlichung in Contribución al estudio de las ciencias. Universidad de La Plata. 2. S. 69. 1917.

2) P. Langevin, Ann. chim. phys. (8) 5. S. 70. 1905.

3) K. Honda, Ann. d. Phys. 32. S. 1027. 1910.

4) M. Owen, Ann. d. Phys. 37. S. 657. 1912.

in Fig. 3) und der variablen Suszeptibilität des Eisens (die Kurve *B* in Fig. 3), so daß eine Kurve vom Typus *C* entsteht.

Nun hat einer von uns[1]) eine statistische Theorie des Magnetismus entwickelt unter der Annahme, daß die Magnetonen starre, elektrisch geladene Körper sind, die sich unter dem Einflusse des äußeren Feldes und der thermischen Agitation befinden.

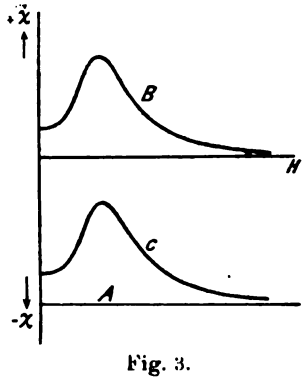


Fig. 3.

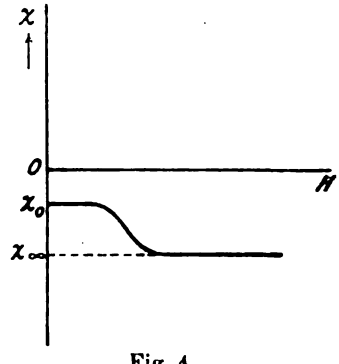


Fig. 4.

Nach dieser Theorie ist

$$\chi = -N\frac{e^2}{4m^2}\cdot\frac{2A-C}{3}[1+h\,\Omega(\gamma)], \tag{1}$$

wo N die Anzahl Magnetonen im Gramm, e/m die spezifische Ladung des Elektrons, A, B und C die Hauptträgheitsmomente des Magnetons bedeuten, von denen A und B als gleich angenommen worden sind, so daß B in der Formel nicht vorkommt. h ist eine Abkürzung für

$$h = \frac{3}{2}\cdot\frac{1-\frac{C}{A}}{2-\frac{C}{A}}, \tag{2}$$

Ω eine transzendente Funktion, die von Gans berechnet und in einer Tabelle niedergelegt worden ist, und deren Argument

$$\gamma = H\frac{e}{2m}\sqrt{\frac{A-C}{2kT}} \tag{3}$$

dem Felde direkt und der Wurzel aus der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist, denn k ist die bekannte universelle Konstante der statistischen Mechanik.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 49. S. 149. 1916.

Nach Gleichung (1) wird χ durch eine Kurve vom Typus der Fig. 4 dargestellt, die durch einen bestimmten Wert χ_0 für schwache Felder und einen anderen Wert χ_∞ für sehr starke Felder gekennzeichnet ist, und zwar gilt

$$\frac{\chi_\infty}{\chi_0} = \frac{3}{2\,\frac{C}{A}}. \tag{4}$$

Nur wenn $A = C$ ist, d. h. wenn alle drei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, so daß $h = 0$ und $\gamma = 0$ ist, wird χ eine vom Felde und der Temperatur unabhängige Konstante

$$\chi_0 = -N\frac{e^2}{4m^2}A. \tag{5}$$

Da die Kurve C der Fig. 3 und die Kurve der Fig. 4 für starke Felder denselben qualitativen Verlauf zeigen, haben wir für einige Stoffe mit größtmöglicher Genauigkeit χ in seiner Abhängigkeit von H gemessen, und zwar innerhalb möglichst weiter Grenzen und besonders für schwache Felder, um zu entscheiden, ob die etwa beobachtete Veränderlichkeit von χ durch kleine Eisenbeimengungen hervorgerufen wird oder sich durch Verschiedenheit der Hauptträgheitsmomente des Magnetons erklärt, mit der Nebenabsicht, A und C mittels der Gleichungen (3) und (4) in absolutem Maße zu bestimmen.

Wir haben für die Beobachtungen Sb und Bi ausgewählt wegen des starken Feldeinflusses bei diesen Substanzen nach Honda und Owen.

Wir bedienten uns der Weissschen[1]) Meßmethode, welcher die Kraftwirkung in einem inhomogenen Felde zugrunde liegt, mußten also die Feldstärke und ihren Gradienten ballistisch messen, und zwar letzteren mit einem eigens konstruierten Schlittenapparat, so daß der ballistische Ausschlag bei seiner Verschiebung direkt den Gradienten ergab.

Zur Eichung in absolutem Maße benutzten wir Wasser mit dem von Weiss und Piccard[2]) bestimmten Werte.

---

1) P. Weiss und G. Foëx, Arch. d. sc. phys. et nat. **31**. S. 4, 1989, 117. 1911.

2) P. Weiss und P. Piccard, C. R. **155**. S. 1234. 1912.

Natürlich wurde der schwache Magnetismus der Suspension gemessen und in Rechnung gezogen.

1. Antimon.

Ehe der zu den Messungen benutzte Zylinder gegossen wurde, wurde das Metall und die Bronzeform mit heißer Schwefelsäure gewaschen. Es ergaben sich folgende drei Maßreihen.

H	$-\chi \cdot 10^6$	H	$-\chi \cdot 10^6$	H	$-\chi \cdot 10^6$
2075	0,7787	1029	0,7950	3350	0,8189
3086	0,7670	1543	0,8087	5090	0,8092
4100	0,8048	2075	0,7410	6830	0,8100
5084	0,8112	3086	0,7838	8500	0,8895
6000	0,8254	4100	0,8145	10170	0,8166
6750	0,8183	5084	0,8048	13260	0,7890
7460	0,8153	6000	0,8179		
		6750	0,8164		
		7460	0,8143		
		8046	0,7923		

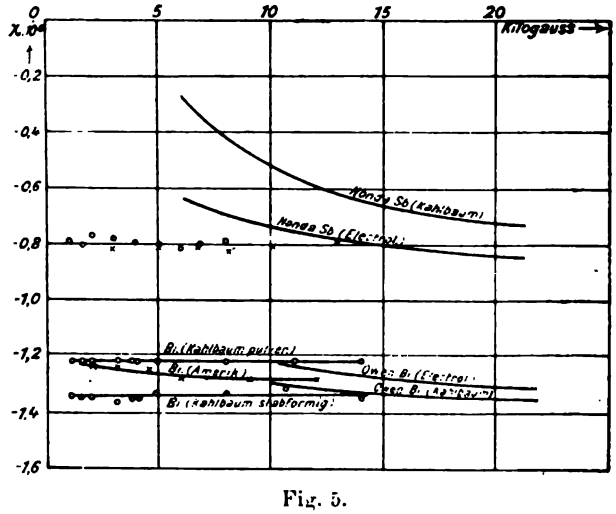


Fig. 5.

Die Resultate sind graphisch in Fig. 5 dargestellt, in der auch zum Vergleich die Hondaschen Resultate eingezeichnet worden sind.

2. **Amerikanisches Wismut.**[1])

Das granulierte Material wurde fein gepulvert. Die Ergebnisse sind folgende.

H	$-\chi \cdot 10^6$
1466	1,220
1962	1,241
3081	1,240
3244	1,243
4480	1,256
6002	1,289
8917	1,282
11680	1,279

Wegen der graphischen Darstellung vgl. Fig. 5.

3. **Kahlbaumsches Wismut in Stangenform.**

Da beim amerikanischen Wismut ein deutlicher, wenn auch schwacher Einfluß des Feldes beobachtbar war, haben wir uns aus Kahlbaumschem Wismut eine Stange gegossen und erhielten die folgenden Resultate.

H	$-\chi \cdot 10^6$
1084	1,352
1466	1,349
1962	1,347
3244	1,369
3935	1,358
4001	1,358
4900	1,328
8028	1,334
11720	1,317
13680	1,357

Hier war eine systematische Abhängigkeit von der Feldstärke, wie aus der Tabelle und der Figur hervorgeht, gänzlich verschwunden. Drehte man jedoch die Stange um ihre Achse um 90°, so ergab sich für das Feld $H = 8028$ Gauss der Wert $\chi = -1{,}17 \cdot 10^{-6}$. Das ist ein Einfluß der Kristallstruktur, wie ihn Owen (a. a. O.) bereits festgestellt hat.

1) Wismut aus der Filiale von Merck in den Vereinigten Staaten.

4 Kahlbaumsches Wismut in Pulverform.

Aus diesem Grunde haben wir auch mit pulverisiertem Wismut von Kahlbaum Messungen gemacht. Es ergab sich

H	$-\chi \cdot 10^6$
1084	1,218
1466	1,223
1962	1,215
3244	1,221
3935	1,229
4001	1,225
4900	1,223
8028	1,228
11720	1,214
13680	1,222

Der in dieser Maßreihe gefundene Wert steht in befriedigender Übereinstimmung mit dem Mittelwert aus den beiden Zahlen, die in zueinander senkrechten Richtungen bei der Stange gefunden wurden.

In die Figur haben wir auch die von Owen an Kahlbaumschem und elektrolytischem Bi ermittelten Werte eingetragen.

Ergebnisse.

1. Die Resultate unserer Messungen zeigen, daß die magnetische Suszeptibilität des Bi und Sb nicht von der Feldstärke abhängt, daß also die scheinbare Abhängigkeit, welche Honda und Owen beobachtet haben, auf Meßfehler und teilweise vielleicht auf Verunreinigung durch Eisen zurückzuführen ist.

2. Ein Vergleich mit der Gansschen Theorie ergibt, daß die Hauptträgheitsmomente eines Magnetons untereinander gleich sind. Wir haben dieses Resultat zwar nur am Bi und Sb festgestellt, wahrscheinlich gilt es, nach den Messungen von Honda und Owen zu urteilen, aber auch für die übrigen Elemente.

La Plata, April 1917, Instituto de Física.

(Eingegangen 4. Oktober 1919.)

2. *Über das piëzooptische Verhalten von Topas; von Robert Eppendahl.*

(Göttinger Dissertation.)

Einleitung.

Das optische Verhalten eines durchsichtigen Kristalles ist bekannt, wenn die Parameter seines Polarisationsovaloides gegeben sind. Die Gleichung desselben lautet, auf ein beliebig im Kristall orientiertes Achsensystem X', Y', Z' bezogen:

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho^4 = a_{11}\,x'^2 + a_{22}\,y'^2 + a_{33}\,z'^2 + 2a_{23}\,y'\,z' + 2a_{31}\,z'\,x' \\ \qquad\qquad + 2a_{12}\,x'\,y'. \end{cases}$$

Hierin sind die a_{hk} Parameter des Kristalles, die sogenannten Polarisationskonstanten[1]), für das betreffende Achsensystem. Im Falle, daß das Achsensystem mit den Hauptachsen des Ovaloides zusammenfällt, werden die a_{23}, a_{31}, $a_{12} = 0$ und die a_{11}, a_{22} und a_{33} zu den Quadraten der Hauptlichtgeschwindigkeiten.

Bei konstanten äußeren Bedingungen sind die Polarisationskonstanten nur Funktionen der Wellenlänge. Bei Änderung der äußeren Umstände, die Einfluß auf das physikalische Verhalten des Kristalles haben, ändern sie sich dagegen im allgemeinen gleichfalls. Für die Änderung des optischen Verhaltens eines Kristalles speziell durch elastische Deformation hat F. Pockels[2]) nach dem Vorgang von Fr. Neumann[3]) die Polarisationskonstanten als lineare Funktionen der Deformationsgrößen bzw. der Druckkomponenten angesetzt und auf dieser Grundlage die Theorie der beobachtbaren Erscheinungen abgeleitet, die erhaltenen Resultate auch durch experimentelle Untersuchungen an Kristallen des regulären

1) W. Voigt, Göttinger Nachr. 1896. Heft 3. S. 17.

2) F. Pockels, Wied. Ann. N. F. **37.** 1889; Lehrbuch der Kristalloptik S. 467. 1906.

3) F. Neumann, Abh. d. Berliner Akad. II. 1841; Pogg. Ann. **54.** S. 449. 1841.

Systems sowie des rhomboëdrischen Systems geprüft und bestätigt.[1])

In vorliegender Arbeit ist ein Vertreter des rhombischen Systems, nämlich Topas, der Untersuchung unterworfen, während im Anhang kurz über Beobachtungen am hexagonalen Beryll berichtet wird.[2]) Eine mühsame Untersuchung des piëzooptischen Verhaltens von Natriumchlorat, das wegen dessen Aktivität ein ganz besonderes Interesse erweckt, führte vermutlich wegen optischer Störungen des benutzten Kristallmaterials nicht zu sicheren Ergebnissen und muß daher unbesprochen bleiben.

Die Beobachtungen zur Bestimmung der piëzooptischen Konstanten der betreffenden Kristalle sind im Physikalischen Institute zu Göttingen durchgeführt worden; sie beziehen sich ebenso wie die Beobachtungen von Pockels auf den speziellen Fall einseitigen Druckes, für den die theoretischen Formeln besonders leicht abzuleiten sind. Ein rechtwinkliges Parallelepiped von geeigneter Orientierung gegen den Kristall ist in der Längsrichtung einem einseitigen Drucke ausgesetzt, während die optischen Wirkungen durch die beiden zu dieser Richtung senkrechten Kanten [illegible]

[illegible] wurde zunächst [illegible] Kompressions- [illegible] Beobachtungen [illegible] gebende Be- [illegible] Pockels.[3]) [illegible] hergestellt. [illegible] Löcher richte [illegible] eine schwere [illegible] Tischplatte [illegible] plan [illegible] Kristallgerätes [illegible] wenn [illegible]

[illegible] N. F. XX. S. 449.

[illegible] Ann. Ann. 11.

[illegible] [illegible] Teil

[illegible]

sator auf die Tischplatte aufgeschraubt wurde, das Kristallpräparat direkt vor bzw. hinter der Öffnung des Kompensators zu stehen kam. Zur Ausübung des Druckes wurde auf die obere Endfläche des Kristallparallelepipeds ein passendes Stahlstück aufgesetzt oder aufgekittet, das in eine Spitze endigte. Diese Spitze wiederum trug einen Messingrahmen, in dessen Ausschnitt die Säule und das Kristallpräparat stand und dessen Ebene senkrecht zur Beobachtungsrichtung war. Das Rähmchen führte durch einen Spalt in der Tischplatte nach unten, wo es mit einer Anhängevorrichtung versehen wurde, die vermittelst einer Stahlspitze mit einem horizontalstehenden Hebel in Verbindung stand. Da bei dieser Vorrichtung der Druck zwischen zwei verhältnismäßig weit entfernten Spitzen wirkte, so war die Unsicherheit in der Druckrichtung nicht so groß, wie bei dem Pockelsschen Apparat; außerdem war die Aufstellung der Prismen eine viel bequemere und leichtere. Die Schwierigkeiten indessen, einen gleichmäßig über den Querschnitt des Präparates verteilten Druck zu erzielen, auf die Pockels schon in ausführlicher Weise eingegangen ist, waren nicht minder groß. Das Verhältnis des Hebelarmes, an dem die Stahlspitze des Rahmens angriff, zu dem Hebelarm, an welchem die Belastung wirkte, war verschieden. Es war 1 : 5 bei den meisten Kompensatormessungen, bei den Messungen der absoluten Verzögerungen dagegen 1 : 9,7.

Die Ausführung der Messungen geschah in analoger Weise, wie bei den Untersuchungen von Pockels. Zur Messung der relativen Verzögerungen diente derselbe Babinetsche Kompensator älterer Konstruktion, den er bei seinen Untersuchungen im Physikalischen Institut zu Göttingen benutzt hat.[1]) Infolge einer währenddem an demselben vorgenommenen Auswechselung der Quarzkeile betrug der Streifenabstand für Na-Licht nicht 23.8 Umdrehungen der Trommel, sondern 9.72 Umdrehungen.

Bei sämtlichen Beobachtungen der relativen Verzögerungen war das Kristallprisma zum Kompensator so orientiert, daß die Schwingungsrichtungen im Prisma parallel waren zu denen im Kompensator. Dann gilt für die durch Druck erzeugte

1) F. Pockels, Wied. Ann. N. F. 37. S. 166. 1889.

relative Verzögerung Δ der horizontal schwingenden Welle h gegen die vertikal schwingende v bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung:

$$(2)\quad \left.\begin{aligned} \Delta_{hv} = \delta_h - \delta_v = \frac{D^0 \cdot p}{2\lambda}\left\{\frac{\omega_h^{0\,2} - \omega_h^2}{p \cdot v^2} \cdot n_h^{0\,3} - \frac{\omega_v^{0\,2} - \omega_v^2}{p \cdot v^2} \cdot n_v^{0\,3}\right\} \\ + \frac{D - D^0}{\lambda}(n_h^0 - n_v^0) = \frac{\Delta'}{9{,}72}\end{aligned}\right.$$

Hierin bezeichnet D^0 die Dicke des Prismas in der Beobachtungsrichtung vor der Kompression, D diejenige während der Kompression; p den angewandten Druck in Gramm pro Quadratmillimeter. Derselbe ist

$$p = \frac{Q \cdot 9{,}7}{K_1 \cdot K_2} \quad \text{oder} \quad p = \frac{Q \cdot 5}{K_1 \cdot K_2},$$

wo Q die am Hebelende wirkende Belastung und $K_1 \cdot K_2$ der Querschnitt des Prismas ist. $D - D^0$ ist die Dickenänderung des Präparates in der Beobachtungsrichtung. n_h^0 und n_v^0 bezeichnen die ursprünglichen Brechungsindizes der horizontal und der vertikal schwingenden Welle. Das Glied

$$\frac{D - D^0}{\lambda}(n_h^0 - n_v^0)$$

ist eine Korrektion für die relative Verzögerung der entstehenden Dickenänderung, die speziell bei stark doppelbrechenden Kristallen von Einwirkung ist. Bei schwach doppelbrechenden Kristallen, wie Topas, beträgt diese Korrektion nur einen kleinen Bruchteil von 1 Proz. und kann bei nicht sehr genauen Messungen vernachlässigt werden; bei regulären Kristallen verschwindet sie überhaupt. Ferner bezeichnet v die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raum, ω^0 diejenige im undeformierten, ω diejenige im deformierten Kristall. Δ' ist die durch die Kompression erzeugte Streifenverschiebung des Kompensators, ausgedrückt in Umdrehungen der Trommel. Die Ungenauigkeit der Einstellung des schwarzen Kompensatorstreifens war je nach der Deutlichkeit des Streifens verschieden. Sie ging selten über $\pm$ 0,004 λ hinaus, und betrug in den meisten Fällen ungefähr 0,002—0,004 λ.

Der pro Millimeter Lichtweg durch die Druckeinheit von 1 g pro Quadratmillimeter erzeugte Gangunterschied werde mit $\bar{\Delta}$ bezeichnet. Für ihn gilt:

$$(2') \quad \left| \begin{array}{l} \overline{\Delta}_{hv} = \dfrac{\Delta_{hv}}{p \cdot D^0} = \dfrac{1}{2\lambda} \left\{ \dfrac{\omega_h^{0\,2} - \omega_h^{\,2}}{p \cdot r^2} \cdot n_h^{0\,3} - \dfrac{\omega_v^{0\,2} - \omega_v^{\,2}}{p \cdot v^2} \cdot n_v^{0\,3} \right\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \dfrac{n_h^0 - n_v^0}{\lambda} \cdot \end{array} \right.$$

$\frac{D - D^0}{p \cdot D^0}$ ist hierbei die durch 1 g pro Quadratmillimeter hervorgerufene lineare Dilatation. Ist also Δ_{hv} durch die Beobachtung gegeben, ferner die lineare Dilatation bekannt, so läßt sich der in der $\{\ldots\}$ stehende Ausdruck berechnen. Derselbe enthält die durch das Polarisationsovaloid und den Ansatz von Pockels gegebenen Konstanten des Kristalles.

Die Messung der absoluten Verzögerungen wurde mit einem Jaminschen Interferentialrefraktor spezieller Konstruktion ausgeführt, der nach Angaben von Prof. Voigt konstruiert war. Zwischen den Platten desselben stand außer dem Kompressionsapparat ein zur Messung der absoluten Verzögerung dienender Jaminscher Kompensator. Sämtliche Apparate waren fest auf einer großen Steinplatte montiert, um Erschütterungen zu vermeiden. Als Schutz gegen Temperaturschwankungen war das Ganze mit einem Pappkasten umgeben, der Fenster für den eintretenden Lichtstrahl und das Beobachtungsfernrohr enthielt. Ferner ragte aus demselben das Ende des zu belastenden Hebels und die Trommel des Jaminschen Kompensators heraus. Zur Aufhebung der durch das zu komprimierende Prisma hervorgerufenen ursprünglichen Verzögerungen des einen Lichtstrahles wurde immer ein zweites passendes Präparat in den Gang des anderen Strahles gestellt. Um die relative Stellung der beiden Prismen zu fixieren, waren dieselben nahe einander zwischen dünne Stahlstreifen gekittet. Eine etwaige Bewegung des komprimierten Prismas wurde so durch das Kompensationsprisma mitgemacht. Der Abstand der beiden interferierenden Strahlen und infolgedessen auch der beiden nebeneinanderstehenden Präparate betrug etwa 1 cm. Infolge der benutzten intensiven Lichtquelle und eines passend gewählten Einfallswinkels des auf die erste Platte des Jamin auffallenden Strahles wurde erreicht, daß die Verzögerung sowohl der vertikal schwingenden wie der horizontal schwingenden Welle in den meisten Fällen gemessen werden konnte. Die Intensität des Interferenzbildes, das durch die vertikal schwingende Welle erzeugt wurde, war die größere,

infolge der teilweisen Polarisation bei der Reflexion an den Glasplatten des Interferentialrefraktors. Jedoch genügte auch die Intensität des Interferenzbildes der horizontal schwingenden Welle zu genauen Messungen. An und für sich genügt die Beobachtung einer der beiden Schwingungen, da die relative Verzögerung mit dem Kompensator bestimmt war. Doch war es wünschenswert, beide Schwingungen zugänglich zu machen, um besonders diejenige mit der größeren absoluten Verzögerung messen zu können. Dieses war für die am Topas und Beryll zu messenden Verzögerungen von wesentlicher Bedeutung, da hier unter Umständen die Verschiebungen der Interferenzstreifen der horizontalen Welle die größeren waren. Die Trennung der beiden senkrecht zueinander polarisierten Interferenzbilder erfolgte durch ein großes Nicolsches Prisma, das hinter dem Beobachtungsfernrohr in den Strahlengang eingeschaltet wurde.

Für die durch Druck erzeugte absolute Verzögerung gilt:

$$(3) \qquad \delta_{h,v} = \frac{D^0 \cdot p}{2\lambda} n_{h,c}^{0\,3} \cdot \frac{\omega_{h,v}^{0\,2} - \omega_{h,v}^2}{p \cdot v^2} + \frac{D - D^0}{\lambda} (n_{h,c}^0 - 1),$$

oder bezogen auf die Längeneinheit 1 mm und die Druckeinheit 1 g pro Millimeter:

$$(3') \qquad \delta_{h,c} = \frac{1}{2\lambda} \frac{\omega_{h,c}^{0\,2} - \omega_{h,v}^2}{p \cdot v^2} \cdot n_{h,v}^{0\,3} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \frac{n_{h,c}^0 - 1}{\lambda}.$$

Hierbei ist das letzte wegen der Dickenänderung des Prismas auftretende Glied in keinem Falle zu vernachlässigen. Wie die Messungen an Topas und Beryll gezeigt haben, kann dasselbe sogar von derselben Größenordnung sein, wie die direkt durch Druck erzeugte Verzögerung. Es kann der durch Druck erzeugten Verzögerung entgegenwirken und dieselbe sogar zum großen Teile wieder aufheben. Das Glied spielt hier somit keineswegs die Rolle einer Korrektion. Eine Kenntnis der elastischen Eigenschaften eines Kristalles ist daher bei diesen Messungen, bei denen das Präparat in Luft steht, erforderlich; prinzipiell könnte man natürlich das zu deformierende Prisma auch in eine Flüssigkeit von nahezu demselben Brechungsindex stellen, dann würde die Flüssigkeit die Dickenänderung ausgleichen und das letzte Glied in obiger Gleichung würde wegfallen. Ein Flüssigkeitstrog zwischen den Platten des Refraktors würde jedoch die Deutlichkeit des Interferenz-

bildes wesentlich einschränken und daher ziemlich viele experimentelle Schwierigkeiten verursachen.

Als Lichtquelle wurde zuerst Na-Licht benutzt, späterhin jedoch die gelbe Heliumlinie mit der Wellenlänge $\lambda = 588\,\mu\mu$. Genauere Einzelheiten über die Art der Messungen mit dem Interferentialrefraktor, ihrer Ausführung im einzelnen, sowie über die Aufstellung der Kristallpräparate und die dabei sich ergebenden Schwierigkeiten, finden sich in ausführlicher Weise in den Arbeiten von Pockels, so daß hier die Erwähnung derselben genügen kann.

Das piëzooptische Verhalten von Topas.

a) Die benutzten Prismen.

Das Material für die vorliegende Arbeit wurde mir in liebenswürdiger Weise von Hrn. Geheimrat Voigt zur Verfügung gestellt. Die benutzten sechs rechtwinkligen Parallelepipeda waren aus denselben sibirischen Kristallen geschnitten, die seiner Zeit das Material für die Bestimmung der Elastizitätskonstanten des Topases geliefert haben.[1]) Die genaue Kenntnis dieser Konstanten für die verwendeten Präparate war sehr wertvoll, weil (abgesehen von dem oben Ausgeführten) so nicht nur eine Bestimmung der piëzooptischen Konstanten, sondern auch eine sichere Berechnung der elastooptischen Konstanten ermöglicht wurde. Hierbei ist als piëzooptische Konstanten nach Pockels die Konstantengruppe bezeichnet, die man erhält, wenn man die Polarisationskonstanten als lineare Funktionen der *Druckkomponenten* ansetzt, als elastooptische dagegen diejenige, die bei der Entwickelung der Polarisationskonstanten in lineare Funktionen der *Deformationsgrößen* erhalten wird. Die Herstellung der Prismen ist von der Firma Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H. ausgeführt worden. Die Dimensionen und Orientierungen der einzelnen Prismen sind unten angegeben. Dabei werden die Richtungen der Prismenkanten mit L, K_1 und K_2 bezeichnet, wobei L die Längsrichtung, die immer mit der Druckrichtung zusammenfällt, K_1 und K_2, welche die Beobachtungsrichtungen sind, je eine der schmalen Prismenkanten bedeutet.

1) W. Voigt, Wied. Ann. **34**. S. 981. 1888 (daselbst auch eine Beschreibung der aus Sibirien stammenden Kristalle).

Sie werden auf das natürliche Symmetrieachsensystem X^0, Y^0, Z^0 der rhombischen Kristalle (das zugleich optisches Symmetrieachsensystem ist, und zwar in der Weise, daß Z^0 parallel der ersten optischen Mittellinie liegt und $n_x^0 < n_y^0 < n_z^0$ ist) bezogen.

Prisma 1.

L parallel $X^0 = 7{,}06$ mm
K_1 „ $Y^0 = 3{,}710$ „
K_2 „ $Z^0 = 3{,}692$ „

Prisma 2.

L parallel $Y^0 = 7{,}06$ mm
K_1 „ $Z^0 = 3{,}708$ „
K_2 „ $X^0 = 3{,}692$ „

Prisma 3.

L parallel $Z^0 = 7{,}06$ mm
K_1 „ $X^0 = 3{,}702$ „
K_2 „ $Y^0 = 3{,}709$ „

Prisma 4.

L in der Mittellinie von X^0 u. Y^0 = 7,06 mm
K_1 parallel Z^0 = 3,689 „
K_2 senkrecht zu L u. K_1 = 3,709 „

Prisma 5.

L in der Mittellinie von Y^0 u. Z^0 = 7,07 mm
K_1 parallel X^0 = 3,698 „
K_2 senkrecht zu L u. K_1 = 3,710 „

Prisma 6.

L in der Mittellinie von Z^0 u. X^0 = 7,02 mm
K_1 parallel Y^0 = 3,692 „
K_2 senkrecht zu K_1 u. L = 3,708 „

Diese 6 Prismen sind zur Bestimmung der 12 piëzooptischen Konstanten des Topases ausreichend und bieten außerdem noch Möglichkeiten für die Prüfung der Theorie bzw. der Messungen.

Die natürlichen optischen Eigenschaften des Materiales waren recht gute. Es konnten in fast allen Beobachtungs-

richtungen deutliche Interferenzbilder erhalten werden. Eine Ausnahme machte Prisma 2, dessen eine Beobachtungsrichtung für die Messungen mit dem Interferentialrefraktor unbrauchbar war. Eine Bemerkung über die Art und die Ursache dieser optischen Unregelmäßigkeit findet sich in dem Abschnitt über die Beobachtungen.

b) Allgemeine Theorie für rhombische Kristalle.

Entsprechend der Symmetrie der rhombischen Kristalle, nach der die X^0-, Y^0- und Z^0-Achsen zweizählige Symmetrieachsen sind, gilt für die Polarisationskonstanten als lineare Funktionen der Deformationsgrößen $x_x \ldots . y_z \ldots .$ folgender fundamentale Ansatz[1]):

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{11} - {\omega_x}^{02} = p_{11}\, x_x + p_{12}\, y_y + p_{13}\, z_z, \\ a_{22} - {\omega_y}^{02} = p_{21}\, x_x + p_{22}\, y_y + p_{23}\, z_z, \\ a_{33} - {\omega_z}^{02} = p_{31}\, x_x + p_{32}\, y_y + p_{33}\, z_z, \\ a_{23} = p_{44}\, y_z, \quad a_{31} = p_{55}\, z_x, \quad a_{12} = p_{66}\, x_y, \end{cases}$$

der bei Einführung der Druckkomponenten $X_x \ldots . Y_z \ldots .$ die Form gewinnen mag:

$$(5) \qquad \begin{cases} a_{11} - {\omega_x}^{02} = -\{\pi_{11} X_x + \pi_{12} Y_y + \pi_{13} Z_z\}, \\ a_{22} - {\omega_y}^{02} = -\{\pi_{21} X_x + \pi_{22} Y_y + \pi_{23} Z_z\}, \\ a_{33} - {\omega_z}^{02} = -\{\pi_{31} X_x + \pi_{32} Y_y + \pi_{33} Z_z\}, \\ a_{23} = -\pi_{44} Y_z, \quad a_{31} = -\pi_{55} Z_x, \quad a_{12} = -\pi_{66} X_y. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind ${\omega_x}^0$, ${\omega_y}^0$ und ${\omega_z}^0$ die Hauptlichtgeschwindigkeiten des nichtdeformierten Kristalles. Ihre reziproken Werte, die Hauptbrechungsindizes, die von Mühlheims[2]) an einem sibirischen Topase bestimmt worden sind, und welche für die vorliegenden Berechnungen verwertet wurden, sind:

$$n_x^0 = 1{,}61327; \quad n_y^0 = 1{,}61597; \quad n_z^0 = 1{,}62252.$$

Zur Berechnung des Zusammenhanges zwischen den p_{hk} und π_{hk}, wie auch zur Bestimmung der Dickenänderung eines Präparates, die nach obigem bei den Messungen der absoluten

1) F. Pockels, Wied. Ann. N. F. **37**. S. 159. 1889.
2) Aus Landolt-Börnsteins Tabellen.

rzögerungen eine wichtige Rolle spielt, sind folgen
ehungen zwischen den Deformationsgrößen und den
omponenten zu benutzen:

$$(6)\qquad \begin{cases} x_x = -\{s_{11} X_x + s_{12} Y_y - s_{13} Z_z\}, \\ y_y = -\{s_{12} X_x + s_{22} Y_y - s_{23} Z_z\}, \\ z_z = -\{s_{13} X_x + s_{23} Y_y + s_{33} Z_z\}, \\ y_z = -s_{44} Y_z \quad z_x = -s_{55} Z_x, \quad x_y = -s_{66} X_y \end{cases}$$

Hierin sind die s_{hk} die Elastizitätsmoduln des Kristalle
selben sind von W. Voigt für Topas bestimmt word

$$\begin{aligned} s_{11} &= 4.341 \cdot 10^{-8}; & s_{22} &= 3.460 \cdot 10^{-8}; \\ s_{33} &= 3.771 \cdot 10^{-8}; & s_{44} &= 9.059 \cdot 10^{-8}; \\ s_{55} &= 7.391 \cdot 10^{-8}; & s_{66} &= 7.485 \cdot 10^{-8}; \\ s_{23} &= -0.651 \cdot 10^{-8}, & s_{13} &= -0.840 \cdot 10^{-8}; \\ s_{12} &= -1.353 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Die Druckkomponenten $X_x \ldots . Y_z \ldots .$ werden
Größe des Druckes p und dessen Richtungskosinus l
erhalten durch die Formeln:

$$(7)\qquad \begin{cases} X_x = p \cdot l_1^2; & Y_y = p \cdot l_2^2; & Z_z = p \cdot l_3^2; \\ Y_z = p \cdot l_2 \cdot l_3; & Z_x = p \cdot l_3 \cdot l_1; & X_y = p \cdot l_1 \cdot \end{cases}$$

Die lineare Dilatation in einer Richtung m besti
dann durch die Größen (6) folgendermaßen; es wird

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{D - D^0}{D^0} = x_x \cdot \cos^2(m, x) + y_y \cdot \cos^2(m, y) + z_z \cdot \\ \qquad + y_z \cdot \cos(m, y) \cdot \cos(m, z) + z_x \cdot \cos(m, z \\ \qquad\qquad + x_y \cdot \cos(m, x) \end{cases}$$

Ferner gelten, wenn man die in zu (6) rezipro
auftretenden Elastizitätskonstanten c_{hk} heranzieh
Substanz eigentümlichen Konstanten π_{hk} und p_{hk}

$$(9)\qquad p_{hk} = \sum_1^6 i\, \pi_{hi} \cdot c_{ki}; \qquad \pi_{hi} = \sum_1^6 i\, p_{hi} \cdot$$

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **34.** 1888.
2) W. Voigt, Elementare Mechanik 1901. S
3) F. Pockels, Lehrbuch d. Kristalloptik 1

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst mit Hilfe des Gleichungssystems (5) der Polarisationskonstanten die Größen π_{hk} für Topas bestimmt und aus diesen mittels der ersten dieser beiden Formeln (9) die elastooptischen Konstanten p_{hk} berechnet. Diese Formel ergibt speziell für rhombische Kristalle:

$$(10)\qquad \begin{cases} p_{ih} = c_{h1}\pi_{i1} + c_{h2}\cdot\pi_{i2} + c_{h3}\pi_{i3} \\ \qquad\qquad \text{für } i \text{ und } h = 1, 2, 3. \\ p_{kk} = c_{kk}\pi_{kk} \text{ für } k = 4, 5, 6. \end{cases}$$

Nach den Bestimmungen von W. Voigt haben die Elatizitätskonstanten c_{hk} für Topas die Werte:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 28{,}70\cdot 10^6; & c_{22} &= 35{,}60\cdot 10^6; & c_{33} &= 30{,}02\cdot 10^6; \\ c_{44} &= 11{,}04\cdot 10^6; & c_{55} &= 13{,}53\cdot 10^6; & c_{66} &= 13{,}36\cdot 10^6; \\ c_{23} &= 9{,}01\cdot 10^6; & c_{31} &= 8{,}61\cdot 10^6; & c_{12} &= 12{,}84\cdot 10^6. \end{aligned}$$

Fallen die Polarisationshauptachsen des deformierten Ovaloides mit den natürlichen Symmetrieachsen des Kristalles zusammen, so reduziert sich die Gleichung des Polarisationsovaloides (1) auf:

$$\varrho^4 = a_{11}\,x^{02} + a_{22}\,y^{02} + a_{33}\,z^{02}.$$

worin die Größen a_{11}, a_{22} und a_{33} die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten bedeuten, und zwar ist:

$$a_{11} = \omega_x^2; \quad a_{22} = \omega_y^2; \quad a_{33} = \omega_z^2.$$

Wenn die Hauptachsen X', Y', Z' des deformierten Ovaloides aber eine vom Symmetrieachsensystem abweichende Lage haben, so ist die Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten schwieriger. Bezeichnet man die Richtungskosinus zwischen den Achsen des undeformierten Ovaloides X^0, Y^0, Z^0 und X', Y', Z' gemäß dem Schema:

$$(11)\qquad \begin{array}{c|ccc} & X' & Y' & Z' \\ \hline X^0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ Y^0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ Z^0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array}$$

so geht der Ausdruck des Polarisationsovaloides, bezogen auf das System X^0, Y^0, Z^0, wieder in die allgemeinere Form über.

Ihre 6 Koeffizienten stehen dann zu den Hauptlichtgeschwindigkeiten, den Polarisationskonstanten des auf das System X', Y', Z' bezogenen Ovaloides in dem Zusammenhange:

$$(12)\qquad \left| \begin{array}{l} a_{hk} = \omega_x^2\, \alpha_h\, \alpha_k + \omega_y^2\, \beta_h\, \beta_k + \omega_z^2\, \gamma_h\, \gamma_k \\ \qquad\qquad \text{für } h \text{ und } k = 1,\ 2,\ 3. \end{array} \right.$$

Aus diesen Gleichungen bestimmen sich die Hauptlichtgeschwindigkeiten des deformierten Kristalles durch Beziehungen zwischen den a_{hk} und den Richtungskosinus des Hauptachsensystems des deformierten Ovaloides gegen das natürliche Symmetrieachsensystem. Sie ergeben:

$$(13)\qquad \left| \begin{array}{l} \omega_x^2 = a_{11}\,\alpha_1^2 + a_{22}\,\alpha_2^2 + a_{33}\,\alpha_3^2 + 2a_{23}\,\alpha_2\,\alpha_3 + 2a_{31}\,\alpha_3\,\alpha_1 \\ \qquad\qquad + 2a_{12}\,\alpha_1\,\alpha_2. \\ \omega_y^2 = a_{11}\,\beta_1^2 + a_{22}\,\beta_2^2 + a_{33}\,\beta_3^2 + 2a_{23}\,\beta_2\,\beta_3 + 2a_{31}\,\beta_3\,\beta_1 \\ \qquad\qquad + 2a_{12}\,\beta_1\,\beta_2. \\ \omega_z^2 = a_{11}\,\gamma_1^2 + a_{22}\,\gamma_2^2 + a_{33}\,\gamma_3^2 + 2a_{23}\,\gamma_2\,\gamma_3 + 2a_{31}\,\gamma_3\,\gamma_1 \\ \qquad\qquad + 2a_{12}\,\gamma_1\,\gamma_2. \end{array} \right.$$

Die Polarisationskonstanten a_{hk} sind dabei als durch den Pockelsschen Ansatz definiert zu betrachten, gemäß (4) oder (5).

Für die Richtungskosinus $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ erhält man, weil die Änderungen der Lichtgeschwindigkeiten durch starken Druck sehr klein sind gegen die Differenzen der Hauptlichtgeschwindigkeiten in doppelbrechenden Kristallen, selbst in solchen von sehr schwacher Doppelbrechung (die Größen $(a_{11} - \omega_z^{02})$, a_{12} sind den Deformationen proportional und daher sehr klein neben den Größen a_{11}, a_{22} und a_{33} selbst und auch klein neben deren Differenzen, z. B. $a_{11} - a_{22}$) oder auch $\omega^{02} - \omega_z^{02}$) einfache Näherungsformeln. Es folgt, daß α_3, β_2 und γ_1 wenig von 1 verschieden sind. Ferner muß sein:

$$\alpha_3 \alpha_2 + \beta_3 \beta_2 + \gamma_3 \gamma_2 = -\alpha_1 \beta_1 .$$

Man erhält bis auf Größen zweiter Ordnung:

$$(14)\qquad \left| \begin{array}{l} \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1, \\ \alpha_2 = -\beta_1 = \frac{a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \\ \alpha_3 = -\gamma_1 = \frac{a_{31}}{a_{11} - a_{33}}, \\ \beta_3 = -\gamma_2 = \frac{a_{23}}{a_{22} - a_{33}}. \end{array} \right.$$

e kleinen Drehungen, welche das Polarisationshauptachsen-stem X^0, Y^0, Z^0 bei Deformationen um die X^0-, Y^0-, Z^0-hse erfährt, mögen mit Φ_x, Φ_y, Φ_z bezeichnet werden. Für eselben gelten in erster Annäherung die Gleichungen:

5) $$\operatorname{tg} 2\Phi_x = \frac{2a_{23}}{a_{22} - a_{33}}, \quad \operatorname{tg} 2\Phi_y = \frac{2a_{31}}{a_{33} - a_{11}}, \quad \operatorname{tg} 2\Phi_z = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Findet die Drehung nur um eine der Achsen statt, so lt die auf jene Achse bezügliche der Formeln (15) streng. ies ist der Fall, wenn nur eine der Größen a_{23}, a_{31}, a_{12} von ull verschieden ist. Betreffs der ausführlichen Ableitung eser allgemeinen Formeln vergleiche man F. Pockels.[1])

Mit Hilfe der Hauptlichtgeschwindigkeiten ω_x, ω_y, ω_z des formierten Ovaloids, also des auf das Achsensystem X', ', Z' bezogenen, lassen sich ferner die Lichtgeschwindigkeiten jeder beliebigen Richtung des Kristalles bestimmen. Für eselben besteht die bekannte Gleichung:

$$\omega_m^2 = \frac{\omega_x^2 + \omega_z^2}{2} + \frac{\omega_x^2 - \omega_z^2}{2} \cos(U \pm V).$$

arin bedeutet m die Beobachtungsrichtung im System X', ', Z'; U und V sind die Winkel zwischen m bzw. der Wellen-rmale und den optischen Achsen.

c) Spezielle Formeln für den Fall einseitigen Druckes.

Prisma 1. Liegt die Druckrichtung parallel der X^0-Achse, wird: $p = X_x$. Nach den Formeln (6) ist dann:

$$x_x = -s_{11} \cdot p; \quad y_y = -s_{12} \cdot p; \quad z_z = -s_{13} \cdot p;$$
$$y_z = z_x = x_y = 0.$$

d die Gleichungen der Polarisationskonstanten (5) redu-ren sich auf:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = p \cdot \pi_{11},$$
$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = p \cdot \pi_{21},$$
$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = p \cdot \pi_{31}.$$

$a_{11} = \omega_x^2$; $a_{22} = \omega_y^2$; $a_{33} = \omega_z^2$ wird.

1) F. Pockels, Wied. Ann. 37. S. 151f. 1889; Lehrbuch d. istalloptik 1906. S. 65—68 u. 468—469.

In der Beobachtungsrichtung parallel K_1 ($\| Y^0$) erhält demnach die Formel (2') die Gestalt:

$$(16)\quad \Delta_{xx} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{31}}{r^2} n_z^{0\,3} - \frac{\pi_{11}}{r^2} n_x^{0\,3}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_z^0 - n_x^0}{\lambda}\right],$$

denn es ist:

$$\frac{\omega_3^{0\,2} - \omega_3^2}{p \cdot r^2} = \frac{\pi_{31}}{r^2} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_1^{0\,2} - \omega_1^2}{p \cdot r^2} = \frac{\pi_{11}}{r^2}$$

und für die absoluten Verzögerungen δ_z und δ_x gelten nach (8') die Formeln:

$$(17)\quad \begin{cases} \delta_z = \frac{1}{2\lambda} \cdot \left\{\frac{\pi_{31}}{r^2}\right\} n_z^{0\,3} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda}\right], \\ \delta_x = \frac{1}{2\lambda} \cdot \left\{\frac{\pi_{11}}{r^2}\right\} n_x^{0\,3} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_x^0 - 1}{\lambda}\right]. \end{cases}$$

Die hier in Betracht kommende Dickenänderung ist:

$$D - D^0 \quad D^0 \cdot \varepsilon_z = -p \cdot D^0 \cdot s_{12} = p \cdot D^0 \cdot 1{,}353 \cdot 10^{-8}.$$

Gemessen werden die relative Verzögerung $\bar{\Delta}_{xx}$ und die absoluten Verzögerungen δ_z und δ_x. Der Berechnung sind dann die in $\{\ldots\}$ stehenden Konstantenkombinationen bzw. Konstanten zugänglich. Für die Beobachtungsrichtung parallel K_2 [$\| Z^0$] ergibt sich entsprechend für die relative Verzögerung

$$(18)\quad \Delta_y = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{12}}{r^2} n_y^{0\,3} - \frac{\pi_{31}}{r^2} n_x^{0\,3}\right\} - \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - n_x^0}{\lambda}\right]$$

und für die absoluten Verzögerungen:

$$(19)\quad \begin{cases} \delta_y = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{12}}{r^2}\right\} n_y^{0\,3} - \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \frac{n_y^0 - 1}{\lambda}, \\ \delta_x = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{31}}{r^2}\right\} n_x^{0\,3} - \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \frac{n_x^0 - 1}{\lambda}. \end{cases}$$

Die Dickenänderung in dieser Richtung berechnet sich zu

$$D - D^0 \quad D^0 \cdot \varepsilon_y = -p \cdot D^0 \cdot s_{12} = p \cdot D^0 \cdot 0{,}840 \cdot 10^{-8}.$$

Wenn der Druck parallel [illegible] ist [illegible] Y_1 und nach (6):

$$[\ldots] = -s_{32} \cdot p;$$

[illegible] fallen wieder [illegible] Koordinatensystems [illegible]

Kristalles zusammen. Es ist daher: $a_{11} = \omega_x^2$, $a_{22} = \omega_y^2$, $a_{33} = \omega_z^2$ und für die Gleichungen der Polarisationskonstanten (5) ergeben sich die Formeln:

$$\begin{aligned} \omega_x^2 \quad \omega_x^{02} &= -p \cdot \pi_{12}, \\ \omega_y^2 \quad \omega_y^{02} &= p \cdot \pi_{22}, \\ \omega_z^2 - \omega_z^{02} &= -p \cdot \pi_{32}. \end{aligned}$$

In der Beobachtungsrichtung parallel $K_1[\|Z^0]$ werden für die horizontal und die vertikal schwingenden Wellen folgende Ausdrücke erhalten:

$$\frac{\omega_h^{02} - \omega_h^2}{p \cdot v^2} = \frac{\omega_x^{02} - \omega_x^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{12}}{v^2},$$

$$\frac{\omega_v^{02} - \omega_v^2}{p \cdot v^2} = \frac{\omega_y^{02} - \omega_y^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{22}}{v^2}.$$

Die Gleichung (2′) nimmt daher hier die Form an:

$$(20) \quad \bar{\Delta}_{xy} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{12}}{v^2} n_x^{03} - \frac{\pi_{22}}{v^2} n_y^{03}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_x^0 - n_y^0}{\lambda}\right]$$

und (3′) wird zu:

$$(21) \quad \begin{cases} \delta_x = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{12}}{v^2}\right\} n_x^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_x^0 - 1}{\lambda}\right], \\ \delta_y = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{22}}{v^2}\right\} n_y^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda}\right]. \end{cases}$$

Die Dickenänderung parallel der Z^0-Achse ist:

$$D - D^0 = D^0 \cdot z_z = -p \cdot D^0 \cdot s_{23} = p \cdot D^0 \cdot 0{,}651 \cdot 10^{-8}.$$

Die Dickenänderung wirkt in dieser Richtung im umgekehrten Sinne wie bei Prisma 1 auf die Änderung der Doppelbrechung ein, wegen des negativen Vorzeichens von $(n_x^0 - n_y^0)$; sie sucht die durch Druck erzeugte Verzögerung zu verringern, während bei Prisma 1 dieselbe durch die Dickenänderung vergrößert wurde.

Wegen einer in dieser Beobachtungsrichtung auftretenden optischen Unregelmäßigkeit kamen die Formeln (21) nicht in Anwendung.

In der Beobachtungsrichtung parallel $K_2[\|X^0]$ gelten für die in Betracht kommenden Geschwindigkeiten ω_y und ω_z die Gleichungen:

$$\frac{\omega_z^{02} - \omega_x^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{32}}{v^2}; \qquad \frac{\omega_y^{02} - \omega_y^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{22}}{v^2}.$$

Diese Ausdrücke in (2′) und (3′) eingesetzt, ergeben:

$$(22)\quad \Delta_{zy} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{32}}{v^2} \cdot n_z^{03} - \frac{\pi_{22}}{v^2} \cdot n_y^{03}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_z^0 - n_y^0}{\lambda}\right]$$

und

$$(23)\quad \begin{cases} \delta_z = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{32}}{v^2}\right\} n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda}\right], \\ \delta_y = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{22}}{v^2}\right\} n_y^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda}\right]. \end{cases}$$

In dieser Beobachtungsrichtung ist ferner die Dickenänderung:

$$D - D^0 = D^0 \cdot x_x = -p \cdot D^0 \cdot s_{12} = p \cdot D^0 \cdot 1{,}353 \cdot 10^{-8}.$$

Prisma 3. Hier wirkt der Druck parallel der Z^0-Achse. Es ist $p = Z_z$ und

$$x_x = -s_{13} \cdot p; \quad y_y = -s_{23} \cdot p; \quad z_z = -s_{33} \cdot p;$$
$$y_z = z_x = x_y = 0.$$

Die Gleichungen (5) werden zu:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = -\pi_{13} \cdot p.$$
$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = -\pi_{23} \cdot p.$$
$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = -\pi_{33} \cdot p.$$

Für die in der Beobachtungsrichtung parallel $K_1 \,[\!|\!|\, X^0$ in Betracht kommenden Geschwindigkeiten ω_y und ω_z gelten die Beziehungen:

$$\frac{\omega_y^{02} - \omega_y^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{23}}{v^2}; \qquad \frac{\omega_z^{02} - \omega_z^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{33}}{v^2}.$$

Die zu messende relative Verzögerung drückt sich dabei folgendermaßen aus:

$$(24)\quad \Delta_{yz} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{23}}{v^2} n_y^{03} - \frac{\pi_{33}}{v^2} n_z^{03}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - n_z^0}{\lambda}\right]$$

und für die absoluten Verzögerungen gilt:

$$(25)\quad \begin{cases} \delta_y = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{23}}{v^2}\right\} n_y^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda}\right], \\ \delta_z = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{33}}{v^2}\right\} n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda}\right]. \end{cases}$$

Ferner ist die in Rechnung zu setzende Dickenänderung:

$$D - D^0 = D^0 \cdot x_x = p \cdot D^0 \cdot s_{13} = p \cdot D^0 \cdot 0{,}840 \cdot 10^{-8}.$$

In der Beobachtungsrichtung parallel $K_2[\| Y^0]$ sind die Lichtgeschwindigkeiten ω_x und ω_z zu beobachten. Für diese folgen aus dem Ovaloid die Beziehungen:

$$\frac{\omega_x^{0\,2} - \omega_x^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{23}}{v^2} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_z^{0\,2} - \omega_z^2}{p \cdot v^2} = \frac{\pi_{13}}{v^2}.$$

In (2′) eingesetzt, wird die relative Verzögerung:

$$(26) \qquad \bar{\Delta}_{xz} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{13}}{v^2} n_x^{0\,3} - \frac{\pi_{23}}{v^2} n_z^{0\,3}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_x^0 - n_z^0}{\lambda}\right]$$

und die absoluten Verzögerungen nach (3′) ergeben:

$$(27) \qquad \begin{cases} \delta_x = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{13}}{v^2}\right\} n_x^{0\,3} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_x^0 - 1}{\lambda}\right], \\ \delta_z = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{23}}{v^2}\right\} n_z^{0\,3} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda}\right]. \end{cases}$$

Die hier in Betracht kommende Dickenänderung bestimmt sich aus:

$$D - D^0 = D^0 \cdot y_y = p \cdot D^0 \cdot s_{23} = p \cdot D^0 \cdot 0{,}651 \cdot 10^{-8}.$$

Bei Prisma 3 wirkt — genau wie in der Beobachtungsrichtung parallel Z^0 des Prismas 2 — in beiden Beobachtungsrichtungen die durch die Dickenänderung entstehende Verzögerung der allein durch Druck entstehenden entgegen. Infolge der geringen natürlichen Doppelbrechung des Topases ist dieses jedoch ebenso, wie die in anderen Richtungen durch die Dickenänderung entstehende Vergrößerung der relativen Verzögerung ohne wesentliche Bedeutung. Die Vernachlässigung der Dickenänderung bei der relativen Verzögerung würde noch nicht 1 Proz. betragen.

Prisma 4. Bei diesem Präparat liegt die Druckrichtung L in der X^0-Y^0-Ebene unter -45^0 gegen die X^0-Achse geneigt. Demzufolge ist nach (7):

$$X_x = +\frac{p}{2}; \quad Y_y = +\frac{p}{2}; \quad Z_z = Y_z = Z_x = 0;$$

$$X_y = -\frac{p}{2}$$

und nach (6):

$$x_x = -\frac{p}{2}\{s_{11} + s_{12}\},$$
$$y_y = -\frac{p}{2}\{s_{12} + s_{22}\},$$
$$z_z = -\frac{p}{2}\{s_{13} + s_{23}\},$$
$$y_z = z_x = 0,$$
$$x_y = +\frac{p}{2} \cdot s_{66}.$$

In der zu L senkrechten Beobachtungsrichtung parallel K_2 wird nach (8) die Dickenänderung des Prismas gegeben durch:

$$D - D^0 = \tfrac{1}{2} D^0\{x_x + y_y + x_y\} = -\tfrac{1}{4} p \cdot D^0\{s_{11} + 2s_{12} + s_{22} - s_{66}\}$$
$$= +\, p \cdot D^0 \cdot 0{,}598 \cdot 10^{-8}.$$

Der Ansatz für die Polarisationskonstanten (5) reduziert sich für diese Druckrichtung auf:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{11} + \pi_{12}}{2}\right\},$$
$$a_{22} - \omega_y^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{21} + \pi_{22}}{2}\right\},$$
$$a_{33} - \omega_z^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2}\right\},$$
$$a_{23} = a_{31} = 0,$$
$$a_{12} = +p \cdot \frac{\pi_{66}}{2}.$$

In der Beobachtungsrichtung parallel K_2 erhält man aus dem Ovaloid für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten der horizontal schwingenden Welle während der Belastung:

$$\omega_h^2 = a_{33}.$$

vor der Belastung:

$$\omega_h^{02} = \omega_z^{02}.$$

und für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten der vertikal schwingenden Welle während der Belastung:

$$\omega_v^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - a_{12},$$

vor der Belastung:

$$\omega_v^{02} = \frac{\omega_x^{02} + \omega_y^{02}}{2}.$$

Es ergeben sich so für die in (2′) und (3′) auftretenden Größen $\omega_h^{02} - \omega_h^2$ und $\omega_v^{02} - \omega_v^2$ die Werte:

$$\omega_h^{02} - \omega_h^2 = \omega_z^{02} - a_{33} = p\left\{\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2}\right\},$$

$$\omega_v^{02} - \omega_v^2 = \tfrac{1}{2}\{\omega_x^{02} + \omega_y^{02} - a_{11} - a_{22} + 2a_{12}\}$$

$$= \frac{p}{4}\{\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{21} + \pi_{22} + 2\pi_{66}\}.$$

Der durch Druck erzeugte Gangunterschied in Wellenlängen wird demnach:

$$(28)\quad \left\{ \bar{\Delta}'_{hv} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\left[\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2v^2}\right] \cdot n_z^{03} - \frac{1}{4}\left[\frac{\pi_{11}}{v^2} + \frac{\pi_{22}}{v^2} + \frac{\pi_{12}}{v^2} + \frac{\pi_{21}}{v^2} + \frac{2\pi_{66}}{v^2}\right] n_m^{03}\right\} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_z^0 - n_m^0}{\lambda}\right] \right.$$

Hierin ist:

$$n_m^0 = \frac{n_x^0 + n_y^0}{2}.$$

Nimmt man für die Brechungsindizes n_m^0 und n_y^0 einen gemeinsamen Mittelwert n_m' an, so gilt in genügender Annäherung bei Vernachlässigung der Dickenänderung:

$$(28')\quad \bar{\Delta}'_{hv} = \frac{1}{2\lambda}\frac{n_m'^3}{2}\left\{\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{v^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi_{11}}{v^2} + \frac{\pi_{12}}{v^2} + \frac{\pi_{21}}{v^2} + \frac{\pi_{22}}{v^2} + \frac{2\pi_{66}}{v^2}\right]\right\}$$

und da mit derselben Annäherung:

$$\frac{\pi_{31} - \pi_{11}}{v^2} = \frac{2\lambda}{n_m'^3} \cdot \bar{\Delta}_{zx},$$

$$\frac{\pi_{32} - \pi_{22}}{v^2} = \frac{2\lambda}{n_m'^3} \cdot \bar{\Delta}_{zy} \quad \text{usw.},$$

so wird:

$$(28'')\quad \frac{\pi_{66}}{v^2} = \frac{2\lambda}{n_m'^3}\left\{\bar{\Delta}_{zx} + \bar{\Delta}_{zy} - \frac{1}{2}(\bar{\Delta}_{yx} + \bar{\Delta}_{xy}) - 2\bar{\Delta}'_{hv}\right\}.$$

Für n_m' kann ein mittlerer Brechungsindex, etwa n_y^0 gesetzt werden. Rechts stehen lauter durch die Beobachtung gefundene Größen; π_{66}/v^2 kann demnach allein durch Kompensatormessungen erhalten werden.

Die Anwendung der Formel (3′) ergibt für die absoluten Verzögerungen Folgendes:

$$(29)\quad \left\{ \delta'_{hv} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2v^2}\right\} n_z^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_z^0 - 1}{\lambda}\right], \right.$$

$$\left. \delta'_v = \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{1}{4}\left\{\frac{\pi_{11}}{v^2} + \frac{\pi_{12}}{v^2} + \frac{\pi_{21}}{v^2} + \frac{\pi_{22}}{v^2} + \frac{2\pi_{66}}{v^2}\right\} n_m^{03} \right.$$

$$\left. \frac{D - D^0}{p \cdot D^0} \cdot \left[\frac{n_m^0 - 1}{\lambda}\right] \right.$$

Prisma 5. Hier wirkt der Druck in der Y^0-Z^0-Ebene. Die Druckrichtung ist unter einem Winkel von -45^0 gegen die Y^0-Achse geneigt. Alsdann ergibt sich aus (7):

$$X_x = 0; \quad Y_y = Z_z = +\frac{p}{2}; \quad Y_z = -\frac{p}{2}; \quad Z_x = Y_y = 0$$

und die Deformationsgrößen (6) reduzieren sich auf:

$$x_x = -\frac{p}{2}\{s_{12} + s_{13}\},$$

$$y_y = -\frac{p}{2}\{s_{22} + s_{23}\},$$

$$z_z = -\frac{p}{2}\{s_{23} + s_{33}\}.$$

$$y_z = +\frac{p}{2}s_{44}.$$

$$z_x = x_y = 0.$$

In der zur Druckrichtung senkrechten Beobachtungsrichtung parallel K_2 berechnet sich die Dickenänderung des Präparates aus der Größe des Druckes p und den Deformationsgrößen nach (8) folgendermaßen:

$$D - D^0 = D^0 \cdot \tfrac{1}{2}\{y_y + z_z + y_z\} = -D^0 \cdot p \cdot \tfrac{1}{4}\{s_{22} + 2s_{23} + s_{33} - s_{44}\}$$
$$= +D^0 \cdot p \cdot 0{,}783 \cdot 10^{-8}.$$

Die Gleichungen (5) werden für diese Druckrichtungen zu:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{12} + \pi_{13}}{2}\right\},$$

$$a_{22} - \omega_y^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{22} + \pi_{23}}{2}\right\},$$

$$a_{33} - \omega_z^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{32} + \pi_{33}}{2}\right\},$$

$$a_{23} = +p\frac{\pi_{44}}{2},$$

$$a_{31} = a_{12} = 0.$$

Analog wie bei Prisma 4 berechnen sich aus dem Ovaloid für die Beobachtungsrichtung parallel K_2 die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten. Man erhält folgende Werte für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten vor der Belastung:

$$\omega_h^{02} = \omega_x^{02}; \qquad \omega_v^{02} = \frac{\omega_y^{02} + \omega_z^{02}}{2}$$

und für die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten während der Belastung:

$$\omega_h^2 = a_{11}; \qquad \omega_v^2 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} - a_{23}.$$

ω_h ist die senkrecht zur Druckrichtung schwingende Welle und ω_v die parallel zur Druckrichtung schwingende. Die ganze Rechnung kommt auf eine zyklische Vertauschung der Indizes heraus. Der für die Richtung K_2 in Betracht kommende Gangunterschied ist gegeben durch

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\Delta'_{hv}} = \frac{1}{2\lambda}\Bigg\{ \Bigg[\frac{\pi_{12}+\pi_{13}}{2v^2} \Bigg| n_x^{03} - \frac{1}{4}\Bigg[\frac{\pi_{22}+\pi_{23}+\pi_{32}+\pi_{33}+2\pi_{44}}{v^2} \Bigg] \\ n_m^{03} \Bigg| + \frac{D-D^0}{p\cdot D^0}\cdot\Bigg[\frac{n_x^0 - n_m^0}{\lambda} \Bigg] . \end{aligned} \right.$$

Hierin ist

$$n_m^0 = \frac{n_y^0 + n_z^0}{2}$$

zu setzen.

Ferner ergibt sich entsprechend der Formel (28″):

$$(30')\quad \frac{\pi_{44}}{v^2} = \frac{2\lambda}{n'^3_m}\{\bar{\Delta}_{xy} + \bar{\Delta}_{xz} - \tfrac{1}{2}(\bar{\Delta}_{xy} + \bar{\Delta}_{yz}) - 2\,\overline{\Delta'_{hv}}\},$$

worin $n_m' = n_y^0$ gesetzt werden darf.

Für die absoluten Verzögerungen erhält man die Werte:

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\delta''_h} &= \frac{1}{2\lambda}\Bigg\{ \frac{\pi_{12}+\pi_{13}}{2v^2} \Bigg\}\cdot n_x^{03} + \frac{D-D^0}{p\cdot D^0}\Bigg[\frac{n_x^0 - 1}{\lambda} \Bigg] , \\ \overline{\delta''_v} &= \frac{1}{2\lambda}\Bigg\{ \frac{1}{4}\Bigg[\frac{\pi_{22}+\pi_{23}+\pi_{32}+\pi_{33}+2\pi_{44}}{v^2} \Bigg] \Bigg\} n_m^{03} \\ &\qquad + \frac{D-D^0}{p\cdot D^0}\Bigg[\frac{n_m^0 - 1}{\lambda} \Bigg] . \end{aligned} \right.$$

Prisma 6. Die Druckrichtung ist in der X^0-Z^0-Ebene unter einem Winkel von -45^0 gegen die X^0-Achse geneigt. Es wird daher:

$$X_x = +\frac{p}{2}; \quad Y_y = 0; \qquad Z_z = +\frac{p}{2};$$

$$Y_z = 0; \qquad Z_x = -\frac{p}{2}; \quad X_y = 0$$

und nach (6):

$$\begin{aligned} x_x &= -\frac{p}{2}\{s_{11} + s_{13}\}, \\ y_y &= -\frac{p}{2}\{s_{12} + s_{23}\}, \\ z_z &= -\frac{p}{2}\{s_{13} + s_{33}\}. \\ y_z &= x_y = 0, \\ z_x &= +\frac{p}{2}\cdot s_{55}. \end{aligned}$$

Für die Dickenänderung in der Beobachtungsrichtung parallel K_2 senkrecht zur Druckrichtung berechnet sich nach (8):

$$D - D^0 = D^0 \cdot \tfrac{1}{2}\{x_x + z_z + z_x\} = -D^0 \cdot p \cdot \tfrac{1}{4}\{s_{11} + 2s_{12} + s_{33} - s_{55}\}$$
$$= D^0 \cdot p \cdot 0{,}240 \cdot 10^{-8}.$$

Das System der Polarisationskonstanten reduziert sich auf:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{11} + \pi_{12}}{2}\right\},$$

$$a_{22} - \omega_y^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{21} + \pi_{22}}{2}\right\},$$

$$a_{33} - \omega_z^{02} = -p\left\{\frac{\pi_{31} + \pi_{32}}{2}\right\},$$

$$a_{23} = a_{12} = 0; \quad a_{31} = +p\frac{\pi_{55}}{v^2}.$$

Die in der Beobachtungsrichtung parallel K_2 liegenden Wellengeschwindigkeiten ω_h und ω_v werden wieder aus dem Ovaloid bestimmt. Für die absolute Verzögerung der horizontal schwingenden Welle erhält man alsdann:

$$(31) \qquad \overline{\delta_h'''} = \frac{1}{2\lambda}\left\{\left[\frac{\pi_{21} + \pi_{22}}{2v^2}\right]\right\} n_y^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_y^0 - 1}{\lambda}\right]$$

und für die vertikal schwingende Welle:

$$\delta_v''' = \frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{\pi_{21} + \pi_{33} + \pi_{11} + \pi_{13} + 2\pi_{55}}{v^2}\right]\right\} n_m^{03} + \frac{D - D^0}{p \cdot D^0}\left[\frac{n_m^0 - 1}{\lambda}\right].$$

Für n_m^0 kann hier

$$\frac{n_x^0 + n_z^0}{2}$$

gesetzt werden. Die Formel für die relative Verzögerung ist deshalb hier nicht mit angegeben, weil in dieser Beobachtungsrichtung keine Kompensatormessungen ausgeführt werden konnten.

d) Resultate der Beobachtungen.

Im folgenden werden die an den verschiedenen Topaspräparaten erhaltenen Werte der relativen und der absoluten Verzögerungen angegeben, und zwar sämtlich für $\lambda = 588\,\mu\mu$. Um die Inhomogenität der Druckverteilung zu eliminieren, sind die Messungen je an beiden Rändern und in der Mitte des Präparates (L. Rd.; M.; R. Rd.) ausgeführt; das Mittel aus den Resultaten ist von der Inhomogenität im wesentlichen frei.

Prisma 1.

a) Beobachtungsrichtung $X_1 \parallel Y^0$.

1. Relative Verzögerung für $\lambda = 588\ \mu\mu$.

Belastung am Hebel (1 : 5)		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2742 g	1.	0,945	1,16	1,34	1,148 $= \Delta_1'$
4113	2.	1,545	1,765	1,815	1,708
	3.	1,65	1,71	1,79	1,717 } 1,709 $= \Delta_2'$
	4.	1,505	1,72	1,88	1,702
6855	5.	2,615	2,91	3,012	2,846 $= \Delta_3'$

Hieraus berechnet sich nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\overline{\Delta_{sx}} = \frac{\Delta_1' \cdot Q_1 + 3\Delta_2' \cdot Q_2 + \Delta_3' \cdot Q_3}{Q_1^2 + 3Q_2^2 + Q_3^2} \cdot \frac{3{,}692}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\overline{\Delta_{sx}} = 0{,}3157 \cdot 10^{-4}.$$

Rückwärts berechnet sich dann:

$$\Delta_1' = 1{,}140,$$
$$\Delta_2' = 1{,}709,$$
$$\Delta_3' = 2{,}849.$$

2. Absolute Verzögerungen.

X-Schwingung.

Belastung am Hebel (1 : 9,7)	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g	− 0,022	− 0,021	− 0,018	$-0{,}020_3 = \delta_x$

Es ergibt sich demnach der Wert

$$\delta_x = \frac{\delta_x \cdot 3{,}692}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\delta_x = -0{,}0317 \cdot 10^{-4}.$$

Z-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g	1.	0,223	0,163	0,125	0,170
(3fach. Gew.)	2.	0,178	0,178	0,178	0,178
	3.	0,175	0,173	0,161	0,170
	4.	0,201	0,173	0,138	0,171
					0,174 $= \delta_z'$
2936 g	5.	0,271	0,215	0,152	0,213 $= \delta_z''$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man hier:

$$\delta_z = \frac{\delta_z' \cdot Q_1 + \delta_z'' \cdot Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \cdot \frac{3{,}692}{9{,}7},$$

$$\underline{\delta_z = + 0{,}2744 \cdot 10^{-4}.}$$

Aus diesem Wert erhält man rückwärts die Werte:

$$\delta_z' = 0.1756$$
$$\delta_z'' = 0.212.$$

b) Beobachtungsrichtung $\| K_2 \| Z^0$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
1371 g	1.	0,318	0,643	0,954	0,638	0,653 = Δ_1'
	2.	0,359	0,772	0,894	0,675	
	3.	0,466	0,695	0,748	0,648	
2742	4.	1,42	1,36	1,13	1,303	1,301 = Δ_2'
	5.	1,125	1,345	1,445	1,305	
	6.	1,14	1,325	1,42	1,295	
7083	7.	3,24	3,375	3,465	3,360	3,357 = Δ_3'
	8.	3,47	3,375	3,215	3,353	

Wegen zu ungleichförmiger Druckverteilung sollen die Messungen 1—3 zur weiteren Verrechnung nicht benutzt werden; ihr Mittelwert Δ_1' stimmt indessen mit den anderen Messungen ganz gut überein.

Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt hier:

$$\overline{\Delta}_{yx} = \frac{\Delta_2' \cdot Q_2 + \Delta_3' \cdot Q_3}{Q_2^2 + Q_3^2} \cdot \frac{3{,}710}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\underline{\overline{\Delta}_{yx} = 0{,}3619 \cdot 10^{-4}.}$$

Rückwärts wird aus Δ_{yx} berechnet:

$$\Delta_1' = 0{,}650,$$
$$\Delta_2' = 1{,}300,$$
$$\Delta_3' = 3{,}358.$$

2. Absolute Verzögerungen.

Y-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,167	0,178	0,185	0,177	$\delta_1 = 0{,}176$
	2.	0,185	0,167	0,169	0,174	

Es folgt hieraus:

$$\delta_y = \frac{0{,}176 \cdot 3{,}710}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\delta_y = + 0{,}2763 \cdot 10^{-4}.}$$

X-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	− 0,054	− 0,050	− 0,064	− 0,056	$\delta_1 = 0{,}056$
	2.	− 0,063	− 0,054	− 0,052	− 0,056	

folglich wird:

$$\delta_x = - \frac{0{,}056 \cdot 3{,}710}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\delta_x = - 0{,}0879 \cdot 10^{-4}.}$$

Prisma 2.

a) Beobachtungsrichtung $|K_1|\ Z^0$.

Schon die Beobachtung im natürlichen Lichte zeigte einen schichtförmigen Aufbau des Präparates, der einem Fortwachsen des ursprünglichen Kristalles am Entstehungsorte durch schichtförmiges Ansetzen der Prismenflächen entsprach. Die Beobachtung parallel der Z^0-Achse wurde dadurch erschwert; die Streifen im Kompensator waren teilweise recht undeutlich. Die Messung der absoluten Verzögerung konnte nicht ausgeführt werden.

Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
(4471 g	1.	1,805	2,08	1,88	1,922 = Δ_1')	
2956	2.	1,265	1,295	1,235	1,265	1,253 = Δ_2
	3.	1,255	1,27	1,19	1,238	
	4.	1,335	1,27	1,651	1,257	
7083	5.	2,745	3,155	3,15	3,017	3,013 = Δ_3
	6.	3,07	3,065	2,89	3,008	
	7.	2,985	3,10	2,96	3,015	

Δ_1' wird zur Berechnung von $\overline{\Delta}_{xy}$ nicht benutzt. Aus Δ_2' und Δ_3' folgt nach der Ausgleichungsrechnung:

$$\overline{\Delta}_{xy} = \frac{\Delta_2' \cdot Q_2 + \Delta_3' \cdot Q_3}{Q_2^2 + Q_3^2} \cdot \frac{3{,}692}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\underline{\Delta_{xy} = \delta_x - \delta_y = + 0{,}3230 \cdot 10^{-4}.}$$

Daraus wird rückwärts:

$$(\Delta_1' = 1{,}901),$$
$$\Delta_2' = 1{,}257,$$
$$\Delta_3' = 3{,}011.$$

b) Beobachtungsrichtung K_2 X^0.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2956 g	1.	1,06	1,12	1,155	1,112	1,111 = Δ_1'
	2.	1,205	1,155	0,985	1,115	
	3.	0,955	1,10	1,26	1,105	
7083	4.	2,475	2,715	2,92	2,703	2,701 = Δ_2'
	5.	2,905	2,77	2,44	2,705	
	6.	2,605	2,76	2,72	2,695	

Es ist demnach:

$$\overline{\Delta}_{xy} = \frac{\Delta_1' \cdot Q_1 + \Delta_2' \cdot Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \cdot \frac{3{,}708}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\underline{\overline{\Delta}_{xy} = \delta_x - \delta_y = 0{,}2903 \cdot 10^{-4}}$$

und daraus ergibt sich wieder:

$$\Delta_1' = 1{,}125,$$
$$\Delta_2' = 2{,}695.$$

2. Absolute Verzögerungen.

Z-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,158	0,125	0,143	0,142	
	2.	0,141	0,145	0,142	0,143	0,142 $= \delta_z$
	3.	0,150	0,141	0,132	0,141	
	4.	0,156	0,142	0,132	0,143	

Daraus berechnet sich:

$$\delta_z = \frac{0{,}142 \cdot 3{,}708}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\delta_z = + 0{,}2228 \cdot 10^{-4}.}$$

Y-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	2.	− 0,041	− 0,042	− 0,040	− 0,041	− 0,0435 $= \delta_y$
	4.	− 0,043	− 0,047	− 0,047	− 0,046	

Folglich:

$$\underline{\delta_y = - \ 0{,}068_3 \cdot 10^{-4}.}$$

Prisma 3.

a) Beobachtungsrichtung K_1 X^0.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel		
4471 g	1.	1,40	1,50	1,515	1,471	Δ_1'	
7083	2.	2,265	2,36	2,36	2,328	2,333	Δ_2'
	3.	2,27	2,37	2,375	2,338		
	4.	2,19	2,36	2,445	2,333		

Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt:

$$\overline{\Delta_{yz}} = \frac{\Delta_1 \cdot Q_1 + 3\Delta_2 \cdot Q_2}{Q_1^2 + 3Q_2^2} \cdot \frac{3{,}709}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\underline{\overline{\Delta_{yz}} = + 0{,}2507 \cdot 10^{-4}.}$$

Rückwärts berechnet sich:

$$\Delta_1' = 1{,}469.$$
$$\Delta_2' = 2{,}326.$$

2. Absolute Verzögerungen.

Y-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,126	0,123	0,092	0,114	$\delta_y' = 0.111$
	2.	0,153	0,121	0,079	0,118	
	3.	0,127	0,115	0,120	0,121	
	4.	0,117	0,109	0,092	0,106	
	5.	0,121	0,100	0,081	0,101	
	6.	0,098	0,107	0,116	0,107	
3936	7.	0,178	0,163	0,178	0,173 = δ_y''	

Es berechnet sich, wiederum nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\delta_y = +0{,}1724 \cdot 10^{-4}.$$

Z-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
3936 g	1.	− 0,078	− 0,081	− 0,079	− 0,079	$\delta_z = -0.0795$
	2.	− 0,080	− 0,081	− 0,078	− 0,080	

Es wird demnach:

$$\delta_z = + \frac{\delta_z \cdot 8{,}709}{3936 \cdot 9{,}7},$$
$$\delta_z = -0{,}0772 \cdot 10^{-4}.$$

b) Beobachtungsrichtung $K_2 \mid Y^0$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
4471 g	1.	1,23	1,43	1,565	1,409	$\Delta' = 1{,}407$
	2.	1,395	1,50	1,335	1,410	
	3.	1,39	1,415	1,42	1,408	
	4.	1,345	1,425	1,42	1,397	
	5.	1,39	1,44	1,405	1,412	

Es wird:

$$\overline{\Delta}_{xz} = \frac{1{,}407 \cdot 3{,}702}{4471 \cdot 5 \cdot 9{,}72},$$

$$\overline{\Delta}_{xz} = \delta_x - \delta_z = +\,0{,}2396 \cdot 10^{-4}.$$

2. Absolute Verzögerungen.

X-Schwingung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
3936 g	1.	0,112	0,129	0,218	0,153
	2.	0,158	0,167	0,134	0,153 } $\delta_x = 0.154$
	3.	0,157	0,157	0,152	0,155

Aus δ_x berechnet sich:

$$\delta_x = \frac{0{,}154 \cdot 3{,}702}{3936 \cdot 9{,}7},$$

$$\delta_x = +\,0{,}1493 \cdot 10^{-4}.$$

Z-Schwingung.

Belastung	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
3936 g	− 0,091	0,090	− 0,078	$-\,0.086 = \delta_z$

Hiernach wird:

$$\delta_z = \frac{-\,0{,}086 \cdot 3{,}702}{3936 \cdot 9{,}7},$$

$$\delta_z = -\,0{,}0834 \cdot 10^{-4}.$$

Prisma 4.

Beobachtungsrichtung K_2.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
3471 g	1.	1,255	1,275	1,125	$1{,}218 = \Delta_1'$
4471	2.	1,585	1,56	1,505	1,550 } $1{,}546 = \Delta_2'$
	3.	1,415	1,57	1,64	1,542

Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt hier:

$$\Delta_{hv}' = \frac{\Delta_1' \cdot Q_1 + \Delta_2' \cdot Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \cdot \frac{3{,}689}{5 \cdot 9{,}72},$$

$$\underline{\Delta_{hv}' = \overline{\delta_h'} - \overline{\delta_v'} = + 0{,}2639 \cdot 10^{-4}.}$$

Rückwärts erhält man:

$$\Delta_1' = 1{,}207$$
$$\Delta_2' = 1{,}555.$$

2. Absolute Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,117	0,115	0,116	0,116	$\delta_h' = 0{,}116$
	2.	0,124	0,113	0,114	0,117	

Daraus wird:

$$\delta_h' = \frac{0{,}116 \cdot 3{,}689}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\overline{\delta_h'} = + 0{,}1811 \cdot 10^{-4}.}$$

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	− 0,058	− 0,052	− 0,048	− 0,053	$\delta_v' = - 0{,}045$
	2.	− 0,042	− 0,039	− 0,031	− 0,037	

Daraus folgt:

$$\delta_v' = - \frac{0{,}045 \cdot 3{,}689}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\overline{\delta_v'} = - 0{,}044 \cdot 10^{-4}.}$$

Dieser Wert ist sehr unsicher. Aus $\overline{\delta_h'}$ und $\overline{\Delta_{hv}'}$ würde folgen:

$$\underline{\overline{\delta_v'} = - 0{,}083 \cdot 10^{-4}.}$$

Prisma 5.

Beobachtungsrichtung $\| K_2$.

1. Relative Verzögerung.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
4471 g	1.	1,60	1,77	1,91	1,760	$\Delta_{hv}'' = 1{,}739$
	2.	1,705	1,74	1,74	1,728	
	3.	1,555	1,74	1,89	1,728	

Demnach wird:

$$\Delta_{hv}'' = \frac{1{,}739 \cdot 3{,}698}{4471 \cdot 5 \cdot 9{,}72},$$

$$\underline{\Delta_{hv}'' = + 0{,}2960 \cdot 10^{-4}}.$$

2. Absolute Verzögerungen.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,108	0,109	0,112	0,110	$\delta_h'' = + 0{,}115$
	2.	0,126	0,120	0,114	0,120	

Aus δ_h'' berechnet sich:

$$\delta_h'' = \frac{0{,}115 \cdot 3{,}698}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\delta_h'' = + 0{,}1800 \cdot 10^{-4}}.$$

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g	1.	− 0,064	− 0,064	− 0,072	$- 0{,}067 = \delta_v''$

Es wird demnach:

$$\delta_v'' = - \frac{0{,}067 \cdot 3{,}698}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\underline{\delta_v'' = - 0{,}105 \cdot 10^{-4}}.$$

Prisma 6.

An diesem Prisma wurden in der Beobachtungsrichtung parallel K_2 nur Messungen der absoluten Verzögerungen vorgenommen, da die der relativen Verzögerungen infolge zu undeutlicher Streifen im Kompensator zu unsicher waren.

Absolute Verzögerungen.

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel	
2436 g	1.	0,110	0,113	0,107	0,110	$\delta_h''' = + 0{,}112$
	2.	0,112	0,121	0,110	0,114	

Daraus folgt:

$$\delta_h''' = \frac{0{,}112 \cdot 3{,}692}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\overline{\delta_h'''} = + 0{,}1750 \cdot 10^{-4}.$$

Belastung		L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
2436 g	1.	− 0,027	− 0,032	− 0,033	− 0,031 $\}$ $\delta_r''' = -0{,}031$
	2.	− 0,028	0,031	− 0,034	− 0,031 $\}$

Es folgt:

$$\delta_r''' = -\frac{0{,}031 \cdot 3{,}692}{2436 \cdot 9{,}7},$$

$$\overline{\delta_r'''} = -0{,}0484 \cdot 10^{-4}.$$

e) Berechnung der Konstanten und Prüfung der Theorie bzw. der Messungen.

Setzt man in die Formeln (16—31) die aus den Beobachtungen gewonnenen Resultate ein, so erhält man die piëzooptischen Konstanten oder Kombinationen derselben. Wird jeder Beobachtung ein ihrer Zuverlässigkeit entsprechendes Gewicht erteilt, so berechnen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate für die piëzooptischen Konstanten π_{hk} des Topases folgende Werte:

$$\pi_{11} = -0{,}504 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{12} = +0{,}320 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{13} = +0{,}222 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{21} = -0{,}511 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{22} = -0{,}583 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{23} = +0{,}246 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{31} = -0{,}369 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{32} = +0{,}218 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{33} = -0{,}447 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{44} = -0{,}836 \cdot 10^{-8} \cdot v^2; \quad \pi_{55} = -0{,}229 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{66} = -0{,}736 \cdot 10^{-8} \cdot v^2.$$

Die Beziehungen (10) ergeben dann für die elastooptischen Konstanten des Topases folgendes Wertsystem:

$$p_{11} = -0{,}085 \cdot v^2; \quad p_{21} = +0{,}093 \cdot v^2; \quad p_{31} = +0{,}095 \cdot v^2;$$
$$p_{12} = +0{,}069 \cdot v^2; \quad p_{22} = -0{,}120 \cdot v^2; \quad p_{32} = +0{,}085 \cdot v^2;$$
$$p_{13} = +0{,}052 \cdot v^2; \quad p_{23} = +0{,}065 \cdot v^2; \quad p_{33} = -0{,}088 \cdot v^2$$
$$p_{44} = -0{,}095 \cdot v^2; \quad p_{55} = 0{,}031 \cdot v^2; \quad p_{66} = -0{,}098 \cdot v^2.$$

Aus den so gefundenen Werten der piëzooptischen Konstanten kann man umgekehrt mit Hilfe der Gleichungen (16 bis 31) die relativen und absoluten Verzögerungen in den speziellen Fällen der Beobachtung berechnen. Die auf diese Weise gefundenen Werte werden in der nachstehenden Tabelle angegeben, wobei neben jeder berechneten Größe zugleich die beobachtete Größe gestellt wird.

Relative u. absolut. Verzög.	Berechnet	Beobachtet	Relative u. absolut. Verzög.	Berechnet	Beobachtet
$\overline{\Delta_{xx}}$	$+0{,}316 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}316 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_z}$	$-0{,}073 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}077 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_x}$	$-0{,}039 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}032 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\Delta_{xz}}$	$+0{,}240 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}240 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_z}$	$+0{,}277 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}274 \cdot 10^{-4}$	$\overline{\delta_x}$	$+0{,}147 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}149 \cdot 10^{-4}$
Δ_{xx}	$+0{,}363 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}362 \cdot 10^{-4}$	δ_z	$-0{,}093 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}083 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_y}$	$+0{,}271 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}276 \cdot 10^{-4}$	Δ_{hr}'	$+0{,}262 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}264 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_x}$	$-0{,}093 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}088 \cdot 10^{-4}$	δ_h'	$+0{,}170 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}181 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\Delta_{xy}}$	$+0{,}323 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}323 \cdot 10^{-4}$	δ_r'	$-0{,}092 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}044 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\Delta_{zy}}$	$+0{,}291 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}290 \cdot 10^{-4}$	Δ_{hr}''	$+0{,}298 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}296 \cdot 10^{-4}$
δ_z	$+0{,}222 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}223 \cdot 10^{-4}$	δ_h''	$+0{,}178 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}180 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_y}$	$-0{,}068 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}068 \cdot 10^{-4}$	δ_r''	$-0{,}120 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}105 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\Delta_{yz}}$	$+0{,}250 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}251 \cdot 10^{-4}$	δ_h'''	$+0{,}161 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}175 \cdot 10^{-4}$
$\overline{\delta_y}$	$+0{,}176 \cdot 10^{-4}$	$+0{,}172 \cdot 10^{-4}$	δ_r'''	$-0{,}048 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}048 \cdot 10^{-4}$

In den meisten Fällen liegt die Differenz zwischen der berechneten und der beobachteten Größe noch innerhalb der Fehlergrenze der optischen Beobachtungsmethoden. Infolge der negativen Vorzeichen der π_{hh} waren die beobachteten absoluten Verzögerungen außerordentlich klein, so daß die Genauigkeit der π_{hk} nur einige Prozent betragen kann. Immerhin ist eine befriedigende Übereinstimmung mit dem Ansatz von Pockels erzielt worden. Die Genauigkeit der p_{hk} ist übrigens infolge der Art ihrer Berechnung aus den π_{hk} eine entsprechend geringe.

Ebenso wie bei den bisher untersuchten Kristallen besteht auch bei Topas eine Beziehung $\pi_{hk} = \pi_{kh}$ oder $p_{hk} = p_{kh}$ nicht.

Das negative Vorzeichen sämtlicher π_{hh} sowie p_{hh} verleiht dem piëzooptischen Verhalten des Topases ein eigenartiges

Gepräge, wie ja schon unter den vorliegenden Beobachtungen in jeder Beobachtungsrichtung negative Verzögerungen, d. h. Beschleunigungen, gemessen wurden. In einigen speziellen Fällen soll die Einwirkung dieses Vorzeichens noch näher ausgeführt werden.

Die Größenordnung der Konstanten ist durchweg dieselbe

f) Anwendung der gefundenen Resultate auf spezielle Fälle.

Zunächst soll das *piëzooptische Verhalten des Topases für den Fall allseitig gleichen Druckes* diskutiert werden. Hierbei wird

$$p = X_x = Y_y = Z_z: \quad Y_z = Z_x = X_y = 0$$

und die Gleichungen der Polarisationskonstanten ergeben:

$$\begin{aligned}
\omega_x^2 - \omega_x^{02} &= -p\{\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13}\}.\\
\omega_y^2 - \omega_y^{02} &= -p\{\pi_{21} + \pi_{22} + \pi_{23}\}.\\
\omega_z^2 - \omega_z^{02} &= -p\{\pi_{31} + \pi_{32} + \pi_{33}\}
\end{aligned}$$

oder nach Einsetzen der Zahlwerte für die π_{hk}

$$\begin{aligned}
\omega_x^2 - \omega_x^{02} &= -0{,}038 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p.\\
\omega_y^2 - \omega_y^{02} &= -0{,}174 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p.\\
\omega_z^2 - \omega_z^{02} &= -0.140 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p.
\end{aligned}$$

Durch allseitig gleichen Druck erleiden demnach sämtliche Hauptlichtgeschwindigkeiten geringe Verzögerungen, oder was dasselbe ist: Die Hauptbrechungsindizes werden bei allseitig gleichem Druck zunehmen, durch allseitig gleichen Zug abnehmen. Die Änderung der Doppelbrechung durch allseitig gleichen Druck ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
\omega_x^2 - \omega_z^2 - (\omega_x^{02} - \omega_z^{02}) &= -p\,(\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13} - \pi_{31} - \pi_{32} - \pi_{33})\\
&= +0.102 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p.
\end{aligned}$$

Man erhält eine geringe Zunahme derselben:

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = +\frac{n_m^3}{2} \cdot 0{,}102 \cdot 10^{-8} \cdot p = +0{,}215 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Die Größe des halben Winkels der optischen Achsen wird dargestellt durch:

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{\omega_z^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 - \omega_z^2}}.$$

Da nun für Topas gilt

$$\omega_x^2 - \omega_y^2 = \omega_x^{02} - \omega_y^{02} + 0{,}136 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p,$$
$$\omega_x^2 - \omega_z^2 = \omega_x^{02} - \omega_z^{02} + 0{,}102 \cdot 10^{-8} \cdot v^2 \cdot p,$$

so wird durch allseitig gleichen Druck der Winkel Ω vergrößert.

Eine weitere Anwendung der erhaltenen Resultate läßt sich auf ***die Änderung der Brechungsindizes des Topases durch Erwärmung*** machen. Nach Offret[1]) wird die Änderung der Brechungsindizes des Topases durch Temperaturerhöhung um 1°:

$$\frac{dn_x}{dt} = + 0{,}81 \cdot 10^{-5}, \qquad \frac{dn_y}{dt} = + 0{,}90 \cdot 10^{-5},$$
$$\frac{dn_z}{dt} = + 0{,}80 \cdot 10^{-5}.$$

Da bei Temperaturerhöhung der Topas eine allseitige Dilatation erfährt, diese Dilatation aber allein gemäß dem piëzooptischen Verhalten des Topases eine Abnahme der Brechungsindizes hervorruft, vorstehende Werte aber eine Zunahme derselben angeben, so folgt hieraus, daß dieser Unterschied durch einen reinen Temperatureinfluß auf das optische Verhalten des Topases, der den piëzooptischen Veränderungen entgegenwirkt und dieselben überkompensiert, hervorgerufen wird.

Bei gleichförmiger Erwärmung um 1° C. ist nach Fizeau zu setzen:

$$x_x = + 4{,}84 \cdot 10^{-6} = a_1.$$
$$y_y = + 4{,}14 \cdot 10^{-6} = a_2.$$
$$z_z = + 5.92 \cdot 10^{-6} = a_3.$$

Die Änderung des optischen Verhaltens allein durch diese thermische Dilatation würde gegeben sein durch:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = p_{11} \cdot a_1 + p_{12} \cdot a_2 + p_{13} \cdot a_3.$$
$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = p_{21} \cdot a_1 + p_{22} \cdot a_2 + p_{23} \cdot a_3.$$
$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = p_{31} \cdot a_1 + p_{32} \cdot a_2 + p_{33} \cdot a_3.$$

oder nach Einsetzung der Zahlwerte durch:

$$\omega_x^2 - \omega_x^{02} = + 0{,}182 \cdot 10^{-6} \cdot v^2.$$
$$\omega_y^2 - \omega_y^{02} = + 0{,}338 \cdot 10^{-6} \cdot v^2.$$
$$\omega_z^2 - \omega_z^{02} = + 0{,}320 \cdot 10^{-6} \cdot v^2.$$

1) A. Offret, Bull. soc. franç. min. **18**, 1890.

Die Änderung der Brechungsindizes wird demnach:

$$\left(\frac{dn_x}{dt}\right) = -0{,}381 \cdot 10^{-6}; \quad \left(\frac{dn_y}{dt}\right) = -0{,}713 \cdot 10^{-6};$$

$$\left(\frac{dn_z}{dt}\right) = -0{,}684 \cdot 10^{-6}.$$

Aus diesen Werten berechnet sich in Verbindung mit den von Offret erhaltenen für den reinen Temperatureinfluß folgendes:

$$\frac{\partial n_x}{\partial t} = +0{,}85 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{\partial n_y}{\partial t} = +0{,}97 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{\partial n_z}{\partial t} = +0{,}87 \cdot 10^{-5}.$$

Der reine Temperatureinfluß überwiegt also sehr stark den der thermischen Dilatation, so daß die letztere in ihrem Einfluß auf die Änderung der Brechungsindizes nur in einer kleinen Verminderung der Wirkung zur Geltung kommt.

Bei Erwärmung des Topases erhält man allein durch die Dilatation eine Abnahme der Doppelbrechung:

$$\left(\frac{d(n_z - n_x)}{dt}\right) = -0{,}303 \cdot 10^{-6},$$

durch reinen Temperatureinfluß eine Zunahme derselben:

$$\frac{\partial (n_z - n_x)}{\partial t} = +0{,}2 \cdot 10^{-6},$$

nach der Beobachtung von Offret dagegen eine Abnahme der Doppelbrechung; also überwiegt auch in Hinblick auf die Änderung der Doppelbrechung die thermische Dilatation.

Im folgenden soll *die Einwirkung einseitigen Druckes* auf die Änderung des optischen Verhaltens des Topases der Näheren diskutiert werden. Der Druck wirke z. B. in der X^0-Y^0-Ebene. Die Richtung des Druckes sei unter einem Winkel φ gegen die X^0-Achse geneigt. Alsdann erhält man für die Polarisationskonstanten folgende Ausdrücke:

$$a_{11} = \omega_x^{02} - \{\pi_{11} \cdot \cos^2 \varphi + \pi_{12} \cdot \sin^2 \varphi\} \cdot p$$

$$a_{22} = \omega_y^{02} - \{\pi_{21} \cdot \cos^2 \varphi + \pi_{22} \cdot \sin^2 \varphi\} \cdot p$$

$$a_{33} = \omega_z^{02} - \{\pi_{31} \cdot \cos^2 \varphi + \pi_{32} \cdot \sin^2 \varphi\} \cdot p$$

$$a_{12} = \frac{\pi_{66}}{2} \cdot \sin(2\varphi) \cdot p; \quad a_{23} = a_{31} = 0.$$

Wie diese Größen sich mit der Richtung des Druckes ändern, zeigt folgende Tabelle, in der dieselben für den ersten Quadranten der X^0-Y^0-Ebene für verschiedene Druckrichtungen berechnet sind.

φ	$\frac{a_{11} - \omega_x^{0\,2}}{p \cdot v^2}$	$\frac{a_{22} - \omega_y^{0\,2}}{p \cdot v^2}$	$\frac{a_{33} - \omega_z^{0\,2}}{p \cdot v^2}$	$\frac{a_{12}}{p \cdot v^2}$
0°	$+ 0{,}504 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}511 \cdot 10^{-8}$	$0{,}369 \cdot 10^{-8}$	0
10°	$+ 0{,}479 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}478 \cdot 10^{-8}$	$0{,}365 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}126 \cdot 10^{-8}$
20°	$+ 0{,}408 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}383 \cdot 10^{-8}$	$0{,}351 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}237 \cdot 10^{-8}$
30°	$+ 0{,}298 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}238 \cdot 10^{-8}$	$0{,}330 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}320 \cdot 10^{-8}$
40°	$+ 0{,}164 \cdot 10^{-8}$	$- 0{,}059 \cdot 10^{-8}$	$0{,}307 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}362 \cdot 10^{-8}$
45°	$+ 0{,}092 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}036 \cdot 10^{-8}$	$0{,}294 \cdot 10^{-8}$	$0{,}369 \cdot 10^{-8}$
50°	$+ 0{,}020 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}131 \cdot 10^{-8}$	$0{,}280 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}362 \cdot 10^{-8}$
60°	$- 0{,}114 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}310 \cdot 10^{-8}$	$0{,}256 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}320 \cdot 10^{-8}$
70°	$- 0{,}224 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}455 \cdot 10^{-8}$	$0{,}236 \cdot 10^{-8}$	$+ 0{,}237 \cdot 10^{-8}$
80°	$- 0{,}295 \cdot 10^{-8}$	$0{,}550 \cdot 10^{-8}$	$0{,}223 \cdot 10^{-8}$	$0{,}126 \cdot 10^{-8}$
90°	$- 0{,}320 \cdot 10^{-8}$	$0{,}583 \cdot 10^{-8}$	$0{,}218 \cdot 10^{-8}$	0

Es genügt die Angabe für den ersten Quadranten, weil infolge der Symmetrie des Kristalles im dritten Quadranten die Werte sich in derselben Reihenfolge, im zweiten und vierten Quadranten in umgekehrter Reihenfolge wiederholen.

Die Änderungen der Hauptlichtgeschwindigkeiten lassen sich nun aus den Polarisationskonstanten berechnen. Es kann hier mit genügender Annäherung $a_{11} = \omega_x^2$, $a_{22} = \omega_y^2$ gesetzt werden; denn die Drehung des Achsensystems um die Z^0-Achse ist eine außerordentlich geringe. Ferner wird $a_{33} = \omega_z^2$.

Es lassen sich leicht folgende Resultate übersehen: Für $\varphi = 0^0$ wird $\omega_x^2 - \omega_x^{0\,2}$ positiv:

$$\frac{\omega_x^2 - \omega_x^{0\,2}}{v^2} = 0{,}504 \cdot 10^{-8} \cdot p,$$

oder:

$$n_x - n_x^0 = -\frac{n_x^3}{2} \cdot 0{,}504 \cdot 10^{-8} \cdot p = -1{,}056 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Durch einseitigen Druck parallel der X^0-Achse wird also n_x kleiner, d. h. ω_x erfährt eine Beschleunigung. Bei wachsendem Winkel φ nimmt diese Beschleunigung ab. Sie wird schließlich bei einem Winkel von etwa $51\frac{1}{2}^0$ Null und geht dann zu

negativen Werten über, bis bei $\varphi = 90^0$ die größte V zögerung erreicht ist. Hier wird:

$$\frac{\omega_z^2 - \omega_x^{0\,2}}{r^2} = -\,0{,}320 \cdot 10^{-8} \cdot p,$$

oder:

$$n_z - n_z^0 = + \frac{n_x^{0\,3}}{2} \cdot 0{,}320 \cdot 10^{-8} \cdot p = + 0{,}671 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Ein ähnliches Verhalten nur in umgekehrter Reihenfolge zei die Änderung von ω_y^0 bzw. n_y^0 bei Variation der Druckrichtu in der X^0-Y^0-Ebene.

Bei $\varphi = 0^0$ erleidet ω_y^0 eine Verzögerung, d. h. n_y^0 wi größer. Diese Verzögerung nimmt bei anwachsendem φ z wird bei einem Winkel von ungefähr $45^0 = 0$ und nimi dann entgegengesetztes Vorzeichen an.

Für $\varphi = 0^0$ wird:

$$\frac{\omega_y^{0\,2} - \omega_y^2}{r^2} = \frac{\pi_{21}}{r^2} \cdot p,$$

oder:

$$n_y - n_y^0 = \frac{n_y^{0\,3}}{2} \cdot 0{,}511 \cdot 10^{-8} \cdot p = + 1{,}078 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Für $\varphi = 90^0$ wird:

$$\frac{\omega_y^{0\,2} - \omega_y^2}{r^2} = \frac{\pi_{22}}{r^2} \cdot p,$$

oder:

$$n_y - n_y^0 = - \frac{n_y^{0\,3}}{2} \cdot 0{,}583 \cdot 10^{-8} \cdot p = - 1{,}23 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Ferner wird für $\varphi = 0^0$, also für einseitigen Druck parall der X^0-Achse, die Doppelbrechung:

$$n_y - n_x - (n_y^0 - n_x^0) = - \frac{n_m^3}{2} \left(\frac{\pi_{11} - \pi_{21}}{r^2} \right) \cdot p = + 2{,}16 \cdot 10^{-8} \cdot p$$

und

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = - \frac{n_m^3}{2} \left(\frac{\pi_{11} - \pi_{21}}{r^2} \right) \cdot p = + 1{,}73 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

In dem Ausdruck für:

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{n_y - n_x}{n_z - n_x}}$$

nimmt der Zähler um einen größeren Betrag zu als der Nenne infolgedessen wird auch der Binormalenwinkel bei dies Druckrichtung etwas größer.

Für einseitigen Druck parallel der Y^0-Achse, d. h. für $\varphi = 90^0$, erhält man dagegen:

$$n_y - n_x - (n_y^0 - n_x^0) = -\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{12} - \pi_{32}}{c^2}\right) \cdot p = -1{,}905 \cdot 10^{-8} \cdot p$$

und

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = -\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{12} - \pi_{32}}{c^2}\right) \cdot p = -0{,}212 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Hier nimmt in dem Ausdruck für sin Ω der Zähler um einen größeren Betrag ab als der Nenner, d. h. bei dieser Druckrichtung wird der Binormalenwinkel etwas kleiner. Ferner sieht man, daß bei einem Winkel von etwa 47° die mechanisch erzeugte Doppelbrechung $n_y - n_x - (n_y^0 - n_x^0) = 0$ wird. Bei dieser Druckrichtung findet also keine Einwirkung auf den Binormalenwinkel statt.

Erwähnen will ich noch, daß bei einer Druckrichtung von 45° gegen die X^0-Achse und einer Beobachtungsrichtung parallel der Z^0-Achse, die Kompensatormessungen, die von $n_y - n_x - (n_y^0 - n_x^0)$ abhängen, sehr unsicher waren. Gerade zwischen 40° und 50° schwankt diese Doppelbrechung außerordentlich stark. An den oberen und unteren Rändern des Präparates, an denen sich selten eine genau definierte Druckrichtung herstellen läßt, teilten sich bei Belastung zuweilen die schwarzen Kompensatorstreifen gabelförmig, entsprechend dem verschiedenen Vorzeichen der Doppelbrechung bei Druckrichtungen zwischen 40° und 50°. An Stellen in der Mitte des Präparates, wo eine gleichmäßigere Druckverteilung vorhanden war, war die Verschiebung des schwarzen Kompensatorstreifens außerordentlich gering, so daß auf eine genaue Messung dieser Verschiebung verzichtet wurde.

Wirkt der Druck parallel der X^0-Achse, ist also $\varphi = 0^0$, so wird für die Doppelbrechung $n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0)$ folgender Ausdruck erhalten:

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = -\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{11} - \pi_{31}}{c^2}\right) \cdot p = +1{,}73 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Die Doppelbrechung des Topases erfährt also bei einseitigem Druck parallel der X^0-Achse eine geringe Zunahme. Umgekehrt ist es wieder bei einseitigem Druck parallel der Y^0-Achse. Hier erhält man:

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = -\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{12} - \pi_{32}}{c^2}\right) \cdot p = -0{,}212 \cdot 10^{-8} \cdot p.$$

Die Doppelbrechung des Topases erfährt bei einseitigem Druck parallel Y^0 eine geringe Abnahme.

Bei Druckrichtungen zwischen 0^0 und 90^0 nimmt die Doppelbrechung für wachsende φ ab, wird bei etwa $70^0 = 0$ und nimmt dann negative Werte an.

Dieses eigenartige Oszillieren der mechanisch erzeugten Lichtgeschwindigkeiten bei Variationen des Druckes hat seinen Grund in dem negativen Vorzeichen der π_{33}. Diese geben auch zu ganz ähnlichen Verhältnissen in der Y^0-Z^0- und Z^0-X^0-Ebene Veranlassung. Es werden dort dieselben Resultate erhalten, nur mit etwas anderen Zahlwerten.

Speziell für einseitigen Druck parallel der Z^0-Achse mag noch der Wert für die mechanisch erzeugte Doppelbrechung angeführt werden. Man erhält:

$$n_z - n_x - (n_z^0 - n_x^0) = -\frac{n_m^3}{2}\left(\frac{\pi_{13}-\pi_{33}}{v^2}\right)\cdot p = -1{,}44\cdot 10^{-8}\cdot p\,.$$

Sie nimmt bei dieser Druckrichtung etwas ab.

g) Über die Dispersion der mechanisch erzeugten Lichtgeschwindigkeiten.

Es wurden in einigen Richtungen noch Beobachtungen über die Abhängigkeit der durch Druck erzeugten Verzögerung von der Farbe gemacht. Dieselben wurden in folgender Weise ausgeführt. An einer Stelle des Präparates wurden nacheinander die Verschiebungen des Kompensatorstreifens bzw. des Interferenzstreifens des Refraktors mit den verschiedenen Wellenlängen

$$\lambda = 668\,\mu\mu,\ 588\,\mu\mu,\ 502\,\mu\mu \text{ und } 447\,\mu\mu$$

gemessen. Zugleich wurde geprüft, ob die Druckverteilung an dieser Stelle während der Beobachtungsreihe dieselbe blieb. Da die Annahme der Proportionalität zwischen Druck und erzeugter Verzögerung zulässig ist, so hat man hiermit die Abhängigkeit zwischen den durch die verschiedenen Wellenlängen hervorgerufenen Verzögerungen gefunden. Die für $\lambda = 588\,\mu\mu$ gefundenen Werte sind schon genauer bestimmt worden. Auf diese lassen sich dann die für die anderen Wellenlängen reduzieren.

An Prisma 3 wurden in der Beobachtungsrichtung parallel X^0 folgende Kompensatormessungen erhalten:

λ	Δ'	Kontrolle	$\overline{\Delta_{yz}}$
668 $\mu\mu$	1,434	1,436	$0{,}2117 \cdot 10^{-4}$
588 $\mu\mu$	1,484	1,480 / 1,481	$0{,}2507 \cdot 10^{-4}$
502 $\mu\mu$	1,505	1,510	$0{,}3041 \cdot 10^{-4}$
447 $\mu\mu$	1,529		$0{,}3524 \cdot 10^{-4}$

Es läßt sich hieraus in genügender Annäherung nach der Formel:

$$2\lambda \cdot \Delta_{yz} = \frac{\pi_{23} - \pi_{33}}{r^2} \cdot n_m^3$$

unter Vernachlässigung der Dickenänderung die Differenz $\frac{\pi_{23} - \pi_{33}}{r^2}$ für die verschiedenen Wellenlängen berechnen. Man erhält:

λ	$\frac{\pi_{23} - \pi_{33}}{r^2}$
668 $\mu\mu$	$0{,}67 \cdot 10^{-8}$
588 $\mu\mu$	$0{,}69 \cdot 10^{-8}$
502 $\mu\mu$	$0{,}71 \cdot 10^{-8}$
447 $\mu\mu$	$0{,}73 \cdot 10^{-8}$

In der Beobachtungsrichtung parallel Y^0 wurden folgende Kompensatormessungen erhalten:

λ	Δ'	Kontrolle	Δ_{xz}
668 $\mu\mu$	1,898		$0{,}2090 \cdot 10^{-4}$
588 $\mu\mu$	1,901	1,901	$0{,}2396 \cdot 10^{-4}$
502 $\mu\mu$	1,905		$0{,}2860 \cdot 10^{-4}$
447 $\mu\mu$	1,912		$0{,}3290 \cdot 10^{-4}$

Hieraus berechnet sich $\frac{\pi_{13} - \pi_{33}}{r^2}$ für die verschiedenen Wellenlängen:

λ	$\frac{\pi_{13} - \pi_{33}}{r^2}$
668 $\mu\mu$	$0{,}665 \cdot 10^{-8}$
588 $\mu\mu$	$0{,}669 \cdot 10^{-8}$
502 $\mu\mu$	$0{,}675 \cdot 10^{-8}$
447 $\mu\mu$	$0{,}684 \cdot 10^{-8}$

Man findet aus diesen und ähnlichen hier nicht weiter angeführten Beobachtungen, daß die $\pi_{\lambda\lambda}$ mehr oder weniger

von der Wellenlänge abhängen. Es wird also auch bei elastischer Deformation des Topases immer eine geringe Änderung der natürlichen Dispersion eintreten.

Nachtrag.

Beobachtungen an Beryll.

Entsprechend der Symmetrie des hexagonalen Systems ist für die Polarisationskonstanten als Funktionen der Druckkomponenten $X_x \ldots Y_z \ldots$ zu setzen:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = -\{\pi_{11} X_x + \pi_{12} Y_y + \pi_{13} Z_z\}.$$
$$a_{22} - \omega_x^{02} = -\{\pi_{12} X_x + \pi_{11} Y_y + \pi_{13} Z_z\}.$$
$$a_{33} - \omega_z^{02} = -\{\pi_{31} X_x + \pi_{31} Y_y + \pi_{33} Z_z\}.$$
$$a_{44} = -\pi_{44} Y_z,\ a_{55} = -\pi_{44} Z_x,\ a_{66} = -(\pi_{11} - \pi_{12}) X_y.$$

oder als Funktionen der Deformationsgrößen $x_x \ldots y_z \ldots$:

$$a_{11} - \omega_x^{02} = p_{11} x_x + p_{12} y_y + p_{13} z_z.$$
$$a_{22} - \omega_x^{02} = p_{12} x_x + p_{11} y_y + p_{13} z_z.$$
$$a_{33} - \omega_z^{02} = p_{31} x_x + p_{31} y_y + p_{33} z_z.$$
$$a_{44} = p_{44} y_z,\ a_{55} = p_{44} \cdot z_x,\ a_{66} = \tfrac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) x_y.$$

wobei als Z^0-Achse die sechszählige Symmetrieachse, die X^0- und Y^0-Achse in der zu letzterer senkrechten Ebene beliebig gewählt ist.

Die Beobachtungen der relativen und absoluten Verzögerungen an zwei würfelförmigen Präparaten, die aus einem brasilianischen Aquamarin hergestellt wurden, ergaben für die piëzooptischen Konstanten folgende Werte:

$$\pi_{11} = -0.349 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;\quad \pi_{12} = +0{,}581 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{13} = +0.725 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{31} = +0.914 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;\quad \pi_{33} = -0.418 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$
$$\pi_{44} = -2.28 \cdot 10^{-8} \cdot v^2;$$

und hieraus berechnet sich für die elastooptischen Konstanten:

$$p_{11} = +0{,}0099 \cdot v^2;\quad p_{12} = +0.175 \cdot v^2;\quad p_{13} = +0{,}191 \cdot v^2;$$
$$p_{31} = +0{,}313 \cdot v^2;\quad p_{33} = +0{,}023 \cdot v^2;\quad p_{44} = -0{,}152 \cdot v^2.$$

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Voigt, auch an dieser Stelle für die Anregung zu der Arbeit, sowie für sein mir stets bewiesenes Wohlwollen meinen allerherzlichsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 21. Oktober 1919.)

3. *Zur beschleunigten Bewegung kugelförmiger Körper in widerstehenden Mitteln;* *von Fritz Sigismund Schmidt.*

(Leipziger Dissertation.)

Die nachstehenden Untersuchungen wurden im Anschluß an eine Arbeit von Schiller und Döge[1]) im physikalischen Institut der Universität Leipzig im Winter 1912/13 begonnen und nach Unterbrechung durch den Krieg im ersten Vierteljahr 1919 abgeschlossen. Es sollte die Bewegung kugelförmiger nur unter dem Einfluß einer konstanten äußeren Kraft stehender Körper in Flüssigkeiten unter Erweiterung des Beobachtungsmateriales von Schiller und Döge untersucht und dabei das Hauptaugenmerk auf den beschleunigt verlaufenden Teil der Bewegung gelegt werden. Hrn. Dr. Schiller danke ich für seine wertvollen Ratschläge bei der Durchführung der Arbeit.

I. Versuchsanordnung.

a) Aufstieg von Ballonen in Luft.

Als Versuchskörper dienten in Luft steigende Pilotballone und in Wasser fallende beschwerte Wachskugeln. Zur Feststellung des Bewegungsverlaufes wurde im wesentlichen die von Schiller und Döge angegebene photographische Festlegung des Ortes der Körper in verschiedenen Zeitpunkten, die gleichen Abstand voneinander hatten, von der Ruhelage aus beginnend benutzt. Es gelangten zwei verschiedene Größen von Ballonen zur Verwendung. Die größeren waren Pilotballone der Continental-Caoutchouc und Guttapercha Compagnie in Hannover. Sie bestanden aus etwa 0,4 mm starker Gummiplatte, hatten gefüllt einen Radius zwischen 26,3 und 29,5 cm und wogen mit Zubinde- und Haltefäden und Haltering zwischen 61,58 und 67,67 g. Die kleineren aus schwächerem Gummi stammten von der Firma Katzenstein in

1) Physik. Zeitschr. 13. S. 234. 1912.

Leipzig. Ihr Radius schwankte zwischen 7.4 und 8,45 cm, ihr Gewicht einschließlich Ring und Fäden zwischen 1.62 und 1.67 g. Als Aufstiegsort diente der etwa 11 m hohe überdachte Lichthof des physikalischen Institutes. Die nächste Wand war von der Aufstiegsstelle über 5 m entfernt. Zur Füllung der Ballone wurde Wasserstoff (Flaschengas) benutzt.

Während des Aufstieges wurde der Ballon mit zwei photographischen Apparaten, deren optische Achsen etwa recht-

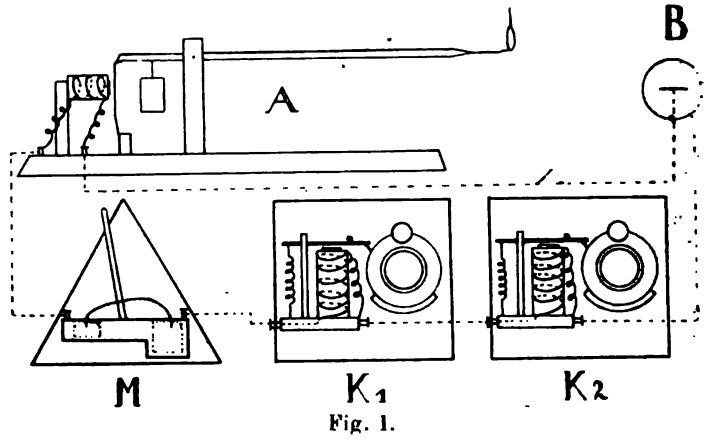


Fig. 1.

A Ablaßvorrichtung *K*$_1$ Kamera I *B* Batterie
M Metronom *M*$_2$ Kamera II

winklig zueinander standen, photographiert. Dazu war ein Stromkreis hergestellt (vgl. Fig. 1), in dem sich ein Metronom, die Ablaßvorrichtung für den Ballon und je ein an den Kameras angebrachter Elektromagnet befanden. Das Metronom schloß den Strom durch Eintauchen eines Drahtes in einen Quecksilberkontakt in gleichen etwa eine halbe Sekunde großen Zeitintervallen. Bei jedem Stromschluß zogen die Elektromagnete an den Kameras einen Hebel an, der seinerseits auf die Auslösungshebel der Verschlüsse wirkte. Diese Automatverschlüsse von Bausch und Lomb, spannten sich nach jeder Auslösung selbsttätig wieder, so daß eine beliebige Folge von Aufnahmen gemacht werden konnte. Die Verschlußgeschwindigkeit wurde so groß wie möglich, nach den Angaben auf den Verschlüssen entsprechend einer Belichtungsdauer von $^1/_{100}$ Sekunde genommen.

Die Ablaßvorrichtung bestand aus einem doppelarmigen etwa 30 cm langen zunächst horizontal stehenden um eine horizontale Achse drehbaren Hebel, an dessen einem kürzeren Arm ein Gewicht hing. Sein Herabfallen wurde durch eine Sperrklinke verhindert. Das Ende des längeren Armes verjüngte sich in einen dünnen Draht, unter dessen äußerstes Ende der Haltering des Ballons gelegt wurde. Beim ersten Stromschluß durch das Metronom wurde die Sperrklinke durch einen Elektromagneten zurückgezogen, das Gewicht des kurzen Hebelarmes schnellte den langen in die Höhe. Der Ballon wurde so ohne Stoß freigegeben.

Gleichzeitig wurden die Verschlüsse der Kameras das erstemal betätigt und der Ballon in der Ausgangsstellung photographiert. Dieser ersten Aufnahme folgten dann nach gleichen Zeiten die nächsten während des Aufstieges des Ballons, bis dieser den Gesichtskreis der Kameras verlassen hatte.

Um gute Aufnahmen zu erzielen, mußten blau gefärbte Ballone verwendet werden. Als Hintergrund für die Aufnahmen wurden lange schwarze Tuchstreifen an den Wänden gegenüber den Kameras aufgezogen, so daß verhindert wurde, daß bei der mehrmaligen Belichtung der Platten die Stellen, wo der Ballon sich nicht befand, eine Wirkung ausüben konnten. Außerdem wurden lichtstarke Objektive (zwei Zeiß-Tessare, Lichtstärke 1 : 6,3 Brennweite 21 cm) und höchstempfindliche Platten (Lumière Σ) benutzt. Das Licht der Sommermonate reichte dann zur Erzielung brauchbarer Aufnahmen aus. Die gleichzeitige Aufnahme jedes Aufstieges durch zwei Kameras hatte den Zweck, Abweichungen des Ballons von der geraden Aufstiegbahn festzustellen und, falls solche auftraten, den betreffenden Aufstieg ausschalten zu können.

Vor der Füllung stellte eine Wägung das Gewicht des Ballons einschließlich Haltering sowie Halte- und Verschlußfäden fest. Vor dem Aufstieg wurde zunächst der Umfang mit einem Bandmaß gemessen, darauf der unter Umständen mit bekannten Gewichten als Ballast beschwerte Ballon dadurch abgewogen, daß eine angehängte Wagschale mit Gewichten so belastet wurde, bis der Ballon ohne zu steigen und zu fallen schwebte. Das Gewicht der Wagschale war vorher ermittelt worden. Die Zeiten der Messungen von Umfang und

Auftrieb wurden notiert. Darauf erfolgte der Aufstieg, nach ihm wieder Feststellung des Auftriebes und des Umfanges, die jetzt im allgemeinen wegen des ausgeströmten Wasserstoffs kleiner ausfielen. Aus allen Messungen wurden Auftrieb und Umfang zur Zeit des Aufstieges interpoliert. Die verwendeten Auftriebe lagen bei den großen Ballonen zwischen 0,99 und 29,81, bei den kleinen zwischen 0,23 und 1,86 g. Er wurde bei den großen bis auf 0,01, bei den kleinen bis auf 0,005 g, der Umfang bei beiden Größen bis auf 0,5 cm bestimmt. Ob die Luft ruhig war, zeigte der beim Abwiegen zur Feststellung des Auftriebes sich selbst überlassene Ballon. Der Aufstiegraum konnte durch Schließung sämtlicher Öffnungen strömungsfrei gehalten werden. Eine Zu- oder Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe, so daß sie eine die Bewegung merklich beeinflussende Dichteänderung hervorgerufen hätte, war niemals nachzuweisen.

Die so gewonnenen Platten, zwei von jedem Ballonaufstieg, zeigten den Ballon an den Orten, die er zu den um gleiche Intervalle auseinanderliegenden einzelnen Aufnahmezeiten innehatte. Bei Beginn der Bewegung befand sich der Ballonmittelpunkt ungefähr 0,75 m über dem Boden. Sein Weg konnte etwa auf einer Strecke von 2,75 m verfolgt werden. Zur Ausmessung der Platten diente ein Komparator von Zeiß. Mit ihm wurde auf jeder Platte der Ort des oberen und unteren Randes jedes Ballonbildes, verglichen mit dem der Ruhelage festgestellt und durch Mittelbildung der jeweilige Ort des Ballonmittelpunktes gefunden. Mit jeder Kamera war einmal ein am Aufstiegsort aufgehängter Maßstab photographiert worden, so daß durch Ausmessen dieser Platten das Vergrößerungsverhältnis der photographischen Apparate bekannt wurde. Mit dessen Hilfe ließ sich der Ort, den der Ballonmittelpunkt zu jeder Aufnahmezeit gehabt hatte, finden. Die Platten wurden bis auf 0,01 mm genau ausgemessen, was einem Wege des Ballons von 0,6 mm entsprach. Bei den größeren Geschwindigkeiten war jedoch wegen der Unschärfe der Ballonränder größere Unsicherheit bei deren Einstellen vorhanden. Da aber für jeden Ballonort vier Messungen (oberer und unterer Rand auf jeder der zwei Platten) zur Verfügung standen, fand eine gewisse selbsttätige Ausgleichung der Einstellfehler statt.

Um zu sehen, ob dadurch, daß der Ballon seine Bewegung in der Nähe des Bodens begann, Besonderheiten in dieser hervorgerufen wurden, wurde auch eine Reihe von Aufstiegen festgehalten, bei denen der Ballon an einem längeren Faden als gewöhnlich an die Ablaßvorrichtung gehängt wurde, so daß sich der Ballonmittelpunkt im Anfang etwa 1,5 m über dem Boden befand. Ein Einfluß dieser Änderung ließ sich nicht erkennen.

Bei den Aufnahmen wurde so verfahren, daß ein einmal gefüllter Ballon nacheinander mit verschiedener Belastung, also verschiedenem Auftriebe, hochgelassen und jedesmal photographiert wurde. Während der Zeit zwischen dem ersten und letzten Aufstieg änderten sich Form und Inhalt des Ballons nur wenig. Ballone, deren Gestalt merklich von der Kugelform abwich, wurden ausgeschaltet, ebenso solche, die in einer erheblich von der Geraden abweichenden Bahn aufstiegen, und ferner diejenigen, die beim Ablassen eine Drehung erfuhren, die durch schlechte Form und ungleiche Wandstärke des Gummis hervorgerufen sein dürften. Schließlich wurde zur Prüfung der Genauigkeit auch von einem Ballon eine Reihe von Aufnahmen hergestellt, ohne daß seine Belastung bei jedem Aufstieg geändert wurde. Der Umfang des Ballons änderte sich während der fünf vorgenommenen Aufstiege nicht. Die folgende Tab. 1 gibt die dabei gemessenen Geschwindigkeiten wieder.

Tabelle 1.

Zeit	Auftrieb	0,24	0,71	1,19	1,67	2,14	2,62 sec
1. Aufstieg	10,61 g	20,2	58,6	87,2	117,4	115,1	cm/sec
2. „	10,45	20,2	57,5	92,6	114,0	103,5	„
3. „	9,96	20,6	59,4	96,4	116,3	125,6	104,8 cm/sec
4. „	9,81	20,2	56,3	84,4	114,7	107,9	cm/sec
5. „	9,55	18,7	56,7	83,4	115,1	114,0	104,2 cm/sec

Der Radius des Ballones war in allen Fällen 26,3 cm, sein Gesamtgewicht (einschließlich Wasserstoff) 78,40 g. Nach Tab. 1 muß man bei Geschwindigkeiten über 100 cm/sec mit einem mittleren Fehler von etwa ± 7 Proz. rechnen, der in erster Linie durch unkontrollierbare die Geschwindigkeit beeinflussende Ursachen und erst in zweiter durch Ungenauig-

keiten der Messungen hervorgerufen wird. Für die Geschwindigkeit von 50 cm/sec beträgt er nur ± 2 Proz.

b) Fall von Kugeln in Wasser.

Nach derselben Methode wie bei den Ballonen wurde auch der jeweilige Ort von in Wasser fallenden Wachskugeln bestimmt. Zur Herstellung der Kugeln diente Bienenwachs. Durch Abdrehen nach allen Seiten der roh geformten Kugel auf dem Rande einer glatt und scharf senkrecht zur Achse abgeschnittenen Messingröhre von kreisförmigem Querschnitt und etwas kleinerem als der beabsichtigte Kugeldurchmesser ließ sich eine gute Kugelform erzielen. Das Ergebnis der mit einer Mikrometerschraubenlehre an den einzelnen Kugeln nach verschiedenen Richtungen vorgenommenen Messungen der Kugeldurchmesser ist in Tab. 2 zusammengestellt, die außerdem die Gewichte der Kugeln in Luft und in Wasser gemessen, dessen Temperatur und kinematische Zähigkeit ν, bei der die Versuche ausgeführt wurden, enthält. Dabei ist $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$, wo μ den Koeffizienten der inneren Reibung, ϱ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet.

Tabelle 2.

Nr.	Große Kugeln II	III	IV	V	VI	Kleine Kugeln I	II	IV	V	
	3,28	3,21	3,27	3,29	3,21	2,09	2,10	2,10	2,10	cm Durchm.
	3,29	3,22	3,28	3,30	3,225	2,095	2,10	2,06	2,10	"
	3,27	3,21	3,28	3,30	3,20	2,09	2,07	2,05	2,10	"
	3,28	3,19	3,25	3,29	3,23	2,095	2,07	2,08	2,10	"
	3,28	3,21	3,27	3,29	3,20	2,10	2,09	2,05	2,10	"
	3,27	3,21	3,28	3,28	3,23	2,09	2,09	2,06	2,10	"
Mittel	3,28	3,21	3,27	3,29	3,22	2,09	2,09	2,07	2,10	"
Gewicht in Luft	19,0526	17,4000	18,5086	20,2728	17,3256	4,9174	5,1244	4,6652	4,8628	g
Gew. in Wasser	0,5851	0,1721	0,1169	1,5087	0,0514	0,0702	0,3166	0,0306	0,0370	g
Wassertemp.	18,5	18,5	18,0	18,0	16,5	18,0	18,0	19,5	18,5	Grad
Kine. Zähigkeit	1043	1043	1056	1056	1097	1056	1056	1018	1042	$\times 10^{-5}$ cm/sec

In die Kugeln war unter der Oberfläche an einer Stelle etwas Blei eingearbeitet, um sie schwerer als Wasser zu machen. Von jeder der zwei benutzten Kugelgrößen wurden mehrere nahezu gleichgroße, aber verschieden schwere Kugeln hergestellt. Dem Blei gegenüber in bezug auf den Kugelmittelpunkt war dicht unter der Oberfläche ein kleiner eiserner Stift eingelassen. Er diente zum Festhalten der Kugeln vor dem Fall durch einen Elektromagneten. Die Kugeln fielen in einen 1,5 m hohen, 30 × 30 cm weiten Trog aus Eisenblech. In zwei einander gegenüberliegenden Seiten von ihm war je

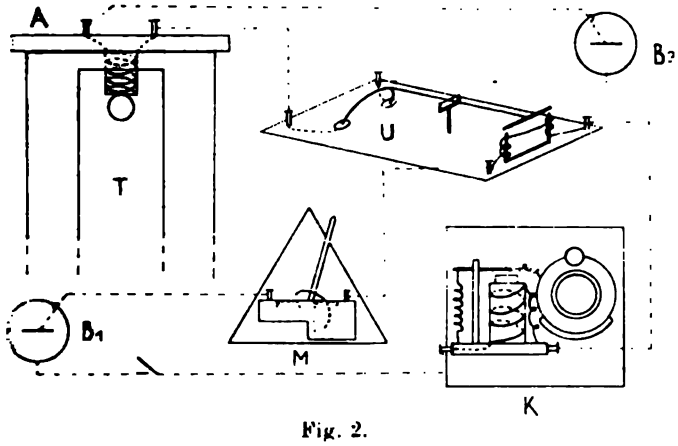


Fig. 2.

A Ablaßvorrichtung mit Haltemagnet
U Unterbrecher
B_1, B_2 Batterien
M Metronom
K Kamera
T Trog

ein fast vom oberen bis zum unteren Rande reichendes Glasfenster von 15 cm Breite mit Mennige eingekittet und verschraubt. Über dem Troge war ein zylindrischer Elektromagnet mit senkrechter Achse gelagert, dessen unterer Rand etwa 2 cm unter die Wasseroberfläche des gefüllten Troges tauchte. Dieser Haltemagnet hielt die mit dem Eisenstift nach oben unter ihn gebrachten Wachskugeln bis zu Beginn des Falles fest.

Die Aufnahmen wurden im Zimmer mit dem Fenster im Rücken mit einem der oben beschriebenen photographischen Apparate mit elektromagnetischer Verschlußauslösung aus 2,2 m Entfernung durch die beiden Glasfenster des Troges hindurch gemacht. Zur Sichtbarmachung der Kugeln wurde

während des Falles mit der Hand eine Glühbirne an dem dem Objektiv abgewendeten Trogfenster mit der Kugel mitgeführt. Die Glühbirne war, um das Licht diffus zu machen, mit Seidenpapier umkleidet. Die Kugeln hoben sich vom Lampenhintergrund im Negativ Weiß auf Schwarz scharf ab.

Für die Aufnahmen waren zwei Stromkreise nötig (vgl. Fig. 2). Der erste enthielt den Haltemagnet und die Quecksilberkontakte eines Unterbrechers. Er war vor der Aufnahme geschlossen. Der zweite ging durch das Metronom, den Elektromagneten an der Kamera und einen Elektromagneten, der den am ersten Stromkreis liegenden Unterbrecher öffnete. Diese Öffnung geschah beim ersten Stromschluß durch das Metronom gleichzeitig mit der ersten Aufnahme, so daß auch hier das erste Kugelbild auf der Platte die Kugel am Anfangsort, die folgenden Bilder sie dort zeigten, wo sie sich nach gleichen Zeitzwischenräumen befand.

Es wurden Aufnahmen im vollen Troge von 30 × 30 cm Grundfläche gemacht, sowie auch in dem verengten Troge, indem Blech- und Glaswände in verschiedenen Abständen eingehängt wurden, um den Einfluß der Wände kennen zu lernen. Masse und Abtrieb der Kugeln wurden vor dem Fall durch ihre Wägung in Luft und in Wasser ermittelt. Jede Kugel wurde mehrere Male, bis zu sechsmal, fallen gelassen und dabei photographiert. Um zu zeigen, wie weit dabei die gemessenen Geschwindigkeiten bei jedem einzelnen Fall übereinstimmten, diene Tab. 3. Sie gibt die dreimal an der großen Kugel V gemessenen Geschwindigkeiten wieder.

Tabelle 3.

Zeit	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75 sec
Platte 1	3,81	21,45	18,61	21,76	24,36	23,08	25,23	26,47 cm/sec
„ 2	4,06	20,92	19,09	21,63	24,30	23,73	25,84	26,39 „
„ 3	4,81	21,88	17,95	22,63	23,99	23,77	23,91	24,60 „

Die Unterschiede sind bei den kleinsten beobachteten Geschwindigkeiten erheblich. Der mittlere Fehler betrug in einigen Fällen sogar 100 Proz. Von der zweitkleinsten Geschwindigkeit ab findet Übereinstimmung innerhalb 2—3 Proz. statt. Für Geschwindigkeiten über 25 cm/sec wachsen die Fehler bis über 4 Proz.

Auch von den Kugeln wurden nur diejenigen benutzt, deren Bahn nahe der Senkrechten durch den Anfangspunkt blieb. Die in Tab. 2 fehlenden große Kugel I und kleine Kugel III wurden aus diesem Grunde ausgeschaltet. Ein in der Mitte des Troges aufgehängter Maßstab lieferte eine Platte zur Bestimmung des Abbildungsverhältnisses der Kamera. Die Ausmessung der Platten erfolgte ebenso wie die der Ballonplatten.

Die Ausmessung der Platten lieferte nach Reduktion auf den wirklichen Maßstab die Abhängigkeit des von den Kugeln bzw. Ballonen zurückgelegten Weges von der Zeit. Durch Bildung der Differenzenquotienten wurde daraus die Geschwindigkeit für die in der Mitte zwischen zwei Aufnahmezeiten liegenden Zeitpunkte abgeleitet. Die so gebildeten Zeit-Geschwindigkeitskurven lassen einen leichteren Einblick in die Bewegung zu als die Zeit-Wegkurven, andererseits sind sie mit geringeren Fehlern behaftet als die Zeit-Beschleunigungskurven, die man durch Bildung der zweiten Differenzenquotienten heranziehen könnte.

Die Ballone wichen dadurch, daß sie einen Füllansatz und mit ihm durch einen etwa 15 cm langen Faden verbunden, einen Haltering aus dünnem Draht von ungefähr 5 cm Durchmesser trugen, von der genauen Kugelform mehr ab als die Wachskugeln, die eine allseitige glatte Oberfläche hatten. Jedoch ließ sich nicht erkennen, daß durch diese Unterschiede in der Form der Verlauf der Bewegung beider Körper verschieden gemacht worden wäre.

Die Abtriebe der Kugeln konnten durch anhaftende dünne Luftschichten und kleine Bläschen gefälscht werden. Diese wurden, soweit möglich, entfernt und die Kugeln nach der Wägung unter Wasser nicht wieder getrocknet, sondern unter Wasser aufbewahrt. Die großen Geschwindigkeiten sind mit größeren Meßfehlern behaftet als die kleinen, einmal wegen der größeren Umschärfe der Bilder, dann wegen der größeren Wegstrecken, aus denen die Geschwindigkeiten interpoliert werden mußten. Schließlich ist es möglich, daß die Geschwindigkeit im ersten Zeitintervall durch einen einseitig wirkenden Fehler verfälscht worden ist, da es hier auf die Gleichzeitigkeit der ersten Aufnahme und des Loslassens ankommt. Es ist nicht ausgeschlossen, daß durch zurückbleibenden

Magnetismus das Abfallen der Kugeln etwas verzögert werden konnte. Dadurch dürften sich die verhältnismäßig großen Abweichungen dieser Geschwindigkeiten bei verschiedenen mit derselben Kugel erhaltenen Platten erklären.

II. Beobachtungsergebnisse.

a) Stationäre Bewegung. Widerstandkoeffizient.

Der Widerstand eines Körpers, der sich in einer ruhenden Flüssigkeit nur unter dem Einfluß seines konstanten Auf- bzw. Abtriebes bewegt, ist

$$(1) \qquad Wg = Ag - m\frac{dv}{dt},$$

wo Wg den Widerstand, Ag den Auftrieb, beide in Dynen ausgedrückt, g die Schwerebeschleunigung, m die Masse des Körpers, v seine Geschwindigkeit und t die Zeit bedeutet. Für stationäre Bewegung, wo

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

und somit $W = A$ ist, haben Theorie und die verschiedensten Versuche den Widerstand proportional mit v^2, F und ϱ ergeben (F größter Querschnitt des Körpers senkrecht zur Bewegungsrichtung, ϱ Dichte der Flüssigkeit), falls die in Betracht kommende Reynoldsche Zahl

$$R = \frac{vl}{\nu}$$

(l ein Längenmaß des Körpers, $\nu = \mu/\varrho$ die kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit, wenn μ ihre innere Reibung) oberhalb einer gewissen Grenze liegt. Allen[1]) gibt für kugelförmige Körper an (r Kugelradius):

$$\begin{aligned} Wg &\text{ proportional } v \quad \text{für } R = \frac{vr}{\nu} < 1, \\ Wg &\quad \text{„} \quad v^{1,5} \text{ „} \quad 1 < R < 127, \\ Wg &\quad \text{„} \quad v^2 \quad \text{„} \quad R > 1200. \end{aligned}$$

Für das Gebiet $127 < R < 1200$ fehlten Beobachtungen. Zum

1) H. S. Allen, The motion of a sphere in a viscous fluid. Phil. Mag. S. 323 u. 519. 1900.

Teil füllt die vorliegende Arbeit diese Lücke aus. Im Bereiche des quadratischen Gesetzes ist also

$$W g = \psi \varrho F v^2, \tag{2}$$

wenn mit ψ der Widerstandskoeffizient bezeichnet wird. Dabei ist ψ, solange die Reibung im Vergleich zu den Trägheitswirkungen keinen merklichen Einfluß ausübt, was sie nur bei kleinen Geschwindigkeiten tut, und solange der durch die Bewegung des Körpers hervorgerufene Turbulenzzustand sich nicht ändert[1]), konstant zu erwarten. Zur Prüfung dieser Verhältnisse wurden aus den vorliegenden Beobachtungen diejenigen herausgegriffen, bei denen die Körper ihre Endgeschwindigkeit erreicht hatten. Bei sämtlichen Ballonen lag der Punkt, von dem ab die Geschwindigkeit konstant wurde, außerhalb des Bereiches, der auf den Platten festgehalten werden konnte. Nur bei den Wachskugeln mit kleineren Abtrieben ließ sich mit Sicherheit der Eintritt der stationären Bewegung durch Konstanz der Geschwindigkeit während mehrerer Zeitintervalle nachweisen. In Fig. 3 sind die aus diesen Platten nach Gleichung (2) ermittelten Werte von ψ

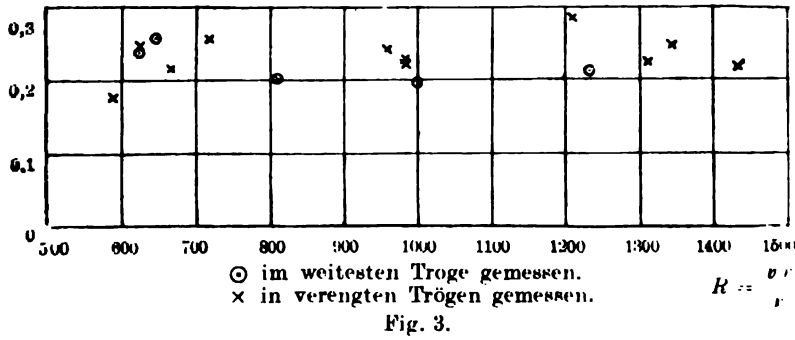


Fig. 3.

als Funktion von R aufgetragen und zwar sowohl die im weitesten Troge von 30 × 30 cm Grundfläche wie auch die im verengten Troge gemessenen, wie in Tab. 4 näher angegeben ist.

1) L. Prandtl, Der Luftwiderstand von Kugeln. Nachr. d. kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen. Berlin 1914. R. Wenger, Die Steiggeschwindigkeit der Gummiballone u. die Turbulenz in d. Atmosphäre. Ann. d. Hydrogr. 45 IV. 1917.

Tabelle 4.

Troggrundfläche	Kleine Kugel			Große Kugel		
	IV	V	I	VI	IV	III
30 × 30 cm	0,24	0.26	0,20	0,20	0,21	
20 × 30 „			0,22			
20 × 20 „	0,21		0,21	0,18	0,22	0,22
10 × 10 „	0.24		0.23	0,26	0.25	0,28

Widerstandskoeffizient $\psi = \frac{W g}{\varrho F v^2}$.

Die im weitesten Troge beobachteten Endgeschwindigkeiten, auf Grund deren ψ berechnet wurde, sind in Tab. 5 zusammengestellt.

Tabelle 5.

	Kleine Kugel			Große Kugel	
	IV	V	I	VI	IV
Versuch 1	6,15	6.29	10,24	5,54	7,71 cm/sec
„ 2	6,03	6,56	10.15	5,23	7,95 „
„ 3	6,25	6,35	10,23		8,31 „
„ 4			9,96		„
Mittel . . .	6,14	6,40	10,15	5,39	7,99 „

Endgeschwindigkeiten.

ψ aus diesen Werten ermittelt, schwankt um den Wert 0,22 herum, ohne daß eine klare Abhängigkeit von R zu erkennen wäre. Die sich für die zwischen 600 und 700 liegenden Beträge von R andeutende Vergrößerung von ψ (vgl. Fig. 3) könnte gerade noch durch die Ungenauigkeiten der Geschwindigkeitsbestimmungen erklärt werden (vgl. auch S. 662). Fehler bei diesen machen sich etwa in doppeltem Maße im Werte von ψ bemerkbar. Man kann also ψ im Bereiche $600 < R < 1500$ als Konstante ansehen und damit das quadratische Widerstandsgesetz Gleichung (2) für diesen Bereich als gültig betrachten. Der Einfluß näher gerückter Wände scheint sich als Vergrößerung von ψ und somit des Widerstandes geltend zu machen. In der Folge ist für ψ der Wert 0,22 zugrunde gelegt. In Tab. 6 ist eine Reihe von aus anderen Widerstandsmessungen berechneten Werten von ψ zusammengestellt.

Tabelle 6.

	ψ	beob. im Bereich $R = \frac{v r}{\nu}$		
		größer als	kleiner als	
Shakespear, Phil. Mag. 1914. S. 728 . . .	0,21—0,24	948	22 700	bewegte Kugeln in ruhender Luft
H. S. Allen, Phil. Mag. 1900. S. 323, 519 . .	0,17—0,20	1200	40 000	bewegte Stahlkugeln in ruhend. Wasser
Hesselberg u. Birkeland, Beiträge z. Physik d. freien Atmosphäre. IV. 4 . . . . . kleine / große	0,4—0,2	2000	200 000	Ballone in ruhender Luft
Eiffel, Sur la resistance des sphères dans l'air en mouvement. C. R. (1912) S. 1597 . . .	0,21		60 000	ruhende Kugeln im im Luftstrom
Prandtl, Göttinger Berichte. 1914 . . .	0,22		50 000	ruhende Kugeln im Luftstrom.

Danach erscheint es berechtigt, auch für den Bereich $1500 < R < 50000$, der für die in dieser Arbeit gemachten Versuche noch in Frage kommt, ψ zu 0,22 anzunehmen.

b) Beschleunigte Bewegung. Beobachtete Geschwindigkeiten.

Nimmt man nun an, daß Gleichung (2) auch für nichtstationäre Bewegung den Wert des Widerstandes richtig angibt, so kann man die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit durch Auflösung der aus Gleichung (1) und (2) hervorgegangenen Gleichung

$$m \frac{dv}{dt} = Ag - \psi \varrho F v^2$$

nach v finden.[1]) Man erhält:

$$(3) \qquad v = \sqrt{\frac{Ag}{\psi \varrho F}} \cdot \frac{e^{\frac{2}{m}\sqrt{Ag\psi\varrho F}\cdot t} - 1}{e^{\frac{2}{m}\sqrt{Ag\psi\varrho F}\cdot t} + 1}.$$

In dieser Gleichung sind, wenn für ψ der oben ermittelte Wert 0,22 eingesetzt wird, alle Konstanten bekannt bzw. meßbar.

1) Hesselberg u. Birkeland, a. a. O.

Für v ergibt sich eine Kurve (vgl. auch Fig. 9), die zunächst mit t rasch wächst und sich dann asymptotisch der Endgeschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{Ag}{\psi \varrho F}}$$

nähert. Für $t = 0$ ist die Neigung der Kurve gegen die t-Achse gleich Ag/m. Von zwei Kurven verläuft die mit größerem Auftrieb völlig oberhalb der mit kleinerem Auftrieb. Der Vergleich der so errechneten und beobachteten Zeit-Geschwindigkeitskurven muß darüber Aufschluß geben, ob auch für

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

Gleichung (2) Gültigkeit besitzt bzw. in welcher Art sich der Widerstand in diesem Falle ändert. Er wurde für alle beobachteten Bewegungen der Ballone und Kugeln angestellt und ergab:

1. Die beobachteten Geschwindigkeiten bleiben, bevor die Endgeschwindigkeit erreicht wird, stets kleiner, als sie sich zu denselben Zeiten aus Gleichung (3) errechnen. Das quadratische Gesetz gilt demnach nicht für beschleunigte Bewegung, sondern der Widerstand ist im ganzen größer während der Zeit, in der Beschleunigung stattfindet, als er bei denselben Geschwindigkeiten bei stationärer Bewegung sein würde. Der zurückgelegte Weg ist kleiner als in diesem Fall.

2. Nach den Beobachtungen wächst v nicht, wie Gleichung (3) verlangt, dauernd mit t, sondern es nimmt zunächst zu bis zu einem Maximum, das kleiner als die Endgeschwindigkeit ist, geht darauf durch ein Minimum, um dann erst meist nach weiteren, aber geringeren Schwankungen der Endgeschwindigkeit asymptotisch zuzustreben. Diese Eigentümlichkeiten treten in gleicher Weise bei den Ballonen wie bei den Wachskugeln auf. Bei den großen Ballonen reichen die Beobachtungen infolge der räumlichen Verhältnisse, unter denen sie gemacht werden mußten, fast alle nur etwas über das erste Maximum hinaus. Einige konnten so weit verfolgt werden, daß auch das folgende Minimum mit erfaßt wurde. Die kleinen Ballone und die Kugeln lassen alle Maximum und Minimum erkennen bis auf die kleine Kugel II, deren Kurve nur einen

Knick aufweist, wo das Maximum zu vermuten wäre (vgl. Fig. 7). Die Kugeln mit kleineren Abtrieben haben auf einer längeren Strecke ihre Endgeschwindigkeit angenommen. Der Widerstand ergibt sich demnach nicht als eindeutige Funktion von v, sondern er nimmt je nach dem vorhergegangenen Verlauf der Bewegung verschiedene Werte bei derselben Geschwindigkeit an.

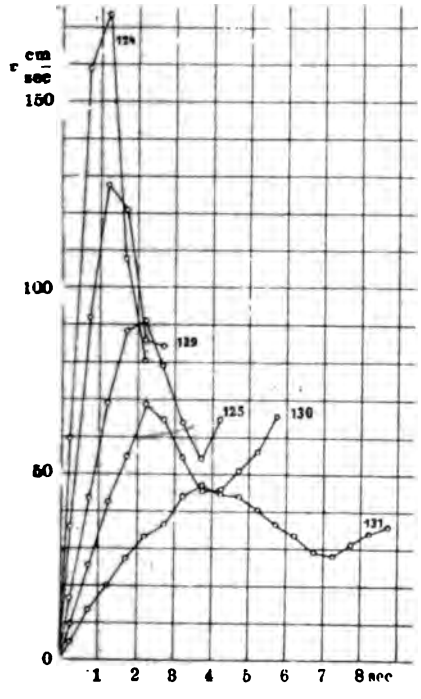


Fig. 4. Große Ballone.

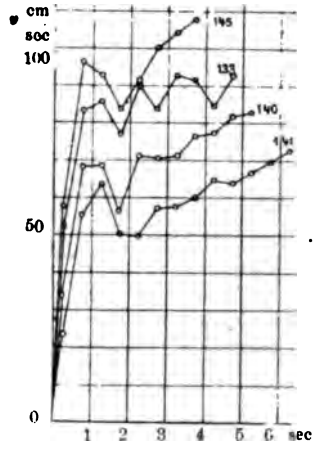


Fig. 5. Kleine Ballone.

In Figg. 4—7 sind die mit einer Anzahl von Ballonen, sowie die mit den Kugeln erhaltenen Kurven v (t) wiedergegeben. Bei den Kugeln ist dabei von mehreren jedesmal zur Verfügung stehenden Platten, d. h. Versuchen unter gleichen Bedingungen, eine ausgewählt worden, deren Ausmessung Geschwindigkeiten ergab, die etwa in der Mitte zwischen denen mit sämtlichen Platten gewonnenen Werten lagen.

Dabei war:

Ballon Nr.	Radius cm	Gesamtgewicht einschließlich Wasserstoff g	Auftrieb g
124	22,4	37,22	15,24
125	22,4	47,22	4,51
129	21,1	37,90	7,82
130	21,1	42,90	2,42
131	21,1	43,90	0,99
133	7,8	1,785	0,63
140	7,9	1,790	0,42
141	7,8	1,785	0,30
145	8,0	1,845	0,71

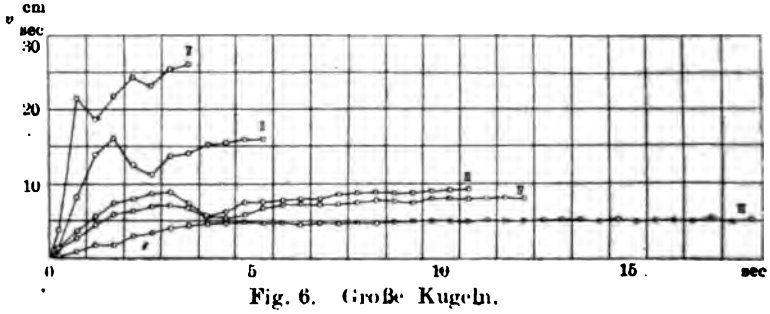


Fig. 6. Große Kugeln.

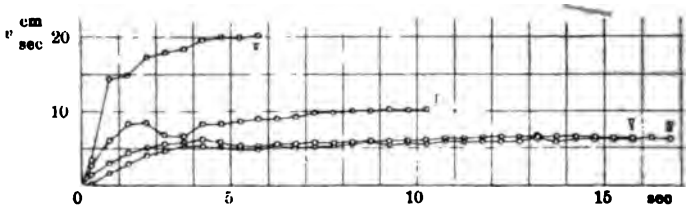


Fig. 7. Kleine Kugeln.

c) Transformation aller Beobachtungen auf eine Flüssigkeit und eine Körpergröße.

Vorerst ist es, um die an Ballonen und Kugeln verschiedenen Maßstabes und in verschiedenen Flüssigkeiten gemachten Beobachtungen miteinander vergleichen zu können, nötig, alle auf eine Größe und eine Flüssigkeit zu transformieren. Es werde hierzu die große Kugel IV (Radius 1,635 cm) und Wasser von 18° (innere Reibung $\mu = 0{,}01055$, Dichte $\varrho = 0{,}9986$, kinematische Zähigkeit $\nu = 0{,}01056$) genommen. Das Gesetz

über die Ähnlichkeit von Flüssigkeitsbewegungen verlangt, daß folgende Gleichungen erfüllt sein müssen[1]):

$$A = A_0 \frac{\mu^2 \varrho_0}{\mu_0^2 \varrho}, \quad v = v_0 \frac{l_0 \nu}{l \nu_0}, \quad t = t_0 \frac{\nu_0 l^2}{\nu l_0^2}, \tag{4}$$

wenn zu einer Bewegung in einer gewissen Flüssigkeit, bei einem gewissen Längenmaß (angedeutet durch den Index Null) die ihr ähnliche in einer anderen Flüssigkeit und bei einem anderen Längenmaß (anderer Körpergröße) gefunden werden soll. Sämtliche beobachteten Zeitgeschwindigkeitskurven wurden durch die Gleichungen (4) in neue Kurven transformiert, die die Bewegung eines kugelförmigen Körpers vom Radius 1,635 cm in Wasser von 18° wiedergeben, wenn auf ihn die sich aus den gemessenen durch die erste der Gleichungen (4) ergebenden Auf- bzw. Abtriebe wirken. Als Vergleichsmaß diente der Radius der Körper. Für μ und ϱ des Wassers wurden die in Kohlrauschs Lehrbuch der praktischen Physik für die verschiedenen Temperaturen angegebenen Werte eingesetzt. Die Temperatur bei den Ballonaufstiegen betrug stets wenig über oder unter 20°. Für die Luftdichte wurde ihr mittlerer Wert bei den Versuchen 0,0012 benutzt, für ihre innere Reibung das Mittel der im Tabellenwerk von Landolt-Börnstein für 20° angegebenen Werte, nämlich 0,000190. Wenn das Ähnlichkeitsgesetz richtig ist, müßten, falls zufällig in der Reihe der Beobachtungen zwei vorhanden wären, deren Kräfte (Auf- oder Abtriebe) nach der Transformation ganz oder nahezu übereinstimmten, auch die aus den unter ganz verschiedenen Umständen beobachteten Werten von v und t durch Transformation hervorgegangenen Kurven ganz oder nahezu übereinstimmen, im übrigen die Kurven sich nach den zu ihnen gehörigen transformierten Auftrieben ordnen. Das ist bei dem vorliegenden Beobachtungsmaterial durchweg der Fall. In Fig. 8 sind die aus den Kurven der Figg. 4—7 durch Transformation gewonnenen Kurven eingezeichnet. Nicht mit angeführt sind, um die Übersicht nicht zu gefährden, die Ballone 125 und 129, die in aus Fig. 4 leicht ersichtlicher Weise zwischen bzw. über den Kurven von 124 und 130 liegen, sowie große Kugel III und kleine Kugel V, deren Kurven sehr

1) Vgl. z. B. Cl. Schäfer, Einf. in die theor. Physik, Bd. I. S. 904. Leipzig 1914.

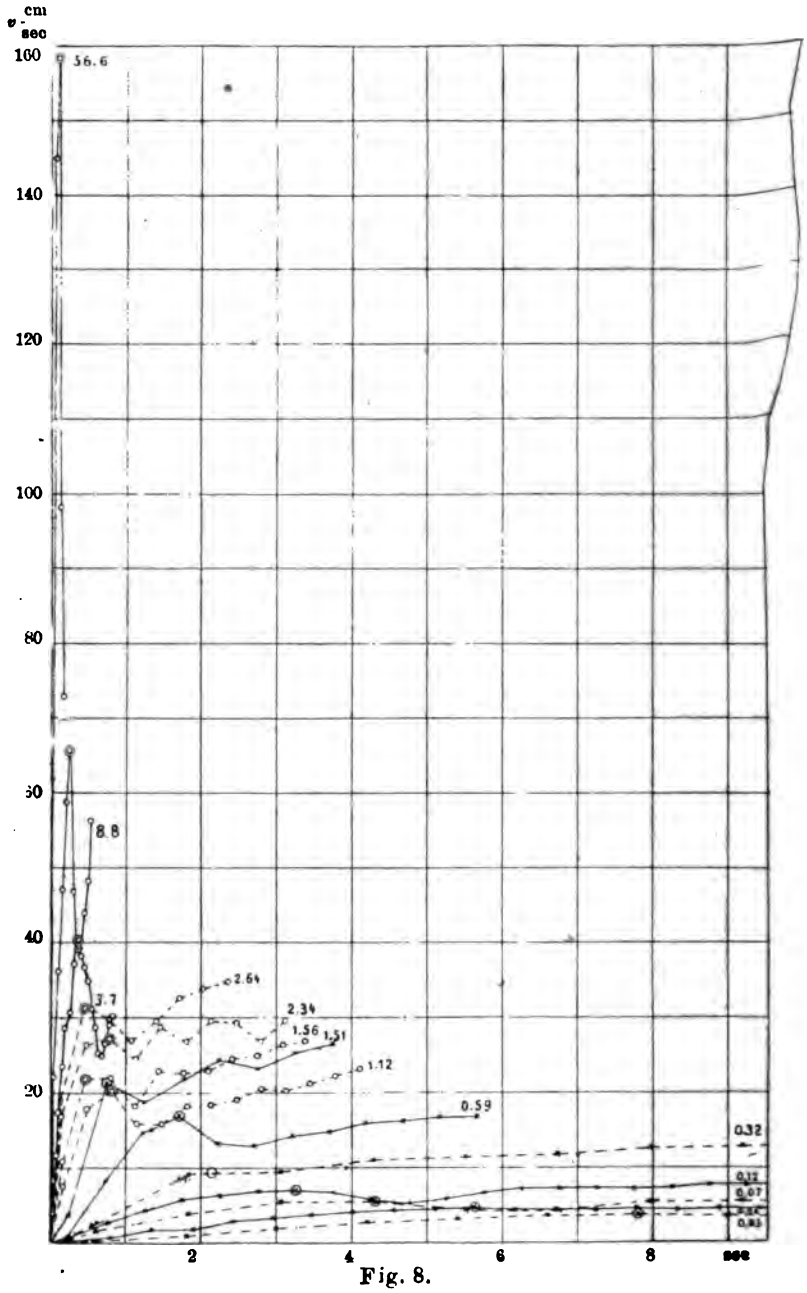

v cm/sec
160
140
120
100
80
60
40
20
56.6
8.8
3.7
2.64
2.34
1.56
1.51
1.12
0.59
0.32
0.12
0.07
0.03
2
4
6
8
sec

Fig. 8.

ie mit anderen Kurven derselben Kugelgröße zusammen-
gen. An jede Kurve in Fig. 8 ist der dazugehörige (trans-
mierte) Auftrieb angeschrieben. Um die Herkunft der
rven zu kennzeichnen, sind die zu den großen und kleinen
llonen gehörigen Geschwindigkeiten durch Kreise, die zu
n großen und kleinen Kugeln gehörigen durch Kreuze be-
chnet und die zu den großen Kugeln und großen Ballonen
hörigen Kurven ausgezogen, die zu den kleinen Kugeln und
inen Ballonen gehörigen gestrichelt gezeichnet worden.
ßerdem sind die Maxima von v noch besonders auf jeder
rve durch einen etwas größeren Kreis bezeichnet. Nach
hts hin setzen sich die zu Auftrieben von 0,32 g und
iner gehörigen Kurven weiter fort, als auf Fig. 8 zu erkennen
, in der Weise, wie aus Figg. 6 und 7 ersichtlich ist. Dabei
tspricht der letzten mit der kleinen Kugel IV beobachteten
it von 15,75 Sek. die Zeit 37,8 Sek. der transformierten
rve mit dem Auftrieb 0,03 g.

Fig. 8 zeigt, daß sich alle Kurven in eine nach ihren Auf-
ben geordnete Schar einfügen und daß für die wenig ver-
iedenen Auftriebe 1,51 und 1,56, die einerseits der großen
gel V, andererseits dem Ballon 140 entsprechen, die trans-
mierten Bewegungen nahezu gleich, die ursprünglichen dem-
h ähnlich verlaufen. Auch die Besonderheiten aller Kurven,
e Maxima und Minima, zeigen innerhalb der ganzen Schar
gesetzmäßiges Verhalten, wie weiter unten noch weiter
geführt wird. Der Umstand, daß sämtliche der unter den
schiedensten Bedingungen gemachten Beobachtungen sich
eine gleichmäßig geordnete Schar transformieren lassen, ist
e Bestätigung für die Richtigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes.

Von jetzt ab werden zur Untersuchung nur noch die
nsformierten Werte von v, t und A herangezogen.

Näherungsweise Darstellung der Beziehungen zwischen Geschwindigkeit und Zeit.

Es wurde nun zunächst versucht, den zeitlichen Verlauf der
schwindigkeit durch eine Gleichung darzustellen, die, ohne
die Schwankungen der Geschwindigkeit und deren Durch-
ng durch ein Maximum und Minimum vor Erreichung der
dgeschwindigkeit Rücksicht zu nehmen, geeignet wäre, in
ter Annäherung die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von

der Zeit und jedenfalls besser als Gleichung (3) zu beschreiben. Als brauchbar erwies sich die Gleichung:

$$v = v_E(1 - C^t), \tag{5}$$

wo v die Endgeschwindigkeit gleich

$$\sqrt{\frac{Ag}{\psi \varrho F}},$$

C eine Konstante kleiner als 1 bedeutet. Die Konstante C wurde für eine Reihe von Kurven der Schar durch graphische Ausgleichung ermittelt. In Fig. 9 sind nochmals einige beobachtete (transformierte) Zeit-Geschwindigkeitskurven aufgeführt und dazu die nach Gleichung (5) (ausgezogene Kurve) und nach Gleichung (3) (gestrichelte Kurve) errechnete Kurve gezeichnet. Die angeschriebenen Zahlen sind wieder die zu den einzelnen Kurven gehörigen Auftriebe.

Hieraus ist das auf S. 646 unter 1. Gesagte ersichtlich, daß die beobachteten Geschwindigkeiten, bevor die Bewegung stationär geworden ist, bevor also der Wert der Endgeschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{Ag}{\psi \varrho F}}$$

erreicht ist, alle unter der aus Gleichung (3) errechneten (gestrichelten) Kurve bleiben. Bei dieser ist für $t = 0$ die Neigung gegen die t-Achse, das ist die Anfangsbeschleunigung, gleich Ag/m. Die beobachtete Beschleunigung für $t = 0$ ist stets geringer als dieser Wert, da die wirksame Kraft, der Auftrieb, nicht nur die Körpermasse allein, sondern auch die umgebende Flüssigkeit beschleunigen muß. Es ist daher der Auftrieb, der gleich der Summe aus Produkten von Masse und Beschleunigung des Körpers und jedes umgebenden Flüssigkeitselementes ist, größer als das Produkt von Masse und Beschleunigung des Körpers allein, den allein der Messung zugänglichen Größen. Das heißt aber, es macht sich sofort bei Beginn der Bewegung auch für verschwindend kleine Geschwindigkeiten ein endlicher Widerstand bemerkbar, was in Gleichung (2) nicht zum Ausdruck kommt. Benutzt man Gleichung (5) als näherungsweise Beschreibung der Abhängigkeit zwischen Geschwindigkeit und Zeit, so ergibt sich bei Berechnung des Widerstandes $Wg = Ag - m\frac{dv}{dt}$:

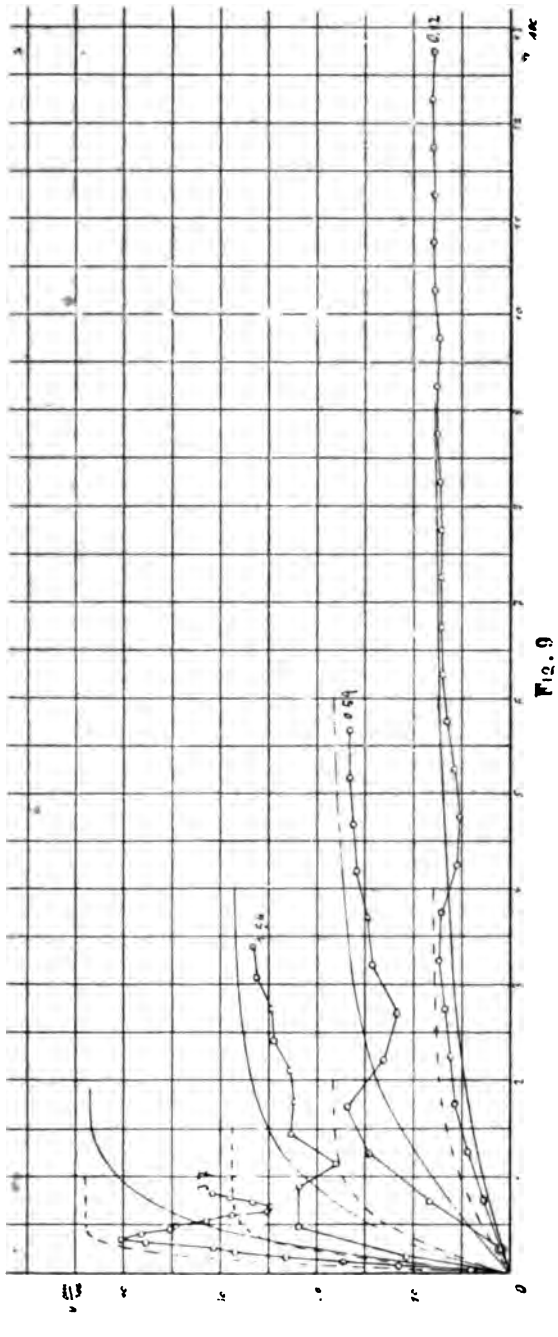


Fig. 9

$$C' = 1 - \frac{v}{v_E},$$

$$\frac{dv}{dt} = -v_E C' \ln C = (v - v_E) \ln C,$$

$$Wg = Ag - m(v - v_E \ln C),$$

$$= (Ag + m v_E \ln C) - m \ln C \cdot v,$$

$$Wg = a_1 + a_2 \cdot v,$$

wo a_1 und a_2 Konstante sind. Um den Unterschied dieses Widerstandes gegen den sich bei derselben Geschwindigkeit aber stationärer Bewegung ergebenden Widerstand zu finden, werde Wg in zwei Bestandteile zerlegt, einen nur von der Geschwindigkeit nach dem quadratischen Gesetz abhängigen $gW_v = \psi \varrho F v^2$ und einen von der Beschleunigung abhängigen gW_b. Für ihn folgt aus Gleichung (5):

$$Wg = gW_b + gW_v = gW_b + \psi \varrho F v^2 = Ag - m \frac{dv}{dt}$$

$$gW_b = Ag - m \frac{dv}{dt} - \psi \varrho F v^2$$

$$= Ag - m \frac{dv}{dt} - \psi \varrho F \left(\frac{dv}{dt} \frac{1}{\ln C} + v_E \right)^2$$

und, da $Ag = \psi \varrho F v_E^2$,

$$= -\left(m + \frac{2 \psi \varrho F v_E}{\ln C} \right) \frac{dv}{dt} - \frac{\psi \varrho F}{\ln^2 C} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2,$$

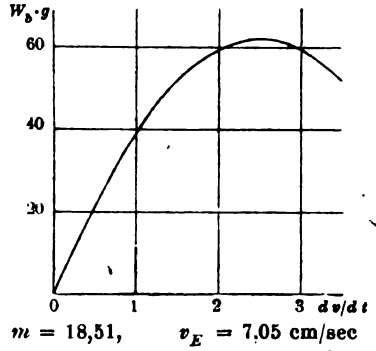
$$(6) \qquad Wg = \psi \varrho F v^2 + b_1 \frac{dv}{dt} + b_2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2.$$

Für

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

geht diese Gleichung in das gewöhnliche quadratische Widerstandsgesetz über, für $v = 0$ gibt sie einen von Null verschiedenen Wert von Wg. Ferner entspricht Gleichung (5) dadurch besser den wirklichen Verhältnissen als Gleichung (3), daß sie die Annäherung von v an die Endgeschwindigkeit richtiger wiedergibt als diese, wie Fig. 9 erkennen läßt. Fig. 10 zeigt die Abhängigkeit des Beschleunigungswiderstandes $W_b g$ von der Beschleunigung für den Auftrieb 0,12 g. Die größte Abweichung vom quadratischen Gesetz tritt also nicht bei Beginn der Bewegung, sondern erst später ein, wenn die Beschleunigung schon abgenommen hat.

Bei der Ausgleichung der Kurve $v(t)$ und der dabei erfolgten Ermittlung von C sind Willkürlichkeiten nicht zu vermeiden, die um so größer sind, je weiter die zuletzt beobachtete Geschwindigkeit noch hinter der Endgeschwindigkeit zurückbleibt. Im ungünstigsten Falle ergeben sich dabei Unsicherheiten von v von 10 Proz., sofern v etwa $^1/_3\, v$ ist. Für größere



$A = 0{,}12$ g, $m = 18{,}51$, $v_E = 7{,}05$ cm/sec $C = 0{,}65$,

$$g\, W_b = 49{,}54 \frac{dv}{dt} - 9{,}92 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Fig. 10.

und kleinere v sind die Unsicherheiten geringer. Trägt man die Werte C, die sich aus den verschiedenen Kurven der Schar in Fig. 8 ergeben haben, in Abhängigkeit vom Auftrieb auf und verbindet man die Punkte durch eine Kurve, so erhält man Fig. 11. Mit ihrer Hilfe ist es jetzt möglich, den Bewegungsverlauf für irgendeinen Auftrieb bei beliebigem Radius in beliebiger Flüssigkeit zu beschreiben. Dazu ermittelt man aus ihr für den aus dem vorgegebenen auf die Verhältnisse von Fig. 8 transformierten Auftrieb den Wert von C. Bezeichnet man alle Größen unter den gegebenen Verhältnissen, für die die Bewegung gesucht wird, mit dem Index Null, die von Fig. 8 ohne Index, so ist:

$$v = v_E(1 - C^t), \qquad v_0 = v_{E_0}(1 - C_0^{t'}),$$

$$\lg C = \frac{1}{t} \lg\left(1 - \frac{v}{v_E}\right), \quad \lg C_0 = \frac{1}{t_0} \lg\left(1 - \frac{v_0}{v_{E_0}}\right) = \frac{1}{t_0} \lg\left(1 - \frac{v}{v_E}\right),$$

$$\lg C_0 = \frac{t}{t_0} \lg C = \frac{v_0 l^2}{\nu l_0^2} \lg C$$

nach der 3. Gleichung (4). Da ferner

$$v_{K_0} = \sqrt{\frac{A_0\, g}{\psi\, \varrho_0\, F_0}}$$

ist, sind in der Gleichung

$$v_0 = v_{K_0}(1 - C_0^{t^2})$$

alle Konstanten bekannt und damit der Verlauf von v_0 angenähert ohne Berücksichtigung von Maximum und Minimum bestimmt.

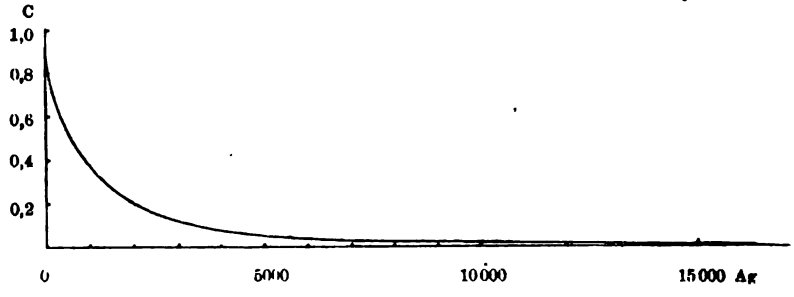


Fig. 11.

e) Strömungsverlauf um die Kugeln.

Der auffallendste Unterschied zwischen den ausgeglichenen und den beobachteten Kurven besteht darin, daß v in Wirklichkeit nicht dauernd mit t wächst, sondern große Schwankungen erleidet. Diese müssen, da äußere Einflüsse, die Geschwindigkeitsänderungen dieser Größenordnung hervorbringen konnten, vollkommen ausgeschlossen waren und die Erscheinung in ganz gleicher Weise sowohl in Luft wie in Wasser auftritt, unbedingt mit der Bewegung verknüpft sein. Einen gewissen Aufschluß gab die Beobachtung des Strömungsverlaufes um die Körper. Wurde eine Wachskugel in Fuchsinlösung getaucht und darauf vorsichtig unter den Haltemagneten gebracht, so konnten beim Fall der Kugel die Strömungslinien der der Kugel benachbarten Flüssigkeitsteile sichtbar gemacht werden. Es bildete sich kurz nach Beginn der Bewegung ein Wirbelring aus, der etwas kleineren als Kugeldurchmesser besaß, dessen Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung lag und der sich an die Kugel angeheftet mit ihr mitbewegte. Während der Bewegung vergrößerte sich seine Masse. Etwa zur Zeit des ersten Minimums von v trennte sich der Wirbelring von der Kugel und blieb gegen diese zurück. Die Strömung hinter

der Kugel wurde von da ab meist turbulent, zuweilen schien sich noch ein zweiter Wirbelring ausbilden zu wollen. Da die an der Kugel haftende Farbe bis dahin fast aufgezehrt war, ließ sich über den weiteren Strömungsverlauf kein klares Bild mehr gewinnen. Fig. 12 zeigt das nach einer leider nicht sehr deutlichen Photographie gezeichnete Strömungsbild. Die Trennung von Wirbel und Kugel erfolgte meist nicht gleichzeitig an allen Stellen des Ringes. Gewöhnlich haftete der Wirbel an einer Seite der Kugel länger. Nach dieser Seite hin erlitt dann bei der Trennung die Kugel eine Ablenkung und pendelte dann während des weiteren Falles um die Senkrechte durch den Ausgangspunkt hin und her. Ob Unregelmäßigkeiten der Kugeloberfläche die Ursache dieser bei einigen Kugeln, die zu Geschwindigkeitsmessungen nicht benutzt wurden, sehr starken, bei anderen nur geringen Störungen der geradlinigen Bewegung sind, bleibe dahingestellt. Wie die Strömung hinter dem Wirbel verlief, ob sie dort turbulent war oder nicht, ließ sich nicht erkennen, da durch die der Kugel anhaftende Farbe nur die in den Wirbel einbezogene Flüssigkeitsteile gefärbt wurden.

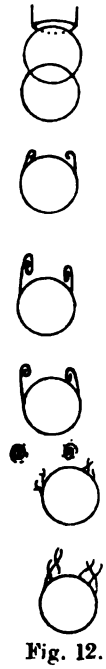


Fig. 12.

Die potentielle Energie der Kugel verwandelt sich während der Bewegung in kinetische Energie. Die Beobachtungen lehren, daß die Abnahme der potentiellen Energie, die ständig erfolgt, nicht gleich ist der Zunahme der kinetischen Energie der Kugel, daß diese sogar in gewissen Zeiten auch eine Abnahme erfährt. Die Differenz beider muß sich, wenn man von der durch Reibung erzeugten Wärme absieht, in der Flüssigkeit wiederfinden als deren kinetische Energie, die ständig zunimmt, besonders stark in den Zeiträumen, wo die Geschwindigkeit der Kugel abnimmt. Sie besteht aus der Energie des Wirbels und der Energie der übrigen Flüssigkeit. Zwischen Kugel, Wirbel und der übrigen Flüssigkeit findet ein beständiger Energieaustausch statt, über dessen Einzelheiten die Beobachtungen nichts aussagen, da nur die kinetische Energie der Kugel gemessen werden kann. Doch könnte die Entstehung des ersten Maximums und Minimums von v etwa

folgendermaßen gedacht werden. Es ist wahrscheinlich, daß die Zunahme der Energie der Flüssigkeit zum größten Teil zur Bildung des Wirbels verbraucht wird, und zwar einerseits zur Erzeugung seiner Rotationsgeschwindigkeit, andererseits um, wie der Augenschein lehrt, seine Masse zu vergrößern. Solange diese beiden Faktoren wirken (in welchem Verhältnis sie zueinander stehen, lassen die Beobachtungen nicht erkennen), wird der Kugel Energie entzogen, so daß ihre Geschwindigkeit immer weniger zu-, schließlich sogar abnimmt. Mit der Trennung des Wirbels von der Kugel hört dieser auf, ihr Energie zu entziehen. Nur der Energieverbrauch der übrigen Flüssigkeit ist jetzt von der Kugel zu decken, der so gering ist, daß deren Geschwindigkeit wieder zunehmen kann. Da bei der Trennung von Wirbel und Kugel sich das ganze Strömungsbild wesentlich ändert und mit ihm die Energieverteilung in der Flüssigkeit, ist es erklärlich, daß von diesem Augenblick an die Änderung der kinetischen Energie der Kugel in anderer Weise als vor diesem Zeitpunkte erfolgt und daß daher auch die Beziehung zwischen Widerstand und Geschwindigkeit und somit zwischen Geschwindigkeit und Zeit anders wird als vorher.

f) Die Maxima und Minima der Geschwindigkeit.

Das erste Maximum von v bei sämtlichen Kurven der Schar der Fig. 8 hängt in einfacher Weise vom Auftrieb ab. Seine Werte schmiegen sich der Kurve

(7) $$v_{max}^2 = 0{,}4 \times A\,g$$

an. Da ferner

$$v_E^2 = \frac{A\,g}{\psi\,\varrho\,F} = \frac{A\,g}{1{,}847}$$

ist, wird

$$v_{max}^2 = v_E^2 \times 0{,}4 \times 1{,}847 = v_E^2 \times 0{,}74,$$

$$\frac{v_{max}}{v_E} = 0{,}86$$

konstant für alle Kurven der Schar. Dazu sind sämtliche Beobachtungen herangezogen worden, außer den in Fig. 8 erwähnten noch 21 Aufstiege von großen und 4 von kleinen Ballonen.

Die zusammengehörigen Werte von v_{max} und t liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel mit der v-Achse und einer Parallelen zu t-Achse als Asymptoten. Die Ausgleichung sämtlicher Beobachtungen führt auf die Gleichung:

$$(v_{max} - 3{,}2)\, t_{max} = 13{,}15$$

und

$$t_{max} = \frac{13{,}15}{\sqrt{0.4 \times Ag} - 3{,}2}, \tag{8}$$

wenn für v_{max} die oben ermittelte Abhängigkeit vom Auftrieb eingesetzt wird. Die beiden Gleichungen (7) und (8) lassen jetzt das erste Geschwindigkeitsmaximum eines sich in Wasser von 18° unter einem beliebigen gegebenen Auftrieb bewegenden kugelförmigen Körpers vom Radius 1,635 cm berechnen, sowie die Zeit, zu der es eintritt. Für eine andere Flüssigkeit und andere Körpergröße ergeben sich hieraus die Werte von v_{max} und dem dazugehörigen t_{max} durch Anwendung der Gleichungen (4).

Ganz ähnlich verhalten sich die dem ersten Maximum folgenden Minima von v. Es ist:

$$v_{min}^2 = 0{,}36 \times Ag, \tag{7a}$$

$$\frac{v_{min}}{v_E} = 0{,}815,$$

$$(v_{min} - 2)\, t_{min} = 18,$$

$$t_{min} = \frac{18}{\sqrt{0{,}36 \times Ag} - 2}. \tag{8a}$$

Jedoch sind die Abweichungen von der Hyperbel hier größer als bei den Maximis. In Fig. 13 sind die beobachteten Maxima und Minima von v in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen und die beiden Hyperbeln eingezeichnet. Die mit den Ballonen und die mit den Kugeln gewonnenen Beobachtungen unterscheiden sich in keiner Weise. Sie gehorchen alle demselben Gesetz. Hierin kommt die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes exakter zum Ausdruck als oben. Daher erscheint es auch erlaubt, den Teil der Bewegung der Ballone, der nicht mehr beobachtet werden konnte, nach den an den Kugeln gewonnenen Einblicken zu ergänzen, z. B. zum Zwecke der Ausgleichung nach Gleichung (5), und die Geschwindigkeitsschwankungen der Bildung eines Wirbelringes zuzuschreiben.

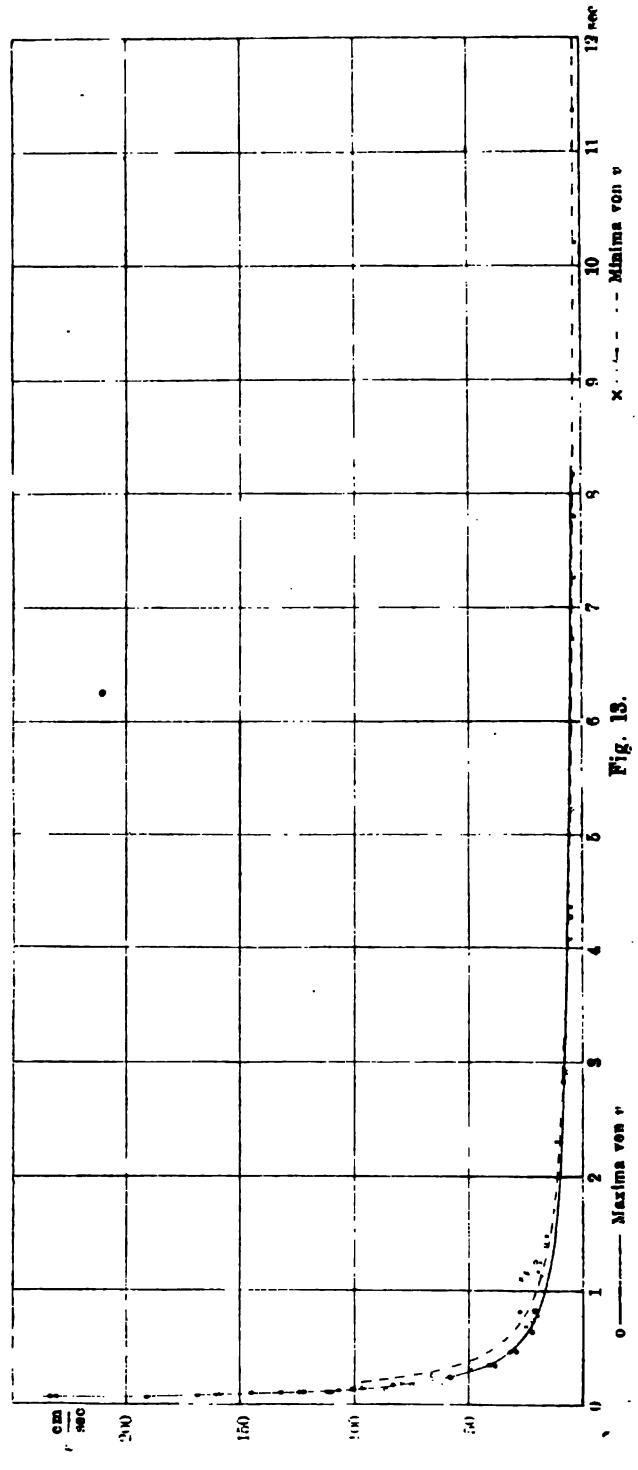

cm/sec
250
150
100
50
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12 sec
o —— Maxima von v
x - - - - Minima von v

Fig. 15.

Ob auch bei größeren als den hier verwendeten Auftrieben die Art der Bewegung erhalten bleibt, insbesondere der Durchgang von v durch ein Maximum und Minimum, müßten weitere Versuche entscheiden. Dafür scheint eine Beobachtung zu sprechen, die oft an Freiballonen gemacht worden ist.[1]) Bei ihnen macht sich kurz nach dem Loslassen eine starke Verminderung der Steiggeschwindigkeit bemerkbar, die fast immer der Anlaß zu einer Ballastabgabe ist. Es liegt nahe, auch hier als Ursache die Bildung eines Wirbelringes anzunehmen, nach dessen Trennung vom Ballon dieser dann wieder schneller steigen würde. Der ausgeworfene Ballast könnte daher, falls nicht gerade Hindernisse im Wege sind, gespart werden. Der Verlauf der Zeit-Geschwindigkeitskurve würde allerdings wahrscheinlich etwas anderes sein als eine Extrapolation der Schar in Fig. 8 ergeben würde, da bei den großen für einen Freiballon in Frage kommenden Reynoldschen Zahlen, sofern sie den Wert von etwa 50000 überschreiten, der Widerstandskoeffizient einen erheblich kleineren Wert annimmt, wie die Versuche von Prandtl und Eiffel ergeben haben.

Die Werte von v_{max} nähern sich mit Abnahme des Auftriebes nicht dem Wert Null, sondern 3,2 und die Minima dem Wert 2. Das erscheint darauf hinzuweisen, daß für Auftriebe die nach der Gleichung $Ag = \psi \varrho F v_E^2$ eine kleinere Endgeschwindigkeit ergeben als 3,2 cm/sec, der Strömungsverlauf anders ist als bei den hier gemachten Versuchen. Vielleicht kommt es dann nicht zur Ausbildung eines Wirbelringes und wahrscheinlich wird dann das quadratische Widerstandsgesetz durch ein anderes ersetzt. Der Umstand, daß sich v_{max} und v_{min} nicht demselben Grenzwert nähern bei abnehmendem Auftrieb, wird in Beobachtungsfehlern seinen Grund haben. Der Endgeschwindigkeit 3,2 cm/sec kommt eine Reynoldsche Zahl

$$\frac{r\,r}{\nu} = 310$$

zu. Nun gilt nach den Beobachtungen von Allen für $R \leqq 127$ die Beziehung: Widerstand proportional $v^{1,5}$, nach den hier gemachten Beobachtungen für $R \geqq 600$: Widerstand proportional v^2. Die Vermutung liegt also nahe, etwa bei der Zahl

1) Nach einer Mitteilung von Hrn. Geheimrat Wiener.

$R = 300$ den Übergang zwischen beiden Gesetzen zu suchen. Ausdehnung der Versuche in diesen Bereich könnte darüber Aufschluß geben. Diese würden auch zeigen, ob der Andeutung, daß für die kleinsten Reynoldschen Zahlen ($R = 600$), für die hier Geschwindigkeiten beobachtet wurden, ψ nicht mehr konstant ist, sondern mit Abnahme von R wächst (vgl. S. 644), wirkliche Tatsachen zugrunde liegen, oder ob sie nur Ungenauigkeiten in Messungen ihre Entstehung verdankt. Die Änderung, Zunahme von ψ mit Abnahme von R liegt in dem Sinne, wie sie eintreten müßte, wenn mit Abnahme von R der Widerstand proportional einer Potenz von v, die kleiner als 2 ist, würde.

Durch die Gleichungen (7), (8), (7a) und (8a) sind jetzt die Hauptpunkte der Bewegung genau festgelegt, da durch sie für jeden Auftrieb die Größe der Geschwindigkeit im ersten Maximum und Minimum von v, sowie die Zeiten, zu denen sie eintreten, bekannt sind. Ferner kennt man die Endgeschwindigkeit. Im einzelnen geben die Kurven der Schar in Fig. 8 Aufschluß über den Bewegungsverlauf. Sucht man diesen für beliebig gegebene Verhältnisse, so transformiert man den betreffenden Auftrieb auf die von Fig. 8, interpoliert mit ihm die dazugehörige Kurve aus den Kurven der Schar und transformiert diese Kurve auf die gegebenen Verhältnisse. Für Körper von anderer als kugelförmiger Gestalt müßte durch Versuche eine der auf Fig. 8 enthaltenen analoge Schar gewonnen werden.

Die hier gewonnenen Ergebnisse stehen zum Teil in Widerspruch zu denen der eingangs erwähnten Arbeit von Schiller und Döge. Für die stationäre Bewegung hatten sich dort Widerstandskoeffizienten von 0,29 und größer ergeben im Gegensatz zu 0,22 hier. Ferner war gefunden worden, daß die scheinbare Masse des Körpers während der beschleunigten Bewegung, von größeren Werten als die wirkliche Masse bis zu solchen kleiner als diese abnahm, d. h., daß der Widerstand im Anfang größer, dann kleiner war, als er nach dem quadratischen Gesetz sein sollte. Hier dagegen hat sich der Widerstand immer größer als $\psi \varrho F v^2$ gezeigt, solange Beschleunigung vorhanden war. Die Ergebnisse der ersten Arbeit dürften dadurch zustande gekommen sein, daß an Stelle der

wirklichen Endgeschwindigkeit die Geschwindigkeit im erste Maximum als diese angesehen wurde. Nach einer Mitteilung von Dr. Schiller wurde das Mittel aus den um den größten beobachteten Wert liegenden Geschwindigkeiten als Endgeschwindigkeit benutzt, da, vielleicht wegen nicht ausreichend exakten Arbeiten des dort benutzten einfacheren Verschlußmechanismus, der genaue Charakter der Kurven nicht wie in der vorliegenden Arbeit zutage trat. Tatsächlich haben auch hier die erst später angestellten Kugelversuche, die eine längere Verfolgung der Bewegung gestatteten, als bei den Ballonen in Luft möglich war, darüber Aufschluß gegeben, daß die Geschwindigkeit nach Erreichung des ersten Maximums nicht um dessen Wert herumpendelt, sondern sich schließlich einem erheblich höheren Grenzwert nähert. Aus der Benutzung einer kleineren Geschwindigkeit als die Endgeschwindigkeit ergibt sich aber aus der Gleichung

$$A g = \psi \varrho F r^2$$

ein zu großer Wert von ψ. Nach den hier gemachten Beobachtungen wird die aus diesen zu großen Werten von ψ berechnete Endgeschwindigkeit von kleineren als den dort benutzten Ballonen bereits erheblich überschritten, ein Beweis dafür, daß der hier nur aus den Endgeschwindigkeiten der Wachskugeln ermittelte Wert von ψ den wirklichen Verhältnissen wenigstens bei den kleinen Ballonen näher kommt als der von Schiller und Döge angegebene kleinste Wert. Es ist wahrscheinlich, daß dies auch für größere Ballone zutrifft, womit dann dort weiter gezogene Folgerungen über Abnahme der scheinbaren Masse bei Bewegung mit Beschleunigung hinfällig würden.

III. Zusammenfassung.

Die Beobachtung kugelförmiger frei fallender oder steigender Körper in ruhender Flüssigkeit ergab:

1. Widerstand nach Erreichung der Endgeschwindigkeit

$$W g = \psi \varrho F v^2.$$

$$\psi = 0{,}22 \quad \text{für} \quad 600 < R = \frac{v r}{\nu} < 1500.$$

2. Bestätigung des Ähnlichkeitsgesetzes für den ganzen Verlauf der Bewegung und infolgedessen Möglichkeit, unter

R verschiedenen Bedingungen (Flüssigkeit, Längenmaß) gemachte Beobachtungen auf die gleichen zu transformieren.

3. Vor Erreichung der Endgeschwindigkeit ist

$$Wg > \psi \varrho F v^2,$$

und zwar näherungsweise darstellbar durch:

$$Wg = \psi \varrho F v^2 + b_1 \frac{dv}{dt} + b_2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

die Geschwindigkeit durch: $v = v_E (1 - C^t)$.

4. Die Geschwindigkeit nimmt nicht ständig zu mit der Zeit, sondern nimmt vor Erreichung der Endgeschwindigkeit ein Maximum und ein Minimum an, um nach ihnen unter weiteren Schwankungen der Endgeschwindigkeit zuzustreben. Die zusammengehörigen Werte von Geschwindigkeit und Zeit in den Maximis und Minimis sind durch einfache Beziehungen miteinander verknüpft.

5. Maximum und Minimum der Geschwindigkeit hängen mit Bildung, Wachsen und Trennung eines Wirbelringes hinter dem Körper zusammen, der in einzelnen Fällen sichtbar gemacht werden konnte.

6. Die Beobachtungen ermöglichen die Vorhersage des Verlaufes der Bewegung eines unter konstanter Kraft stehenden Körpers von Kugelform, wenn Radius, Kraft und Flüssigkeit irgendwie gegeben sind, sofern die zu den sich aus dem quadratischen Widerstandsgesetz ergebenden Endgeschwindigkeiten gehörigen Reynoldschen Zahlen

$$R = \frac{r\,r}{\nu}$$

zwischen 600 und 50000 liegen.

Leipzig, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 23. September 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

1920. № 8.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 61.

1. *Über Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen und Träger. III: Wanderungsgeschwindigkeit kraftgetriebener Partikel in reibenden Medien;*

von P. Lenard,

mit Beiträgen von W. Weick u. Hans Ferd. Mayer.[1])

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

(Fortsetzung von Band 60, S. 380.)

Das Vorliegende behandelt zunächst in Abschnitt 6 die Wanderungsgeschwindigkeiten bei verschiedenen Fällen des Verhaltens der Mediumsmoleküle an der Partikeloberfläche, welche außer dem Falle der elastischen Reflexion noch eine Rolle spielen können — nämlich bei diffuser Reflexion und bei Aufnahme der Mediumsmoleküle in die Oberflächenschicht des Partikels und nachherigem Wiederabdampfen aus derselben —, nachdem die Möglichkeiten des Vorkommens dieser Fälle und ihre Eigentümlichkeiten bereits im Abschnitt 5 eingehend betrachtet worden sind.

Abschnitt 7 gibt eine Zusammenfassung der Gesamtkenntnis über die gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsformeln sowohl mit Rücksicht auf die historische Entwicklung, als auch auf die Anwendungen.

Abschnitt 8 untersucht die Gültigkeitsbereiche der gaskinetischen und der hydrodynamischen Wanderungsgeschwindigkeitsformeln und ihren gegenseitigen Anschluß.

Abschnitt 9 betrifft flüssige Medien und zeigt, in welcher Weise die gaskinetische Behandlung auf dieselben anwendbar ist und wo ihre Grenzen sowohl als die der hydrodynamischen Behandlung liegen. Dazu gehören auch Betrachtungen über den Reibungsvorgang in Flüssigkeiten und Versuche über die Reibung im elektrischen Felde. Die Resultate werden zu eingehender Untersuchung der elektrolytischen Ionen benutzt, was zur Ermittlung von deren Radien und Wassergehalt führt.

1) Die Beiträge betreffen die vorhergegangenen Abschnitte; vgl. diese.

Ionenkern und Wassermoleküle werden zum Teil nicht aneinander-, sondern ineinander gelagert gefunden unter Umständen (bei den kleinsten Ionen, z. B. *H*) mit starker Raumzusammenziehung des Ganzen.

Abschnitt 10 gibt eine übersichtliche Zusammenstellung von Wanderungsgeschwindigkeitsformeln aus den Teilen I—III dieser Untersuchungen.

Abschnitt 6. Wanderungsgeschwindigkeitsberechnung für die Stoßfälle *B*, *C* und *D*.

131. In derselben Weise wie a. a. O. 1900 für den Fall *A* der elastischen Stöße vollkommen glatter Kugeln geschehen, kann die Wanderungsgeschwindigkeit nach den Prinzipien der kinetischen Gastheorie auch für die anderen, im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Fälle berechnet werden, und auch die in den Abschnitten 1 und 2 behandelten Verfeinerungen können angebracht werden. Es kommt nur darauf an, den in Kraftrichtung genommenen mittleren *Geschwindigkeitsverlust des wandernden Partikels beim Zusammenstoße mit einem ruhenden Mediumsmolekül* für die Fälle *B*, *C* und *D* zu berechnen, woraus dann alles Weitere folgt. Der Übersichtlichkeit halber führen wir auch das Endresultat des Falles *A* hier mit auf.

Fall A: Elastische Reflexion bei vollkommen glatter Kugeloberfläche des Partikels.

132. Es ist [Gl. (21)]:

$$(52) \qquad \omega_A = \frac{3}{3+\mu}\,\Omega_\mu\,[\omega]_A = \frac{3(1+\mu)}{2\sqrt{\mu}\,(3+\mu)}\,\Omega_\mu\,\frac{K}{D\pi s^2 W}\,.$$

Fall B: Diffuse Reflexion.

133. Es sei u der augenblickliche Wert der Wanderungsgeschwindigkeit des Partikels unmittelbar vor einem Zusammenstoß mit einem ruhenden Mediumsmolekül.[1]) Um die nach dem Stoße übrigbleibende Geschwindigkeitskomponente des Partikels in Richtung von u, d. i. in Richtung der treibenden Kraft im Mittel über alle vorkommenden Arten des Zusammenstoßes zu berechnen, nehmen wir — was im Resultate dasselbe, aber in der Durchführung bequemer ist — das Partikel als ruhend und die Mediumsmoleküle mit der Geschwindigkeit u der Kraftrichtung entgegen bewegt an.

1) Vgl. die Durchführung der analogen Überlegung für den Fall *A*: 1900, S. 312.

134. Da der Fall *B* nicht zentrale Kräfte zwischen Partikeln und Mediumsmolekülen beim Zusammenstoß voraussetzt, so werden auch Rotationen des Partikels auftreten; da aber aus Symmetriegründen zu jedem Stoß auch ein in bezug auf die Rotation entgegengesetzt gleich wirkender Stoß vorkommt, wird die Rotationsenergie des Partikels nicht dauernd steigen, sondern nur um einen konstanten Mittelwert schwanken, so daß im Mittel über genügend viele Zusammenstöße ein Übergang von lebendiger Kraft der fortschreitenden Bewegung in Rotationsenergie nicht stattfindet. Man darf daher so rechnen, als griffen alle Stoßkräfte im Schwerpunkt des Partikels an.

135. Wir nennen *Auftreffpunkt* (A, bzw. A_1 in Fig. 2) denjenigen Punkt an der Oberfläche des im groben — aber nicht im einzelnen — kugelförmigen Partikels, an welchem die Berührung mit dem Molekül beim Zusammenstoß erfolgt, und *Auftreffwinkel* α den Winkel zwischen dem durch den Auftreffpunkt gezogenen Kugelradius und der Richtung von u. Infolge der im vorliegenden Falle *B* vorausgesetzten Rauhigkeit der Kugeloberfläche fällt der Kugelradius des Auftreffpunktes im allgemeinen nicht mit der Oberflächennormale dortselbst zusammen, und es ist daher der *Einfallswinkel* β des stoßenden Moleküls im allgemeinen verschieden vom Auftreffwinkel α[1]; es gehören zu sehr nahe demselben Auftreffwinkel α sehr verschiedene Einfallswinkel β.

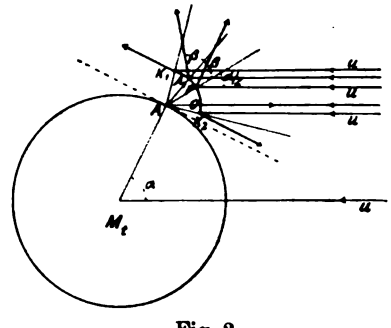


Fig. 2.

Zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeitsänderung beim Stoße (131) ist zuerst das Mittel zu nehmen über alle zu einem gegebenen Auftreffwinkel α gehörigen Einfallswinkel β und dann das Mittel über alle vorkommenden Auftreffwinkel α.

136. Bei einem Stoß mit dem Einfallswinkel β findet Umsetzung der normalen Komponente der Geschwindigkeit,

1) Im Falle A fallen β und α zusammen.

$u \cos \beta$, statt unter Gültigkeit des Prinzips des Schwerpunktes und der lebendigen Kraft, während die tangentiale Komponente unbeteiligt bleibt. Man hat daher (vgl. 134), wenn man das Partikel vor dem Stoße ruhend annimmt und das Molekül bewegt (vgl. 133), für die in Richtung der Normalen liegenden Geschwindigkeitskomponenten V des Partikels und v des Moleküls nach dem Stoß nach den genannten beiden Prinzipien die Gleichungen:

$$M u \cos \beta = M_t V + M v$$

und

$$M u^2 \cos^2 \beta = M_t V^2 + M v^2.$$

Danach ist mit Elimination von v:

$$V = \frac{2M}{M + M_t} u \cos \beta \tag{53}$$

und die in Richtung von u liegende Komponente davon:

$$V \cos \beta = \frac{2M}{M + M_t} u \cos^2 \beta.$$

War das Partikel mit der Geschwindigkeit u bewegt, das Molekül aber ruhend, so stellt $-V \cos \beta$ die Änderung von u durch den Stoß dar, soweit diese in Richtung von u fällt. Die gesuchte, in Richtung von u nach dem Stoß übrigbleibende Geschwindigkeit ist daher:

$$u' = u - V \cos \beta = \frac{u}{M + M_t} (M_t - M + 2M \sin^2 \beta). \tag{54}$$

137. Zu jedem Auftreffwinkel α gehören, dem Fall B entsprechend, Abgangsrichtungen der reflektierten Moleküle, die gleichförmig über eine Halbkugel mit dem Auftreffpunkt A als Mittelpunkt verteilt sind. Man erhält diese Verteilung unter Beibehaltung der Annahme der Gleichheit von Einfalls- und Reflexionswinkel, wenn man den Punkt A bzw. das ihm zugehörige Oberflächenelement des Partikels mit seinen molekularen oder auch gröberen Rauhigkeiten in seiner Wirkung ersetzt durch die vollkommen glatte Fläche $K_1 K_2$ (Fig. 2), welche Teil einer Kugel mit dem Mittelpunkt A ist und ihrer Begrenzung nach nahezu als Kalotte vom Öffnungswinkel $\pi/2$ beschrieben werden kann.[1] Der Winkelabstand des Ober-

1) Einfache geometrische Überlegung zeigt, daß die Fläche $K_1 K_2$ im allgemeinen nur angenähert die kreisförmige Begrenzung einer Kalotte hat; genau nur bei $\alpha = 0$; bei $\alpha = \pi/2$ geht die Begrenzung in zwei aufeinander senkrechte größte Kreise über. Die Durchstoßpunkte

flächenmittelpunktes P dieser Kalotte von dem der Richtung von u entgegengewandten Punkt O beträgt $\alpha/2$ und der Abstand des letzteren Punktes vom Rande K_2 der Kalotte beträgt $\pi/4 - \alpha/2$. Der jeweilige Einfallswinkel β ist durch den Winkelabstand des auf die Kalotte übertragenen Auftreffpunktes A' von O gegeben.

Zur Berechnung des Mittelwertes der nach einem Stoße übrigbleibenden Geschwindigkeitskomponente u' des Partikels kommt es nur auf den Mittelwert von $\sin^2\beta$ an, da alle übrigen Größen in Gl. (54) konstant sind, und es ist (nach 135) bei konstantem α über alle durch die Kalotte gegebenen Winkel β zu integrieren, dann über alle durch die in Bewegungsrichtung vorangehende Halbkugel gegebenen Winkel α, wobei die Gewichte der einzelnen Winkelwerte durch die Größen der Projektionen der betreffenden Oberflächenelemente der Kalotte bzw. Halbkugel auf eine zur Richtung von u senkrechte Ebene gegeben sind, entsprechend gleichförmiger räumlicher Dichte der getroffenen Moleküle. Die Integrationen sind in Näherungen ausführbar, und man findet als Mittelwert von $\sin^2\beta$ nahe $1/3$.[1])

138. Die nach dem Stoß im Mittel übrigbleibende Komponente in Richtung der Kraft ist damit:

$$u' = \frac{u}{M + M_t}\left(M_t - M + \tfrac{2}{3}M\right) = u\,\frac{M_t - \tfrac{1}{3}M}{M_t + M}, \tag{55}$$

der Begrenzung mit der durch den Mittelpunkt des Partikels gehenden Zeichnungsebene sind stets durch die beiden um $\pi/2$ voneinander abstehende Punkte K_1 K_2 gegeben. Wir nennen die Fläche K_1 K_2 im übrigen stets kurz Kalotte, nehmen aber bei den im folgenden auszuführenden Integrationen ihre Begrenzung tatsächlich nicht genau kreisförmig an, sondern lassen Abweichungen hiervon eintreten, welche den soeben beschriebenen in Annäherung gleichkommen, was allerdings auch zur Vereinfachung der Rechnung geschieht. Daß hierbei die Annahme B für die größeren α nicht genau, sondern nur angenähert gewahrt bleibt, ist nicht als wesentlicher Mangel unserer Rechnung zu betrachten, da die Annahme B der allseitig gleichmäßig verteilten diffusen Reflexion an sich schwerlich jemals exakt erfüllt zu denken ist, sondern vielmehr nur als Extremfall einer Abweichung von elastischer Reflexion an vollkommen glatter Kugel Interesse hat.

1) Dieselbe Mittelnahme durch Integration, jedoch nur über die Halbkugel allein, war für die Annahme A a. a. O. 1900 auszuführen gewesen (vgl. S. 312 dort); es ergab sich dort $^1/_2$ als Mittelwert von $\sin^2\beta$. Der Unterschied zwischen den Annahmen A und B ist also im Resultate nicht groß.

und der Faktor, welcher bei jedem Zusammenstoß des wandernden Partikels mit einem ruhenden Mediumsmolekül im Mittel über alle vorkommenden Stoßarten zum augenblicklichen Wert u der Wanderungsgeschwindigkeit hinzutritt, ist also:

$$\mu' = \frac{M_t - \frac{1}{3}M}{M_t + M} = \frac{4\mu - 1}{3}. \quad (56)$$ [1])

139. Hiermit leiten wir zunächst die Wanderungsgeschwindigkeit in derselben Weise ab wie a. a. O. 1900, nämlich unter Annahme einheitlicher Molekulargeschwindigkeit und Weglänge und ohne Berücksichtigung des Einflusses der Bewegung der Mediumsmoleküle auf die Stoßwirkung.

Es ist die Verminderung der augenblicklichen Wanderungsgeschwindigkeit u durch einen Zusammenstoß im Mittel $u - u\mu' = u(1 - \mu')$. Im Falle des stationären Zustandes, der bei fortdauernder Wirkung des Kraftfeldes statthat, wird diese Verminderung ausgeglichen durch die zwischen je zwei Zusammenstößen eintretende Beschleunigung b durch das Kraftfeld. Es ist daher:

$$b \cdot [\tau] = u(1 - \mu'), \quad (57)$$

wo $b = K/M_t$ und $[\tau] = L_t/W_t$. Die gesuchte beobachtbare Wanderungsgeschwindigkeit $[\omega]$ ist die mittlere Geschwindigkeit der gleichförmig beschleunigten Bewegung des Partikels zwischen zwei Zusammenstößen:

$$[\omega] = u\mu' + \tfrac{1}{2} b[\tau], \quad (58)$$

oder mit dem aus Gl. (57) folgenden Wert von u:

$$[\omega] = b[\tau] \cdot \frac{1 + \mu'}{2(1 - \mu')}. \quad (59)$$

Da (mit Benutzung der Gleichung für L_t, Teil II, S. 401):

$$\left\{ \begin{aligned} b \cdot [\tau] &= \frac{K}{M_t} \cdot \frac{L_t}{W_t} = \frac{K}{M_t} \cdot \frac{1}{N\pi s^2 \sqrt{W^2 + W_t^2}} \\ &= \frac{K}{M} \frac{1 - \mu}{\mu} \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{N\pi s^2 W} = \frac{K}{D\pi s^2 W} \frac{1 - \mu}{\sqrt{\mu}}, \end{aligned} \right. \quad (60)$$

so wird:

$$[\omega] = \frac{K}{D\pi s^2 W} \frac{1 - \mu}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1 + \mu'}{2(1 - \mu')}. \quad (61)$$

---

1) Im Falle A war dieser Faktor $\mu = \frac{M_t}{M_t + M}$ [Gl. (8a)].

Die Gl. (58) bis (61) sind ohne weiteres allgemein für alle Stoßfälle gültig, da wir bei der Ableitung die Größen μ und μ' gesondert gehalten haben. Man sieht auch, wie

$$\mu = M_t/(M_t + M)$$

nur durch Gl. (60) in Gl. (61) eintritt, wobei es nur die Rolle eines abkürzenden, für alle Fälle geltenden Umrechnungsfaktors von M_t auf M spielt, während μ' die bei Gl. (8a) und (56) definierte Bedeutung hat und daher je nach dem vorliegenden Stoßfalle verschiedene Werte annehmen muß. Für den Fall *A* (elastische Stöße bei glatt kugelförmigem Partikel) ist $\mu' = \mu$ [Gl. (8a)], und es geht dann Gl. (61) in Gl. (1) über. Für den hier zu behandelnden Fall *B* gilt für μ' die Gl. (56). Es wird damit:

$$[\omega]_B = \frac{1}{2}\,\frac{K}{D\pi s^2 W}\,\frac{1+2\mu}{2\sqrt{\mu}}\,. \quad [1] \tag{62}$$

Für große Partikel ($\mu = 1$) wird dies:

$$[\omega]_{B(\mu=1)} = \frac{3}{4}\,\frac{K}{D\pi s^2 W}\,. \tag{62a}$$

140. Zur Berücksichtigung der Ungleichheiten der molekularen Geschwindigkeiten und Weglängen und des Einflusses der Bewegung der Mediumsmoleküle auf die Stoßwirkung, welche in $[\omega]$ fehlt, ist die auf die Grundlagen zurückgehende Gl. (20) vorhanden, worin im Bruche $\mu/(1-\mu)$ im Fall *B* μ durch μ' zu ersetzen ist [Gl. (56)]. Der vollständige Ausdruck für die Wanderungsgeschwindigkeit in diesem Falle *B* wird so:

$$\omega_B = \frac{3}{3+\mu}\,b\left[\frac{1}{2}\,\frac{\bar{t}^2}{\bar{\tau}} + \frac{4\mu-1}{4(1-\mu)}\,\bar{\tau}\right], \tag{63}$$

oder mit Gl. (60):

$$\omega_B = \frac{3}{3+\mu}\,\frac{K}{D\pi s^2 W}\,\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left[(1-\mu)\,\frac{\bar{t}^2}{\bar{l}} + \frac{4\mu-1}{2}\,\bar{l}\right]. \tag{64}$$

1) Wählt man zur Einsetzung in Gl. (28) für $b[\tau]$ und μ' die ersten in den Gl. (60) bzw. (56) gegebenen Formen, so erhält man:

$$[\omega]_B = \frac{3}{4}\,K\,\frac{I_t}{W_t}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{3M_t}\right). \tag{62b}$$

Man sieht hier die beiden Massen M und M_t wieder unsymmetrisch auftreten, wie im Falle *A* [vgl. Gl. (1)], nur in anderer Weise. Vgl. dazu die Note zu 86.

Diese Form ist unmittelbar zur numerischen Berechnung brauchbar, da $\bar{l}$ und $\bar{l}^2$ bekannt sind; es ist $\bar{l} = \bar{\tau}_b/[\tau] = 1$, $\bar{l}^2 = \overline{\tau_b^2}/[\tau]^2 = 8/\pi$ [Gl. (51)].

Man kann — analog Gl. (52) — auch setzen:

$$\omega_B = \frac{3}{3+\mu}\,\Omega_\mu'\,[\omega]_B, \tag{65}$$

worin demnach:

$$\Omega_\mu' = \frac{2(1-\mu)}{2\mu+1}\,\frac{8}{\pi} + \frac{4\mu-1}{2\mu+1}\,^{1}) \tag{66}$$

analog Ω_μ im Falle A die Berücksichtigung der molekularen Ungleichheiten besorgt, während der Faktor $3/(3+\mu)$ wieder den Einfluß der ungeordneten Bewegung auf die Stoßverluste darstellt.

141. Da der Fall B hauptsächlich für große Partikel in Betracht kommt, so ist vor allem der Sonderfall $\mu = 1$ wichtig, welcher die einfache Form liefert[2]):

$$\omega_{B\,(\mu=1)} = \frac{9}{16}\,\frac{K}{D\,\pi\,s^2\,W}. \tag{67}$$

Im Vergleich zum Falle A ist also bei $\mu = 1$, und angenähert überhaupt bei nicht sehr kleinen Partikeln[3]):

$$\omega_B = \tfrac{3}{4}\,\omega_A. \tag{68}$$

Fall C: Aufnahme der auftreffenden Mediumsmoleküle in die Partikeloberfläche und späterer Wiederaustritt bei rotierendem oder gut wärmedurchlässigem Partikel.

142. Es kommt hier wieder nur auf die Neuberechnung der nach einem Zusammenstoß des Partikels mit einem ruhenden Mediumsmolekül im Mittel übrigbleibenden Geschwindigkeitskomponente an. Dabei dürfen alle Stoßkräfte durch den Schwerpunkt des Partikels gerichtet angenommen werden, da — wie bereits beim Falle B auseinandergesetzt — kein dauernd einseitig gerichteter Übergang von lebendiger Kraft der fort-

1) Man kann Ω_μ' auch aus der Gleichung für Ω_μ erhalten [Gl. (8)], wenn man dort μ durch μ' ersetzt.

2) Es ist $\Omega_1' = 1$; $\Omega'_{0,9} = 1{,}11$.

3) Es ist für den Fall B immer zu berücksichtigen, daß die Herleitung des für ihn charakteristischen Faktors $^3/_4$ nur durch angenäherte (wohl nur die erste Zahlenstelle verbürgende) Integrationen erfolgte, andererseits aber auch, daß genaue Verwirklichung dieses Falles der ganz gleichförmig diffusen Reflexion wohl niemals zu erwarten ist.

schreitenden Bewegung in die der Rotation bei den nicht zentralen Stößen stattfindet

Ist daher — mit derselben Bezeichnung wie oben im Fall *B* — u der augenblickliche Wert der Wanderungsgeschwindigkeit unmittelbar vor dem Stoße, u' derselbe nach dem Stoße, so gilt nach dem Schwerpunktsprinzip:

$$u M_t = u' M_t + u' M,$$

da Partikel und Molekül nach dem Stoße gemeinsame Geschwindigkeit haben, woraus:

$$u' = u \frac{M_t}{M_t + M}.$$

Da dies Resultat unabhängig ist vom Auftreffwinkel, so gilt es auch bereits als Mittelwert über alle vorkommenden Arten des Zusammenstoßes, und da dieser Mittelwert identisch ist mit dem für den Fall *A* geltenden entsprechenden Wert, $u' = u\mu$ [Gl. (8a)], so fällt auch der Wert der Wanderungsgeschwindigkeit identisch aus. Es ist also:

(69) $$\omega_C = \omega_A.$$

Fall D: Senkrechtes Abgehen der Moleküle bei nichtrotierendem Partikel.

143. Die bei der Aufnahme des Mediumsmoleküls in das Partikel auftretende Geschwindigkeitsänderung des letzteren ist hier dieselbe wie im vorigen Falle, nämlich von u auf $u' = \mu u$; jedoch kommt nun außerdem — wie im vorigen Abschnitt unter *D* überlegt — auch beim Wiederabgehen des Moleküls vom Partikel noch eine wirksame Geschwindigkeitsänderung hinzu, wobei wir annehmen, daß die bei der Aufnahme verlorene lebendige Kraft beim Abgehen vollständig wieder ersetzt wird (vgl. 127). Es sind die lebendigen Kräfte:

Des Partikels vor der Aufnahme des Moleküls $\frac{M_t u^2}{2}$,

nachher $\frac{M_t \mu^2 u^2}{2}$,

des Moleküls vor der Aufnahme ins Partikel 0,

nachher $\frac{M \mu^2 u^2}{2}$,

insgesamt also vor der Aufnahme $\frac{M_t u^2}{2}$,

nachher $\frac{(M_t + M)\mu^2 u^2}{2} = \frac{M_t \mu u^2}{2}$.

Der Verlust an lebendiger Kraft bei der Aufnahme ist also:

$$\frac{M_t u^2}{2}(1-\mu),$$

und diesem Verlust soll die Zunahme beim Abgehen gleich sein. Um letztere zu berechnen, brauchen nur Geschwindigkeiten relativ zum Schwerpunkt der Gesamtmasse $M_t + M$ betrachtet zu werden. Diese Geschwindigkeiten sind vor dem Abgehen Null, nachher seien sie V beim Partikel und v beim Molekül, beide zentral und vom Gesamtschwerpunkt weg gerichtet. Die Zunahme der lebendigen Kraft ist also:

$$\frac{M_t V^2}{2} + \frac{M v^2}{2},$$

wonach die gestellte Bedingung für V und v ist:

(70) $$M_t V^2 + M v^2 = M_t u^2 (1-\mu).$$

Außerdem muß für das Abgehen des Moleküls das Schwerpunktsprinzip gelten:

(71) $$M_t V + M v = 0.$$

Aus (70) und (71) findet man:

$$V = u(1-\mu) \text{ und } v = u\mu.$$

Es erhält also das Partikel beim Abgehen des Moleküls den Geschwindigkeitszuwachs $u(1-\mu)$ in Richtung seines Radius, wovon beim Auftreffwinkel α die Komponente in Richtung von u, d. i. in Wanderungsrichtung, $u(1-\mu)\cos\alpha$ ist. Dieser Zuwachs ist der ursprünglichen Geschwindigkeit u, welche zur Aufnahme des ruhenden Moleküls geführt hat, entgegen gerichtet. Es wird also die in Wanderungsrichtung genommene Geschwindigkeit, welche nach der Aufnahme des Moleküls μu ist, nach dem Wiederabgehen des Moleküls $\mu u - u(1-\mu)\cos\alpha$ sein.

144. Hiervon ist noch das Mittel über alle vorkommenden Auftreffwinkel α, je nach ihrer Häufigkeit, zu nehmen. Dabei kommt es, wie man sieht, nur auf den Mittelwert von $\cos\alpha$ an, und dieser ergibt sich als Resultat einer einfachen Integration zu $\frac{2}{3}$. Es ist also die gesamte Geschwindigkeitsänderung des Partikels in Kraftrichtung im Mittel über alle vorkommenden Arten des Zusammenstoßes mit einem ruhenden Molekül — dessen Wiederabgehen einbegriffen — im Falle D

$$\text{von } u \text{ auf } \mu u - \frac{2}{3}(1-\mu)u = u \cdot \frac{5\mu - 2}{3},$$

und der für diesen Fall charakteristische, diese Änderung bestimmende Faktor ist also:

$$\mu'' = \frac{5\mu - 2}{3} \cdot \tag{72}$$

145. Mittels dieses Faktors erhält man zunächst die Wanderungsgeschwindigkeit ohne Berücksichtigung der molekularen Ungleichheiten und des Einflusses der molekularen Bewegung auf die Stoßverluste, indem man ihn in Gl. (61) an Stelle des für den dortigen Fall geltenden Faktors μ' setzt:

$$[\omega]_D = \frac{1}{2} \frac{K}{D \pi s^2 W} \frac{1 + 5\mu}{5\sqrt{\mu}} \cdot \tag{73}$$

146. Ebenso ergibt sich mittels μ'' der vollständige Ausdruck für die Wanderungsgeschwindigkeit analog Gl. (63) und (64):

$$\begin{cases} \omega_D = \frac{3}{3+\mu} b \left[\frac{1}{2} \frac{\overline{\tau^2}}{\bar{\tau}} + \frac{\mu''}{1-\mu''} \tau \right] \\ \quad = \frac{3}{3+\mu} \frac{K}{D \pi s^2 W} \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \left[(1-\mu) \frac{\overline{\tau^2}}{\bar{\tau}} + \frac{10\mu - 4}{5} \bar{\tau} \right], \end{cases} \tag{74}$$

was auch geschrieben werden kann:

$$\omega_D = \frac{3}{3+\mu} \Omega''_\mu [\omega]_D , \tag{75}$$

wenn man — mit Einführung der Werte $\bar{\tau} = \bar{\tau}_b / [\tau] = 1$ und $\overline{\tau^2} = \overline{\tau_b^2} / [\tau]^2 = 8/\pi$ [Gl. (51)] — setzt:

$$\Omega''_\mu = \frac{5(1-\mu)}{5\mu + 1} \frac{8}{\pi} + \frac{10\mu - 4}{5\mu + 1} \cdot \text{ [1]} \tag{76}$$

147. Insofern der Fall D nur für große Partikel in Betracht kommt (vgl. Abschn. 5), für welche μ sehr nahe 1 ist, ist Hauptresultat in diesem Falle die Sondergleichung [2])

$$\omega_{D\,(\mu=1)} = \frac{9}{20} \frac{K}{D \pi s^2 W} , \tag{77}$$

oder auch

$$\omega_D = \frac{3}{5} \omega_A \cdot \tag{78}$$

Abschnitt 7. Zusammenfassendes aus den Abschnitten 1—6 über die gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsformeln.

148. Wir haben im 5. Abschnitt unter A, B, C, D vier verschiedene Fälle für die Wechselwirkung zwischen wandern-

1) Ω''_μ folgt auch aus der Gleichung für Ω_μ [Gl. (8)], wenn man μ durch μ'' ersetzt.

2) Es ist $\Omega_1'' = 1$, $\Omega_{0,9}'' = 1{,}14$.

dem Partikel und Mediummolekülen betrachtet und haben im 6. Abschnitt die zugehörigen Wanderungsgeschwindigkeitsformeln sowohl unter vereinfachenden Bedingungen (Werte $[\omega]$) als auch mit Berücksichtigung sämtlicher ersichtlich mitwirkenden Umstände entwickelt (Werte ω). Dabei haben sich keine sehr großen Unterschiede in den Resultaten ergeben; dieselben stehen äußerstenfalls nur im Verhältnis 3:5 voneinander ab. Der am extremsten liegende Fall D betrifft aber nur sehr große Partikel und liegt schon deshalb fast außerhalb des Gültigkeitsbereichs der gaskinetischen Formeln. Im übrigen stimmen die Fälle A und C vollkommen miteinander überein und B weicht nur im Verhältnis 4:3 davon ab. Da die betrachteten Fälle alle bisher durch die Erfahrung angezeigten Möglichkeiten der genannten Wechselwirkung zwischen sich nehmen, so kann hiernach behauptet werden, daß unsere gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsformeln für alle Fälle innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches (vgl. Abschn. 8) ausreichen, um die Wanderungsgeschwindigkeit in genügend brauchbarer Annäherung auch dann zu berechnen, wenn die Oberflächenbeschaffenheit des Partikels nicht genau bekannt ist. Ebenso wird man auch umgekehrt aus beobachteten Wanderungsgeschwindigkeiten bei bekannter Kraft mit genügender Sicherheit den Partikelradius ($R = s - r$) berechnen können.

Dabei ist zu beachten, daß die Masse des Partikels keine wesentliche Rolle spielt, daß sie also auch nicht genau bekannt zu sein braucht, sobald es nur sicher steht, daß sie nicht etwa kleiner als Mediumsmolekülmasse ist, daß also nicht z. B. freie Elektronen vorliegen. Ist letzteres erst ausgeschlossen[1]), so kann in sukzessiver Annäherung aus vorläufig (mit roh geschätzter Masse) berechnetem Partikelradius bei genügender Kenntnis der materiellen Beschaffenheit des Partikels die Masse

1) Die Unterscheidung zwischen freien Elektronen und materiellen Partikeln irgendwelcher Größe ist durch probeweise Berechnung des Partikelradius mittels angenommener Werte von μ immer leicht zu treffen, sobald nur etwa intermittierend freie Elektronen ausgeschlossen sind. Liegt der letztere Fall vor, so muß die Natur der mitwirkenden Elektrizitätsträger bekannt sein, um dann die in Teil I und II entwickelten Formeln zu benutzen, welche mit besonderer Berücksichtigung der wechselnden Zustände entwickelt sind. (Vgl. auch die Zusammenstellung, Abschn. 10.)

desselben so weit genau ermittelt werden, daß damit der richtige Wert des Radius berechenbar wird.[1])

149. Die angenäherte Unabhängigkeit der Wanderungsgeschwindigkeit von der Partikelmasse — falls diese nur nicht viel kleiner ist als die Molekülmasse des Mediums - war übrigens schon aus meiner ersten Veröffentlichung über den Gegenstand klar hervorgegangen (a. a. O. 1900; vgl. die Fälle ω_a, ω_b, ω_c dort, S. 313, 314), und dieses Resultat ist dann auch öfter hervorgehoben worden als im Gegensatz stehend zu den Resultaten anderer Autoren, die später Wanderungsgeschwindigkeitsformeln von nur so grober Annäherung in Gebrauch gesetzt haben — Langevin, J. J. Thomson[2]) —, daß nicht einmal dieser Hauptumstand der genannten Massenabhängigkeit erkennbar wurde, sondern im Gegenteil die Wanderungsgeschwindigkeit ebensosehr von der Masse als vom Radius des Partikels abhängig erschien. Beispiele der Fehlschlüsse und Widersprüche, zu welchen die Anwendung dieser — in solcher Beziehung am treffendsten als falsch zu bezeichnenden — Formeln geführt haben, habe ich bereits angegeben.[3])

1) Das Resultat wird in diesem Falle unbekannter Partikelmasse um so genauer, je größer das Partikel nach Masse und Radius ist. Bei Partikeln, die nur ebenso groß sind als die Mediumsmoleküle oder kleiner, wird die Genauigkeit um so mangelhafter, je weniger ein Zusammenhang zwischen Masse und Radius des Partikels sichersteht.

2) Es sind hier die ursprünglich von diesen Autoren (1903 bis 1906) angegebenen Formeln gemeint, die große Verbreitung gefunden haben und noch heute in Lehr- und Handbüchern eine Rolle spielen. Erst noch später haben auch diese Autoren ihre Gleichungen auf bessere Massenberücksichtigung eingerichtet (J. J. Thomson 1909, Langevin 1905; siehe die Zitate in den Noten zu Gl. [80] und [81]). Daß die dabei von Herrn Langevin gleichzeitig vorgenommene Einführung von Fernkräften nicht als Fortschritt erscheinen kann, wurde bereits oben auseinandergesetzt (Abschn. 5).

3) Vgl. Teil I, S. 395, Fußnote 2 u. S. 402, Fußnote 2, auch bereits A. Becker, Ann. d. Phys. 36, S. 218, Fußnote. Vom Gebrauch dieser Formeln kommt auch offenbar der heute noch sehr übliche, unter Umständen irreführende Ausdruck „schwere“ Träger („Ionen“), wo man langsam wandernde, also *große* Träger meint und in Wirklichkeit auch nur über die Größe, nicht über die Masse direkt orientiert ist. Wirklich schwere Träger, die kleinen Radius haben, wie z. B. *Cs*- oder *RaA*-Atome, würden nach dieser Namengebung als „leicht“ zu bezeichnen sein, da sie schnell wandern, eine Bezeichnung, die so zutreffend ist, wie jene Formeln.

150. Alle unsere Resultate sind — mittels ausdrücklich angegebener mechanischer Prinzipien — *aus den Grundvorstellungen* der kinetischen Gastheorie hergeleitet; sie sind deshalb — wenn nicht Fehler in der Herleitung gefunden werden — ohne weiteres als ebenso zutreffend anzusehen, als diese Grundvorstellungen und Prinzipien zutreffend sind. Ein anderer, neuerdings bevorzugter Weg der Herleitung gaskinetischer Wanderungsgeschwindigkeitsformeln beruht auf der *Anknüpfung an die bereits vorhandenen Diffusionsformeln* der kinetischen Gastheorie. Die Möglichkeit dieser Anknüpfung lag bereits bei C. Maxwells Behandlungsweise der Diffusion unmittelbar vor[1]), und es ist auch ohne weiteres leicht einzusehen, daß ein Zusammenhang bestehen muß zwischen der Geschwindigkeit der Ausbreitung einer fremden Molekülsorte in einem Gase vermöge ihres Partialdruckgefälles einerseits (Diffusion) und vermöge einer äußeren Kraft andererseits (Wanderung). Die Herstellung des Zusammenhangs ist aber, wenn man exakte Durchführung verlangt, nicht so einfach, als angenommen worden ist. Es wird bei Anwendung der Gleichung

$$\omega = \Delta N \frac{K}{P}, \tag{79}$$

auf welche man sich dabei stützt (Δ = Diffusionskoeffizient der Partikel im Medium, P = Druck des gasförmigen Mediums), übersehen, daß beim Wanderungsgeschwindigkeitsproblem beschleunigte Bewegung des Partikels längs seiner freien Wege vorliegt, während beim Diffusionsproblem die Bewegung gleichförmig ist.[2])

Unter den neueren Autoren, die diesen Weg über die Diffusion verfolgt haben, findet man Herrn Townsend[3]) hervorgehoben mit dem Anschein besonders exakter Gültigkeit seiner

1) C. Maxwell, Phil. Mag. (4) **19**. S. 19. 1860; Coll. Papers **1**. S. 392. — Selbstverständlich lag das Wanderungsgeschwindigkeitsproblem an sich zur damaligen Zeit noch außer Gesichtsfeld; es wird daher auch bei Maxwell nicht behandelt, sondern es werden nur die Kräfte betrachtet, die durcheinander diffundierende Gasmassen aufeinander ausüben.

2) Vgl. hierüber Herrn H. F. Mayers in diesen Annalen nachfolgende Arbeit, betreffend Herrn Langevins ebenfalls von der Diffusionstheorie ausgehende Behandlung des Wanderungsgeschwindigkeitproblems.

3) S. P. Townsend, Proc. Roy. Soc. **86**. S. 197. 1912.

Resultate.[1]) Es ist hierzu — ganz abgesehen von der soeben hervorgehobenen feineren Schwierigkeit — das Folgende zu bemerken: 1. Herr Townsend leitet die Wanderungsgeschwindigkeit zuerst ohne Berücksichtigung der aufhäufenden Wirkung der Trägheit des Partikels ab und sucht diese Vernachlässigung dann durch Hinzufügung eines Zusatzgliedes zur freien Weglänge des Partikels auszugleichen. Sein Resultat ohne Berücksichtigung der Trägheit ist identisch mit der älteren Formel von Herrn Langevin (1903), ist also für $\mu = 1$ (größere Partikel) ebenso grundfalsch als diese Formel[2]): für andere Werte von μ ist sie aber ebenfalls nicht voll zutreffend, z. B. für $\mu = 0$ (freie Elektronen) im Verhältnis 1,273 : 1 zu klein, da nur die Ungleichheiten der Weglängen, nicht die der Geschwindigkeiten berücksichtigt werden. 2. Durch Berücksichtigung der Trägheit in der angegebenen Weise gelangt Herr Townsend zu einer Formel, welche zwar nicht für $\mu = 1$, jedoch für $\mu = 0$ (freie Elektronen) grundfalsche Resultate gibt (im Verhältnis 1 : 0 zu klein). Angenähert richtig sind die Resultate für $\mu = \frac{1}{2}$ und $\mu = 1$ (molekulare und größere Partikel), jedoch die Annäherung ist nicht besser als die meiner 12 Jahre älteren Formel (a. a. O. 1900), die aber außerdem auch bei $\mu = 0$ brauchbar ist (vgl. die folgende Zusammenstellung). Ein Fortschritt gegenüber bereits Vorhandenem ist auch sonst in Herrn Townsends Arbeit nicht zu erkennen; auch sein Ergebnis, daß die Berücksichtigung der Weglängenungleichheiten einen Faktor 2 zur Wanderungsgeschwindigkeit liefere, findet sich bereits in Herrn Langevins soeben erwähnter Arbeit von 1903, ist aber keineswegs allgemein gültig, sondern darf nur auf freie Elektronen ($\mu = 0$) bezogen werden.[3])

151. Die folgende Zusammenstellung (Tab. III) gibt eine Vergleichung der Wanderungsgeschwindigkeitsformeln verschiedener Autoren und zeigt, in welchem Maße die im vorliegenden kenntlich gemachten Mängel der betreffenden Ableitungen[4])

1) Vgl. E. Marx, „Handbuch der Radiologie" Bd. IV, S. 719. 1917.

2) Vgl. die Fußnote zur Gl. (81).

3) Denn es ist der von uns entwickelte Faktor Ω_μ, welcher hierüber Auskunft gibt, von μ abhängig (vgl. Abschn. 1). Für $\mu = 0$ ist $\Omega_\mu = 8/\pi = 2{\cdot}546$ (nicht 2, weil in Ω_μ auch die Berücksichtigung der Geschwindigkeitsungleichheiten einbegriffen ist; für $\mu = 1$ ist $\Omega_\mu = 1$).

4) Zu Langevin vgl. auch besonders Herr H. F. Mayers in diesen Annalen nachfolgende Arbeit.

Tabelle III.

Faktoren zur Richtigstellung der Wanderungsgeschwindigkeitsformeln.

Formel von:		Faktoren			
		Allgemein: ($\mu = \frac{M_t}{M_t + M}$ beliebig)	Sonderfälle: $\mu = 0$ (Elektronen)	$\mu = 1/2$ (Molekülе)	$\mu = 1$ (große Partikel)
Lenard 1900	$\frac{\omega}{[\omega]} =$	$\frac{3\,\Omega_\mu}{3+\mu}$	2,546	1,30	$^3/_4$
J. J. Thomson 1906 (= Drude 1900)	$\frac{\omega}{\omega_{Th}} =$	$\frac{3\,\Omega_\mu}{3+\mu}\,\frac{1+\mu}{1-\mu}$	2,546	3,9	∞
Langevin 1905 (mit Fortlassung der Fernkräfte)	$\frac{\omega}{\omega_{Lv}} =$	$\frac{2\,\Omega_\mu}{3+\mu}(1+u)$	1,69	1,8	1
Townsend 1912	$\frac{\omega}{\omega_{Td}} =$	$\frac{3\,\Omega_\mu}{3+\mu}\,\frac{1+\mu}{2\mu}$	∞	1,67	$^3/_4$

in den Endresultaten zum Vorschein kommen. Es wird in allen verglichenen Formeln der Fall vollkommen elastischen Stoßes glatt kugelförmiger Massen (Fall *A*) vorausgesetzt. Besonders berücksichtigt sind in unserer Zusammenstellung: die Formel von Herrn J. J. Thomson (ω_{Th}), weil sie die meist bekannt gewordene und benützte ist, die neuere Formel von Herrn Langevin (1905) (ω_{Lv}), weil sie — wohl wegen der weitausholenden Ableitung, an welche sie geknüpft ist — als besonders vollkommen hingestellt worden ist, die Formel von Herrn Townsend (ω_{Td}), weil die Behandlung des Problems durch diesen Autor neuerdings in einem umfassenden Handbuch in den Vordergrund gestellt wird, endlich meine Formel von 1900 ($[\omega]$), weil sie die älteste von brauchbarer Annäherung ist. Es sind dies auch gleichzeitig die am meisten voneinander verschiedenen Formeln; andere bekannt gewordene Formeln — Langevin 1903[1]), J. J. Thomson 1909[2]), Wellisch 1909[3])

1) Vgl. Fußnote zur Gl. ω_{Lv}.

2) J. J. Thomson, Cambr. Phil. Soc. **15**. S. 375. 1909. Es ist dies eine Verbesserung der gewöhnlich unter dem Namen von J. J. Thomson verbreiteten Formel ω_{Th} (vgl. die Fußnote zu dieser).

3) Wellisch, Phil. Trans. **209**. S. 249. 1909. Siehe über diese Formel die Fußnote zur Gl. ω_{Lv}.

Reinganum 1910 und 1912[1]) — bieten nichts wesentlich Abweichendes und ändern nichts an den am Schlusse dieses Abschnittes zu machenden allgemeinen Bemerkungen; wir betrachten sie in den Fußnoten.

Es ist:

(80) (J.J. Thomson 1906) $\omega_{Th} = \frac{1}{2}\frac{KL_i}{M_i W_i} = \frac{1}{2}\frac{K}{D\pi s^2 W}\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}}$,

übrigens nur eine Wiederholung der älteren, historisch schätzbaren Formel von Drude (1900)[2]);

(81) (Langevin 1905) $\omega_{L.} = \frac{3}{4}\frac{K\bullet}{D\pi s^2 W}\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ [3]);

---

1) M. Reinganum, Dtsch. Phys. Ges. 12. S. 1034. 1910; Phys. Zeitschr. 12. S. 575 u. 666. 1911; Ann. d. Phys. 38. S. 649. 1912. Vgl. dazu die Fußnote zur Gl. $\omega_{L.}$.

2) Vgl die Fußnote zur Einleitung des Vorliegenden. Obiges ist die gewöhnlich zitierte und benutzte „Formel von J. J Thomson". Ein Eingehen auf ihren Ursprung habe ich nirgends vorgefunden; sie wird in der englischen und in der deutschen Literatur meist als „wohlbekannt" angegeben, was an sich schon anzeigt, daß man versäumt hat, ihre Ableitung oder das Datum ihrer ersten Veröffentlichung einzusehen (man würde sonst auch bemerkt haben, auf wie schlechten Füßen die Formel sachlich wie historisch steht). Im „Handbuch der Radiologie" (Bd. IV, S. 718) wird J. J. Thomson, „Cond. of El. thr Gases", 1. Aufl. als Quelle zitiert (Cambr. 1903); ich habe aber nicht finden können, daß das zutreffe. Vielmehr findet sich die Formel erst in der zweiten Auflage dieses Werkes (Cambr. 1906, S. 74), und da sie dort ohne weitere Zitate erscheint, muß wohl 1906 als das Ursprungsjahr dieser „Formel von J. J. Thomson" angesehen werden, wie es oben geschehen ist. Die Formel vernachlässigt nicht nur die molekularen Ungleichheiten und anderes, sondern auch vollständig die aufhäufende Wirkung der Trägheit; letzteres ist ihr gröbster Mangel (vgl. Teil I, Fußnote 2, S. 402). Daß Herr J. J. Thomson nachträglich (Cambr. Phil. Soc. 15. S. 375. 1909) eine verbesserte Formel abgeleitet hat, wurde bereits oben erwähnt; dieselbe leistet jedoch immer noch weniger als meine Formel von 1900, und sie ist daher, da sie dabei so viel später erschien, im obigen nicht weiter berücksichtigt.

3) Die Formel folgt aus den auf S. 272. 250. 266 oder S. 281 des Originals (Ann. de Chim. et de Phys. [8] 5. 1905) angegebenen Gleichungen, *wenn man die Fernkräfte wegläßt.* Letzteres ist jedenfalls notwendig, um die Vergleichung mit den anderen Formeln treffend zu machen, außerdem aber auch deshalb, weil die Fernkräfte nicht der Wirklichkeit entsprechen (vgl. Abschn. 5, Fall *E*). Die obige Gleichung stimmt übrigens auch überein mit dem, was im „Handb. der Radiologie", Bd. IV.

(82) (Townsend 1912) $\omega_{Td} = \frac{K L_t}{M W_t} = \frac{K}{D \pi s^2 W} \sqrt{\mu}$ [1]),

was übrigens für $\mu = 1$ identisch ist mit meiner für diesen Fall geltenden Spezialformel ω_c (a. a. O. 1900, S. 314);

(Lenard 1900) $[\omega] = \frac{1}{2} \frac{K L_t}{M_t W_t} \frac{1+\mu}{1-\mu} = \frac{1}{2} \frac{K}{D \pi s^2 W} \frac{1+\mu}{\sqrt{\mu}}$

[vgl. Gl. (1)].

Durch Quotientenbildung mit dem durch Gl. (21) oder (52) gegebenen Ausdruck für ω erhält man die in Tab. III (vv. S.) angegebenen Faktoren, die zu den Wanderungsgeschwindigkeitsangaben der verschiedenen Autoren zu setzen sind, damit sie mit unserer, alle Verfeinerungen enthaltenden Angabe (ω) zur Übereinstimmung kommen.

152. Man sieht hieraus, daß keine der bisherigen Formeln nach den Ergebnissen unserer Untersuchung als ganz richtig gelten kann, daß aber in bezug auf die erreichte Annäherung sehr große Unterschiede zwischen den verschiedenen Formeln vorhanden sind. In Sonderfällen richtige Resultate (Faktor = 1) geben meine Formel von 1900 (für einen μ-Wert

S. 718 (unten) 1917, als Resultat der „am vollkommensten von Langevin durchgeführten Rechnung" angegeben wird. Über die Mängel von Herrn Langevins Ableitung siehe besonders H. F. Mayer (in diesen Annalen folgend). Formeln von Reinganum (1910 und 1912, oben bereits erwähnt) bieten nur wieder dasselbe wie ω_{Lv}; nur die — doch wegzulassenden — Fernkräfte sind teilweise in mathematisch veränderter Form behandelt.

Eine ältere Formel von Herrn Langevin (Ann. de Chim. et de Phys. 28. S. 317. 1903) ergibt $2\omega_{Th}$. Sie berücksichtigt nur die Weglängenungleichheiten, nicht die Geschwindigkeitsungleichheiten (vgl. das oben Vorhergehende) und besonders auch nicht die Aufhäufung durch Trägheit; sie ist daher für $\mu = 1$ (größere Partikel) ebenso grundfalsch wie ω_{Th} (für andere Werte von μ ebenfalls nicht voll zutreffend) und daher hier nicht weiter berücksichtigt.

Identisch mit dieser älteren Formel von Herrn Langevin, also ebenfalls nur $= 2\omega_{Th}$ ist auch der von Hrn. Wellisch abgeleitete Ausdruck (a. a. O. 1909), wenn man die in ihm enthaltenen, willkürlich angenommenen Fernkräfte wegläßt (die Dielektrizitätskonstante $K = 1$ setzt).

1) S. P. Townsend, Proc. Roy. Soc. 86. S. 197. 1912. Es ist dies die mit Berücksichtigung der aufhäufenden Wirkung der Trägheit abgeleitete Formel. Herrn Townsends Resultat ohne diese Berücksichtigung ist identisch mit der älteren Formel von Herrn Langevin (1903, vgl. vorige Fußnote) $= 2\omega_{Th}$ und ist daher hier nicht weiter berücksichtigt.

zwischen $^1/_2$ und 1), die Langevinsche von 1905 (für $\mu = 1$) und die Townsendsche von 1912 (für einen μ-Wert zwischen $\frac{1}{2}$ und 1). Vollkommen, auch der Größenordnung nach falsche Resultate (Faktor $= \infty$) gibt die Formel von J. J. Thomson für μ nahe 1 und die von Townsend für μ nahe 0. Für alle Fälle in praktisch guter Annäherung richtig ist meine Formel von 1900 und die Langevinsche von 1905, letztere bei Fortlassung der Fernkräfte.

Verfolgt man die zeitliche Entwicklung des Gegenstandes, so sieht man, daß im allgemeinen die neueren Formeln keine wesentlich bessere Annäherung bedeuten als meine alte von 1900 — teilweise ganz das Gegenteil —; als ein Fortschritt, für gewisse Fälle wenigstens, kann überhaupt nur die Formel von Langevin (1905) bezeichnet werden, aber auch nur dann, wenn man die Fernkräfte aus ihr wegläßt. Es erscheint unter diesen Umständen — mit Rücksicht auf den gegenwärtigen Stand der Literatur — nützlich, vor den geschehenen, sowie vor künftigen Anwendungen derjenigen zahlreichen hier genügend bezeichneten Wanderungsgeschwindigkeitsformeln, welche ganz unzutreffende Resultate geben können, aber doch große Verbreitung gefunden haben, schließlich noch ausdrücklich zu warnen.

Die wesentlichste bisherige Anwendung der Formeln ist die zu Schlüssen auf die Größe von Elektrizitätsträgern in Gasen und auf das Verhalten von freien Elektronen in Flammen sowie in kalten Gasen. Man findet hierauf bezügliche, mittels genügend richtiger Formeln aus einwandfreien experimentellen Daten hergeleitete Resultate in Teil II des Vorliegenden[1]) und in der Abhandlung „Über Elektronen und Metallatome in Flammen“[2]) zusammengestellt. Die im vor-

1) Ann. d. Phys. 41. S. 87—96 (Elektrizitätsträger in gewöhnlichen Gasen) und S. 60—67 (freie Elektronen in N_2, A), 1913.

2) Heidelb. Akad. 1914, Abschnitt 17. Es ist dort nur der Zahlenwert der Rekombinationskonstante als unsicher zu betrachten. Daß die dort angenommenen Werte dieser Konstante auch einen Rechenfehler enthalten (wie bereits ebendort 1917, Abschnitt 5, S. 12, Note 16 anerkannt), ist von wenig Belang, da die experimentellen Daten zur richtigen Ermittlung der Konstante bisher doch noch zu unsicher sind. Stark beeinflußt von der Unkenntnis der Rekombinationskonstante können be-

liegenden hinzugefügten Verfeinerungen ändern nichts an den dort bereits mitgeteilten Schlüssen. Die Zahlenresultate im einzelnen betreffend würden, nach Gl. (52) berechnet, die Radien der gewöhnlichen Elektrizitätsträger in nebelkernfreier Luft bei der Wanderungsgeschwindigkeit von 1 bis 2 cm sec^{-1}/Volt cm^{-1} 7 bis $5 \cdot 10^{-8}$ cm sein (statt 11 bis 7 in Teil II. S. 91), entsprechend 5- bis 3fachem Luftmolekülradius; monomolekulare Träger je eines Elementarquants in Luft würden die Wanderungsgeschwindigkeit 14,8 cm sec^{-1}/Volt cm^{-1} haben[1]); freie, dauernd reflektierte, gastheoretisch bewegte Elektronen in der Bunsenflamme 47000 cm sec^{-1}/Volt cm^{-1} [statt 74000 a. a. O. 1914, S. 19[2])].

Abschnitt 8. Über die Gültigkeitsbereiche der Wanderungsgeschwindigkeitsgleichungen und über ihren gegenseitigen Anschluß.

153. Wir untersuchen hier außer den in den vorhergehenden Abschnitten betrachteten gaskinetischen Lösungen des Wanderungsgeschwindigkeitsproblems auch die hydrodynamischen Lösungen, besonders in der Absicht, den bisher vermißten gegenseitigen Anschluß dieser Lösungen verschiedenen Ursprungs nachzuweisen.

Es bedeuten K wieder die treibende Kraft, η die Konstante der inneren Reibung des Mediums, R den Partikelradius. Die Wanderungsgeschwindigkeit ω versehen wir mit Indexen g, h, A, B, C, D, um gaskinetische, hydrodynamische, bzw. für die verschiedenen Stoßfälle A—D (vgl. Abschnitt 5) geltende Lösungen zu unterscheiden.

---

sonders die Zahlenresultate über die Größen der Kerne der Bunsenflamme sein (Tab. VI a. a. O.); alle allgemeinen Schlüsse bleiben aber davon unberührt. Vgl. hierzu auch den Artikel über Elektrizitätsleitung in Flammen von A. Becker in Grätz' Handbuch, Bd. III (z. Zt im Druck).

1) Die in der Tab. VI, Teil II, S. 92 angegebenen kleinsten, bisher mit Sicherheit beobachteten Träger in gewöhnlichen Gasen sind demnach — wie dort bereits geschlossen und näher ausgeführt — nicht monomolekular, sondern bereits in Anlagerung begriffen.

2) Es war dort nach erster Berechnung $\Omega_\mu = 4$ gesetzt, während, wie im vorliegenden eingehend gezeigt, für freie Elektronen $\Omega_\mu = 2{,}546$ ist.

Gültigkeitsbereich der Stokes-Kirchhoffschen Gleichung.

154. Diese Gleichung[1]):

$$\omega = \frac{K}{6\pi\eta R}, \tag{83}$$

ist nach der Seite der kleinen[2]) Kugelradien R beschränkt durch ihre Herleitung aus den hydrodynamischen Grundgleichungen, welche das Medium bis zu beliebig kleinen Volumelementen als homogen behandeln, während es in Wirklichkeit molekulare Struktur hat. Letzteres hat die Folge, daß die in den Gleichungen vorkommenden, stetig verlaufenden Geschwindigkeitsgefälle nur so lange der Wirklichkeit entsprechen können, als merkliche Geschwindigkeitsänderungen längs Strecken von der Größenordnung der freien Weglängen der Mediumsmoleküle nicht vorkommen. Denn diese freien Weglängen sind Strecken, welche von den Molekülen ohne jede Geschwindig-

1) G. Stokes, Cambr. Phil. Trans. 9. S. 8. 1850. G. Kirchhoff, „Vorlesungen über Mechanik" (1. Aufl. 1876). Die Gleichung wird wohl mit Recht nach diesen beiden Autoren benannt, da Stokes ihr Urheber ist und Kirchhoff wohl zuerst bei uns eingehend mit ihr sich beschäftigt hat. Sie wird manchmal neuerdings auch als Einsteinsche Gleichung bezeichnet, was aber doch nicht leicht einfach begründbar erscheint.

2) Nach der Seite der *großen* Radien ist die Gültigkeit der Gleichung durch die Bedingung $R \ll \eta/\omega D$ begrenzt (Rayleigh, Phil. Mag. 36. S. 365. 1893). Bei größeren Radien, das ist nicht verschwindendem Werte von $R\omega D/\eta$, treten Wirbelbewegungen auf, und der Widerstand K wird proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit v und dem Quadrat des Radius R. Der Übergang zu diesem Fall — welcher außerhalb des Rahmens unserer gegenwärtigen Betrachtungen liegt — ist in einer Arbeit von A. Becker, „Über den Luftwiderstand" behandelt (Ann. d. Phys. 24. S. 823 u. 863. 1907), woselbst auch zugehörige Literatur angegeben ist. Von neueren Arbeiten hierüber sei genannt H. D. Arnold (Phil. Mag 22. S. 755. 1911), worin gezeigt wird, daß bei Medien, wie Wasser und Ölen, $R < 0{,}6\,\eta/v\,D$ für die Gültigkeit von Gl. (83) genügt.

Die Bewegung *flüssiger Massen* verschiedener Größe (Nebel- und Regentropfen) in Gasen, wobei der Übergang von wirbelfreier zu wirbelnder Bewegung des Mediums ebenfalls eine Rolle spielt, aber auch noch Besonderheiten des flüssigen Aggregatzustandes auftreten, habe ich früher experimentell und theoretisch behandelt (Ann. d. Physik 30. S. 224 bis 231. 1887 und „Über Regen", Metereol. Zeitschr. 1904. S. 249); die Resultate sind von anderen Autoren bestätigt worden (Mache 1908, Reinganum 1910).

keitsänderung durchlaufen werden, die also überhaupt nicht Sitz von stetig verlaufenden Geschwindigkeitsgefällen sein können. Da nun die Geschwindigkeitsgefälle in der Umgebung einer im reibenden Medium bewegten Kugel nach den Angaben der Hydrodynamik selbst, sowie auch nach direkter Erfahrung, auf Strecken von der Größenordnung des Kugelradius R sich verteilen, so daß auf eine Strecke von dieser Größenordnung sehr große Geschwindigkeitsunterschiede kommen, so sieht man, daß die *Gültigkeit der auf das Kugelproblem angewandten hydrodynamischen Gleichungen, also auch der Gl. (83) an die Bedingung gebunden ist, daß der Kugelradius R sehr groß sein müsse gegenüber der freien Weglänge L der Mediumsmoleküle, oder also an die Bedingung $R \gg L$* oder $L/R \ll 1$.[1])

Gültigkeitsbereich der Erweiterung von Cunningham und Mac Keehan.

155. Ist die vorstehende Bedingung nicht erfüllt, was bei sehr kleinen Kugeln eintritt, so muß die Bewegung der Mediumsmoleküle an der Kugeloberfläche, wo die größten Geschwindigkeitsgefälle vorkommen, besonders betrachtet werden. Dies ist von Herrn Cunningham durchgeführt worden[2]) mit dem Resultat des Hinzutretens eines Faktors zum Stokes-Kirchhoffschen Ausdruck, so daß

$$\omega_h = \frac{K}{6\pi\eta R}\left(1 + A\frac{L}{R}\right) \text{ wird,} \tag{84}$$

worin A ein zwischen 1 und 2 gelegener Zahlenkoeffizient ist.

Man sieht, daß man bei $L/R \ll 1$ wieder zur Stokes-Kirchhoffschen Gleichung zurückkommt, wie es dem Vorhergehenden nach sein muß. Bei sehr kleinen Kugelradien dagegen gewinnt der Zusatzfaktor steigenden Einfluß, und zwar

1) In flüssigen Medien ist $L < \lambda$ (s. 170), es reicht demnach hier die gefundene Gültigkeitsgrenze sehr weit nach der Seite der kleinen Partikelradien hin, weshalb die oben nächst zu besprechende Erweiterung [Gl. (84)] in Flüssigkeiten auch nicht wesentlich in Betracht kommt. Vgl. übrigens Abschnitt 9.

2) Cunningham, Proc. Roy. Soc. 83. S. 357. 1910. Die Rechnung verläuft dort nach ähnlichen Prinzipien wie in meiner gaskinetischen Ableitung der Wanderungsgeschwindigkeiten a. a. O. 1900; vgl. übrigens die Note 4 zur vierten Seite der Einleitung (diese Annalen 60. S. 332. 1919).

ist dies — wie die bereits in der Einleitung erwähnten Versuche der Herren Mac Keehan und Silvey an Wachs- bzw. Quecksilberkügelchen gezeigt haben — im richtigen, der Wirklichkeit entsprechenden Maße der Fall, wenn man dem Koeffizienten A den Wert 1,00 oder 1,03 erteilt.[1]) Dabei entspricht nach Herrn Cunninghams Rechnungsweise ein solcher Wert von A — genau sollte das $A = 1{,}05$ sein — der Annahme, daß die Mediumsmoleküle, welche die Kugeloberfläche getroffen haben, sie in Richtung der Oberflächennormale wieder verlassen, also dem in Abschnitt 5 eingehend erläuterten Fall D[2]), wogegen bei Gleichheit von Einfalls- und Reflexionswinkel der Moleküle (Fall A) $A = 1{,}5$ sein sollte[3]) und bei gleicher Wahrscheinlichkeit jeder Richtung für die weggehenden Mediumsmoleküle (diffuse Reflexion, Fall B) $A = 1{,}2$.

Da die genannten Versuche bis zu Kugelradien $R =$ 0,0001 cm herab und bis zu $L/R = 200$ hinaufgehen, und da durch Druckvariation der Luft auch L ausgiebig variiert worden ist[4]), erscheint die Gültigkeit von Gl. (84) gut verbürgt bis zu Radienwerten, die jedenfalls weit unter dem Gültigkeitsbereich der Stokes-Kirchhoffschen Gleichung liegen.

Im selben Sinne fielen auch Messungen der Herren Knudsen und S. Weber aus[5]), die zwar nur relativ sehr große Kugeln ($R = 0{,}39$ cm), jedoch auch sehr verdünnte Luft benutzt haben, so daß L/R bis nahe zu 2 hinaufgeht. Es zeigte sich, rein empirisch, daß die Beobachtungen gut durch Gl. (84) dargestellt werden, wenn man

1) Der erstere Wert entspricht den Versuchen von Herrn Mac Keehan, der zweite denen von Silvey; beide stimmen so gut wie vollkommen überein, da ersterer Autor $1{,}00 \pm 0{,}03$ angibt.

2) Fall C kommt bei so großen Partikeln nicht in Betracht.

3) Vgl. Mac Keehan (a. a. O.), wo einige numerische Verbesserungen an Herrn Cunninghams Rechnung als nötig angegeben werden (vgl. die betreffende Note zur Einleitung).

4) Es gilt dies, sowie überhaupt die ausgiebige Variation und die Erreichung von $L/R = 200$ für die Versuche von Mac Keehan, die von Silvey besitzen in der Hauptsache den Wert der Kontrolle nach gänzlich verschiedener Methode und mit verändertem Material. Weitere, weniger gut verwertbare Versuche anderer Autoren findet man in Herrn F. Walters bereits in der Einleitung erwähnter Dissertation zitiert.

5) Knudsen u. S. Weber, Ann. d. Phys. **36**. S. 981. 1911.

84a) $$A = 0{,}68 + 0{,}35\, e^{-1{,}85\, R/L}$$

setzt, und man sieht, daß dies mit den Resultaten der vorgenannten Beobachter übereinstimmt, indem bei sehr kleinem R auch hier $A = 1{,}03$ wird.[1])

156. Trotz dieser guten Bestätigung der Gl. (84) in sehr erweiterten Grenzen kann aber nicht erwartet werden, daß sie bis zu beliebig kleinen R herab gelte; denn es liegt hierbei eine Beschränkung vor durch die Ableitungsweise der Gleichung. Es ist nämlich bei der Ableitung angenommen, daß der Partikelradius R groß sei gegenüber der Dicke derjenigen an die Kugeloberfläche grenzenden Mediumsschicht, innerhalb welcher die an diese Oberfläche stoßenden Moleküle sich bewegen.[2]) Die Dicke dieser Schicht ist aber mindestens gleich zu setzen dem mittleren Molekülabstand λ, gemessen von Zentrum zu Zentrum; denn dieser Abstand ist das Maß für die Dicke irgendeiner einzelnen Molekülschicht, während jede geringere Dicke überhaupt keine ganze Molekülschicht umfassen würde.[3]) Ist die Diffusion im Medium stark — was bei hohem Werte von L, also in Gasen (außerdem auch bei hoher Temperatur) der Fall ist —, so wäre für die Dicke jener Schicht sogar ein hohes Vielfaches von λ zu setzen, nämlich mindestens die volle freie Weglänge L der Moleküle, da dieselben inner-

1) Die Herren Knudsen u. S. Weber vergleichen selbst ihre Resultate ganz eingehend mit den kurz vorher veröffentlichten von Mac Keehan (a. a. O. 1911, S. 993).

2) Vgl. die folgende Note.

3) Herr Cunningham gibt — ohne besondere Begründung — (a. a. O., S. 360) an, daß R in der Ableitung seiner Gleichung groß angenommen werde gegenüber dem *Moleküldurchmesser*, was aber mit dem Sinn der Ableitung nicht stimmt und nach obiger Überlegung zu kleine Radien zulassen würde, mindestens bei Gasen von nicht hohem Druck. Auch bei Knudsen u. S. Weber findet sich die Angabe, daß für Gl. (84) mit A nach Gl. (84a) Gültigkeit bis zu Kugeln von molekularer Größe herab anzunehmen sei (a. a. O, S. 992). Die Angabe ist aber dort ebenfalls nicht begründet; daß sie sich auf die rein empirische Feststellung von A ebensowenig stützen kann als — nach obigem — auf eingehende theoretische Überlegung geht daraus hervor, daß der Vergleich mit unserer, tatsächlich für Kugeln vom Molekülradius passenden Gl. (85) zeigt, daß für so kleine Radien nur mehr ziemlich rohe Gültigkeit der Gl. (84) besteht, indem sie mehr als doppelt zu große Werte der Wanderungsgeschwindigkeit ergibt.

halb dieser Strecke frei sich bewegen. Es ist also *die unzweifelhafte Gültigkeit der Gl. (84) ihrer Herleitung nach jedenfalls beschränkt anzunehmen auf* $R \gg \lambda$; in Flüssigkeiten, wo L klein ist, genügt wohl $R > \lambda$ (vgl. Abschnitt 9).

Gültigkeitsbereich der gaskinetischen Gleichung.

157. Diese zuerst von mir (a. a. O. 1900) abgeleitete Gleichung, welche mit den in Teil II und in den Abschnitten 1 bis 4 des Vorliegenden hinzugefügten Verfeinerungen geschrieben werden kann [Gl. (21)]:

$$\omega_g = \frac{3}{3+\mu} \Omega_\mu [\omega], \tag{85}$$

worin Ω_μ und $[\omega]$ je nach den Stoßfällen A, B, C, D die zum Teil verschiedenen, durch die Gl. (8), (1), (66), (62), (76), (73) gegebenen Werte annehmen, beruht auf den Prinzipien der kinetischen Gastheorie, wobei die kraftgetriebene Kugel als ein fremdes Molekül zwischen den Mediumsmolekülen betrachtet wird. Die Gleichung ist daher besonders für ganz kleine Kugeln geeignet, also gerade dort, wo die hydrodynamischen Gl. (83) und (84) versagen. Nach der Seite der kleinen Radien hin ist der Gültigkeit der Gl. (85) in der Tat keine Grenze gesetzt.[1]) Für die Frage, bis zu wie großen Radien hinauf die Gleichung noch gültig ist, kommen zwei bei ihrer Herleitung[2]) gemachte Annahmen in Betracht: Erstens die Annahme, daß die Zeit, innerhalb welcher das wandernde Partikel jeweils unter dem Einflusse eines Zusammenstoßes mit einem Mediumsmolekül sich befindet — die eigentliche Stoßzeit — verschwindend kurz sei gegenüber der Zwischenzeit von einem Zusammenstoß bis zum nächsten, während welcher ungestörte Beschleunigung durch alleinige Wirkung der Kraft K statthat. Zweitens die Annahme, daß das wandernde Partikel die Bewegung der

1) Die Anwendung der gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung auf freie Elektronen ist bereits a. a. O. 1900 kurz und dann ausführlich in Teil I und II begründet und entwickelt worden.

2) Vgl. die Herleitung a. a. O. 1900, S. 312 u. 313. Der dabei befolgte sehr einfache Weg ist dort in Worten auseinandergesetzt; er schließt die Mittelwertbildung durch Integration ein, welche im vorliegenden für verwandte Fälle im Abschnitt 6 etwas ausführlicher entwickelt worden ist.

Mediumsmoleküle nur unmittelbar, nämlich beim Zusammenstoß beeinflußt, während im übrigen die Bewegung der Mediumsmoleküle vollkommen unbeeinflußt bleibt, so daß alle Moleküle, welche mit dem Partikel zum Zusammenstoß kommen, vor dem Stoße diese unbeeinflußte Bewegung haben.

158. Die erste Annahme ist offenbar mit Sicherheit erfüllt, wenn das Partikel so klein ist, daß es die Zwischenräume der Mediumsmoleküle nicht ausfüllt, wenn also $2R < \lambda_0$ wo $\lambda_0 = \lambda - 2r$ der mittlere Abstand von Molekülgrenze zu Molekülgrenze ist (im Gegensatz zu dem von Zentrum zu Zentrum gemessenen Abstand λ.[1]) Im gegenteiligen Falle, wenn $2R > \lambda_0$, wenn also fast immer mehr als ein Mediumsmolekül dicht bei der Partikeloberfläche sich befindet, ist es von vornherein nicht sicher, ob die dann dicht aufeinanderfolgenden Zusammenstöße noch die angenommenen relativ großen Zwischenzeiten freilassen, oder ob die Stoßzeiten schon ineinander übergreifen, was die Gl. (85) ungültig machen müßte. Es hängt dies offenbar von der schlecht bekannten Länge der Stoßzeiten ab. Bedenkt man jedoch, daß die kinetische Gastheorie, welche die gleiche Annahme überwiegend kräftefreier Bewegung der Moleküle, unterbrochen von verschwindend kurzen Stoßzeiten macht, auch auf den flüssigen Aggregatzustand als anwendbar sich gezeigt hat (van der Waals), obgleich hier der Moleküldurchmesser größer ist als die freie Weglänge und also um so mehr größer als der mittlere Molekülabstand λ_0, so ist klar, daß auch unsere Ableitung der Gl. (85) und also diese Gleichung selbst noch weit über die unzweifelhafte Grenze $2R \leqq \lambda_0$ hinaus und wohl ebenfalls bis in den flüssigen Aggregatzustand hinein mindestens angenähert Gültigkeit behalten kann.

159. Für die Frage, wo bei wachsendem Partikelradius schließlich das Versagen der Gl. (85) eintreten müsse, erscheint demnach nur die zweite bei der Ableitung gemachte Annahme entscheidend, welche verlangt, daß die mit dem Partikel zum Zusammenstoß kommenden Moleküle unbeeinflußt seien von der Wanderungsbewegung. Da diese Moleküle aus Abständen von der Größe der freien Weglänge L gegen die Partikelober-

1) Der Unterschied zwischen λ und λ_0 ist in gewöhnlichen Gasen unwesentlich; nur unfern der Verflüssigung und im flüssigen Zustande ist er von Belang.

fläche kommen, so wird die Bedingung offenbar nicht mehr erfüllt sein, wenn $R > L$; denn die Wanderungsbewegung des Partikels setzt unzweifelhaft seine Umgebung stets bis auf Abstände von der Größenordnung des Partikelradius R über seine Oberfläche hinaus in Mitbewegung. Letzteres ist durch die hydrodynamische Untersuchung bewiesen, welche die Geschwindigkeiten aller Volumelemente des Mediums als Funktion der Wanderungsgeschwindigkeit des Partikels darstellt und welche gerade dann volle Gültigkeit behält, wenn der Partikelradius R groß ist im Vergleich zu den angenommenen Volumelementen, die ihrerseits groß sein müssen im Vergleich zu der durch die freie Weglänge L bemessenen Struktur des Mediums, wenn also $R > L$, welches aber eben der in Betracht gezogene Fall ist.[1])

Es wird also Gl. (85) nicht mehr gültig sein können, wenn $R > L$. Im anderen Falle, wenn $R \gtrless L$, gilt das Folgende:

Ist $R = L$, so befindet man sich nur wenig außerhalb des Gültigkeitsbereiches der rein hydrodynamischen Gleichung (siehe 151). Man kann daher annehmen, daß die Bewegungsverteilung in der Umgebung des wandernden Partikels noch ungefähr dieselbe sei, wie innerhalb des Gültigkeitsbereiches, daß also das Medium nicht wesentlich weiter als bis auf Abstände von der Größe R, d. i. also hier L, über die Partikeloberfläche hinaus von der Wanderungsbewegung des Partikels beeinflußt sei. Es sind also bei $R = L$ nur die unmittelbar an das Partikel gestoßenen Moleküle als wesentlich beeinflußt anzunehmen, nicht die ferner abliegenden, welche die Beeinflussung nur durch Zusammenstoß mit den eben gedachten, innerhalb L befindlichen, unmittelbar beeinflußten Molekülen erhalten, und dieses Resultat muß um so mehr gelten, wenn $R < L$. Denn mit abnehmendem R nimmt die Zahl der sekundlich an das Partikel stoßenden Moleküle, also auch die Übertragung der Be-

1) Ist $R < L$, so gilt das Resultat der hydrodynamischen Untersuchung nicht mehr; es greift dann die Bewegung des Partikels weiter als bis auf Abstände R um sich, nämlich mindestens bis auf Abstände L, welches letztere als unter allen Umständen geltend unmittelbar einzusehen ist, da die mit dem Partikel zusammengestoßenen Moleküle ihre vom Partikel beeinflußten Geschwindigkeiten unmittelbar um die Strecke L weitertragen (vgl. das oben Folgende).

einflussung an die ferner abstehenden Moleküle ab. Es erfüllen daher bei $R \gtrless L$ die weiter als L von der Partikeloberfläche abstehenden Moleküle genügend die Bedingung der Gültigkeit der Gl. (85). Was die anderen, innerhalb des Abstandes L von der Partikeloberfläche sich bewegenden Moleküle anlangt, so müssen jedenfalls diejenigen von ihnen von der Wanderungsbewegung beeinflußt sein, welche soeben von einem Zusammenstoß mit dem Partikel kommen, und es ist nur die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein solches Molekül zu nochmaligem Zusammenstoß mit dem Partikel kommt, ehe es seine Beeinflussung durch anderweitige Zusammenstöße genügend verloren hat. Man findet die Wahrscheinlichkeit für den Zusammenstoß eines von einem Punkte im Abstande L von der Partikeloberfläche in beliebiger Richtung ausgehenden Moleküls[1]) mit dem Partikel als Resultat einer einfachen geometrischen Rechnung klein genug, nämlich bei $R = L$ zwischen $^1/_2$ und $^1/_{12}$[2]) und bei $R < L$ noch kleiner. Da außerdem die Beeinflussung bei jedem Zusammenstoß mit einem unbeeinflußten Molekül auf $^1/_2$ zurückgeht[3]), so ist zu sehen, daß die Zahl der wesentlich beeinflußten Moleküle, welche zum Zusammenstoß mit dem Partikel kommen, bei $R \gtrless L$ stets sehr gering sein muß, wonach also $R \gtrless L$ *als Bedingung für die Gültigkeit der Gl. (85)* anzusehen ist, derart, daß an der Grenze, bei $R = L$, noch gute Annäherung, bei abnehmendem R/L aber schnell wachsende Genauigkeit der Gleichung zu erwarten ist.[4])

Zu bemerken ist, daß diese Überlegungen (159) unmittelbar auf *gasförmige Medien* sich bezogen haben, bei welchen $L < \lambda$ ist. Sie gelten in entsprechender Durchführung aber auch für

1) Es entspricht dies den Reflexionsfällen A, sowie C; bei B und D wäre das Resultat nicht wesentlich anders.

2) Die Wahrscheinlichkeit $^1/_2$ ergibt sich bei $r = \infty$, $^1/_{12}$ bei $r = 0$; $r = R$ würde die Wahrscheinlichkeit $^4/_{15}$ geben.

3) Vgl. die Gl. (43) in Teil I.

4) Die Anwendung der gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsformel auf flüssige Medien ist bereits von Herrn G. Hevesy erörtert worden (Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 13. S. 291. 1916), wobei jedoch die hier erläuterte Erweiterung des Gültigkeitsbereiches übersehen wurde. Die Erweiterung genügt zur Anwendung der Gleichung auf die elektrolytischen Ionen (vgl. Abschnitt 9).

flüssige Medien. Es besteht bei demselben nur der Unterschied, daß — da hier $L < \lambda$ — als Abstand von der Partikeloberfläche, bis zu welchem die Beeinflussung der Umgebung jedenfalls merklich sein muß, nicht die freie Weglänge allein zu gelten hat, sondern offenbar dieselbe vermehrt um den Moleküldurchmesser $2r$ (Amplitude + Dicke der bewegten Molekülschicht), wofür in genügender Annäherung auch der Molekülabstand λ (von Zentrum zu Zentrum) gesetzt werden kann. Es tritt demnach λ an die Stelle von L in der Gültigkeitsbedingung, und dieselbe wird daher für *flüssige Medien* $R \gtrless \lambda$, was gegenüber $R \gtrless L$ keinen Widerspruch, aber — da $L < \lambda$ — eine nennenswerte Erweiterung des Gültigkeitsbereiches bedeutet.[1])

160. *In Zusammenfassung* haben wir über die Gültigkeitsbereiche der verschiedenen Gleichungen das Resultat, daß einerseits von beliebig kleinen Partikelradien R hinauf bis zu $R = L$, bzw. in Flüssigkeiten bis zu $R = \lambda$, die gaskinetische Gl. (85) gut anwendbar ist, während andererseits bei $R > \lambda$ die Gültigkeit der für die großen Partikel geeigneten, hydrodynamischen Gl. (84) beginnt. Man sieht, daß beide Bereiche aneinandergrenzen, ja, daß sie sogar ineinander übergreifen können.

Letzteres muß stattfinden, wenn $L \gg \lambda$, also bei Gasen von nicht allzu hohem Druck. So ist beispielsweise selbst in Luft von 1 Atm. Druck rund $\lambda = 20r$ und $L = 600r = 30\lambda$, also die Bedingung des Übereinandergreifens genügend erfüllt. Man hat daher im Falle der Gase im allgemeinen für jede beliebige Partikelgröße eine Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung mit mindestens sehr angenäherter Gültigkeit zur Verfügung, nämlich Gl. (85) bei $R < L$ und Gl. (84) bei $R > \lambda$ (wirbelfreie Bewegung vorausgesetzt). In der Gegend von $\lambda < R < L$ wäre es zweifelhaft, welche der beiden Gleichungen vorzuziehen sei; doch treffen sie in dieser Gegend in Gasen in der Tat mit identischem Resultat zusammen, wie das Folgende zeigt (161).

In Flüssigkeiten berühren sich die Gültigkeitsbereiche nahezu, indem zwischen $R < \lambda$, wo Gl. (85) gilt, und $R < \lambda$,

1) Auf diese, schon aus der Ableitung von 1900 sich ergebende Gültigkeitsgrenze der gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung ist schon früher aufmerksam gemacht worden: Vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 31. S 122. 1910; Lenard u. Ramsauer, Heidelb. Akad. A 32. S. 12. 1910; Teil I. S. 403. 404.

wo Gl. (84) gilt, keine erhebliche Lücke übrig bleibt. Man hat also auch hier für jeden Fall eine Gleichung mit mindestens angenäherter Gültigkeit zur Verfügung. Nur bei Radienwerten, die λ nur wenig überschreiten, ist einige Unsicherheit zu erwarten. Wir gehen hierauf im Abschnitt 9 bei Behandlung der flüssigen Medien besonders ein.

Vergleichung der gaskinetischen Lösung mit der hydrodynamischen.

161. Die im vorhergehenden gezeigte Berührung der Gültigkeitsbereiche der beiden, ganz verschiedenen Theorien entnommenen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichungen (84) und (85) gibt unmittelbaren Anlaß, dieselben miteinander zu vergleichen — was merkwürdigerweise bisher meines Wissens noch niemals in genügender Allgemeinheit ausgeführt worden ist — und die dabei zu erwartende Übereinstimmung an der gefundenen gemeinsamen Gültigkeitsgrenze nicht für zufällig zu halten.

Die Vergleichung kann unmittelbar dadurch ausgeführt werden, daß man Gl. (85) auf größte Radien, Gl. (84) auf kleinste Radien jeweils innerhalb des Gültigkeitsbereiches anwendet, und zusieht, ob im Falle der Gase, wo die Gültigkeitsbereiche ineinander greifen, übereinstimmende Ausdrücke sich ergeben. Wir führen die Vergleichung gesondert für die vier Fälle *A*, *B*, *C*, *D* durch.

162. *Fall A.* (Elastische Reflexion.) — Man hat in der gaskinetischen Gleichung, die hier die Form der Gl. (52) annimmt, $R \gg r$, daher $s = R$ und $\mu = 1$, daher $\Omega_\mu = 1$ zu setzen, wodurch gaskinetisch

$$\omega_{g\,A} = \frac{3}{4}\,\frac{K}{D\,\pi\,R^2\,W} \quad (R \text{ groß}) \tag{87}$$

wird, wobei indessen noch immer $R \leqq L$ sein muß, um im Gültigkeitsbereich zu bleiben. In der hydrodynamischen Gl. (84) ist $R \ll L$ zu setzen, wodurch hydrodynamisch

$$\omega_{h\,A} = A\,\frac{K\,L}{6\,\pi\,\eta\,R^2} \quad (R \text{ klein}) \tag{88}$$

wird, mit der Voraussetzung, daß immer noch $R \gg \lambda$ sei, um im Gültigkeitsbereich zu bleiben. Alle genannten Bedingungen für R sind gleichzeitig genügend nahe erfüllbar, wobei $L \gg R \gg \lambda$ ausschlaggebend ist. So ist beispielsweise in Luft von 1 Atm.

Druck bei $R = 200 \cdot 10^{-8}$ cm rund $R = {}^1/_{10} L = 10\lambda = 140\,r$, oder in Luft von ${}^1/_{100}$ Atm. Druck bei $R = 1000 \cdot 10^{-8}$ cm rund $R = {}^1/_{100} L = 100\lambda = 700\,r$. Es muß also entsprechend angenäherte Gültigkeit sowohl von Gl. (87), als auch von Gl. (88) und also auch angenäherte Übereinstimmung beider erwartet werden. In der Tat setzt man in Gl. (88) den nach der kinetischen Gastheorie geltenden Wert:

$$\eta = 0{,}310\, D\, W\, L$$

ein[1]) und $A = 1{,}5$ nach Mac Keehan[2]), so wird:

$$\omega_{hA} = 0{,}81 \frac{K}{D\,\pi\,R^2\,W} \quad (R \text{ klein}), \tag{88a}$$

und man sieht vollkommene Übereinstimmung mit Gl. (87) in bezug auf die Abhängigkeit der Wanderungsgeschwindigkeit von den maßgebenden Größen D, R und W und genügend nahe Übereinstimmung in bezug auf die Zahlenkoeffizienten. Es würde sogar auch letztere Übereinstimmung vollkommen, wenn man im Ausdruck für η den Koeffizienten 0,310 durch ${}^1/_3$ ersetzte, was gilt, wenn man η ohne Rücksicht auf die Ungleichheiten der molekularen Geschwindigkeiten und Weglängen berechnet; doch ist dies in unserem Falle unberechtigt, da in Gl. (87) diese Ungleichheiten voll berücksichtigt sind. Vielmehr kann es berechtigt erscheinen, den Koeffizienten A in Gl. (88) so abzuändern, daß vollkommene Übereinstimmung mit Gl. (87) resultiert. Es ergäbe dies $A = 1{,}4$, statt 1,5 nach Mac Keehan oder 1,63 nach Cunningham.[3]) Bei der Unsicherheit in den letztgenannten Werten von A, welche aus der Nichtübereinstimmung der Berechnungen der beiden Autoren gefolgert werden könnte[4]), erscheint es in der Tat nicht unangebracht,

---

1) Vgl. O. E. Mayer: „Kinetische Theorie der Gase", 2. Aufl., 1899, Mathematische Zusätze, S. 111.

2) Vgl. oben.

3) Vgl. oben.

4) Herr Mac Keehan, der spätere Autor, gibt — soviel ich finden konnte — (a. a. O.) nur an, daß Herrn Cunninghams Annäherungsverfahren nicht genügend gewesen sei, ohne aber den Grad der von ihm selbst erreichten Annäherung in der Auswertung der betreffenden theoretischen Ausdrücke zu präzisieren (vgl. die betreffende Note zur Einleitung).

dem Wert $A = 1{,}4$ für den Fall *A* der elastischen Reflexion bis auf weiteres den Vorzug zu geben.[1])

163. *Fall B.* (Diffuse Reflexion.) — Die Vergleichung geht hier ebenso vor sich und sie fällt ähnlich aus wie im Falle *A*. Man hat unter denselben Bedingungen für *R*, wie dort:

$$(89)\quad \left\{ \text{gaskinetisch} \quad \omega_{g\,B} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\,\frac{K}{D\,\pi\,R^2\,W} \right.$$
$$\left. = 0{,}56\,\frac{K}{D\,\pi\,R^2\,W} \quad (R \text{ groß}) \qquad \text{und} \right.$$

$$(90)\quad \text{hydrodynamisch} \quad \omega_{h\,B} = 0{,}65\,\frac{K}{D\,\pi\,R^2\,W} \quad (R \text{ klein}),$$

wobei in letzterer Gleichung $A = 1{,}2$ gesetzt ist, was nach Mac Keehan dem Falle *B* entspräche.[2]) Man sieht auch hier wieder die gute Übereinstimmung der beiden Ausdrücke bis auf einen kleinen Unterschied in den Zahlenkoeffizienten. Da auch hier einige Unsicherheit in bezug auf den Wert von *A* vorhanden zu sein scheint[3]), ist es — wie im Falle *A* — nicht unberechtigt, diesen Wert so einzurichten, daß der Zahlenkoeffizient der hydrodynamischen Lösung dem der gaskinetischen genau gleich wird; man erhält so $A = 1{,}1$ für den Fall *B*.

164. *Fälle C und D.* (Senkrechtes Abgehen der Moleküle). — Findet genügend schnelle Rotation des Partikels statt (Fall *C*), so führt die gaskinetische Untersuchung auf die Gleichungen des Falles *A* zurück (vgl. 142). Die hydrodynamische Lösung ist für diese Annahme nicht entwickelt; sie würde aber auch kaum Anwendung finden können, da die verhältnismäßig großen Partikel ihres Gültigkeitsbereiches kaum die genügend schnelle Rotation (bzw. den genügend guten inneren Wärmeaustausch) erwarten lassen.

Es kommt daher hier nur der Fall *D* in Betracht, daß das Partikel nicht schnell rotiert, so daß zwischen Auftreffen und Wiederabfliegen jedes Moleküls keine wesentliche Ver-

1) Andererseits ist hervorzuheben, daß die Gl. (52) und Gl. (84), aus welchen wir diesen Wert von *A* gefolgert haben, nahe der Grenze ihrer Gültigkeitsbereiche benutzt worden sind, so daß strenge Gültigkeit nicht erwartet werden kann (vgl. auch die dritte Note zu 169).

2) Zit. in der Einleitung.

3) Es gilt hier ähnliches wie oben im Falle *A*.

drehung des Partikels stattfindet. Es gelten dann — unter denselben Bedingungen für R wie in A — die Lösungen:

(91) gaskinetisch $\omega_{g\,D} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \frac{K}{D \pi R^2 W}$

$= 0{,}45 \frac{K}{D \pi R^2 W}$ (R groß) und

(92) hydrodynamisch $\omega_{h\,D} = 0{,}57 \frac{K}{D \pi R^2 W}$ (R klein),

wobei in letzterer Gleichung nach Herrn Mac Keehans Berechnung $A = 1{,}05$ gesetzt ist. Man sieht wieder die genügende Übereinstimmung. Vollkommen würde dieselbe, wenn man $A = 0{,}84$ setzte, welch letzterer Wert wieder, mit derselben Begründung (und demselben Vorbehalt) wie bei Fall A und B, als verbesserter Ersatz für die Mac Keehansche Angabe für den Fall D angesehen werden kann.

165. Die bisher vorliegenden experimentellen Untersuchungen scheinen die von uns geschlossenen Werte A gut zu bestätigen. Man hat, wie bereits in der Einleitung angegeben, hauptsächlich Fälle untersucht, wo Aufnahme der Mediumsmoleküle in eine verdichtete Oberflächenschicht des Partikels und nachheriges Abdampfen in vorzugsweise senkrechter Richtung zu erwarten ist. Dabei war zu guter Darstellung der Beobachtungen anzunehmen $A = 1{,}03$ (Knudsen und Weber an Glaskugeln für die hier in Betracht kommenden Werte von R, ebenso Silvey an Quecksilbertröpfchen) bzw. 1,00 (Mac Keehan an Wachskügelchen) und diese Werte stimmen gut mit den von uns geschlossenen Werten überein. Denn es ist zu bedenken, daß das Abgehen der Moleküle beim Abdampfen aus der Oberflächenschicht keineswegs ausschließlich in der Richtung der Oberflächennormale stattfindet, sondern nur mit Bevorzugung größerer Normalkomponenten der Geschwindigkeit, so daß es sich in Wirklichkeit nicht genau um den Fall D, sondern um einen zwischen B und D gelegenen Fall (diffuse Reflexion mit Bevorzugung der Normalrichtung) handelt, was nach unserem Resultate Werte von A zwischen 0,84 und 1,1 erwarten läßt, ganz wie es die genannten Beobachtungen ergeben. Eine exakte Verwirklichung des Falles D, d. i. ausschließlich senkrechten Abgehens der auftreffenden Moleküle, ist bei jeder Art von Oberflächen-

beschaffenheit sehr unwahrscheinlich, und es können daher die beobachteten Werte von A in Wirklichkeit nicht als Bestätigungen des von Mac Keehan für diesen Fall D berechneten Wertes $A = 1{,}05$ angesehen werden; sie bestätigen vielmehr, wie angegeben, die von uns berechneten Werte. Versuche mit Partikeln bekannter Größe, die eine exakte Verwirklichung des Falles A bedeuteten, sind bisher ebenfalls nicht bekannt geworden.

Übergang von der gaskinetischen zur hydrodynamischen Gleichung bei wachsendem Partikelradius.

166. Um zu zeigen, daß dieser Übergang stetig, ohne jeden Sprung auch im Differentialquotienten $d\omega/dR$ stattfindet, wählen wir beispielsweise atmosphärische Luft von gewöhnlichem Druck und Zimmertemperatur (20° C) als Medium und setzen den Fall A (elastische Reflexion) voraus. Es gilt dann bis zu $R \leqq L$ die gaskinetische Gleichung [Gl. (21)]:

$$\omega_{g\,A} = \frac{3}{3+\mu}\,\frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}}\,\Omega_\mu\,D\pi\,\frac{K}{(r+R)^2\,W} \tag{93}$$

und für $R \gg \lambda$ die hydrodynamische Gleichung [Gl. (84) mit A nach 162]:

$$\omega_{h\,A} = \frac{K}{6\pi\eta R}\left(1 + 1{,}4\,\frac{L}{R}\right), \tag{94}$$

wobei zu setzen ist $D = 0{,}0012$ g/cm³, $W = 47800$ cm/sec, $\eta = 0{,}00019$ cm^{-1} g sec^{-1}, $L = 1030 \cdot 10^{-8}$ cm, $r = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm. $\mu = M_t/(M_t + M)$ ist für alle $R \geqq 10 \cdot 10^{-8}$ cm 1,00[1]); für $R = r$ wird $\mu = \frac{1}{3}$; für verschwindende R ist der Fall freier Elektronen in N_2 gesetzt, wobei $\mu = 2{,}02 \cdot 10^{-5}$ wird.

1) Gerechnet nach $M_t : M = R^3 : r^3$, was annimmt, daß das Partikel aus Mediumsmolekülen aufgebaut sei. Diese Rechnungsweise reicht wegen des geringen Einflusses von μ auf ω, solange μ nahe 1 ist, vollkommen aus. Es ist übrigens zu bemerken, daß auch bei ganz beliebiger Wahl der materiellen Beschaffenheit des Partikels stets bei $R \geqq 10 \cdot 10^{-8}$ cm μ nahe 1 bleibt, möge das Partikel noch so leicht gebaut sein (z. B. hohl bei leichtest möglichem Wandmaterial). Es gelten daher die Zahlen der Tabelle bei $R \geq 10 \cdot 10^{-8}$ cm für Luft als Medium überhaupt, unabhängig von der Partikelmasse, und nur in den ersten beiden Zeilen der Tabelle (oberhalb der horizontalen Trennungslinie) ist ω_g in den angegebenen Zahlenstellen von der Partikelmasse beeinflußt.

Tabelle IV.

Gaskinetisch und hydrodynamisch berechnete Wanderungsgeschwindigkeiten in Luft (1 Atm., 20° C).

Partikelradius R 10^{-8} cm	in Vielfachen von λ und L (rund)		Wanderungsgeschwindigkeit $\omega_{g\,A}/K^{1})$ cm sec^{-1} dyn^{-1}	$\omega_{h\,A}/K^{1})$ cm sec^{-1} dyn^{-1}
0	(freies Elektron in N_2)		6,7 $\cdot 10^{15}$	∞
1,5	$= r$ (Luftmolekül)		**840** $\cdot 10^{10}$	1800 $\cdot 10^{10}$
10	$= \frac{1}{3}\lambda = \frac{1}{100}L$	(El.-Träger in kernfreien Gas.)	**31** $\cdot 10^{10}$	**39** $\cdot 10^{10}$
20			**8,9** $\cdot 10^{10}$	**9,9** $\cdot 10^{10}$
30	$= \lambda = \frac{1}{30}L$		**4,2** $\cdot 10^{10}$	**4,4** $\cdot 10^{10}$
40			**2,4** $\cdot 10^{10}$	**2,5** $\cdot 10^{10}$
50			**1,6** $\cdot 10^{10}$	**1,6** $\cdot 10^{10}$
100	$= 3\lambda = \frac{1}{10}L$		**0,40** $\cdot 10^{10}$	**0,42** $\cdot 10^{10}$
200			**0,10** $\cdot 10^{10}$	**0,11** $\cdot 10^{10}$
300	$= 10\lambda = \frac{1}{3}L$	(Als Nebelkerne, bez. ultramikroskopisch sichtbar zu machen)	**450** $\cdot 10^{6}$	**530** $\cdot 10^{6}$
400			**250** $\cdot 10^{6}$	**310** $\cdot 10^{6}$
500	$= 20\lambda = \frac{1}{2}L$		**170** $\cdot 10^{6}$	**210** $\cdot 10^{6}$
600			114 $\cdot 10^{6}$	**160** $\cdot 10^{6}$
800			64 $\cdot 10^{6}$	**96** $\cdot 10^{6}$
1 000	$= 30\lambda = L$		42 $\cdot 10^{6}$	**67** $\cdot 10^{6}$
2 000			10 $\cdot 10^{6}$	**25** $\cdot 10^{6}$
3 000	$= 100\lambda = 3L$		**4,6** $\cdot 10^{6}$	**14** $\cdot 10^{6}$
4 000			**2,6** $\cdot 10^{6}$	**9,4** $\cdot 10^{6}$
5 000	$= 200\lambda = 5L$		1,65 $\cdot 10^{6}$	**7,1** $\cdot 10^{6}$
6 000			1,15 $\cdot 10^{6}$	**5,7** $\cdot 10^{6}$
8 000			0,64 $\cdot 10^{6}$	**4,1** $\cdot 10^{6}$
10 000	$= 300\lambda = 10L$	(Mikroskopisch abbildbar)	0,42 $\cdot 10^{6}$	**3,2** $\cdot 10^{6}$

Die Tabelle IV zeigt die Resultate. Man sieht, daß $\omega_{g\,A}/K$ und $\omega_{h\,A}/K$ im mittleren Teile der Tabelle zusammenfallen. Trägt man die beiden Größen als Funktionen von R graphisch auf, so bilden sie zwei Kurven, die in dieser mittleren Radiengegend zusammentreffen, und zwar *durch Berührung*, nicht durch Schnitt, so daß der Übergang von der einen zur anderen Kurve dort ohne Sprung im Differentialquotienten $d\omega/dR$ vor

1) Im Gültigkeitsbereich der betreffenden Gleichung befindliche Zahlen sind fett gedruckt. Die horizontale Linie gibt die Grenze des Einflusses der Masse an (vgl. die 1. Fußnote zu 166).

sich geht.[1]) Man sieht aus der Tabelle auch, daß die Berührung sehr flach ist, so daß ω_g und ω_h längs einer großen Strecke — von etwa $R = 30 \cdot 10^{-8}$ cm bis $R = 500 \cdot 10^{-8}$ cm in der Tabelle — sehr nahe gemeinsamen Lauf haben. Dies muß also die Gegend sein, in welcher die Gültigkeitsbereiche der beiden Gleichungen aneinander grenzen, und man sieht aus der 2. Spalte der Tabelle, worin Radienwerte in Vielfachen von λ und L ausgedrückt sind, daß es sich in der Tat um die nach unseren Überlegungen zu erwartende Gegend $\lambda < R < L$ handelt (vgl. 160). $\omega_{g\,A}/K$ ist dabei sowohl bei größeren als bei kleineren R unterhalb $\omega_{h\,A}/K$ gelegen, was wir im einzelnen weiter unten erklären (169).

167. Will man bei gegebener Kraft K die Wanderungsgeschwindigkeit als Funktion des Partikelradius R aus der Tabelle entnehmen, so hat man — ausgehend von kleinsten Radien — zunächst der Zahlenreihe $\omega_{g\,A}/K$ zu folgen, bis beim Passieren der Gegend der Übereinstimmung der Übergang in die Zahlenreihe der $\omega_{h\,A}/K$ erfolgt, welche dann bis zu den größten Radien maßgebend bleibt. Die hiernach jeweils der Wirklichkeit entsprechenden Zahlen sind in der Tabelle fett gedruckt.

168. Der vortreffliche Aneinanderschluß der gaskinetischen und der hydrodynamischen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichungen, welche im gewählten Beispielsfalle verdeutlicht ist, gilt aber nicht nur für diesen Fall der gewöhnlichen Luft von Zimmertemperatur, sondern für alle gasförmigen Medien, in-

1) Die graphische Darstellung ist wegen des weit verschiedene Größenordnungen umfassenden Bereiches sowohl von R als von ω in kleinem Maßstab nicht befriedigend ausführbar, weshalb auf dieselbe hier verzichtet worden ist. Eine graphische Darstellung des Laufes der Cunninghamschen Gleichung zusammen mit dem meiner Gleichung von 1900 [Gl. (1)] findet man bei F. Walter, Diss., Heidelberg, Mai 1918. Man sieht dort die beiden Kurven unter spitzem Winkel sich schneiden, und ein zweiter Schnittpunkt liegt außerhalb des dortigen Zeichnungsfeldes. Erst die in den Abschnitten 1 und 2 der vorliegenden zu Gl. (1) hinzugefügten Verfeinerungen und die etwas veränderte Annahme des Koeffizienten A in der Cunninghamschen Gleichung [vgl. 162 und Gl. (94)] haben den zweifachen Schnitt in die oben erläuterte, den ganzen Abstand der beiden Schnittpunkte umfassende flache Berührung verwandelt.

sofern in diesen stets L und also auch R so viel größer ist als r, daß der spezielle Wert dieser letzteren Größe nahezu einflußlos bleibt und insofern in ihnen für ι die oben angegebene Gleichung der kinetischen Gastheorie gilt, welche zeigt, daß die speziellen Werte von D und W ebenfalls aus den Quotienten der beiden Wanderungsgeschwindigkeitsausdrücke herausfallen.

169. Im einzelnen ist zur Vergleichung des Laufes von ω_g und ω_h noch das Folgende zu bemerken (geltend für alle Stoßfälle $A - D$): *Für die gaskinetische Gleichung* ω_g ist einzusehen, daß sie *jenseits ihrer Gültigkeitsgrenze*, d. i. bei $R \gtrless L$ — wenn wir Gase betrachten —, *zu kleine Werte der Wanderungsgeschwindigkeit geben muß*. Denn sie verlegt den Geschwindigkeitsabfall an der Partikeloberfläche stets auf die Strecke L (vgl. 159), und dies ist jenseits der Gültigkeitsgrenze zu wenig, da dort dieser Geschwindigkeitsabfall unzweifelhaft (nach den dort geltenden hydrodynamischen Gleichungen) stets auf Strecken von der Größenordnung $R (> L)$ verteilt ist: wenn aber das Geschwindigkeitsgefälle auf zu keine Strecken konzentriert angenommen ist, muß der Reibungswiderstand zu groß, die Wanderungsgeschwindigkeit also zu klein gefunden werden[1], wie es die Zahlen im unteren Teil der Tabelle auch deutlich zeigen, wo ω_h bereits in allen angegebenen Zahlenstellen als richtig zu erwarten ist.[2]

Für die hydrodynamische Geschwindigkeitsgleichung ω_h *kann beim Überschreiten der Grenze von deren Gültigkeitsbereich*, wenn also $R \gtrless \lambda$ wird, *wieder derselbe Schluß* gezogen werden, daß sie *zu kleine Werte der Wanderungsgeschwindigkeit* ergeben müsse. Denn betrachten wir wieder Gase, so ist $L > \lambda$, also an und jenseits der Gültigkeitsgrenze auch $L > R$, und es ist also die

1) Man kommt zu demselben Resultat, wenn man — statt das Geschwindigkeitsgefälle zu beachten — berücksichtigt, daß jenseits der Gültigkeitsgrenze die mit dem Partikel zum Zusammenstoß kommenden Mediumsmoleküle bereits eine Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Wanderung besitzen, was bei der Ableitung von ω_g nicht berücksichtigt ist (vgl. 159).

2) Auch für Flüssigkeiten gilt dieselbe Überlegung, wonach die gaskinetische Gleichung außerhalb ihres Gültigkeitsbereiches zu kleine Wanderungsgeschwindigkeit erwarten läßt, nur daß hier λ an Stelle von L tritt.

für das Geschwindigkeitsgefälle in der hydrodynamischen Lösung angenommene Strecke von der Ordnung R hier wieder zu klein, da dies Gefälle (nach stets treffender Vorstellung der kinetischen Theorie) jedenfalls mindestens bis zum Abstande L von der Partikeloberfläche sich erstrecken muß; man wird also wieder zu kleine Werte der Wanderungsgeschwindigkeit erhalten.[1])

Überschreitet man die Gültigkeitsgrenze von ω_h genügend weit, so muß schließlich allerdings stets die entgegengesetzte Abweichung eintreten — es muß *bei sehr kleinen Partikelradien* ω_h *stets zu groß* ausfallen —, wovon der Grund die dann in zunehmendem Maße zu grobe Struktur des Mediums ist, was wieder für Gase und Flüssigkeiten gemeinsam gilt.[2]) Wenig außer-

1) Es lassen demnach in der Umgebung der — ungefähr gemeinsamen — Gültigkeitsgrenze der gaskinetischen und der hydrodynamischen Gleichung *beide zu kleine* Werte der Wanderungsgeschwindigkeit erwarten, und da die Gültigkeitsgrenzen beider Gleichungen einen verwaschenen Übergang durch angenäherte Gültigkeit zu Ungültigkeit bedeuten, so könnte es sein, daß für diese Wertgegend von R (etwa bei 50 bis $300 \cdot 10^{-8}$ cm im Beispiel unserer Tabelle) trotz naher Übereinstimmung der beiden Lösungen doch nicht der richtige Wert der Wanderungsgeschwindigkeit durch dieselben gegeben würde, sondern ein zu kleiner Wert. Es ist dies jedoch nach Maßgabe der Erfüllung der für die Gültigkeit bestehenden Ungleichheitsbedingungen bei nicht sehr dichten Gasen nur in geringem Maße zu erwarten. So würde die Abweichung für den am ungünstigsten liegenden Radienwert bei Luft von 1 Atm. schätzungsweise doch nur 10 v. H. und bei Luft von $^1/_{100}$ Atm. nur 1 v. H. betragen können.

Auch für flüssige Medien könnte wie oben gefolgert werden, daß ω_h dicht außerhalb der Gültigkeitsgrenze zu klein sei, obgleich $L < \lambda$ ist; denn die Bewegung mit der Amplitude L geht doch in der Dicke λ einer ganzen Molekülschicht um das Partikel vor sich, und es ist also die für das Geschwindigkeitsgefälle in der hydrodynamischen Lösung angenommene Strecke von der Ordnung R wieder zu klein, sobald $R < \lambda$ wird. Der Vorgang der inneren Reibung ist jedoch bei Flüssigkeiten komplizierter als bei Gasen, was die Überlegung bei diesen Medien erschwert (vgl. 176, 177).

2) Die hydrodynamische Gleichung nimmt das Geschwindigkeitsgefälle als stetig an. In Wirklichkeit sind aber die Geschwindigkeitsunterschiede auf die Zwischenräume der Moleküle beschränkt. Die Gleichung rechnet also mit kleineren Geschwindigkeitsgefällen als der Wirklichkeit entspricht, und sie muß daher zu wenig Reibung, d. i. zu große Geschwindigkeit ergeben, sobald die Diskontinuitäten des Mediums überhaupt in Betracht kommen.

halb der Gültigkeitsgrenze können die beiden entgegengesetzten Abweichungen von ω_h einander aufheben, und dies darf wohl als Ursache der in Tabelle 4 (3. und 4. Zeile) ersichtlichen, bis zu sehr kleinen, schon außerhalb der Gültigkeitsgrenze von ω_h liegenden Radienwerten hin fortgesetzten ziemlich guten Übereinstimmung von ω_g und ω_h, ohne Auftreten zu kleiner Werte von ω_h, angesehen werden.[1]) Das schließliche Eintreten zu großer Werte von ω_h bei kleinsten Radien ist in der Tabelle gut ersichtlich (1. und 2. Zeile); es kann dort unzweifelhaft nur ω_g Gültigkeit haben.

Abschnitt 9. Flüssige Medien; elektrolytische Ionen.

Wir wenden auch auf Flüssigkeiten sowohl die hydrodynamische als die gaskinetische Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung an[2]), jede in ihrem Gültigkeitsbereich. Es handelt

1) Ein Fall, in welchem die erwartete Abweichung $\omega_h < \omega_g$ bei kleinen Radien tatsächlich auftritt, ist der der Wanderung von H_3-Molekülen in Luft von 1 Atm. Druck und 20° C. Man berechnet hier $\omega_h / K = 40{,}3 \cdot 10^{12}$. $\omega_g / K = 42{,}2 \cdot 10^{12}$ cm/sec dyn., wobei natürlich nur der letztere, gaskinetische Wert innerhalb der Gültigkeitsgrenze der betreffenden Gleichung liegt.

2) Die Anwendbarkeit der gaskinetischen Betrachtungsweise auf Flüssigkeiten nehme ich als genügend gesichert an. Grundlage hiervon ist das wohl nicht zu bezweifelnde Verschwinden der mittleren resultierenden Molekularkraft im Inneren der Flüssigkeit, so daß nur die Stoßwirkungen der Moleküle als bestimmend für deren Bewegungen übrig bleiben. Ein Unterschied gegenüber den Gasen besteht (außer in den quantitativen Verhältnissen) nur darin, daß die Kräftefreiheit für die Flüssigkeitsmoleküle nur im Mittel (genommen mit Größe und Richtung der augenblicklichen Kräfte) über eine Anzahl Weglängen (und bei konstanten mittleren Abständen der Moleküle) gilt, während sie bei Gasen (mit großer Annäherung) dauernd besteht. Dieser Unterschied kann wohl die exakte, nicht aber eine gut angenäherte Gültigkeit der gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung für Flüssigkeiten zweifelhaft machen. Im Erfolg ist die gute Anwendbarkeit gaskinetischer Resultate auf Flüssigkeiten auch bereits mehrfach bestätigt. So durch die Brauchbarkeit von van der Waals' Gleichung weit über die kritische Dichte hinaus, durch die gute Berechenbarkeit der Diffusion in Flüssigkeiten bei Annahme einer auch sonst widerspruchsfreien Größe der freien Weglängen der Flüssigkeitsmoleküle (vgl. Riecke, Zeitschr. f. phys. Ch. 6. S. 564, 1890), wozu weitergehend auch die neueren Erfolge in der quantitativen Beherrschung der Wimmelbewegung (Brownschen Bewegung) und der räumlichen Verteilung kleinster suspendierter Teilchen

sich dabei hier vor allem um die Untersuchung der Besonderheiten, welche beim flüssigen Aggregatzustand auftreten, sodann um die Behandlung des wichtigen Sonderfalles der Ionenwanderung.

170. *Freiraumfaktor* Ψ. — In Flüssigkeiten ist zu der für Gase genügend genau geltenden gewöhnlichen Gleichung für die mittlere freie Weglänge L_t des Partikels[1]) noch ein Faktor Ψ hinzuzufügen, welcher die Raumerfüllung der Moleküle berücksichtigt. Man hat dann

$$L_t = \frac{W_t \Psi}{N \pi s^2 \sqrt{W_t^2 + W^2}}. \tag{95}$$

Dabei ist in der Bezeichnungsweise der van der Waalsschen Gleichung,

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \tag{96}$$

$$\Psi = \frac{v - b}{v} \tag{97}$$

zu setzen. Denn der Sinn der gewöhnlichen Ableitungsweise der freien Weglänge, wobei dieselbe ohne den Faktor Ψ erscheint, ist der, daß man die Länge des Zylinders vom Querschnitte $s^2\pi$ sucht, dessen Volumen $1/N$ ist, wozu dann noch die Hinzufügung des Faktors $W_t / \sqrt{W_t^2 + W^2}$ kommt, welcher die Bewegung der Mediumsmoleküle berücksichtigt. Hierbei sind die Mediumsmoleküle sowohl als das Partikel als volumlose flache Gebilde angenommen, deren Flächen stets senkrecht zur Partikelbahn gerichtet sind. Letzteres ist treffend, da die für das Stattfinden eines Zusammenstoßes maßgebenden Querschnitte der für einen richtigen Weglängenmittelwert kugelförmig zu denkenden Mediumsmoleküle sowohl als des Partikels in der Tat stets senkrecht zur Bahnrichtung stehen; nur ist noch zu beachten, daß ein durchschnittlicher Zusammenstoß nicht erst dann stattfindet, wenn das Partikel mit seinem gedachten, sowohl seine eigene Breite als die der Mediumsmoleküle berück-

in Flüssigkeiten zu nennen sind (Einstein, Perrin) und endlich durch die einfache Berechenbarkeit des osmotischen Druckes (vgl. P. Lenard, „Probl. kompl. Mol.", Teil I, 1914). Eine spezielle Probe auf die Kräftefreiheit der Flüssigkeitsmoleküle bringen wir unter 177.

1) Vgl. Teil I, S. 401.

sichtigenden Querschnitt $s^2\pi$ seit dem letzten Zusammenstoß das Volum $1/N$ beschrieben hat, in welchem durchschnittlich ein Mediumsmolekül sich findet, sondern schon dann, wenn dasjenige Volum beschrieben ist, welches als von für das Partikel undurchdringlichem Molekularvolum freier Raum zu je einem Mediumsmolekül gehört. Dieses letztere tatsächlich in Rechnung zu setzende Volum verhält sich aber zum angenommenen, $1/N$, wie $(v-b)$ zu v und in demselben Verhältnis Ψ muß daher die ohne Rücksicht auf die Raumerfüllung berechnete Weglänge zur wirklichen stehen, was zu beweisen war.[1])

Man kann auch, der Bedeutung der Größe b nach, setzen

(97a) $$\Psi = 1 - z\beta\,,$$

wobei β das bei den Zusammenstößen undurchdringliche Eigenvolum der Mediumsmoleküle als Bruchteil des Gesamtvolums des Mediums und z eine Zahl ist, die beim kritischen Zustand oder bei verdünnterem Zustande 4 beträgt, bei größerer Dichte des Mediums aber kleiner wird, ohne jedoch bis 1 zu gehen.[2]) Die Gl. (97a) ist geeignet, eine Abschätzung der Größe Ψ zu liefern. Es ist z. B. im kritischen Zustand für alle Stoffe nahe $\beta = \frac{1}{10}$, also $\Psi = 0{,}6$. In anderen Zuständen ist demnach:

(97b) $$\beta = \frac{D}{10\,d_k}$$

und also:

(97c) $$\Psi = 1 - \frac{1}{10}\frac{D}{d_k}\,,$$

wenn D die Dichte im betreffenden Zustand, d_k die kritische Dichte ist. Wegen der unsicheren Kenntnis von z ist aber

1) Es scheint über den wahren Wert des Faktors Ψ nicht vollkommene Klarheit in der Literatur zu herrschen, wenn es sich, wie im vorliegenden, um die Weglänge eines fremden Moleküls in einer Flüssigkeit handelt, weshalb hier ausführlich der Gedankengang dargelegt worden ist, der für das Vorliegende zur Annahme der Gl. (97) für Ψ geführt hat. Vgl. das oben Folgende und die zugehörige zweitfolgende Fußnote.

2) Vgl. van der Waals „Kontinuität", Bd. I, S. 54 u. f. (Leipzig 1899). Eine Zusammenstellung verschiedener, für gewisse Fälle geltender, z betreffender Annahmen vgl. bei R. Lorenz, Zeitschr. f. anorg. Ch. 94. S. 262. 1916.

diese Berechnungsweise von Ψ bei Dichten, welche die kritische wesentlich überschreiten, im allgemeinen unbefriedigend.[1]) Von vornherein unzweifelhaft ist nur, daß Ψ bei wachsender Dichte der Null sich nähern muß, so daß für alle tropfbaren Flüssigkeiten $0{,}6 > \Psi > 0$ ist.

Für Wasser ($d_k = 0{,}33$) ist bei gewöhnlichen Temperaturen und Drucken $\beta = 0{,}30$ [Gl. (97b)] Setzt man $z = 3$, so wird nach Gl. 97a $\Psi = 0{,}1$; mit $z = 2$ würde $\Psi = 0{,}4$. Die Wirklichkeit muß nach dem über z Bemerkten wohl zwischen beiden Werten liegen. Eine bessere Berechnung von β, mittels Gl. (97), aus der Kompressibilität, geben wir unter 172.[2])

171. *Die mittlere freie Weglänge L der Moleküle des flüssigen Mediums* selbst wird nach Gl. 95 ($W_1 = W$, $s = 2r$)

$$L = \frac{\Psi}{4\sqrt{2}\,N\pi r^2},$$

was nach der Bedeutung von β und nach (Gl. 97b) auch geschrieben werden kann:

$$(98) \qquad L = \frac{\Psi r}{4\sqrt{2}\,N\pi r^3} = \frac{\Psi r}{3\sqrt{2}\,\beta} = \frac{10\,\Psi r\,d_k}{3\sqrt{2}\,D}.$$

1) Auch zur richtigen Herleitung des Zusammenhanges zwischen Ψ und den Raumerfüllungen der Mediumsmoleküle und des Partikels erscheinen Gedankengänge, welche, wie Gl. (97a) und (c), die Zwischenschaltung der Größe $\varkappa$ erfordern, nicht günstig. Folgt man z. B. dem bei O. E. Meyer („Kinetische Gastheorie", Breslau 1899, S. 76 uff. der mathem. Zusätze) benutzten Gedankengange und führt ihn für den Fall des von den Mediumsmolekülen verschiedenen Partikels durch, so erhält man $\Psi = 1 - \varkappa\beta(s/2r)^3$, wonach diese Größe nicht Konstante des Mediums allein, sondern auch vom Partikelradius abhängig wäre. Man sieht aber, daß nach dieser Gleichung bei einiger Größe des Partikels ($s > 2r$) sofort negative, also unsinnige Werte von Ψ erfolgen würden, wenn man nicht $\varkappa$ ebenfalls Funktion des Partikelradius sein läßt, was unmittelbar anzeigt, daß die Gleichungen, welche Ψ mittels eines gewissen $\varkappa$-fachen Molekularvolums ausdrücken, für unseren Fall des von den Mediumsmolekülen verschiedenen Partikels praktisch unbrauchbar sind. Hiermit stimmt auch überein, daß nach van der Waals Bemerkungen (a. a. O.) $\varkappa$ von der schwer in Rechnung zu bringenden relativen Häufigkeit der zentralen und der schiefen Zusammenstöße abhängig erscheint. Wir haben daher im obigen von Anfang an die von $\varkappa$ unabhängige Gl. (97) in den Vordergrund gestellt.

2) Eine bei van der Waals (a. a. O. S. 65) angegebene Gleichung liefert keine engere Grenze; sie zeigt für Wasser nur $\varkappa > 1{,}44$, somit $\Psi < 0{,}57$ an.

Im kritischen Zustand ist demnach für alle Stoffe $L = \sqrt{2}r$ und für Wasser im gewöhnlichen Zustand, sowie für alle Körper in korrespondierenden Zuständen ergibt sich mit den vorhergenannten Daten $0{,}3r > L > 0{,}08r$. Die freie Weglänge, welche im Gaszustand groß ist gegenüber dem Molekülradius, wird also bei Flüssigkeiten, deren Dichte die kritische wesentlich übertrifft, klein gegenüber diesem Radius, und da bei solchen Flüssigkeiten λ nicht weit von $2r$ verschieden ist, so ist gleichzeitig mit $L < r$ auch $L < \lambda$. Es sind dies die in den vorhergehenden Abschnittten bereits mehrfach benutzten Ungleichheiten.

172. *Ψ aus der Kompressibilität.* — Der direkteste Weg zur Kenntnis des Freiraumfaktors Ψ führt nach Gl. (96) und (97) über die Kompressibilität. Denn diese ist in erster Linie bedingt durch die zwischen den Molekülen verfügbaren freien Zwischenräume; sie muß also über $(v-b)/v$ Auskunft geben. Man hat nach van der Waals Gleichung (96) bei konstanter Temperatur:

$$(p + P)(v - b) = \text{Konst.}, \tag{99}$$

wobei wir hier für den inneren Druck oder „Normaldruck" das Zeichen P gesetzt haben, um die für wesentlich überkritische Dichten zweifelhafte Annahme $P = a/v^2$ für die genaue Berechnung vermeidbar zu machen. Die Kompressibilität ist in ihrer gewöhnlichen Meßweise:

$$\gamma = -\frac{dv}{dp} \cdot \frac{1}{v};$$

um diese in Gl. (99) einzuführen, ist dieselbe zu differenzieren, wobei

$$(v-b)\left(1 - \gamma v \frac{dP}{dv}\right) = Pv\gamma \tag{99a}$$

wird[1]), woraus mit Gl. (97)

$$\Psi = \frac{P\gamma}{1 - \gamma v \dfrac{dP}{dv}}.$$

Es müssen also, um Ψ zu berechnen, außer γ auch P und dP/dv bekannt sein. Für letztere Größe kann man zunächst in Annäherung $-2P/v$ setzen, was $P = a/v^2$ entspricht.

1) p verschwindet als Summand neben P.

Am schlechtesten bekannt ist der Normaldruck P. Ich habe denselben für Wasser von gewöhnlicher Temperatur mittels des angenähert konstanten Wertes 0,4 des Verhältnisses zwischen Wirkungssphärenmaß und Molekülradius (für alle Flüssigkeiten bei gewöhnlicher Temperatur) früher zu $P = 80 \cdot 10^6$ dyn/cm^2 = 8000 Atm. berechnet[1], und wir werden diesen Wert im folgenden benutzen, wobei er Kontrolle erfährt und auf keine Widersprüche stößt. Die aus der soeben angegebenen Berechnung folgende Unsicherheit von P entspricht der der Allgemeingültigkeit bzw. Konstanz des angegebenen Verhältnisses 0,4, wonach jedenfalls etwa 6000 Atm. $< P <$ 10000 Atm. zu denken ist. Man berechnet hiermit und mit dem weiter unten angegebenen Werte von γ nach Gl. (99a) $\psi = 0{,}22$, was gut in die vorher (170) für Wasser angegebenen Grenzen paßt.

Um die Annahme $P = a/v^2$ zu prüfen, bzw. auszuschalten, kann die bekannte Abhängigkeit der Kompressibilität vom Druck benutzt werden. Um diese einzuführen, ist Gl. (99a) nochmals zu differenzieren: man erhält so, wieder nach Weglassung von p neben P:

$$(100) \qquad v\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{2\gamma - \left(\gamma^2 - \frac{\partial \gamma}{\partial p}\right)P - \gamma^2 v^2 \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}}{2\gamma^2 + \left(\gamma^2 - \frac{\partial \gamma}{\partial p}\right)\psi}\psi \quad .$$

Hierin darf in $\partial^2 P/\partial v^2$ unzweifelhaft genügend genau $P = a/v^2$ gesetzt werden, da das betreffende Glied hiermit nur $^1/_{30}$ des Gesamtwertes des Zählers erhält, also innerhalb der hier erreichbaren Genauigkeit überhaupt kaum von Einfluß ist. Dadurch wird:

$$(100a) \qquad v\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{2\gamma - \left(\gamma^2 - \frac{\partial \gamma}{\partial p} + 6\psi\gamma^2\right)P}{2\gamma^2 + \left(\gamma^2 - \frac{\partial \gamma}{\partial p}\right)\psi}\psi \quad .$$

1) Vgl. „Probleme komplexer Moleküle" (Heidelberg, bei Winter, 1914), Teil II. S. 5—7. (In der für Benzol geltenden Zeile der dortigen Tab. I sind übrigens die dortigen Angaben zu ersetzen durch: C_6H_6. $r = 2{,}84$, $\lambda/r = 0{,}53$, was jedoch nichts dort oder hier Geschlossenes ändert). Die Schwierigkeit bei Wasser liegt in der Polymerisation seiner Moleküle, weshalb sowohl die van der Waalssche Gleichung als auch andere bekannte Wege zur Berechnung von P bei dieser Flüssigkeit versagen.

Die zur Zahlenberechnung benutzbaren Messungsresultate von Amagat sind[1]:

Kompressibilität des Wassers von 20° C. { zw. 0 und 25 Atm. $\gamma = 0{,}0000491/\text{Atm.}$ „ 25 „ 50 „ $\gamma = 0{,}0000476/\text{Atm.}$,

wonach $\partial\gamma/\partial p = -0{,}000000060/\text{Atm.}^2$ zu zetzen ist bei einem mittleren Wert von $\gamma = 0{,}0000484/\text{Atm.}$[2] Man erhält hiermit, $P = 8000$ Atm. und $\Psi = 0{,}2$ gesetzt:

$$v\,\frac{\partial P}{\partial v} = -\,25000 \text{ Atm.},$$

während die van der Waalssche Annahme ($P = a/v^2$)

$$v\,\frac{\partial P}{\partial v} = -\,2P = -\,16000 \text{ Atm.}$$

ergäbe. Der Unterschied ist also nicht groß.[3]

Berechnet man mit dem ersteren, nach der Erfahrung verbesserten Wert von $v\,\partial P/\partial v$ Ψ von neuem nach Gl. (99a), so findet man $\Psi = 0{,}18$, und die Fortsetzung des Verfahrens, indem man mit dem neuen Ψ wieder $v\,\partial P/\partial v$ nach Gl. (100a) verbessert und so fort in sukzessiver Annäherung, ergibt schließlich:

$$v\,\partial P/\partial v = -\,28000 \text{ Atm. und } \Psi = 0{,}17.$$

Dieser Wert enthält allerdings noch die Unsicherheit, welche dem angenommenen Wert $P = 8000$ Atm. anhaftet; es könnte demnach, dem oben über diese Unsicherheit Angegebenen entsprechend, etwa

$$0{,}13 < \Psi < 0{,}21$$

1) Entnommen Landolt und Börnsteins Tabellen (1912. S. 62).

2) Unsere Resultate werden sich demnach auf einen äußeren Druck von 25 Atm. beziehen, was aber gegen den gewöhnlichen Druck von 1 Atm. bei der geringen Kompressibilität des Wassers keinen wesentlichen Unterschied bedeuten kann.

3) Dem Sinne nach ist der Unterschied verständlich. Der Zuwachs des inneren Druckes bei Volumverminderung muß bei der großen gegenseitigen Nähe, in welcher die Moleküle in flüssigem Wasser sich befinden, in der Tat größer erwartet werden als nach der für größere Molekülabstände passenden van der Waalsschen Annahme. Denn die Molekularkräfte wachsen mit abnehmendem Abstand der Moleküle gegen die Berührung hin wohl unzweifelhaft nach viel höherer Abstandspotenz als in größeren Abständen; außerdem spielt vielleicht die Polymerisation der Wassermoleküle eine Rolle (vgl. die zweitfolgende Note).

sein, geltend für Wasser von 20° C. bei gewöhnlichen Drucken [und nahezu wohl auch für andere Flüssigkeiten in korrespondierenden Zuständen[1]]. Wir finden die untere Grenze im weiteren bestätigt, indem dort aus ganz anderen Gründen $\Psi > 0{,}1$ erwartet wird, und da für Wasser Ψ — und damit auch die obere Grenze — mittels Gl. (99a) nur zu hoch zu erwarten ist[2]), so kann die Einschließung von Ψ in den angegebenen Grenzen als einigermaßen gut gesichert angesehen werden. Sie bestätigt sich außerdem bei Anwendung von Ψ im weiter Folgenden (180).

Benutzt man den mittleren Wert $\Psi = 0{,}17$, so ergibt sich für Wasser von 20° C. aus Gl. (97a) $z = 2{,}8$ und aus Gl. (98) das Verhältnis von Weglänge und Molekülradius $L/r = 0{,}13$. Die freie Weglänge selbst wäre demnach $L = 0{,}32 \cdot 10^{-8}$ cm (geltend für H_4O_2 Moleküle, $r = 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ cm).

173. *Der gaskinetische Wanderungsgeschwindigkeitsausdruck* nimmt mit dem Freiraumfaktor Ψ zur freien Weglänge, da letzterer im Zähler des Ausdruckes vorkommt [vgl. Gl. (21)], für Flüssigkeiten die Form an:

$$(101)\quad \left|\begin{array}{l} \omega_g = \dfrac{3}{3+\mu}\,\Omega_\mu \dfrac{K}{D\pi s^2 W}\,\dfrac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}}\,\Psi \\ \quad = \dfrac{3}{3+\mu}\left(\dfrac{4}{\pi}\,\dfrac{1-\mu}{\sqrt{\mu}} + \sqrt{\mu}\right)\dfrac{K}{D\pi s^2 W}\,\Psi, \end{array}\right.$$

wobei Fall *A* (elastische Reflexion) vorausgesetzt ist [für Ω_μ vgl. Gl. (8)].[3])

1) Strenge genommen muß Ψ auch von der Form der Moleküle abhängen, wonach genaue Gleichheit bei korrespondierenden Zuständen nicht erwartet werden kann.

2) Es spielt bei der Kompressibilität des Wassers wohl unzweifelhaft die Polymerisation der Wassermoleküle eine Rolle, was schon dadurch angezeigt ist, daß die Kompressibilität dieser Flüssigkeit mit steigender Temperatur (bis 50° C.) nicht steigt wie bei anderen Flüssigkeiten, sondern sinkt. Komprimiert man Wasser bei konstanter Temperatur, wie oben berechnet, so ist daher anzunehmen, daß ein Teil der Moleküle in die weniger Raum beanspruchende Modifikation übergeht (H_4O_2 in $2H_2O$). Dies würde aber die Folge haben, daß die Kompressibilität größer ausfällt, als es nur den Zwischenräumen bei unveränderten Molekülen entspräche. Die Zwischenräume und also auch Ψ müßten demnach oben aus der Kompressibilität zu groß berechnet sein.

3) Fall *C* ergibt dasselbe; die für die Fälle *B* und *D* hinzutretenden Faktoren sind aus Abschnitt 6 ersichtlich. Es ist zu bemerken, daß die

Das Gültigkeitsbereich haben wir bereits zu $R \leqq \lambda$ angegeben (159). Die Gleichung könnte demnach z. B. für freie Elektronen in flüssigen Edelgasen in Betracht kommen (vgl. Tab. V, oberste Zeile[1]), aber auch der Fall der gewöhnlichen nicht sehr großen elektrolytischen Ionen liegt noch innerhalb ihres Bereiches, wie das Folgende zeigen wird (178 u. ff.).

Jenseits der Gültigkeitsgrenze läßt die Gleichung zu kleine Werte der Wanderungsgeschwindigkeit erwarten (169) und ebenso also zu kleine Werte der Partikelradien, wenn man diese aus beobachteten Wanderungsgeschwindigkeiten berechnet. Man findet dies am Beispiel des Wassers bestätigt (Tab. V). Die Bestätigung bliebe aus, wenn nicht $\Psi > 0{,}10$ wäre, und da diese Bedingung für Ψ mit der oben (172) auf ganz anderem Wege gefundenen, $\Psi > 0{,}13$, gut übereinstimmt, sehen wir bei Wasser als Medium unsere Annahme über die Gültigkeit der Gl. (101) mit $\Psi = 0{,}17$ und über die Grenze der Gültigkeit als bestätigt an.

174. *Der hydrodynamische Wanderungsgeschwindigkeitsausdruck* ω_h [Gl. (84)] nimmt bei Flüssigkeiten innerhalb seines Gültigkeitsbereiches, $R > \lambda$ (156), die einfache ursprüngliche (Stokes-Kirchhoffsche) Form an [Gl. (83)], da in diesen Medien bei $R > \lambda$ $R \gg L$ ist (vgl. 171). Das Gültigkeitsbereich umfaßt alle beliebig großen wirbelfrei bewegten Partikel bis herab zu vielleicht 6fachem Mediumsmoleküldurchmesser ($R = 3\lambda$). Die Ionen in wässerigen Elektrolyten fallen, wie das Folgende zeigt (178 u. ff.), schon eben deutlich außerhalb des Gültigkeitsbereiches. Einzelheiten bei Überschreitung der Gültigkeitsgrenze betrachten wir unter 175 und 176.

175. *Einen Vergleich der gaskinetisch und der hydrodynamisch berechneten Wanderungsgeschwindigkeiten* gibt Tab. V [Spalten 4 und 5, nach Gl. (101) bzw. (84)] *für Wasser als Medium.*

Fälle *A* und *C* für flüssige Medien am meisten in Betracht kommen (vgl. Abschnitt 5), da das Gültigkeitsbereich der gaskinetischen Gleichung hier auf kleinste Partikel eingeschränkt ist (vgl. Abschnitt 8 und das oben Folgende; in Gasen erstreckt sich das Gültigkeitsbereich der Gleichung auf viel größere Partikel, was beispielsweise ein Vergleich von Tab. IV mit V unmittelbar ersichtlich macht).

1) Echte Reflexion der Elektronen an den Atomen vorausgesetzt.

Tabelle V.

Gaskinetisch und hydrodynamisch berechnete Wanderungsgeschwindigkeiten in Wasser (20° C.).

Partikelradius R			Massenverhältnis μ	Wanderungsgeschwindigkeit cm sec^{-1} dyn^{-1}			
						ω/K	
10^{-8} cm	in Vielfachen von r und λ (rund)			ω_u/K *)	ω_h/K *)	linear interpol.	graph. interpol.
0	(freie Elektronen in flüssigem Stickstoff oder Argon)		0,00002	5,8 $\cdot 10^{12}$	∞		
0,5		(Verschiedene elektrolytische Ionen)	0,35 [1])	**34** $\cdot 10^{8}$	**20** $\cdot 10^{8}$		
1			0,50 [2])	**14** „	7,7 „		
2	$= r$		0,60 [3])	7,2 „	3,2 „		
3			0,80 [4])	3,8 „	2,0 „		
4			0,90 [5])	2,4 „	1,5 „		
5	$= \lambda\,(= 2r)$		0,95	1,7 „	1,2 „	**1,7** $\cdot 10^{8}$	**1,7** $\cdot 10^{8}$
6			1 [6])	*1,2* „	0,95 „	*1,6* „	**1,3** „
8		(Größere komplexe Moleküle)	1	*0,81* „	0,70 „	*1,3* „	**0,87** „
10	$= 2\lambda$		1	*0,57* „	0,55 „	*1,0* „	**0,64** „
12			1	0,42 „	*0,45* „	*0,8* „	**0,50** „
15	$= 3\lambda$		1	0,29 „	**0,36** „	*0,36* „	**0,37** „
20			1	0,17 „	**0,27** „		
30			1	0,083 „	**0,18** „		
50	$= 10\lambda$	(Ultramikroskopische Partikel)	1	0,032 „	**0,11** „		
100			1	8,4 $\cdot 10^{5}$	**53** $\cdot 10^{5}$		
500	$= 100\lambda$		1	0,35 „	**10,6** „		
1000			1	0,087 „	**5,3** „		
5000	$= 1000\lambda$	Mikroskop. Partikel)	1	0,0035 „	**1,06** „		
10000			1	0,0009 „	**0,53** „		

*) Im Gültigkeitsbereich der betreffenden Gleichung befindliche Zahlen sind fett gedruckt.

Die für die Partikelmassen (Spalte 3, zur Berechnung von ω_g) gemachten Annahmen sind aus den Fußnoten zur Tabelle ersichtlich. Man sieht ein, daß die Masse überhaupt nur bei Radien unter etwa $6 \cdot 10^{-8}$ cm eine merkliche Rolle spielen

1) Entspricht etwa einem H-Ion mit $1 H_2O$.
2) „ „ „ „ „ $2 H_2O$.
3) „ „ „ OH-Ion „ $3 H_2O$.
4) „ „ „ K-Ion „ $6 H_2O$.
5) „ „ „ Na-Ion „ $17 H_2O$.

6) Entspricht den größten, aus sehr vielen Atomen zusammengesetzten Ionen. Bei allen noch größeren Partikeln gilt ebenfalls das Massenverhältnis $\mu = 1$ in vollkommen genügender Annäherung, auch wenn sie aus leichtest möglichem Stoff bestehen. Selbst Wasserstoffgasbläschen würden (infolge des hohen kapillaren Druckes) keine Ausnahme machen. Vgl. das Entsprechende in der Note zu 166.

kann, da für alle größeren Partikel μ immer sehr nahe 1 fällt, gleichgültig aus welchen Stoffen sie bestehen mögen, und auch bei Radien zwischen 3 und $6 \cdot 10^{-8}$ cm würde die Masse nur dann maßgebend werden (μ genügend klein ausfallen), wenn die Partikel aus den leichtesten Atomen (etwa H oder He) aufgebaut wären (vgl. 96 und 148). Es gelten daher die in der Tabelle angegebenen Wanderungsgeschwindigkeiten unabhängig vom Stoffe der Partikel, mit Ausnahme nur bei Radien unter 3 oder $6 \cdot 10^{-8}$ cm, wo die angegebenen Werte von ω_g nur als individuelle Beispielsfälle (den in der Tabelle angegebenen μ-Werten entsprechend) anzusehen sind.[1])

Die jeweils innerhalb Gültigkeitsbereich der betreffenden Gleichung liegenden Werte sind fett gedruckt. Man sieht den guten Aneinanderschluß von ω_g und ω_h beim Übergang von einem zum anderen Gültigkeitsbereich (Radiengegend 6 bis $12 \cdot 10^{-8}$ cm, vgl. dazu 176). Bei den außer Gültigkeitsbereich liegenden großen Radienwerten fällt ω_g zu klein aus, wie es erwartet wurde (173). Ebenso zeigt ω_h das (nach 169) zu erwartende Verhalten; die Werte werden dicht außerhalb des Gültigkeitsbereiches zu klein, bei allerkleinsten Radien (erste Zeile der Tabelle) aber zu groß.

176. *Über die Gegend des Überganges von ω_g zu ω_h und über die Flüssigkeitsreibung.* — In der Gegend von etwa $\lambda < R < 3\lambda$ sind beide Werte, ω_g und ω_h, nach ihren Gültigkeitsgrenzen als ungenau oder gar unzutreffend zu betrachten, und vielleicht erstreckt sich diese Gegend der Unsicherheit bei manchen Flüssigkeiten auch noch etwas weiter über $R = \lambda$ hinaus nach der Seite der kleinen Radien hin.[2]) Es sollten in dieser Gegend nach den unter 169 für Gase durchgeführten Überlegungen, welche auch bei flüssigen Medien Geltung behalten[3]), beide Werte, ω_g und ω_h, zu klein sein, und Tab. V zeigt, daß dies bei Wasser als Medium auch wirklich zutrifft, wenn man die

1) Die Horizontallinie in der Tabelle sondert diese Werte ab.

2) Ein Zeichen dafür kann darin gesehen werden, daß die Gleichheit $\omega_g = \omega_h$, welche bei Wasser innerhalb des erwarteten Bereiches der Unsicherheit eintritt, nämlich nahe bei $R = 2\lambda$ (vgl. Tab. V, ähnlich auch bei C_6H_6, CCl_4), bei anderen Flüssigkeiten (z. B. CS_2, $C_4H_{10}O$) auf Radienwerte $R < \lambda$ fällt.

3) Vgl. die betr. Fußnote unter 169.

ohne nennenswerte Unsicherheit ausführbare graphische Überbrückung der besagten Radiengegend (letzte Spalte Tab. V) als zutreffend ansieht. Es ist jedoch nicht sicher, ob dasselbe für alle Flüssigkeiten gelten müsse, denn es findet bei flüssigen Medien bei Durchschreitung dieser Radiengegend nicht nur die bei den erwähnten Überlegungen in Betracht gezogene, für gasförmige Medien allein maßgebende Größenänderung des Geschwindigkeitsgefälles statt, sondern auch eine *Änderung des Mechanismus des Widerstandes.* Während nämlich bei Gasen dieser Mechanismus durch die Betrachtung der Molekülzusammenstöße in allen Fällen erschöpft ist, gleichgültig, ob das Partikel so klein ist, daß es die Mediumsmoleküle einzeln trifft (ω_g), oder ob ganze Schichten zusammenstoßender Moleküle mitwirken, wie es die Einführung der Reibungskonstante η voraussetzt, so muß bei Flüssigkeiten im letzteren Falle außerdem noch ein andersartiges Zusammenwirken der Moleküle mit in Betracht kommen. Denn versucht man die Reibungskonstante einer Flüssigkeit nach der für Gase geltenden Gleichung zu berechnen, so findet man sie sehr viel zu klein.[1]) Da das hiermit erkannte, besondere, der Flüssigkeitsreibung eigentümliche Zusammenwirken der Moleküle noch nicht genügend aufgeklärt ist[2]), so ist in der besagten Radiengegend

1) Überträgt man die durch die kinetische Gastheorie gegebene Gleichung für die innere Reibung, $\eta = \frac{1}{3} DWL$, dem Sinne ihrer Ableitung folgend, auf Flüssigkeiten, so tritt an Stelle der freien Weglänge L der Molekülzentrenabstand λ auf (gemäß einer am Schlusse von 159 durchgeführten Überlegung), wodurch $\eta = \frac{1}{3} DW\lambda$ wird. Die hiernach berechnete innere Reibung von Äther, CS_2, C_6H_6, Wasser ist nur der 5. bis 15. Teil der experimentell festgestellten. Es ist mir allerdings bekannt, daß von Herrn Jäger eine andere Gleichung für die Flüssigkeitsreibung, aus gaskinetischer Auffassung hergeleitet, angegeben worden ist, die scheinbar gut mit der Erfahrung stimmt (Wien. Ber. **102**. S. 253. 1893); ich vermag jedoch die Richtigkeit der Herleitung nicht zu erkennen, worauf im einzelnen einzugehen hier zu weit führen würde. Es sei nur bemerkt, daß ich den *inneren Druck* P in Flüssigkeiten nicht als rein (molekular-)kinetisch ansehe, sondern als *zum Teil statisch*, was vielleicht bei einer anderen Gelegenheit näher ausgeführt und verwertet werden kann. Übrigens zeigt schon die der Gasreibung entgegengesetzte Temperaturabhängigkeit der Flüssigkeitsreibung an, daß die rein gaskinetische Erklärung nicht genügen kann (vgl. auch 177 und 180).

2) Vgl. übrigens 177.

bei flüssigen Medien gar keine andere Vorhersage möglich als die, daß dort die wirkliche Wanderungsgeschwindigkeit einen (auch im Differentialquotienten) stetigen Übergang von ω_g zu ω_h bilden müsse. Es wird demnach in dieser Gegend stets der zu tiefst liegende der beiden Werte eine *untere Grenze* für den wirklichen Wert der Wanderungsgeschwindigkeit bilden, während die lineare Interpolation von λ bis 3λ eine *obere Grenze* ergeben muß, da sowohl ω_g als ω_h als Funktion von R nach oben konkav verlaufen. Die so erhaltenen Grenzwerte sind für Wasser in Tab. V angegeben (kursiv gedruckt). Man sieht, daß die zwischen beiden Grenzwerten sich bewegende graphische Interpolation (letzte Spalte der Tabelle) bei diesem Medium im ganzen erwarteten Bereich der Unsicherheit den Werten ω_g und ω_h sehr nahe bleibt, während sie gleichzeitig die Bedingung eines auch im Differentialquotienten stetigen Überganges von ω_g zu ω_h so gut wie willkürfrei erfüllt, wonach sie Vertrauen erweckt, so daß die Tab. V bis auf weiteres zur Entnahme von Radienwerten aller Größen — besonders auch in der Gegend des Überganges von ω_g zu ω_h — aus beobachteten Wanderungsgeschwindigkeiten aufs beste geeignet erscheint.[1])

177. *Kein Einfluß elektrischer Felder auf die innere Reibung der Flüssigkeiten; dieselbe nicht innere Klebrigkeit, vielleicht aber innere Rauhigkeit.* — Wir fanden im vorhergehenden Anlaß anzunehmen, daß der Mechanismus der inneren Reibung bei Flüssigkeiten zum Teil ein anderer sei als bei Gasen. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß in Flüssigkeiten durch Wirkung der Molekularkräfte, die elektromagnetischer Natur sind, zeitweilige Ketten aus den Molekülen entstehen könnten, und daß dies die besondere, große innere Reibung der Flüssigkeiten ergäbe. Solche Kettenbildung würde dann aber auch an kleinsten wandernden Partikeln stattfinden können, z. B. im Wasser an

1) Es sind für die Wanderungsgeschwindigkeit die fettgedruckten Zahlen zu benutzen. Bei Radienwerten kleiner als etwa 3 oder $6 \cdot 10^{-8}$ cm (s. die Horizontallinie in der Tabelle) ist Rücksicht auf μ zu nehmen (vgl. 175). Als ein Beispiel der Anwendung der Tabelle in der anders nicht zugänglichen Gegend des Überganges ist die Ermittlung der Radien der langsamsten elektrolytischen Ionen zu nennen (letzte Zeile der Tab. VI, vgl. 188).

den Wassermoleküle enthaltenden elektrolytischen Ionen, und sie müßte die gaskinetische Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung, welche das Partikel innerhalb der freien Weglängen ganz kräftefrei annimmt, ungültig machen. Ich habe daher Versuche angestellt, um über das Statthaben solcher Kettenbildung, bzw. überhaupt über das Mitwirken der Molekularkräfte bei der inneren Reibung der Flüssigkeiten Aufschluß zu erhalten. Da die Erscheinungen der Wasserfallelektrizität angezeigt haben, daß die Molekularkräfte in Flüssigkeiten mindestens zu einem Teil rein elektrostatischer Natur sind[1]), so würde in den eben gedachten Molekülketten eine elektrische Orientierung der Moleküle anzunehmen sein, und es müßten danach diese Ketten durch elektrische Felder beeinflußbar sein, derart, daß sie beim Vorhandensein eines solchen Feldes die Erstreckung in Kraftrichtung des Feldes bevorzugen, was als eine Verringerung der inneren Reibung gegen Bewegung in Kraftrichtung bemerkbar werden müßte. Versuche, die eine Beeinflussung der inneren Reibung von Flüssigkeiten durch elektrische Felder aufsuchen sollten, sind bereits wiederholt angestellt worden. Es wurden jedoch nur gut isolierende Flüssigkeiten benutzt, niemals Wasser oder wässerige Elektrolyten, welche wegen der auf die Ionen bezüglichen Fragen ein besonderes Interesse besitzen; auch waren die Resultate der bisher veröffentlichten Versuche teilweise einander widersprechend.[2]) Ich habe daher die folgenden Versuche ausgeführt.

Ein kapillares Glasrohr (Länge 12,5 cm, innerer Durchmesser 0,56 mm) mündete beiderseits in weitere Gefäße, in welche Platinelektroden eingeschmolzen waren, und es konnte Wasser unter gut wieder herstellbaren Druckdifferenzen durch das Rohr strömen. Es wurden die Durchflußzeiten ohne und mit Anlegung elektrischer Spannung an die Platinelektroden

1) Es folgt dies aus dem Bestehen elektrischer Doppelschichten dicht innerhalb der Oberflächen von Flüssigkeiten. Vgl. hierüber „Probleme komplexer Moleküle“ (Heidelberg, bei Winter, 1914), Teil II, Kap. VI, und Teil III, Kap. VII.

2) A. Pochettino teilt positive Resultate mit (Atti d. R. Accad. d. Linc. 12. II. S. 363. 1903); W. König hat dagegen in bereits älteren, dabei aber ganz einwandfrei erscheinenden Versuchen nur negative Resultate erhalten (Ann. d. Phys. 25. S. 618. 1885).

gemessen, wobei also im letzteren Fall die Kraftlinien des elektrischen Feldes im Kapillarrohr den dort vorhandenen inneren Reibungsflächen parallel gerichtet waren, was die Reibung verringern, die Durchflußzeiten also verkürzen sollte, falls Kettenbildung stattfände. Das Resultat war rein negativ. Die rund 200 Sekunden betragenden Durchflußzeiten waren bis auf die wenige Zehntelsekunden betragende Versuchsunsicherheit die gleichen ohne und mit Feld, wenn im letzteren Falle das Mittel für beiderlei Richtung des Feldes genommen wurde. Der geringe Unterschied zwischen beiden Feldrichtungen entsprach der bekannten Wirkung der elektrischen Fortführung (Wasser positiv gegen Glas geladen). Die angelegte Spannung wurde (mittels Hochspannungsdynamomaschine) bis zu 3000 Volt gesteigert, wobei das elektrische Feld im Wasser bis zu 240 Volt/cm betrug: die Durchflußzeit, also auch die Reibungskonstante zeigte sich nicht um $^1/_4$ v. H. ihres Wertes geändert. Ersetzung des Wassers durch einen guten Elektrolyten (verdünnte Schwefelsäure, spez. Gew. 1,195), ergab ebenfalls nur negative Resultate. Es floß dabei ein Strom von 4 Weber/cm^2 durch das Kapillarrohr.

Es waren demnach keine Zeichen von Kettenbildung der Moleküle und also von unmittelbarer Mitwirkung der Molekularkräfte bei der inneren Reibung von Wasser oder wässerigen Elektrolyten bemerkbar; als *innere Klebrigkeit* kann hier die Reibung also nicht aufgefaßt werden.[1]) Ein Unbrauchbarwerden der gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung

1) Nicht ausgeschlossen ist es, daß bei Flüssigkeiten von sehr großer innerer Reibung ein Aneinanderhaften benachbarter Moleküle doch mitwirkt. Jedenfalls muß das bei Flüssigkeiten so sein, die einen Übergang zu den zähen (duktilen) festen Körpern bilden; denn bei letzteren ist das Festgehaltensein jedes Moleküls durch eine resultierende Kraft von seiten der Nachbarmoleküle nicht zu bezweifeln. Die bei solchen festen Körpern (z. B. Metallen) beobachtete langsame Diffusion zeigt aber an, daß die resultierende Molekularkraft, die wegen der Wärmebewegung fortwährendem zeitlichen Wechsel unterworfen sein muß, bei diesen Körpern zeitweilig Null wird, wodurch das betreffende Molekül auf Augenblicke frei und also der Diffusion zugänglich wird. Der Übergang zur vollkommenen Flüssigkeit bestünde dann im Anwachsen der kräftefreien Zeiten bis zu schließlich dauerndem Nullwert der resultierenden Molekularkraft im ganzen Inneren der Flüssigkeit.

innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches ist daher bei diesen Flüssigkeiten nicht angezeigt.

Eine andere, als möglich übrigbleibende Auffassung der Flüssigkeitsreibung wäre die als *innere Rauhigkeit*, nämlich als gleitende Reibung benachbarter Molekülschichten aneinander, wobei diese Schichten wegen der Langsamkeit der Diffusion wie die molekular-rauhen Oberflächenschichten sich reibender fester Körper wirken, so daß gegen die die Schichten aufeinanderpressende Kraft, d. i. in der Flüssigkeit gegen deren hohen inneren Druck gearbeitet wird.[1]) Der Reibungskoeffizient — aufgefaßt wie bei der gleitenden Reibung fester Körper — müßte dabei proportional der Relativgeschwindigkeit der Flüssigkeitsschichten angenommen werden, um den beobachteten Gesetzmäßigkeiten der inneren Reibung zu genügen. Solche innere gleitende Reibung wäre ein Vorgang, der nur bei Reibungsflächen von vielmolekularer Größe eine Rolle spielen kann, nicht bei der Wanderungsbewegung einzelner Partikel, deren Größe die der Flüssigkeitsmoleküle nicht beträchtlich überschreitet, so daß ihnen diese Moleküle einzeln ausweichen können. Es kommen danach im letzteren Falle der kleinen Partikel auch bei dieser Annahme der inneren Rauhigkeit doch nur die in unserer gaskinetischen Gleichung berücksichtigten Stoßwirkungen in Betracht, wie wir es angenommen haben, so daß auch in dieser Richtung kein Bedenken gegen die Brauchbarkeit dieser Gleichung innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches sich zeigt.

Elektrolytische Ionen.

178. *Gaskinetische Berechnung erforderlich.* — Die Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen in wässerigen Elektrolyten sind seit den Messungen von Kohlrausch auch in absolutem Maße wohlbekannt, und man hat aus denselben auch bereits wiederholt Durchmesser der Ionen berechnet. Es ist dies aber bisher ausschließlich mittels der hydrodynamischen Gleichung geschehen [Gl. (83)]. Die so berechneten Durchmesser sind

1) Diese Auffassung läßt die Temperaturabhängigkeit der Flüssigkeitsreibung unmittelbar verständlich erscheinen; denn der innere Druck P nimmt mit steigender Temperatur ab. Auch stimmt das Ansteigen der inneren Reibung mit wachsender Molekulargröße in homologen Reihen mit der Auffassung überein.

auffallend klein, und dies hat Anlaß gegeben, die Hydratation der Ionen stark zu bezweifeln, da die Anlagerung selbst nur einer einzigen Schicht von H_2O-Molekülen um das eigentliche Ion viel größere Durchmesser erwarten ließe.[1]) Dennoch erschien und erscheint die Hydratation der Ionen gut gesichert, erstens durch die Arbeiten von Kohlrausch über die Temperaturkoeffizienten der Wanderungsgeschwindigkeiten[2]), zweitens durch die Tatsache, des Nichtabdampfens der Ionen, welche unverständlich bleibt, wenn man die Ionen nicht als komplexe Moleküle betrachtet[3]), und drittens außerdem durch besondere Untersuchungen über die Wassermitführung der Ionen[4]), eine Erscheinung, die als unmittelbares Zeichen der Hydratation aufgefaßt werden kann. Es müssen also die wie angegeben gefundenen, sehr kleinen Ionenradien entweder einer Berichtigung bedürfen, oder sie müssen mit dem Wassergehalt vereinbar gefunden werden.

Ich habe, um hierzu Aufklärung zu erhalten, die im folgenden zu erörternde neue Berechnung der Radien der Ionen und zugleich eine Berechnung der Wassermolekülzahlen derselben durchgeführt unter Anwendung der Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte.

Zunächst zeigte sich eben aus der erwähnten geringen Größe der hydrodynamisch berechneten Ionenradien, daß dieselben bereits außerhalb der durch unsere Überlegungen angezeigten Gültigkeitsgrenze der hydrodynamischen Gleichung fallen, so daß gar nicht diese, sondern vielmehr die gaskinetische Gleichung zu benutzen ist, deren Gültigkeitsbereich in der Tat, wie die Endresultate zeigen, gerade für die kleineren, gewöhnlichen elektrolytischen Ionen gut paßt. Ferner gibt die gaskinetische Gleichung auch zugleich ein Mittel, über die

1) Vgl. hierüber besonders die eingehenden Berechnungen und Überlegungen von R. Lorenz, Zeitschr. f. phys. Ch. **73**. S. 252. 1910; R. Lorenz u. J. Posen, Zeitschr. f. anorg. Ch. **94**. S. 265. 1916; R. Lorenz, ebenda **105**. S. 175. 1919.

2) F. Kohlrausch, Berl. Akad. 1902, S. 572. Es ist dies auch diejenige Untersuchung, in welcher zum ersten Male ein eingehend begründeter Nachweis der Hydratation der Ionen erbracht wird.

3) Siehe „Probleme komplexer Moleküle", Teil I (Heidelberg, bei Winter, 1914).

4) Waschburn, Starks Jahrbuch **6**. S. 69. 1909.

Masse und damit über den Wassergehalt der Ionen Aufschluß zu erhalten, wenn man weitere geeignete Anhaltspunkte zu Hilfe nimmt. Als einen solchen Anhaltspunkt habe ich die von Herrn Waschburn in seiner erwähnten Arbeit für einige Ionen ermittelten Relativzahlen der mit ihnen verbundenen Wassermoleküle benutzt[1]), deren Kenntnis eine Einschränkung der Möglichkeiten für die noch unbekannten Absolutzahlen ergibt. Außerdem habe ich einen leicht zu begründenden *Hilfssatz* zugezogen, der besagt, daß bei nicht zu kleiner Zahl der in einem Ion enthaltenen Wassermoleküle das vom Ion eingenommene Volum kleiner sein muß als dasjenige Volum, welches die gleiche Zahl von Wassermolekülen bei gleicher Temperatur im reinen Wasser einnimmt, aber größer als das den Wassermolekülen selbst, ohne alle Zwischenräume eigene Volum. Die Begründung dieses Hilfssatzes ergibt sich aus der Überlegung, daß die in den Ionen enthaltenen Wassermoleküle durch Kräfte mit dem Ionenkern verbunden sein und daher geringere gegenseitige Abstände aufweisen müssen, als frei ohne solche bindende Kräfte bewegliche Wassermoleküle[2]), daß aber doch das Eigenvolum der Wassermoleküle im Ion erhalten bleiben muß, da zwar Kräfte zwischen dem Kern und den Wassermolekülen bestehen, welche etwa eine Ineinanderlagerung dieser beiden bewirken könnten, nicht aber Kräfte zwischen den vom Kern gebundenen Wassermolekülen untereinander. Die Beschränkung des Satzes auf Ionen mit nicht zu geringer Wassermolekülzahl ist erforderlich, weil er den Beitrag des Kerns zum Gesamtvolum des Ions, der je nach der Natur des Kerns individuell sein muß[3]), vernachlässigt, was jedenfalls um so genauer erlaubt ist, je mehr Wassermoleküle das Ion umfaßt.

1) Waschburn, a. a. O., Tab. XX, S. 103.

2) Das etwaige Bedenken, daß starr miteinander verbundene Wassermoleküle, wie im Eis, auch einen größeren Raum einnehmen können als flüssig verbundene, ist nicht von Belang; denn die Zulassung einer Abstandsvergrößerung der Wassermoleküle der Ionen von so geringem Betrage, wie sie im Eise vorkommt, statt der angenommenen Abstandsverringerung, dem flüssigen Wasser gegenüber, würde unsere Resultate über die Ionen gar nicht wesentlich ändern.

3) Dieser Volumbeitrag des Kernes kann, unseren Endresultaten nach, positiv oder aber auch negativ sein; letzteres entspricht einer Ineinanderlagerung.

179. Ich habe die Rechnung zunächst für die fünf von Herrn Waschburn untersuchten Ionen Cl, H, K, Na, Li durchgeführt. Der Verlauf der Rechnung ist der, daß man zunächst willkürliche, aber nach Herrn Waschburns Messungen zusammengehörige Wassermolekülzahlen n für die fünf Ionen annimmt (z. B.: 0; 0,28; 1,3; 2,0; 4,7 oder 9; 2; 10,5; 16,6; 25,3 oder 20; 5; 21,7; 34,2; 50,5[1]) und mit diesen die zugehörigen μ und damit nach Gl. (101) die fünf Ionenradien R berechnet. Die graphische Auftragung dieser Radien als Funktion der n ergibt für jede zusammengehörige Wertgruppe der n eine Kurve (vgl. Fig. 3), und es sind nach dem Hilfssatz (178) alle Wertgruppen von n als der Wirklichkeit nicht entsprechend ausgeschlossen, welche Kurven ergeben, die in ihrem über $n = 10$[2]) hinausgehenden Verlauf nicht zwischen die beiden Kurven A und B fallen, deren eine (A) dem Volum von n H_2O-Molekülen im flüssigen Wasser und deren andere (B) dem zwischenraumlosen Eigenvolum der n H_2O-Moleküle entspricht.[3])

In dieser Weise ergibt sich sofort das Resultat, daß Wassermolekülzahlen sowohl unterhalb, als auch oberhalb eng zusammenliegender Grenzen ausgeschlossen sind.[4]) Die Enge

1) Diese Beispiele umfassen sowohl die Mindest- als auch die Höchstwerte der Wassermolekülzahlen, welche nach Herrn Waschburns Messungen möglich wären.

2) Diese Wassermolekülzahl dürfte bei den aus nur wenigen Atomen — meist nur einem einzigen — bestehenden Ionenkernen, die wir jetzt und im folgenden betrachten, ausreichend sein, um das Eigenvolum des Atoms so weit zurücktreten zu lassen, daß der Hilfssatz anwendbar wird.

3) Die Gleichung von A ist demnach:

$$R = \sqrt[3]{3n \cdot 18 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-24}/4\pi} = 1{,}94 \cdot 10^{-8} \sqrt[3]{n}$$

($18 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-24}$ g das absol. Gew. von H_2O) und die Ordinaten von B sind das $\sqrt[3]{1-\Psi}$fache hiervon ($\Psi = 0{,}17$, siehe 172; die in Ψ vorhandene Unsicherheit hat hier keinen wesentlichen Einfluß).

4) Bereits Herr Waschburn konnte aus seinen Versuchen (a. a. O.) Grenzen für die möglichen Wassermolekülzahlen der von ihm untersuchten fünf Ionen herleiten; dieselben sind jedoch sehr weit; so bleiben z. B. für das Cl-Ion alle n von 0—20 möglich (vgl. die oben bereits angegebenen Zahlenbeispiele und die zugehörige Fußnote). Unsere Werte für die Wassermolekülzahlen liegen übrigens in der von Herrn Waschburn nach gewissen Überlegungen (a. a. O., S. 104) für wahrscheinlichst gehaltenen Gegend. Das spezielle Resultat, *daß das gänzliche Fehlen*

der Grenzen, welche aus dem dichten Zusammenliegen der Kurven *A* und *B* ersichtlich ist, erlaubt es, auf ein oder zwei Zahlenstellen abgerundete Wassermolekülzahlen *n* anzugeben; diese sind zusammen mit den Radienwerten *R* in Tab. VI eingetragen (Spalte 4 und 5).[1]) Es ist dabei $\Psi = 0{,}17$ zugrunde gelegt; die Ionenbeweglichkeiten *l* für 18° C. (Spalte 2) sind den Beobachtungen von Kohlrausch entnommen[2]), und es ist, ebenfalls nach Kohlrausch, $\omega/K = 0{,}0635 \cdot 10^8\, l$ gesetzt (3. Spalte).[3])

180. *Bestätigung der Annahmen über den Molekularmechanismus der Flüssigkeiten.* — Sehr bemerkenswert ist es, daß — wie es Kurve *C* in Fig. 3 zeigt — jede in der soeben angegebenen Berechnungsweise sich ergebende Kurve, deren über

von Wassergehalt (n = 0) ausgeschlossen ist, ergibt sich nach Gl. (101) auch ohne Zuhilfenahme von Herrn Waschburns Messungen und ohne unseren Hilfssatz. Nimmt man nämlich probeweise für alle Ionen $n = 0$ an, so ergibt Gl. (101) Ionenradien, welche zum Teil in starkem Widerspruch mit den bekannten Radien der den Ionkern bildenden Atome stehen. Man erhält z. B. für den Radius des wasserfreien H-Ions $2{,}9 \cdot 10^{-8}$ cm, für den des Na-Ions $4{,}4 \cdot 10^{-8}$ cm, während der Radius des vollständigen (zweiatomigen und eines Valenzelektrons nicht beraubten) H_2-Moleküls nur $1{,}0 \cdot 10^{-8}$ cm, der des Na-Atoms in festem Metall (wo ihm meist, wie als Ion, ein Elektron fehlt) nur $2{,}1 \cdot 10^{-8}$ cm und selbst der des großen Cs-Atoms nur $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm ist. Dabei ist mit dem kleinsten noch als möglich gefundenen Werte von $\Psi = 0{,}1$ und mit H_4O_2-Molekülen in flüssigem Wasser gerechnet. H_2O-Moleküle ergeben die beiden Radien zu 2,1 bzw. $3{,}3 \cdot 10^{-8}$ cm, also mit demselben Widersprüche, und größere Werte von Ψ würden die Radien und damit die Widersprüche nur noch vergrößern. Man kommt also allein nur durch Anwendung der für den Fall passenden Wanderungsgeschwindigkeitsformel Gl. (101) zum Resultat, daß die gewöhnlichen elektrolytischen Ionen *wesentlich mehr Masse* haben *als der Wasserfreiheit entspräche*; sie würden ohne Wasserzulagerung wesentlich schneller wandern müssen, als sie es wirklich tun. Nur zur Ermittlung der Größe der Massenzulagerung, welche wir als Wassermolekülzahl deuten, bedurfte es der Hinzunahme jener oben benutzten weiteren Kenntnisse.

1) Diese, auf die hier zunächst betrachteten fünf Ionen bezüglichen Zahlen sind in der Tab. VI fett gedruckt. Die noch verbleibende Unsicherheit der Ermittelungsweise beträgt überall einige Einheiten der zweiten Zahlenstelle; vgl. die oben folgenden Zahlenbeispiele.

2) Nach der Zusammenstellung in Landolt u. Börnsteins Tabellen (1912), S. 1124.

3) Sonstige Zahlendaten siehe in der betreffenden Note zu 181.

$n = 10$ gelegene Punkte[1]) die nach unserem Hilfssatz verlangte Höhenlage haben, so daß sie zwischen die Kurven *A* und *B* fallen, gleichzeitig dort auch solche Neigung zur Abszissenachse aufweist, daß sie ohne sprungweise Neigungsänderung in

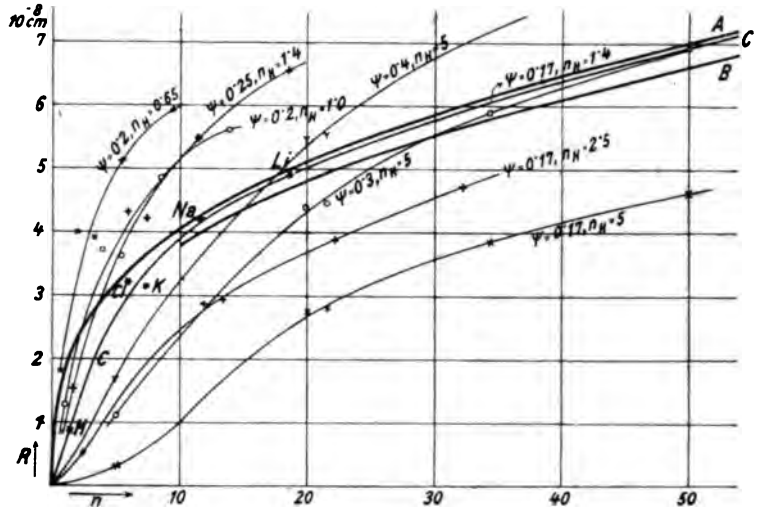


Fig. 3.

dem Zwischenraum von *A* und *B* nach größeren Werten von *n* hin extrapoliert werden kann, wie es sein muß, wenn diese Kurve einen mit unserem Hilfssatz verträglichen Zusammenhang zwischen *R* und *n* darstellen soll.[2]) Da dieses Resultat

---

1) Die in der Figur überall eingetragenen Punkte entsprechen bei jeder Kurve der Reihe nach vom Nullpunkt aus den Ionen H, Cl, K, Na, Li, wie für Kurve *C* auch besonders angegeben. Für eine der Kurven ($\Psi = 0{,}4$. $n_H = 5$) liegt Li außer Zeichenfeld. Die Punkte für Cl und K liegen stets nahe beisammen; die Kurven sind jedesmal mitten zwischen ihnen durchgezogen.

2) Kurve *C* zeigt die Extrapolation über $n = 18{,}5$ (Wert für Li) hinaus bis zu $n = 54$. Man vergleiche damit die anderen, dünner gezeichneten Kurven, welche zeigen, daß abweichende Werte von Ψ, sowie der n (von letzteren ist in der Figur bei jeder Kurve der Wert n_H für das Wasserstoffion angegeben, die anderen sind aus den Lagen der Punkte ersichtlich) mit unserem Hilfssatz ganz unverträglich wären. Es sind im ganzen 46 Kurven berechnet worden; die Figur stellt nur 8 davon dar, um nicht zu verwirren.

in unseren Annahmen nicht enthalten ist, kann es als gute Bestätigung eben dieser Annahmen angesehen werden, die zwar an sich keineswegs unbegründet, aber doch zum Teil neu und also der Bestätigung bedürftig sind. Es seien als hiermit bestätigt besonders hervorgehoben: Die Anwendbarkeit der gaskinetischen Gl. (101) auf flüssige Medien und der aus der Kompressibilität in der angegebenen Weise berechnete Wert:

$$\Psi = (v - b)/v = 0{,}17$$

für Wasser von Zimmertemperatur, aus welchem auch die unter 172 angegebene freie Weglänge der Wassermoleküle folgt, schließlich hierdurch auch der Wert des inneren Druckes für flüssiges Wasser, $P = 8000$ Atm. Wählte man zur Berechnung von R andere Werte von Ψ innerhalb oder auch außerhalb des unter 172 angegebenen, durch die unsichere Kenntnis von P bedingten Spielraumes, so gelangt man entweder zu Wertgruppen von n und R, welche dem in Tab. VI verzeichneten und also der Kurve C nahe liegen, oder aber man erhält Kurven, deren Lauf nicht den oben hervorgehobenen Bedingungen entspricht und also die benutzte Wahl von Ψ ausschließt. Zu ersterem Fall sei hervorgehoben, daß man mit $\Psi = 0{,}20$ die folgenden Werte für die fünf Ionen H, Cl, K, Na, Li erhält: $n = 1{,}8$; 8; 9,5; 15; 23; $R = 1{,}0$; 3,5; 3,5; 4,6; $5{,}4 \cdot 10^{-8}$ cm, welche von den in Tab. VI angegebenen für $\Psi = 0{,}17$ geltenden nicht sehr verschieden sind und eine Kurve liefern, die im Maßstabe der Fig. 3 von C sich schlecht unterscheiden würde.[1] Zum anderen Fall sei auf die in Fig. 3 eingetragenen Kurvenbeispiele verwiesen, welche eine charakteristische Auswahl unter den untersuchten Fällen bieten. Da diese Fälle von $\Psi = 0{,}05$ bis $\Psi = 0{,}4$ reichen, so sieht man, daß das vorher (172) auf ganz anderer Grundlage erhaltene Resultat $0{,}13 < \Psi < 0{,}21$ sich hier bestätigt, insofern Werte von Ψ, die wesentlich unter 0,1 oder wesentlich über 0,2 liegen, durch den Lauf der resultierenden Kurven ausgeschlossen erscheinen.[2]

1) Die Abweichungen der oben angegebenen n und R von den in der Tab. VI verzeichneten zeigen gleichzeitig auch die Genauigkeitsgrenze unseres Ermittlungsverfahrens; es erscheinen beide Wertegruppen fast gleich gut möglich.

2) $\Psi = 0{,}05$ und 0,1 geben außerordentlich kleine, bei nicht sehr kleinen n sogar negative Radienwerte für H.

Tabelle VI. Ionen in wässerigen Elektrolyten.

Ion	Bewegl. l_{18}	$\frac{\omega}{K}$ cm/sec. dyn.	H_2O-Mol.zahl n	Radius R 10^{-8} cm	Andere Radienwerte zum Vergleich. 10^{-8} cm
H	315	$20{,}0 \cdot 10^8$	1,4	0,9	H_2-Mol. 1,0[3]
OH	174	11,0	(2,5)	1,4	H_2O 1,7[2]), H_4O_2 2,4[3]). O_2 1,4[3])
Li	33,4	2,12	19	5,0	Li-Atom 1,4 | Li_2O 2,3
Na	43,5	2,76	12	4,2	Na- „ 1,8 | Na_2O 2,9 } [4])
K	64,6	4,10	7	3,1	K- „ 2,2 | K_2O 2,6
Rb	67,5	4,28	(6)	2,9	Rb- „ 2,4 } im fest. Metall[4])
Cs	68	4,33	(6)	2,8	Cs- „ 2,5
Sr	51	3,2	10	3,7	Sr- „ 2,0
Cu	46	2,9	11	3,9	Cu- „ 1,2
Fl	46,6	2,96	11	3,9	
Cl	65,5	4,15	6	3,2	$CHCl_3$-Mol. 2,2[3])
Br	67,0	4,25	6	3,0	
J	66,5	4,23	6	2,9	
NO_3	61,7	3,91	7	3,2	N_2-Mol. 1,5[3])
CO_3	(70)	(4,4)	(6)	(2,9)	CO_2-Mol. 1,6[3])
Langsamste Ionen[1])	20	1,3	etwa 35	6,0	

Will man die Tragweite der erhaltenen Bestätigung möglichst gering bewerten, so könnte man sagen, daß nur Ψ/W als numerischer, auf die Eigenschaften des Wassers bezüglicher Gesamtfaktor in Gl. (101) bestätigt ist, während vielleicht Ψ und W selbst andere Werte als die angenommenen haben könnten; doch ist für diese Einschränkung bisher kein Anlaß ersichtlich geworden, sondern man darf annehmen, daß auch der gaskinetisch eingesetzte Wert der mittleren Molekulargeschwindigkeit W bestätigt ist (siehe darüber die weiter folgende Note). Letzteres bedeutet auch eine Bestätigung der bereits oben geäußerten *Auffassung vom inneren Druck P als zum Teil statisch* (vgl. die betreffende Note zu 176), da die dynamische Druckformel $P = \frac{1}{3} D W^2$ wesentlich übergaskinetische Werte für W ergäbe. Daß nicht gleichzeitig P rein dynamisch und W gastheoretisch sein kann, geht übrigens auch unmittelbar aus der Nichtgültigkeit des Avogadroschen Satzes für Flüssigkeiten hervor.

1) Unter den über 300 Ionen, welche von G. Bredig (Zeitschr. phys. Ch. 13. S. 191. 1894) und R. Lorenz (a. a. O.) behandelt werden, finden sich nur sehr wenige, deren Beweglichkeit unter 20 geht (stets bezogen auf eine Valenz). Zu den langsamsten Ionen gehören P_2O_7 (l = 19,8), eine Anzahl organischer, sehr vielatomiger Ionen (50—88 Atome, = 22 bis 18) und Al (l = 15). Letzteres etwas unsicher beobachtete Ion ergibt (nach Tab. V) $R = 7{,}4 \cdot 10^{-8}$ cm, wozu (nach Kurve *C*, Fig. 3) $n = 60$ gehört. Bei vielatomigen Ionen würden die nach unserer Kurve *C*, Fig. 3 ermittelten Wassermolekülzahlen als obere Grenzen zu betrachten sein (entsprechend dem Sinne des Hilfssatzes, 178). — 2) Aus der inneren Reibung des Gases. — 3) Vgl. „Probl. kompl. Mol." II. S. 6. — 4) Vgl. Heidelb. Akad. 1914. A 17. S. 41.

181. Einer besonderrn Erörterung bedarf noch die für die bisher behandelte Berechnung getroffene Wahl der ***Größe des Mediumsmoleküls***; es wurde H_4O_2 als mittleres Molekül des flüssigen Wassers von 20° C. angenommen. Diese Annahme starker Polymerisation der Moleküle des Wassers bei Zimmertemperatur ist durch seine thermischen Eigenschaften [hohe Verdampfungswärme, Dichtemaximum[1])], sowie auch durch besondere Nachweise [Oberflächenenergie[2])], zeitliche Änderung der Oberflächenspannung[3]) gut begründet. Jedoch ist der genaue Bruchteil der in geringer Menge jedenfalls vorhandenen, nicht polymerisierten Moleküle (H_2O) nicht bekannt, und wenn diese Moleküle unsere Rechnungsresultate, die in der Tat durch μ, W und r in Gl. (101) von der Molekulargröße des Mediums abhängen[4]), wesentlich beeinflussen würden, so wären für jetzt alle Schlüsse vereitelt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Man überzeugt sich durch Durchführung der Rechnung unter der Annahme von H_2O-Molekülen, daß man sehr nahe dieselben Kurven und Zahlenresultate erhält wie unter der Annahme von

1) Die Lage des Dichtemaximums beim Erstarrungspunkte und die bei der Erstarrung eintretende besondere Volumzunahme lassen annehmen, daß die dem Eise zuzuschreibenden Moleküle H_6O_3 im Wasser von Zimmertemperatur nur in geringer Zahl vorhanden sind.

2) Untersuchungen von Eötvös.

3) Messungen von Herrn Hiss, welche annehmen lassen, daß ein sehr überwiegender Teil der Wassermoleküle polymerisiert, ein geringerer Teil aber nicht polymerisiert ist. Vgl. „Probl. kompl. Mol." 1914, Teil II. S. 21. 22.

4) *Zahlenwerte für Wassermoleküle.* Es ist für H_4O_2:

$$\mu = [18(n + 2) + A]/36$$

(A = Gewicht des Ionenkerns mit $H = 1$), $W = 41500$ cm/sec (18° C. gaskinetisch berechnet (vgl. die betreffende Note zu 180), $r = 2{,}40 \cdot 10^{-8}$ cm (vgl. „Probl. kompl. Mol." II, Note S. 6. Der hier angenommene Wert berücksichtigt bereits nach Maßgabe von Ψ die Zwischenräume der Moleküle und ist ohne diese gerechnet; der wie a. a. O. mit Zwischenraum gerechnete Wert wäre, genauer als dort, $2{,}44 \cdot 10^{-8}$ cm). Für H_2O ist $\mu = [18(n + 1) + A]/18$, $W = 57500$ cm/sec (18° C., gaskinetisch), $r = 1{,}74 \cdot 10^{-8}$ cm (vgl. „Probl. kompl. Mol." III, Note S. 49. Der Wert gilt für Dampf von 100°; für Zimmertemp. würde er ein wenig größer zu setzen sein, dagegen unter dem hohen Druck des flüssigen Wassers wieder etwas kleiner. Beide Korrektionen sind nicht genau ausführbar, heben sich zum Teil aber gegenseitig auf; es ist daher der angegebene Wert unverändert benutzt worden).

H_4O_2-Molekülen.[1]) Es würden daher die in Tab. VI angegebenen, für H_4O_2 berechneten Zahlen auch dann nicht über ihre Genauigkeitsgrenze hinaus verändert werden, wenn man einen sehr starken Bruchteil nicht polymerisierter Moleküle im Wasser von 20° annehmen wollte.

182. An die in Tab. VI zusammengestellten Resultate, zunächst für die fünf in der erläuterten Weise berechneten Ionen H, Cl, K, Na, Li [in der Tabelle fett gedruckt[2])], knüpfen sich folgende Bemerkungen und Schlüsse (a—f):

a) Die Radienwerte liegen sämtlich noch innerhalb des Gültigkeitsbereiches der gaskinetischen, aber außerhalb des der hydrodynamischen Gleichung, da der Molekülabstand $\lambda (= 2r + L)$ für Wasser (H_4O_2) rund $5 \cdot 10^{-8}$ cm ist; es war also berechtigt, erstere Gleichung zugrunde zu legen, wie es geschehen ist.

183. b) *Ineinanderlagerung.* — Der Radius des H-Ions ist auffallend klein; er ist nur ungefähr so groß wie der des H_2-Moleküls, obgleich sogar mindestens ein *ganzes H_2O-Molekül* in diesem kleinsten Ion enthalten anzunehmen ist ($n = 1{,}4$, vgl. Spalte 4 der Tabelle), und obgleich dieses H_2O-Molekül schon für sich allein einen wesentlich größeren Radius hat als das Ion (vgl. letzte Spalte der Tabelle).

Unser Resultat zeigt damit hier eine *Ineinander*lagerung von Ionenkern und H_2O-Molekül unter beträchtlicher *Zusammenziehung des Ganzen* an. Auch für das K-Ion finden wir einen wesentlich kleineren Radius als unvermindertem Eigenvolum des Wassergehaltes entspräche, was unmittelbar aus der tiefen Lage des betreffenden Punktes in der Kurve *C*, Fig. 3, ersichtlich ist.[3]) Man muß daher auch hier annehmen, daß Ionenkern und Wassermoleküle nicht aneinander, sondern vielmehr — mindestens teilweise — *ineinander* gelagert sind. Nur bei den wasserreicheren Ionen fanden wir das Volum ungefähr propor-

---

1) Die Unterschiede der in voriger Note angegebenen Daten heben sich im Endresultat zum Teil gegenseitig auf. Es ergibt sich für die Ionen H, Cl, K, Na, Li mit $\Psi = 0{,}17$ $n = 1, 4, 5, 8, 14$; $R = 0{,}8, 2{,}8, 2{,}8, 3{,}6, 4{,}3 \cdot 10^{-8}$ cm, und mit $\Psi = 0{,}20$ $n = 1{,}3, 6, 7, 11, 17$; $R = 0{,}9, 3{,}1, 3{,}1, 4{,}0, 4{,}8 \cdot 10^{-8}$ cm.

2) Über die anderen Ionen siehe 188.

3) Cl liegt wesentlich höher, zeigt also keine so deutlichen Zeichen der Einlagerung als K.

tional dem Wassergehalt (vgl. die Diskussion über den Verlauf der Kurven in 180, welche den Hilfssatz zu 178 bestätigte), so daß die Raumbeanspruchung der im Ion enthaltenen Wassermoleküle ungefähr unvermindert zur Geltung kommt. Diese Raumerfüllung ist es, welche z. B. das Li-Ion trotz der Kleinheit des Li-Atoms zu einem der größten und langsamst wandernden Ionen macht. In diesem Falle ist die Raumbeanspruchung der Wassermoleküle im Ion so groß, daß von der vielleicht auch hier vorhandenen Einlagerung nichts merklich wird, sondern vielmehr hier die Anlagerung in den Vordergrund tritt. Ein regelmäßiges, durch die Kurve *C* in Fig. 3 dargestelltes Anwachsen der Ionenradien mit steigendem Wassergehalt besteht bei allen 5 Ionen, nur ist die Volumbeanspruchung der Wassermoleküle im Ion um so geringer — die Einlagerung also um so merklicher gegenüber der Anlagerung —, je kleiner ihre Anzahl ist.[1]) Es können also stets nur wenige H_2O-Moleküle mit dem Ion eingelagert sein; der Rest ist ohne wesentliche Volumverminderung angelagert anzunehmen.

Ineinanderlagerungen von Atomen oder Molekülen, wie wir sie in dieser Weise bei den Ionen fanden, so daß das Ganze kaum mehr, unter Umständen sogar weniger Raum einnimmt als jede einzelne der ineinander gelagerten Komponenten, findet man auch sonst; sie sind nur bisher wohl zu wenig beachtet worden. Man vgl. z. B. die in Tabelle VI (letzte Spalte) angegebenen Oxydmolekülradien (3 atomig) mit den Radien der betreffenden Metallatome, — erstere auffallend wenig größer als letztere. In allgemeingültiger Weise ersieht man übrigens aus Herrn Kossels Molekülmodellen die seit der Erkenntnis vom losen Bau der Atome[2]) offene Möglichkeit solcher Ineinanderlagerung in Beispielen verwirklicht, welche auch alle sonstige Kenntnis der Atom- und Moleküleigenschaften berücksichtigen.[3])

---

1) Auf diesen regelmäßigen Verlauf gründet sich unsere Berechnung von R und n bei den übrigen in Tab. IV aufgeführten Ionen (vgl. 183).

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. S. 736 usf. 1903.

3) Vgl. W. Kossel, Ann. d. Phys. 49. S. 229. 1916. Ineinanderlagerungen von weit höherem Betrage, wie sie die hydrodynamisch berechneten, sehr kleinen Ionenradien erforderten, um den aus guten Gründen

184. c) Die bei der Ineinanderlegung von Ionenkern und Wassermolekülen eintretende Volumverminderung kann geradezu als *Ursache der elektrolytischen Dissoziation* im Wasser angesehen werden. Denn es muß beim Auflösen des Elektrolyten im Wasser diejenige Umlagerung den Vorzug haben, welche die größte Volumverminderung ergibt, indem das Ganze unter dem hohen inneren (Normal-) Drucke des Wassers steht. Man darf annehmen, daß die Ineinanderlagerung der Wassermoleküle und Ionenkerne schon beginnt, ehe die Ionen getrennt sind, und die Ineinanderlagerung kann geradezu als Ursache der Trennung der Ionen aus dem Molekülverbande angesehen werden, wenn man die naheliegende Annahme zuläßt, daß die Einlagerung den Zusammenhalt des positiven Ions mit seinem Valenzelektron vernichtet oder vermindert.

Es würde bei dieser Auffassung die *„dissoziierende Kraft"* des Wassers nicht in seiner hohen Dielektrizitätskonstante [1]), sondern in seinem hohen inneren Drucke, zusammen mit der Fähigkeit leichter Ineinanderlagerung der Wassermoleküle mit fremden Atomen oder Atomgruppen liegen. [2])

---

anzunehmenden Wassergehalt der Ionen unterzubringen, würden allerdings auch den heutigen Vorstellungen vom Molekülbau große Schwierigkeiten machen.

Hervorzuheben ist, daß durchaus nicht alle Atome Ineinanderlagerung beim Molekülbau zeigen; vgl. dazu die in Teil II (Ann. d. Phys. 41. S. 97. 1913) betrachteten Moleküle, welche ihren mittleren gaskinetischen Querschnitten nach wie lineare *Aneinander*reihungen der Atome sich verhielten.

1) Diese Annahme ist auch nicht ausnahmslos bestätigt, indem andere Flüssigkeiten mit ebenfalls hoher Dielektrizitätskonstante doch nicht die dissoziierende Kraft des Wassers besitzen. Über die Möglichkeit eines (wohl vorhandenen) Zusammenhangs in allgemeinen Zügen s. die folg. Note.

2) Der innere Druck des Wassers beträgt 8000 Atm., was wir im vorliegenden bestätigt fanden; bei Äther, Benzol, Schwefelkohlenstoff, Tetrachlorkohlenstoff beispielsweise beträgt er nur 1600 bis 3100 Atm. (Vgl. „Probleme komplexer Moleküle", 1914. Teil II. Tab. I. S. 6.) Es ist übrigens zu bemerken, daß der hohe innere Druck und das Einlagerungsvermögen, sowie aber auch hohe Dielektrizitätskonstante als Wirkungen einer und derselben gemeinsamen Ursache aufgefaßt werden können, nämlich hoher Molekularkräfte, was in allgemeinen Zügen aus deren elektrischer Natur unmittelbar hervorgeht, ohne daß freilich ein einfacher quantitativer Zusammenhang zwischen diesen drei Wirkungen bisher gefunden wäre. (Vgl. dazu „Probl. kompl. Mol.", Teil II. S. 43.)

Man versteht in dieser Auffassung auch, warum Salz*dämpfe* durch Gegenwart von Wasserdampf nicht leitend werden[1]), eine Tatsache, die übrigens jedenfalls zeigt, daß die „dissoziierende Kraft" nicht dem Wassermolekül an sich, sondern dem flüssigen Aggregatzustand des Wassers zugehört, welchem auch der hohe innere Druck eigen ist.

185. d) Was die *Temperaturabhängigkeit der Ionenbeweglichkeiten* anlangt, so ist dieselbe nach unserem Resultate, daß die gaskinetische Gleichung (nicht die hydrodynamische) maßgebend sei, nicht mit dem Temperaturkoeffizienten der inneren Reibung des Wassers in Verbindung zu setzen, wie es bisher stets geschehen ist, sondern mit dem des Freiraumfaktors Ψ, außerdem mit der Änderung der Molekulargeschwindigkeit W. Es fällt dann das bis jetzt immer noch paradox dastehende Resultat weg, daß — da der Temperaturkoeffizient der Wanderungsgeschwindigkeiten der meisten Ionen deutlich *kleiner* ist, als der der inneren Reibung des Wassers — die Wasserzulagerung der Ionen mit steigender Temperatur ein wenig *steigen* müsse. Vielmehr ist jetzt das unmittelbar wahrscheinliche, weil aller Erfahrung bei thermischer Dissoziation entsprechende *Sinken der Zulagerung mit steigender Temperatur* zu erwarten, da Ψ / W keinesfalls so stark mit der Temperatur steigt, als die beobachteten Ionenbeweglichkeiten, so daß ein Teil des Steigens der letzteren durch Verminderung von R und μ, das ist durch Abnahme der Wasserzulagerung erklärt werden muß.[2])

1) Vgl. G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 35. S. 417. 1911. Die bei genügend hoher Temperatur eintretende Leitfähigkeit von Salzdämpfen (vgl. desselben Verfassers Untersuchung ebendort 41. S. 670. 1913 u. 56. S. 341. 1918) ist wohl überhaupt nicht Folge elektrolytischer Dissoziation, sondern thermischer Trägerbildung (durch Nähewirkung); die Träger wären danach Salzmoleküle (mit Anlagerungen), nicht elektrolytische Ionen.

2) Es ist [mit Gl. (97)]

$$\frac{\partial(\Psi/W)}{\partial T} \Big/ \frac{\Psi}{W} = \frac{\partial \Psi}{\partial T} \Big/ \Psi - \frac{\partial W}{\partial T} \Big/ W = \alpha \frac{1-\Psi}{\Psi} - \frac{1}{2T},$$

worin allerdings α, der thermische Volumausdehnungskoeffizient des Mediums, bei Wasser wegen der mit der Temperatur veränderlichen Polymerisation nicht unmittelbar einsetzbar ist. Denkt man aber, um diese Nebenwirkung zu eliminieren, den Ausdehnungskoeffizienten mit einem aufs 5fache vergrößerten Werte eingesetzt, d. i. etwa gleich dem

Das ungefähre Zusammenfallen des Temperaturkoeffizienten der inneren Reibung des Wassers mit dem der Ionenbeweglichkeiten, auf welches in bisherigen Untersuchungen oft die Aufmerksamkeit besonders gerichtet war, wäre demnach sozusagen für rein zufällig zu halten.[1]) Unsere Auffassung, daß die Zunahme der Ionenbeweglichkeit mit steigender Temperatur nicht der Abnahme der (bei der Kleinheit der Ionen gar nicht maßgeblichen) inneren Reibungskonstante des Mediums, sondern größtenteils der Verkleinerung der Ionen durch thermisches Abdissoziieren der zugelagerten Wassermoleküle zuzuschreiben ist[2]), wird bestätigt, wenn man die Temperaturkoeffizienten der Beweglichkeit mit den von uns gefundenen Wassermolekülzahlen vergleicht. Man findet, daß der Temperaturkoeffizient mit der Wassermolekülzahl n regelmäßig steigt[3]), was aufs deutlichste unserer Auffassung entspricht und aus derselben unmittelbar voraussehbar gewesen wäre, indem um so stärkere Verkleinerung der Ionen bei steigender Temperatur möglich sein und also bei gleich fester Bindung der Wassermoleküle auch eintreten muß, je größer

---

der meisten nicht polymerisierenden Flüssigkeiten, oder selbst mit 20fach vergrößertem Werte, was sicherlich zu hoch gegriffen ist, so bleibt doch $\frac{\partial (\Psi / W)}{\partial T} \Big/ \frac{\Psi}{W}$ noch unterhalb $\frac{\partial \omega}{\partial T} \Big/ \omega$, und die Differenz beider kommt auf Rechnung einer Temperaturabnahme von r und μ.

1) Ein indirekter Zusammenhang beider wird natürlich bestehen.

2) Wenn die Auffassung, daß die Temperaturzunahme der Ionenbeweglichkeiten einer Verkleinerung der Ionen zuzuschreiben sei, schon bisher gelegentlich zum Ausdruck kam, so mußte sie doch unberechtigt erscheinen, insofern gleichzeitig ganz allgemein die damit in Widerspruch stehende Behauptung von der Maßgeblichkeit der inneren Reibungskonstante für die Beweglichkeit vertreten war. Es mußte befremdlich erscheinen, daß man den Widerspruch zwischen beiden Annahmen unberücksichtigt gelassen und beide gleichzeitig festgehalten fand, obgleich doch offenbar mindestens eine davon falsch sein mußte. Nach unseren hier mitgeteilten Resultaten ist es die zweite.

3) Der Zusammenhang zwischen dem Temperaturkoeffizienten der Beweglichkeit und *dieser selbst* ist bekanntlich bereits von F. Kohlrausch festgestellt und damals zu einem erstmaligen, gutbegründeten Schluß auf Wassergehalt der Ionen verwertet worden (Berliner Akademie 1902. S. 572). Wir fassen hier, weitergehend, nicht die Beweglichkeit als solche, sondern die aus ihr ermittelte Wassermolekülzahl als bestimmend für den Temperaturkoeffizienten auf, wodurch der Zusammenhang unmittelbar anschaulich wird.

die Anzahl dieser Moleküle in ihnen ist. Die Tabelle VII, in welcher alle diejenigen in Tab. VI enthaltenen Ionen verwertet sind, deren Wassermolekülzahl mit größerer Sicherheit feststellbar war, und für welche Werte der Temperaturkoeffizienten der Beweglichkeit vorliegen, zeigt klar diesen Parallelismus zwischen Temperaturkoeffizient und Wassermolekülzahl. Abweichungen davon, welche übrigens nur bei den unsicher berechenbaren Ionen[1]) merklich werden, wären als Folge von Sondereinflüssen des Ionenkerns auf die Bindungsfestigkeit der Wassermoleküle erklärlich.[2])

Tabelle VII.

Ion	Wassermolekülzahl n (aus Tab. VI)	Temperaturkoeffizient der Bewegl. (nach Kohlrausch)
H	1,4	0.0154
OH	2,5	0,0180
NO_3	7	0,0205
J	6	0,0213
Br	6	0,0215
Cl	6	0,0216
K	7	0,0217
Fl	11	0,0238
Na	12	0,0244
Li	19	0,0265

186. e) *Die Wassermolekülzahlen n sind* wohl bei allen Ionen *als Mittelwerte zu betrachten*, genommen über viele Ionen in gleichzeitigem Zustande oder auch bei einem und demselben Ion über lange Zeit. Jedenfalls sind natürlich Bruchteile von Wassermolekülzahlen, wie z. B. 1,4 bei H, in solcher Weise aufzufassen, dahin also, daß die Wassermolekülzahl z. B. beim H-Ion zwischen 1 und 2 schwankt. Bei Ionen mit großen und mittleren Wassermolekülzahlen dürften die Schwankungen sogar in sehr weiten Grenzen stattfinden. Man kommt zu letzterer Auffassung, wenn man die unmittelbar sichtbare

1) Eingeklammerte Wassermolekülzahlen in Tab. VI.

2) Die größte Abweichung kommt beim CO_3-Ion vor. Man könnte annehmen, daß der hohe Temperaturkoeffizient, das ist der leichte Verlust der Wassermoleküle bei relativ kleiner Anzahl derselben mit der geringen Dissoziationsfähigkeit dieses Ions zusammenhängt, was im Sinne unserer Auffassung von der Ursache der Dissoziation wäre (184).

Wanderung gefärbter Ionen betrachtet. Ich habe z. B. beim Einwandern der violetten MnO_4-Ionen in einen benachbarten Elektrolyten (KNO_3) stets ein Vorauseilen eines geringen Teils der Ionen gegenüber dem langsameren Hauptteil beobachtet. Daß bei Stromumkehr der vorausgeeilte Teil nicht ebensoschnell wieder zurückwandert, kommt offenbar von der Veränderlichkeit der Anlagerung bei jedem einzelnen Ion. Man vergleiche übrigens auch die *unbeschwerten Ionen* (K, Na z. B.), deren Vorhandensein in geschmolzenen Elektrolyten ich früher aus dem farbigen Glühen der Salzschmelzen geschlossen hatte.[1]) Es ist anzunehmen, daß — wie diese Emissionsfarben — auch die Absorptionsfarben, wie bei MnO_4, dem Ion im unbeschwerten Zustand zugehören, der nur sehr selten vorhanden zu sein braucht, um doch gut bemerkbare Färbung hervorzubringen. Die soeben beschriebene Beobachtung von Wanderungsgeschwindigkeiten sehr verschiedener Größe an den gefärbten Ionen zeigt dann an, daß auch der unbeschwerte (gefärbte) Zustand, in Abwechslung mit dem mehr oder weniger beschwerten Zustand zeitweilig bei jedem Ion vorkommt.[2]) Es würde daraus die *Abdampfung eines sehr geringen Bruchteils der Ionen* aus Lösungen, Schmelzen und glühenden festen Körpern auch in Fällen verständlich sein, wo diese Ionen durchschnittlich nicht unbeschwert sind.[3])

187. f) *Die Betrachtung der Ionen als komplexer Moleküle* habe ich früher durchgeführt.[4]) Es wurden damals die Verhältnisse der Oberflächenkonzentration der Ionen in Elektrolyten und der Abdampfung bzw. Nichtabdampfung der Ionen untersucht, wobei für die quantitative Durchführung die Annahme diente, daß die Ionen (dort allgemeiner „Lösungsmoleküle") neben dem Kern eine überwiegende Anzahl gebundener Moleküle des Lösungsmittels (z. B. H_2O) enthalten und daß sie —

1) Ann. d. Phys. 17. S. 199—206. 1905.

2) Die wie beschrieben vorauswandernden Ionen wären solche, deren durchschnittliche Wassermolekülzahl während der Beobachtungszeit stark unter dem Mittel geblieben ist.

3) Vgl. das Folgende und auch schon „Probleme komplexer Moleküle" Teil I. S. 13, 14. 1914.

4) „Probleme komplexer Moleküle" Teil I, II, III (Heidelberg, bei Winter, 1914).

damit zusammenhängend — im Volum wesentlich größer seien als die Lösungsmittelmoleküle. Der erste Teil dieser Annahme trifft wohl genügend zu, wenn die Wassermolekülzahl n des Ions etwa 10 übersteigt, und die Radienwerte in Tab. VI zeigen, daß dann auch der zweite Teil erfüllt ist, sowie daß viele Ionen hierher gehören, wie Na, Li, Sr, Cu, Fl und wohl die größte Zahl der langsameren kompliziert gebauten Ionen. Die kleineren Ionen fügen sich jedoch der genannten Annahme nicht.[1]) Für sie ist das Verhältnis v/V vom Volum des Lösungsmittelmoleküls zu dem des Ions nicht nur nicht wesentlich kleiner als 1, sondern sogar zum Teil, bei den kleinsten Ionen, wie H und OH, sogar größer als 1. Es werden dann die a. a. O. unter der genannten Annahme entwickelten Gleichungen ungültig.[2]) Qualitativ bleiben jedoch alle dort erhaltenen Resultate gültig; denn es kommt, wie die dortigen Überlegungen

1) Dies war 1914 noch nicht bekannt; es standen damals nur die unsicheren und in der Tat nicht zutreffenden hydrodynamisch berechneten und außerdem nach verschiedenen Anzeichen geschätzte Radienwerte zur Verfügung (vgl. „Probleme komplexer Moleküle" Teil II, Noten 20, 21).

2) Dies ist bereits a. a. O. (Teil II, S. 13) bei Diskussion des Gültigkeitsbereiches der Gleichungen hervorgehoben worden. Der Punkt, an welchem die Annahme $v/V \ll 1$ die wesentliche Rolle spielt, liegt in der Ableitung von Gl. (5) dort. Ist die Ungleichheit nicht erfüllt, so kann die Dicke S der dort (Teil I, S. 15) betrachteten, die Verdampfung abschirmenden Schicht nicht mehr „nahe gleich dem Radius des Lösungsmoleküls" gesetzt werden, wie es dort geschehen ist. Denn Lösungsmoleküle, die nur ebenso groß oder gar kleiner sind als die Lösungsmittelmoleküle, werden nicht von letzteren überdeckt, wenn der Abstand ihres Mittelpunktes von der Flüssigkeitsoberfläche nur ihrem eigenen Radius gleich ist, sondern es muß dieser Abstand größer sein als der Radius der Lösungsmittelmoleküle. Die letztere, für kleine Lösungsmoleküle (Ionen) geltende Annahme könnte unter Beibehaltung der a. a. O. befolgten Gedankengänge zur Entwickelung veränderter, für diesen Fall passender Gleichungen benutzt werden. Der allgemeine, für Lösungsmoleküle (Ionen) beliebiger Größe passende Fall würde wohl zu unübersichtlichen, komplizierten Gleichungen führen. Die einschränkende Bedingung $v/V \ll 1$ bezieht sich aber, entsprechend dem soeben Angegebenen, nur auf die Gültigkeit derjenigen Gleichungen a. a. O., in welche die Gl. (5) dort eingeführt ist [Gleichungen (11) bis (14), (17) bis (21) dort], was übrigens aus den Ableitungen der Gleichungen dort unmittelbar hervorgeht. Es ist dies übrigens in der umfangreichsten bisher gemachten Anwendung der Gleichungen (L. Andrén, Ann. d. Phys. 52. S. 55. 1917) bereits vollkommen berücksichtigt zu finden.

zeigen, in der Hauptsache nur darauf an, daß das Volum des Ions (Lösungsmoleküls) kompakter mit Materie ausgefüllt ist als das gleiche Volum im Lösungsmittel[1]), daß nämlich das Lösungsmolekül (Ion) neben seinem Kern dieselben Atome enthalte, welche auch die Lösungsmittelmoleküle aufbauen, jedoch (mit Hilfe der Kräfte des Kerns) in kleineren Räumen konzentriert, als es im Lösungsmittel der Fall ist, so daß zwischen Lösungsmolekül (Ion) und den umgebenden Lösungsmittelmolekülen größere Kräfte vorhanden sind als zwischen gleichen Raumteilen von Lösungsmittelmolekülen untereinander.[2]) Das trifft aber auch bei den kleinsten Ionen zu, wie die Kurve *C* (Fig. 3) unmittelbar dadurch zeigt, daß sie gerade bei den kleinsten Ionen am meisten unterhalb der Kurve *A* bleibt.

Es bleibt daher auch für die kleinen Ionen alles bestehen, was in den „Problemen komplexer Moleküle" zur Erklärung der Nichtabdampfung elektrischer Ladung, der Dampfdruckerniedrigung, des osmotischen Druckes[3]), der Eigentümlichkeiten der Wasserfallelektrizität an Elektrolyten und der übrigen Oberflächenerscheinungen von Lösungen gesagt ist. Die quantitativen Verhältnisse, betreffend den Sitz elektrischer Ladung an Flüssigkeitsoberflächen werden nur für die kleinsten Ionen gegenüber den dortigen Gleichungen etwas verändert[4]): die Gesetze der Dampfkondensation bleiben überhaupt unberührt, insofern die Kondensationskerne in Gasen stets komplexe Moleküle von größerer Abmessung sind als die einfachen Dampfmoleküle.

1) Vgl. „Probleme komplexer Moleküle", Teil II, S. 14.

2) Vgl. die Erläuterung über die für die Oberflächenkonzentration maßgebende Kraftdifferenz „Probleme komplexer Moleküle", Teil II, S. 10.

3) Die den osmotischen Druck betreffenden Überlegungen sind überhaupt unabhängig von der Größe der Lösungsmoleküle; letztere spielt nur bei der Auswahl der vorausgesetzten semipermeablen Wand eine Rolle.

4) Bis herab zur Größe des K- oder Cl-, Br-, J-Ions in Wasser ($R = 3 \cdot 10^{-8}$ cm, $v/V = 0{,}5$) dürften die dortigen Gleichungen immer noch ungefähr gelten. Man berechnet danach für diese Ionen und das elektrische Feld 40000 Volt/cm den in der äußersten Molekülschicht sitzenden Bruchteil der Oberflächenladung zu $\beta = 0{,}00015$ und die Tiefe der maximalen Ladung $X = 90 \cdot 10^{-8}$ cm. Für die größten Ionen ($R = 5 \cdot 10^{-8}$ und $v/V = 0{,}064$), wo genauere Gültigkeit zu erwarten ist, ergibt sich $\beta = 0{,}000038$, $X = 120 \cdot 10^{-8}$ cm, was mit den a. a. O. Teil III, S. 32 angegebenen, damals nur mit geschätzten Ionenradien berechneten Zahlen in der Größenordnung übereinstimmt.

188. Außer den im vorhergehenden hauptsächlich betrachteten unter 179 berechneten 5 Ionen sind in Tab. VI auch noch eine Reihe *anderer Ionen* enthalten, für welche Relativzahlen der Wassermoleküle nicht zur Verfügung stehen. Es wurde hier zur Berechnung der R und n außer Gl. (101) der durch die Kurve C, Fig. 3, gegebene Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen benutzt. Man berechnet zuerst mit $\mu = 1$ (was $n = \infty$ entspricht) R nach Gl. (101)[1]), entnimmt dann mit diesem R aus der genannten Kurve den zugehörigen Wert von n und berechnet mit letzterem einen verbesserten Wert von μ und damit aus Gl. (101) einen solchen von R, welches Verfahren so lange fortgesetzt wird, bis R und n sowohl dieser Gleichung als der Kurve genügen. Hierbei stützt sich R hauptsächlich auf die Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung (101), in welcher n keinen wesentlichen Einfluß hat, n aber hauptsächlich auf die Kurve, und insofern letztere nur den Beobachtungen an den vorgenannten 5 Ionen entnommen ist, also die individuellen Eigenschaften der übrigen Ionen nicht enthält, können auch in den n für die letzteren Ionen diese Eigenschaften nicht in vollem Maße berücksichtigt sein. Dies kommt jedoch ernstlich wohl nur für die kleinen n in Betracht[2]), wo das Eigenvolum des Ionenkerns eine wesentliche Rolle spielen kann, und zwar um so mehr, je größer dieses Eigenvolum im Verhältnis zum Volum der n Wassermoleküle ist. Es sind daher die Werte n für Fälle der letzteren Art als weniger sicher in Tab. VI durch Einklammerung gekennzeichnet.[3])

1) Man kann auch Tab. V benutzen. Ergibt sich $R > 5 \cdot 10^{-8}$ cm, so ist überhaupt nur die Tab. V [mit Gl. (101)] maßgebend (vgl. 176) und der aus der Tabelle entnommene Wert von R ist definitiv. Letzterer Fall tritt nur bei den allergrößten Ionen ein (letzte Zeile der Tab. VI); alle anderen Ionen liegen innerhalb des Gültigkeitsbereiches von Gl. (101).

2) Großen Einfluß haben die individuellen Eigenschaften überhaupt nur auf n; R scheint bei gegebenem n ziemlich einheitlich zu sein, geurteilt nach der wenig verschiedenen Lage der Punkte für 2 Ionen so verschiedenen Charakters wie Cl und K bei der Kurve C, Fig. 3.

3) OH wegen sehr kleinen n, Rb und Cs wegen besonders großem Eigenvolum des Kerns (vgl. letzte und vorletzte Spalte der Tab. VI). Die Werte für CO_3 sind sämtlich eingeklammert, weil hier auch der Ausgangswert für l_{16} (Spalte 2) nicht sehr sicher steht.

189. Vergleicht man sämtliche in Tab. VI angegebene Ionenradienwerte R mit den bisher für richtig gehaltenen, aus der hydrodynamischen Gleichung [Gl. (83)] berechneten Werten[1]), so sieht man, daß erstere durchweg größer sind als letztere, was übrigens ganz den allgemeinen Überlegungen, betreffend die Anwendung letzterer Gleichung auf sehr kleine Partikel entspricht (169). Der Unterschied beider Radienwerte ist um so größer, je kleiner R selbst ist; beim H-Ion verhalten sich die beiden Radien wie 1 : 3, bei Li wie 1 : 2; bei den größten Ionen nähert sich das Verhältnis noch etwas mehr der Gleichheit.[2])

190. Will man nach aller heutiger im vorliegenden vervollständigter Kenntnis die Berechtigung beurteilen, die Ionenradien nach der hydrodynamischen bzw. nach unserer gaskinetischen Gleichung zu berechnen, so ist zusammenfassend folgendes zu sagen:

Nach den bei der Herleitung der beiden Gleichungen gemachten Annahmen, welche wir unter 154—160 untersucht

1) Sehr inhaltreiche Zusammenstellungen solcher Werte, beziehlich zugehöriger Raumerfüllungszahlen nach hydrodynamischer Berechnung findet man in den unter 178 zitierten Arbeiten von R. Lorenz.

2) Da hiernach das Verhältnis zwischen den bisher angenommenen und den hier berichtigten Ionenradien für alle Ionengrößen bekannt ist und da es um so weniger von der Natur des Ions abhängt, je größer dessen Masse ist (vgl. 175), so würden die bisher schon aufgestellten empirischen Zusammenhänge zwischen Raumerfüllung und Atomzahl sowie sonstigen Eigenschaften der Ionen ohne Schwierigkeit auf die berichtigten Radien umrechenbar sein. Man sehe in bezug auf diese Zusammenhänge besonders die eingehenden Untersuchungen von R. Lorenz (Zitate in der Note zu 178; außerdem: Ztschr. f. anorg. Ch. **96**. S. 217 u. 231. 1916 u. **106**. S. 46. 1919). An einigen Stellen derselben wird übrigens die Gültigkeit der hydrodynamischen Gleichung — mindestens für die kleinsten Ionen und nach unseren Resultaten mit Recht — bereits bezweifelt. Bei den langsameren Ionen ($\omega/K < 1.7 \cdot 10^{12}$, $l_{18} < 26$), deren Raumerfüllung eindeutige (von der Masse unabhängige, durch Tab. V gegebene) Funktion der Beweglichkeit ist, können die zahlreichen halbquantitativen, von G. Bredig zusammengestellten Beziehungen zwischen den Eigenschaften des Ionenkerns und der Beweglichkeit des Ions (Z. phys. Ch. **13**. S. 191. 1894) unmittelbar als Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften und der *Raumerfüllung* (mittelbar dann auch der Wassermolekülzahl) der Ionen betrachtet werden.

haben, kann die hydrodynamische Gleichung für Ionen — wenn sie nicht zu den größten gehören — als falsch, die gaskinetische allerdings vielleicht als ziemlich ungenau bezeichnet werden. Das erste kann auch so aufgefaßt werden (177), daß der in der hydrodynamischen Gleichung durch die Konstante η bemessene Reibungsvorgang nur die Aneinandervorbeischiebung mehrmolekularer Flüssigkeitsschichten bestimmt, nicht aber die Bewegung von einzelnen Partikeln, welche (wie die Ionen) kleiner oder nicht viel größer sind als die Mediumsmoleküle selber. Das zweite gilt insofern, als es nicht sicher steht, inwieweit die in der gaskinetischen Gleichung angenommene Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle, gleich Gasmolekülen, doch vielleicht einer merklichen Beeinflussung durch die Molekularkräfte unterliegt, obgleich wir kein Zeichen einer solchen Beeinflussung gefunden haben (177) und obgleich die gasmolekulare Behandlung auch in anderen Fällen bei Flüssigkeiten bewährt ist (Note zur Einleitung von Abschn. 9). Auch den Endresultaten nach rechtfertigt sich die Anwendung unserer gaskinetischen Gleichung gegenüber der der hydrodynamischen, indem sie Ionenradien ergibt, welche der nach mehrfacher Erfahrung (178) unzweifelhaft vorhandenen Wasseranlagerung der Ionen genügenden Raum lassen (183), während letztere Gleichung sie auch nach heutiger Kenntnis vom losen Bau der Atome nahezu ausschließt, und indem sie die Temperaturkoeffizienten der Ionenbeweglichkeit aufs beste verständlich zeigt, während die Anwendung der letzteren Gleichung Widersprüche ergibt (185).

Nach allem muß es somit als das Richtigste erscheinen, die bisher allein bevorzugte hydrodynamische Gleichung für die Ionen und für ähnliche Fälle kleiner Partikel in Flüssigkeiten zu verlassen und dafür die gaskinetische anzuwenden. Die dabei zu sammelnde Erfahrung kann dann zeigen, inwieweit diese für Gase wohl unzweifelhaft zutreffende Gleichung etwa für flüssige Medien noch einer Verbesserung bedarf.

Abschnitt 10. Zusammenstellung einiger Wanderungsgeschwindigkeitsgleichungen aus den Teilen I—III.

a) *Gaskinetische Gleichungen.*

Gültigkeitsbereich für Gase $R \leqq L$ (vgl. 159). Für Flüssigkeiten siehe besonders Teil III, Abschn. 9.

1. Einfache Annäherungsformel von 1900 [Teil III, Gl. (1)]; μ beliebig:

$$[\omega] = K \frac{L_t}{W_t}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{2M_t}\right) = \frac{K}{D\pi s^2 W} \cdot \frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}}.$$

Größe der Abweichungen von der verfeinerten Formel ω_A vgl. 151, Tab. III.

2. Mit verfeinerter Rücksicht auf die Molekularbewegung und deren Ungleichheiten (vgl. 85—95) gelten folgende Formeln; μ beliebig:

Für Stoßfall A (elastische Reflexion bei glatten Kugelflächen, vgl. 121) oder auch Stoßfall *C* (Festhaltung der Moleküle und Wiederabgeben mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede Richtung, vgl. 125) gilt

$$\omega_A = \omega_C = \frac{3}{3+\mu}[\omega]\,\Omega_\mu = \frac{K}{D\pi s^2 W} \cdot \frac{3(1+\mu)}{2\sqrt{\mu}(3+\mu)}\,\Omega_\mu$$

$$= \frac{3}{3+\mu}\left(\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}} + \sqrt{\mu}\right)\frac{K}{D\pi s^2 W} \quad \text{[Teil III, Gl. (21)]}.$$

Über die Koeffizienten vgl. 96, Tab. I.

Für Stoßfall B (diffuse Reflexion, vgl. 122) gilt

$$\omega_B = \frac{3}{3+\mu}\left(\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}} + \frac{4\mu-1}{4\sqrt{\mu}}\right)\frac{K}{D\pi s^2 W} \quad \text{[Teil III, Gl. (64)]}.$$

Für Stoßfall D (Festhaltung der Moleküle und Wiederabgabe vom Auftreffpunkt in nahe senkrechter Richtung, ohne Rotation des Partikels, vgl. 127) gilt:

$$\omega_D = \frac{3}{3+\mu}\left(\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}} + \frac{10\mu-4}{10\sqrt{\mu}}\right)\frac{K}{D\pi s^2 W} \quad \text{[Teil III, Gl. (74)]}.$$

Zur Anwendung der Gleichungen vgl. 148, 149. Kritik der erreichten Annäherung vgl. 97—106. Verhältnis zu den Gleichungen anderer Autoren siehe 150—152.

3. Fälle wechselnder Zustände des wandernden Partikels sind in Teil I eingehend untersucht. Es gelten z. B. für abwechselnd freie und absorbierte Elektronen in Gasen die Gl. (23) bis (27) und (38) bis (40a), Teil I.[1]) Diese letzteren Gleichungen

1) Die bereits in der 1. Fußnote zu Teil III erwähnten, in Teil I und II stehen gebliebenen Versehen sind die folgenden:

Teil I: in Gl. (17a) (S. 415) letztes Glied statt $2\mu^2 \frac{1-\mu^{\xi-1}}{1-\mu^2}$ zu setzen $\mu \frac{1-\mu^{\xi-1}}{1-\mu}$.

sind noch ohne die soeben unter 2 genannten Verfeinerungen entwickelt; sie entsprechen im Grad der Annäherung der unter 1 genannten Formel von 1900.[1]) Will man die Verfeinerungen in die Gleichungen einführen, so ist von der allgemeingültigen Gl. (38a) oder (39) auszugehen[2]) und zu den im Zähler vorkommenden Wanderungsgeschwindigkeiten der Faktor $3\,\Omega_\mu/(3+\mu)$ (je mit dem betreffenden Wert von μ) hinzuzufügen.

b) *Die hydrodynamische Gleichung* von Stokes-Kirchhoff mit dem Zusatz von Cunningham ist

S. 420, Z. 5 u. 6 v. o.: der Faktor $\left[\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\xi-1}\right]$ gehört zu *beiden* ersten Gliedern der rechten Seite.

Ebendort, Z. 7 v. o.: statt $\frac{19}{8}$ zu setzen $\frac{23}{8}$.

„ Gl. (23) „ $\frac{19}{4}$ „ „ $\frac{23}{4}$.

In Gl. (24), S. 421 statt Faktor 4 zu setzen 6 und statt $\frac{13}{2}$ zu setzen $\frac{17}{2}$.

S. 422, Z. 6 v. o.: statt $\frac{1}{2}$ zu setzen $\frac{7}{18}$ und statt $\frac{19}{30}$ zu setzen $\frac{8}{15}$.

In Gl. (39), S. 431, letztes Glied im Zähler wie in Gl. (17a) zu ändern.

In Gl. (40) u. (40a), S. 432 statt $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi-1} - \frac{19}{12}$ zu setzen $\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi-1} - \frac{23}{12}$.

Teil II: S. 57, Gl. (51), im Ausdruck für A statt $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi-1} - \frac{19}{2}$ zu setzen $\left(\frac{1}{2}\right)^{\xi-1} \quad \frac{23}{12}$.

1) Für bisherige Anwendungen war dies kein Mangel. Vielmehr fehlte es an den experimentellen Daten. Dies gilt besonders für die auf die Bunsenflamme bezüglichen Anwendungsbeispiele in Teil I und II, welchen noch die Moerausche Messung der Wanderungsgeschwindigkeit der Elektronen zugrunde gelegt war, die sich nachher als ganz unbrauchbar erwiesen hat (vgl. die betr. Fußnote zu 96).

2) Auch wenn man die in den Gl. (23) bis (27) und (40), (40a) gemachte Voraussetzung $M_1 = M$ (d. h. Fehlen von Anlagerung der Träger) fallen lassen will, muß auf Gl. (38) oder (39) zurückgegriffen werden.

$$\omega_h = \frac{K}{6\pi\eta R}\left(1 + A\frac{L}{R}\right) \text{ [Teil III, Gl. (84)]}.$$

Gültigkeitsbereich $\lambda < R \ll \eta / \omega D$ (vgl. 154, 156, 174).

Werte von A für die verschiedenen (unter a2 schon aufgezählten) Stoßfälle nach unseren Ermittelungen:

Für Fall A (elast. Refl., vgl. 121) $A = 1{,}4$ (nach Cunningham 1,63, nach MacKeehan 1,5, vgl. 162).

Für Fall B (diffuse Refl., vgl. 122) $A = 1{,}1$ (nach MacKeehan 1,2, vgl. 163 u. 165).

Für Fall D (Festhaltung und senkrechtes Abgehen, vgl. 127) $A = 0{,}84$ (nach MacKeehan 1,05, vgl. 164 u. 165).

Über Fall C vgl. 164.

Vergleichung hydrodynamisch und gaskinetisch berechneter Wanderungsgeschwindigkeiten s. unter 166—169, 175, 176 und in Tab. IV, V, Teil III.

c) *Bezeichnungen.* — Es bedeuten in den vorstehenden Gleichungen und überhaupt in den Teilen I—III:

ω Wanderungsgeschwindigkeit (Einklammerung, Indexe bedeuten Spezialisierungen),
M Mediumsmolekülmasse,
M_t Partikelmasse,
$\mu = \dfrac{M_t}{M_t + M}$,
r Mediumsmolekülradius,
R Partikelradius,
$s = r + R$,
W mittlere ungeordnete Geschwindigkeit der Mediumsmoleküle,
W_t „ „ „ des Partikels,
L „ freie Weglänge der Mediumsmoleküle,
L_t „ „ „ des Partikels,
λ mittlerer Molekülabstand (zentral) im Medium,
D Dichte des Mediums,
η Reibungskonstante des Mediums,
Ω_μ Verteilungsfaktor (vgl. 70, 87),
K auf das Partikel wirkende Kraft.

Sonstige allgemein durchgeführte Bezeichnungen s. in Teil I, S. 400 u. f.

Heidelberg, 3. Dezember 1919.

(Eingegangen 6. Dezember 1919.)

2. *Die magnetischen Eigenschaften von Nickel–Kupfer-Legierungen*[1]; *von R. Gans und A. Fonseca.*

(Nach Messungen von A. Fonseca.)

Aus den Untersuchungen von Perrier und Kamerlingh Onnes[2]) über den Magnetismus von Gemischen flüssigen Sauerstoffs und Stickstoffs ergab sich ein deutlicher Einfluß der Beimengung magnetisch fast neutralen Stickstoffs auf die spezifische Suszeptibilität des paramagnetischen Sauerstoffs; mit anderen Worten, der Magnetismus des Sauerstoffs hängt von dem gegenseitigen Abstande seiner Moleküle ab.

Es war nun von Interesse, festzustellen, ob das gleiche Phänomen auch bei Legierungen zu beobachten war, welche feste Lösungen eines magnetischen Metalls mit einem unmagnetischen bilden, und gegebenenfalls den Magnetismus der Legierung in seiner Abhängigkeit von der Konzentration und von der Temperatur zu studieren und die Resultate mit der Gansschen Theorie[3]) des Paramagnetismus zu vergleichen.

Wir wählten Ni-Cu-Legierungen, erstens weil diese nach der von Guertler und Tammann[4]) beobachteten Schmelzkurve eine ununterbrochene Reihe von Mischkristallen bilden sollten, und zweitens weil Tammann[5]) auf Grund seiner zahlreichen qualitativen Bestimmungen der Magnetisierbarkeit von Legierungen, in denen eine Komponente ein ferromagnetisches Metall ist, glaubte, den Satz aufstellen zu können, daß immer,

1) Vgl. Contribución al estudio de las ciencias. Universidad Nacional de La Plata 2. 1918, S. 173.

2) A. Perrier u. H. Kamerlingh Onnes, Leiden Comm. Nr. 139.

3) R. Gans, Ann. d. Phys. 50. S. 163. 1916.

4) W. Guertler u. G. Tammann, Zeitschr. f. anorg. Chemie 52. S. 25. 1907.

5) G. Tammann, Zeitschr. f. phys. Chemie 65. S. 73. 1909.

wenn das Lösungsmittel ein unmagnetisches Metall sei, die Legierungen nicht ferromagnetisch seien, selbst wenn die andere Komponente es wäre.

Da, wie wir sehen werden, keine dieser beiden Behauptungen zutrifft, konnten wir bei Ni-Cu-Legierungen das Problem, welches wir uns gestellt hatten, nicht lösen, benutzten aber die Gelegenheit, aus ihrem magnetischen Verhalten ihre Konstitution zu erschließen.

Herstellung der Legierungen.

Zum Schmelzen der Metalle stellten wir uns einen elektrischen Ofen her, wie ihn Ruer[1]) beschreibt, und zwar mit den Verbesserungen, die Bloch[2]) an ihm angebracht hat.

Der Strom wird hierbei direkt durch einen ausgehöhlten Kohlezylinder (Bogenlampenkohle von 30 mm Durchmesser) hindurchgeschickt, in dessen Innern sich ein Schiffchen aus Magnesia befand, das die Metalle enthielt. Damit diese sich bei der hohen Temperatur nicht oxydierten und die Kohle nicht litt, ließen wir durch den Hohlzylinder einen Strom von Stickstoff gehen, welcher mittels einer Lösung von Pyrogallussäure von dem in ihm enthaltenen Sauerstoff befreit war.

Der Ofen wurde mittels Wechselstrom geheizt, den eine Dynamomaschine von 6 K.W. lieferte. Da das Strommaximum dieser Maschine aber nur 150 Ampere betrug, bauten wir uns einen statischen Autotransformator vom Umformungsverhältnis 2 : 1 und schalteten zur Feinregulierung des Stroms eine Spule mit herausziehbarem Eisenkern als variable Impedanz ein.

Als Metalle wurden reinstes Nickel von Merck und elektrolytisches Kupfer benutzt. Letzteres enthielt gemäß einer qualitativen Analyse Spuren von Eisen, diente jedoch unseren Zwecken, da es trotzdem noch diamagnetisch war.

Bestimmung der Konzentration.

Der Gewichtsunterschied zwischen der Legierung und den Substanzmengen, die zu ihrer Herstellung verwendet wurden, war fast immer zu vernachlässigen und betrug nur in einigen wenigen ungünstigen Fällen 0,02 des Sollwertes.

1) R. Ruer, Metallographie, Hamburg u. Leipzig 1907. S. 279.

2) O. Bloch, Über die magnetischen Eigenschaften der Ni-Co-Legierungen. Inaugural-Dissertation, Zürich 1911.

Deshalb verzichteten wir im allgemeinen auf eine Analyse und machten von derselben nur Gebrauch, wenn eine Gewichtsdifferenz vorlag oder bei den Konzentrationen, bei denen die magnetischen Eigenschaften Besonderheiten aufwiesen, und zwar benutzten wir dann zur Analyse eine elektrolytische Methode.[1])

Die Curiesche Temperatur.

Die in Celsiusgraden gemessene Temperatur Θ, oberhalb welcher ein ferromagnetischer Körper paramagnetisch wird, genügt bekanntlich der Beziehung

$$\chi = \frac{C}{t - \Theta}, \tag{1}$$

in der χ die spezifische Suszeptibilität bei der Temperatur t ($t > \Theta$), C die sogenannte Curiesche Konstante bedeutet.

Diese kritische Temperatur Θ, die für jede reine ferromagnetische Substanz charakteristisch ist, varriiert mit der Menge zugesetzter fremder Substanzen, falls diese den ferromagnetischen Kristall verändern, sei es, daß sie mit ihm eine chemische Verbindung eingehen, sei es, daß sie sich in ihm lösen. Dann nimmt die Veränderung natürlich mit der Konzentration des zugesetzten Stoffes zu, bis Sättigung eintritt; und da andererseits die magnetische Komponente, wenn sie in einem anderen unmagnetischen Kristall gelöst ist, auch einen Transformationspunkt besitzt, der mit der Konzentration variiert, so ergibt sich, daß die Reihe von Legierungen aus einem ferromagnetischen und einem unmagnetischen Metall, die verschiedenen Mischungsverhältnissen entsprechen, Transformationspunkte besitzen, die kontinuierlich variieren von der reinen Komponente bis zur Sättigung mit dem anderen Metall. In dem Gebiete zwischen beiden Sättigungspunkten besteht die Legierung jedoch aus immer denselben beiden gesättigten Mischkristallen in verschiedenen Proportionen; deshalb müssen dort beide Transformationstemperaturen bestehen, welche jedem der beiden entsprechen. Wir haben also eine Kurve vom Typus der Fig. 1 zu erwarten.

---

1) Vgl. z. B. B. Neumann, Theorie und Praxis der elektrolyt. Analyse der Metalle, S. 165. Halle 1897.

Dieser Typus ist ganz verschieden von denen, die man in anderen Fällen erhalten würde. Bei vollständiger Mischbarkeit z. B. würde die Kurve stetig sein. Im Falle einer mit ihren beiden Komponenten mischbaren chemischen Verbindung würde man einen Knick der Kurve bei der Konzentration zu erwarten haben, welche dem Mengenverhältnis der Verbindung entspricht.

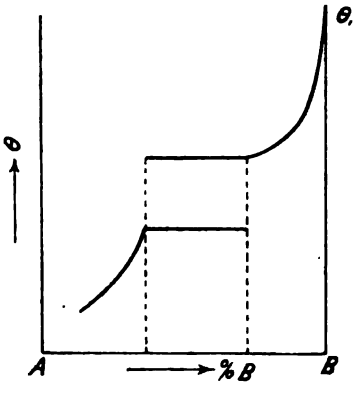


Fig. 1.

Wir besitzen also in der Beobachtung der Transformationspunkte eine Methode, die uns nicht nur erlaubt, die gegenseitige Mischbarkeit der Komponenten zu bestimmen, sondern auch eine teilweise Mischbarkeit und eine chemische Verbindung zu unterscheiden.

Um Θ zu ermitteln, kann man nach dem Vorgehen von Weiss etwa $1/\chi$ oder eine Größe, die $1/\chi$ proportional ist, für verschiedene Temperaturen t oberhalb der kritischen Temperatur bestimmen. Die graphische Darstellung in der t, $1/\chi$-Ebene muß dann nach Gleichung (1) eine Gerade ergeben, welche die Abszissenachse im Punkte $t = \Theta$ schneidet.

Es wurden deshalb die Ablenkungen gemessen, die bei verschiedenen Temperaturen ein Stäbchen der zu untersuchenden Substanz im Magnetfelde erfährt.

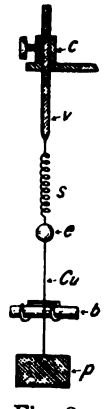


Fig. 2.

Zu dem Zwecke hängten wir zentrisch zwischen den zylindrischen Polschuhen eines du Boisschen Halbringelektromagneten von Hartmann & Braun das horizontale Stäbchen b unter 45° gegen die Kraftlinienrichtung mittels einer Suspension auf, wie sie Fig. 2 zeigt. In derselben bedeutet s eine Bronzedrahtspirale, die oben an einen Messingdraht v angelötet war. Letzterer konnte in einer Hülse bei C in seiner Höhe verändert, um seine Achse gedreht und mittels einer Druckschraube festgeklemmt werden. Der Kupferdraht Cu

trägt einen Planspiegel *e* zur Ablesung mit Fernrohr und Skala und endigt unten in einem zylindrischen Bleigewicht, das aus Merckschem reinen Material hergestellt war, weil es unmagnetisch sein mußte. Das Probestäbchen *b* aus der Legierung wurde mittels zweier in der Figur sichtbaren Haken aus elektrolytischem Kupfer befestigt und konnte leicht gegen ein anderes ausgewechselt werden.

Die Temperaturbäder.

Die Temperaturbäder variierten je nach der Legierung, um die es sich handelte, denn wir mußten bei Temperaturen von -150^0 bis $+150^0$ arbeiten.

Bei den Bestimmungen oberhalb 0^0 benutzten wir einfach ein Becherglas in Asbesthülle mit Wasser unterhalb 100^0 und mit Petroleum für höhere Temperaturen. Geheizt wurde mit einem Bunsenbrenner, durch Rühren gleichmäßige Temperatur erzielt und bei geeigneter Temperatur schnell abgelesen. Diese einfache Anordnung war vollkommen genau genug.

Bei Temperaturen unterhalb 0^0 waren die Schwierigkeiten um so größer, je tiefer jene waren. Mit einer Mischung von Alkohol oder Äther mit fester Kohlensäure erhielten wir als tiefste Temperatur -80^0, und bei Benutzung eines Dewarschen Gefäßes steigt die Temperatur genügend langsam entsprechend der Verdampfung der Kohlensäure. Energisches Rühren vor jeder Ablesung verhinderte, daß die Gasentwicklung zu Störungen Anlaß gab.

Noch tiefere Temperaturen erzeugten wir mit flüssiger Luft und einer Versuchsanordnung, die aus Fig. 3 ersichtlich ist.

Die Flüssigkeit des Temperaturbades wurde zuerst mit Eis und Kochsalz, dann mit einem Gemisch aus fester Kohlensäure und Äther vorgekühlt und in das Dewarsche Gefäß *A* eingegossen, welches sich zwischen den Polen *PP* des Elektromagneten befand. Um ihre Temperatur noch weiter zu erniedrigen, ließ man flüssige Luft aus dem Dewarschen Gefäß *D* mittels des Druckballons *b* in die ringförmige Schachtel *Cu* aus Kupferblech treten, an welche die Kupferrohre C_1 und C_2 angelötet waren, die zum Ein- und Austritt der flüssigen Luft dienten. Der Aluminiumrührer *r*, welcher, um Erschütterungen der Aufhängung zu vermeiden, sich nur zwischen der Kupfer-

schachtel *Cu* und dem an die Kupferrohre gelöteten Ring *a* bewegen konnte, ließ eine hinreichend homogene Temperatur erzeugen, die mit dem Pentanthermometer *T* gemessen wurde, dessen unterer Teil sich in der Höhe der Legierung befand.

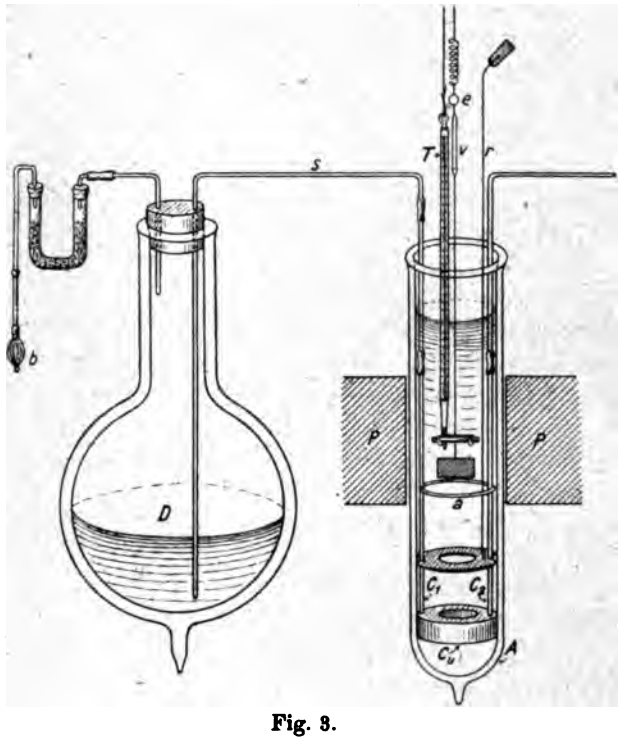


Fig. 3.

Zwischen dem Draht, der den Spiegel *e* trug, und dem Kupferdraht der Aufhängung mußten wir noch ein Glasröhrchen *v* einschalten, weil sonst wegen der großen Wärmeleitfähigkeit des Kupfers der Spiegel sich so weit abkühlte, daß er beschlug.

Die größte Schwierigkeit, die sich beim Arbeiten bei tiefen Temperaturen einstellte, war, eine Flüssigkeit zu finden, die einen genügend tiefen Gefrierpunkt besaß[1]), damit die Aufhängung sich frei in ihr bewegen konnte. Zuerst probierten

1) Pentan wäre geeignet gewesen, war aber nicht aufzutreiben.

wir Petroläther der Firma Poulenc, der aber schon bei ungefähr -120^0 schwerflüssig wurde. Dann destillierten wir diese Substanz über CaO mit einem Le Bel-Henningerschen Apparat und verwendeten nur den Bestandteil, der unter 30° überdestilliert. Damit konnten wir bis -150^0 hinuntergehen, ohne daß die Viskosität störend wurde.

Schließlich machten wir die Aufhängung empfindlicher, indem wir die Bronzespirale durch einen geraden Silberdraht ersetzten, und erreichten dadurch, daß wir 150^0 oberhalb des Transformationspunktes arbeiten konnten und noch genügend große Ausschläge erhielten.

Gewöhnlich beobachteten wir bei steigenden Temperaturen, indem wir die Badflüssigkeit zunächst bis zu dem tiefsten gewünschten Punkte abkühlten und sie allmählich sich erwärmen ließen. Dadurch wurden die Ablesungen am Pentanthermometer auch genauer, welches bei abnehmenden Temperaturen leicht zu niedrige Werte anzeigt, weil ein Teil der Flüssigkeit an den Wänden der Kapillaren haften bleibt.

Es ergaben sich die Zahlenwerte der folgenden Tabelle, in die wir auch die Beobachtungen von Guertler und Tammann, sowie die von Hill[1]) aufgenommen haben.

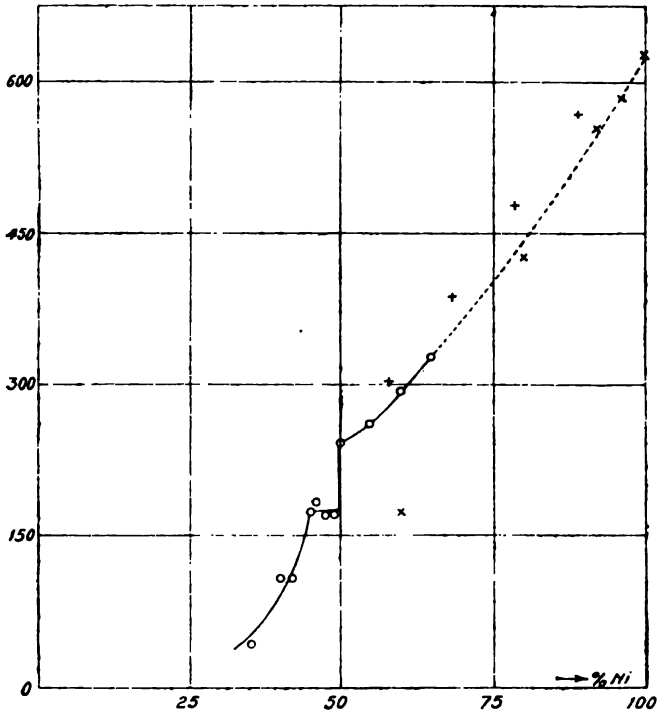
Transformationspunkte.

Prozente Ni	Θ	Beobachter	Prozente Ni	Θ	Beobachter
35	-230^0	Fonseca	60	-100^0	Hill
40	-165	„	80	155	„
42	-165	„	92	280	„
45	-100	„	96	310	„
46	-90	„	100	355	„
47,5	-105	„	57,9	30?	G. und T.
49	-105	„	68,2	115	„
50	-30	„	78,6	205	„
55	-12	„	89,1	295	„
60	20	„			
65	55	„			

Letztere vervollständigen unsere Beobachtungen für größere Konzentrationen und bilden mit denselben eine glatte Kurve. Die einzige größere Abweichung ist die Beobachtung an der

1) B. Hill, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 4. S. 194. 1902.

60%igen Legierung, für die Hill -100° findet im Widerspruch mit unseren Resultaten und denen Guertler und Tammanns. Diesen Wert scheint Hill auch nur oberflächlich bestimmt zu haben, da er ihn einfach in seiner Tabelle angibt,



Transformationspunkte.
○ Beobachtungen von Fonseca.
× „ „ B. Hill.
\+ „ „ Guertler u. Tammann.

Fig. 4.

während er bei den anderen Legierungen die ganze Temperaturkurve der Suszeptibilität mitteilt. Daß die Werte von Guertler und Tammann sämtlich etwas höher liegen als die Hillschen, ist bei der Meßmethode jener Forscher, die geringere Genauigkeit beansprucht, leicht verständlich.

Die Fig. 4 stellt Θ in seiner Abhängigkeit von der Konzentration dar, jedoch sind die Temperaturen in absolutem Maße angegeben.

Theoretisch sollte man zwischen 45 und 50 Proz. eigentlich eine kompliziertere Abhängigkeit des Wertes $1/\chi$ von t als die Linearität erwarten, aus der dann zwei Transformationspunkte abgeleitet werden könnten, entsprechend der chematischen Fig. 1, doch ließ sich dieses Resultat nicht beobachten.

Die Susseptibilität bei Zimmertemperatur.

Ferner haben wir die spezifische Suszeptibilität χ der Legierungen bei ein und derselben Temperatur $t = 15^0$ bestimmt.

Wir bedienten uns der Weissschen Meßmethode[1]), bei der man χ durch die Stromstärken i und J mißt, die durch zwei koaxiale Spulen fließen und die Anziehung kompensieren, welche durch ein inhomogenes Feld auf die fragliche Substanz ausgeübt wird. Ist deren Masse M, so gilt die Formel

$$\chi = B \frac{iJ}{M}, \tag{2}$$

wo B eine Konstante ist, die mittels eines Stoffes bekannter Suszeptibilität ermittelt werden kann. Als solcher diente uns eine $MnCl_2$-Lösung, deren Salz aus reinstem Merckschen Fabrikat durch Umkristallisieren gewonnen worden war. So folgte die nachstehende Tabelle.

Die Suszeptibilität.

Prozent Ni	$\chi \cdot 10^6$	Prozent Ni	$\chi \cdot 10^6$
20,3	0,038	46,0	0,344
29,6	0,073	46,0	0,336
34,8	0,112	46,3	0,358
38,8	0,155	46,6	0,489
40,4	0,189	48,4	0,468
42,5	0,213	49,7	1,037
44,5	0,338	54,9	1,530
		60,2	4,565

Die Resultate der ersten beiden Proben (von 20,3 Proz. und 29,6 Proz.) sind ziemlich unsicher wegen des geringen Ausschlags, der bei ihrer Messung kompensiert werden mußte.

1) P. Weiss u. G. Foëx, Arch. d. sc. phys. et nat. **31.** S. 4, 19, 89, 117. 1911.

Die Suszeptibilitäten wurden gemessen, nachdem die Legierungen 6 Stunden lang auf ungefähr 800° erwärmt worden waren. Bekanntlich gleichen sich Inhomogenitäten der Konzentration auch in festen Lösungen durch Diffusion aus, und zwar um so schneller, je näher die Temperatur dem Schmelzpunkte liegt.

Die Resultate sind in der Fig. 5 graphisch dargestellt. Wie wir aus ihr erkennen, wächst die Suszeptibilität zuerst langsam mit dem Nickelgehalt bis 45 Proz., um von 50 Proz. an schnell anzusteigen. Über 60 Proz. ließen sich keine Messungen ausführen, da bei der Temperatur von 15° das Material dann ferromagnetisch ist. Besonders charakteristisch ist das Verhalten zwischen 45 und 50 Proz., d. h. in derselben Gegend, in der auch der Umwandlungspunkt die in Fig. 4 ersichtliche Eigenart zeigte. Theoretisch hätte man zwischen 45 und 50 Proz. eine lineare Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Konzentration zu erwarten, doch tritt das praktisch manchmal nicht ein.[1])

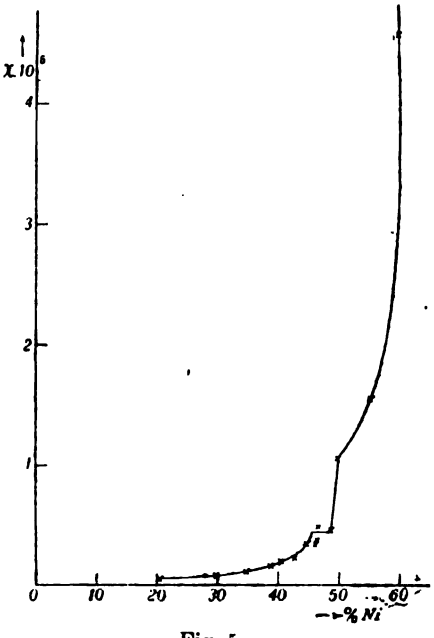


Fig. 5.

Schlussfolgerungen.

Aus den vorstehenden Beobachtungen können wir folgende Schlüsse ziehen.

1. Entgegen der Tammannschen Regel[2]) können ferromagnetische in unmagnetischen Kristallen gelöste Kristalle ferromagnetische Legierungen bilden.

1) Vgl. K. Honda, Ann. d. Phys. 32. S. 1003. 1910.
2) G. Tammann, Ztschr. f. phys. Chem. 65. S. 73. 1909.

2. Kupfer-Nickel-Legierungen gehören nach Roozeboom zum Typus IV von Mischungen, die eine beschränkte gegenseitige Mischbarkeit zeigen. Dieselbe ist unterbrochen durch einen Konzentrationsbereich, der bei unserem Beispiel sich ungefähr von 45 bis 50 Proz. Nickel erstreckt, und in dem kupfergesättigte Nickelkristalle und nickelgesättigte Kupferkristalle in variablen Proportionen vorhanden sind.

Dies Verhalten ist auch schwach angedeutet in der Unstetigkeit der von Feussner und Lindeck[1]) beobachteten Kurven der elektrischen Leitfähigkeit sowie ihres Temperaturkoeffizienten [siehe auch die Figur bei Haken[2])], die jene Autoren auf die Existenz einer chemischen Verbindung der Formel CuNi schließen ließen.

3. Das Resultat der thermischen und mikrographischen Analyse von Guertler und Tammann ließ diese auf die lückenlose Folge von Mischkristallen schließen; dieser Irrtum erklärt sich aus der kleinen Ausdehnung des Sättigungsbereichs, der verständlicherweise jenen Forschern leicht entgangen sein kann.

4. Unser Ergebnis ist in Übereinstimmung mit dem Verhalten von Co-Cu-Legierungen mit dem alleinigen Unterschiede, daß die Lücke in der Reihe der Mischkristalle bei diesen wesentlich ausgedehnter ist. Insofern verhält sich Ni also ganz analog wie Co; die beiden Metalle sind also auch in dieser Beziehung einander sehr ähnlich.

La Plata, Instituto de Física, 20. November 1917.

1) K. Feussner u. St. Lindeck, Abh. d. Phys.-Techn. Reichsanstalt 2. S. 501. 1895.

2) W. Haken, Ann. d. Phys. 32. S. 291. 1910. Tafel XI.

(Eingegangen 4. Oktober 1919.)

3. *Über thermoelektrische Ströme in Quecksilber; von H. Haga und F. Zernike.*

(Übersetzt aus den Versl. en Meded. Amsterdam, 29. März 1919.)

In einer in diesen Annalen erschienenen Abhandlung „Ein für Thermoelektrizität und metallische Wärmeleitung fundamentaler Effekt" versucht C. Benedicks zu beweisen, daß an jeder Stelle in einem homogenen Leiter, wo beiderseits das Temperaturgefälle ungleich ist, eine Thermokraft auftritt. Benedicks weist auf die Möglichkeit hin, daß die unter diesen Umständen in *festen* Metallen auftretenden Thermokräfte Molekular- oder Strukturänderungen zuzuschreiben sind und betrachtet deshalb den Beweis der Existenz dieser Kraft nur dann endgültig erbracht, wenn es gelingt, sie auch in einem *flüssigen* Leiter nachzuweisen. Es gelang ihm aber nicht, bei der schon von Magnus[2]) angewandten Anordnung — einem an ein empfindliches Galvanometer angeschlossenen, aus Quecksilber bestehenden Leiterkreis — selbst beim Heranziehen des „Drosselprinzips" sichere Resultate zu erhalten. Benedicks schreibt dieses der Wärmeleitung des Glases zu, wodurch die Größe des Temperaturgefälles herabgesetzt werde.

Es schien uns nicht unmöglich, mit Quecksilber den Versuch in solcher Weise anzustellen, daß allen von Benedicks aufgestellten Bedingungen[3]) vollständig genügt wurde und somit eine Entscheidung zu erlangen über die Existenz des neuen Effektes. Wir benutzten dazu als Leiterkreis ein empfindliches Galvanometer und zwei ungleich temperierte sich berührende Quecksilberstrahlen. Dadurch vermeidet man ganz den von Benedicks gefürchteten Einfluß des Glases, die Berührungsstelle kann äußerst klein gemacht werden, während das Tem-

1) C. Benedicks, Ann. d. Phys. 55. S. 1—80, 103—150. 1918.
2) G. Magnus, Pogg. Ann. 23. S. 497. 1851.
3) A. a. O. S. 118.

peraturgefälle sehr groß ist und bleibt, weil immer neue Quecksilbermengen miteinander in Berührung kommen.

Die Versuchsanordnung war folgende:

An der Glaskugel A — Durchmesser $\pm$ 7,5 cm — war eine Röhre B angeschmolzen, deren ausgezogenes Ende eine sehr enge Öffnung hat. Die Kapillarröhre C ist mittels eines 50 cm langen Kautschukschlauches an der Röhre E verbunden. F und G sind ebenfalls durch einen 50 cm langen Schlauch verbunden; bei P ist ein Platindraht eingeschmolzen. Die Hälfte der Kugel A und der übrige Glasapparat war mit im Vakuum destilliertem Quecksilber gefüllt. Mittels eines über den oberen Teil von A geschobenen Druckschlauchs wurde A mit einem mit Luft von 2 bis 3 Atmosphären gefüllten Kupfergefäß verbunden. Diese Anordnung bezweckte, erstens zu verhüten, daß die Wärme sich durch Leitung von der erhitzten Röhre B bis zum Platindraht P fortpflanzen könnte und zweitens, um eine bequeme Füllung von A mit Qecksilber zu ermöglichen.

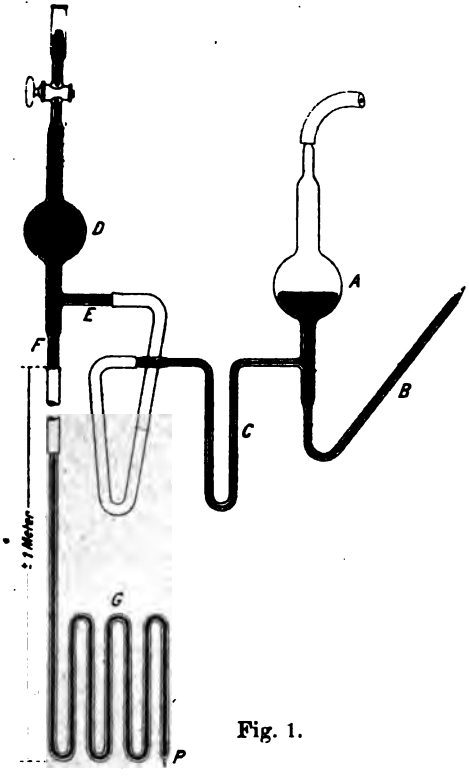


Fig. 1.

Für jeden Quecksilberstrahl war ein gleicher Apparat hergestellt; die beiden Röhren G wurden mit den im Zickzack gebogenen Teilen aneinander gebunden in ein großes (48 × 24 × 20 cm) mit Wasser gefülltes Gefäß gesenkt; die Platindrähte P waren an den Leitungsdrähten zum Galvanometer — mit weißer Seide umklöppelten biegsamen Gummiaderschnüren gelötet; die Lötstellen und die nicht isolierten Platin- und

Kupferdrähte wurden sorgfältig mit Schellack bedeckt und 2 m der Leitungsschnüre ins Wasser untergetaucht, damit die Verbindungsstellen Quecksilber-Platin-Kupfer gleiche Temperatur hätten und geschützt wären für etwaige durch die Kupferdrähte oder das Quecksilber hingeleitete Wärme.

Der Widerstand der Zuleitungsdrähte, der Röhren mit Quecksilber und zwei Quecksilberstrahlen war zusammen 1,5 Ohm. Das Galvanometer war ein von Carpentier verfertigtes Instrument vom Thomson-Typus, dessen astatische Doppelnadel durch ein von Siemens & Halske verfertigtes astatisches Nadelsystem nach du Bois-Rubens ersetzt worden war; getragen wurde das System von einem 7 μ dicken Quarzfaden. Der Widerstand der Spulen ist 2,7 Ohm; die Skalenentfernung war 2,8 m; das Ablesefernrohr hatte eine 33 fache Vergrößerung. Durch den Richtmagneten wurde eine Empfindlichkeit erreicht von 1 mm Ausschlag für $5{,}8 \times 10^{-9}$ Amp., so daß bei einem totalen Widerstand von 4,2 Ohm 1 Mikrovolt einen Ausschlag gab von 41 mm. Bei dieser Empfindlichkeit waren wir aber, wegen der Straßenbahnstörungen, gezwungen, die Beobachtungen während der Nacht zu machen. Dann aber waren, bei nicht großen Deklinationsschwankungen, die Ablesungen bis auf 0,1 mm genau. Einer der Glasapparate $A\,B\,C$ war durch ein starkes Stativ getragen, das fein regulierbare Verschiebungen in drei aufeinander senkrechte Richtungen gestattete. Zum Auffangen des Quecksilbers waren im oberen Teil einer vertikalen 4 cm weiten Glasröhre zwei vertikale Schlitze gemacht, wodurch die Enden der Röhren B geschoben wurden; auf dem oberen Rand der Röhre wurde ein hölzerner Ring mit Glasfenster gelegt, durch welches die Strahlen mit einem 15 fach vergrößernden Binokularmikroskop beobachtet werden konnten. Die Quecksilberstrahlen trafen das Fenster und das Quecksilber wurde in einem unter die Röhre gestellten Becherglas gesammelt.

Bei richtigen Öffnungen der Röhren B erhielten wir sehr schöne Strahlen, die in einer Länge von einigen Zentimetern ganz wie Metalldrähte aussahen, so daß die Durchmesser mittels eines mit Okularmikrometer versehenen Mikroskopes gemessen werden konnten. Bei unseren Versuchen war der Durchmesser des einen Strahles 0,10 mm, der des anderen 0,13 mm. Weiter

von den Öffnungen entfernt wurden die Strahlen durch Tropfenbildung trübe.

Näherte man einen Strahl langsam dem anderen und berührten sie sich nur oberflächlich, so behielten sie ungefähr ihre — senkrecht aufeinander stehende — Richtung bei. Eine kleine Verschiebung hatte eine große Änderung zufolge: Die Strahlen vereinigten sich in einer dünnen, bald sich in Tröpfchen auflösenden Membran: bei zentralem Stoß war die Membran senkrecht zur Ebene der Strahlen gerichtet. Zum Erhalten des erwärmten Strahles wurde eine 16 cm lange, gut umschließende Kupferröhre über den oberen Teil von *B* geschoben und durch eine darunter gestellte Gasflamme erhitzt; die Temperatur konnte hierdurch, auch während des Spritzens, bis zum Siedepunkt steigen, welches sich u. a. zeigte, als wir einmal unmittelbar nach dem Versuch die Druckluft in *A* ausströmen ließen und der Apparat zerbrochen wurde durch die sich aus der überhitzten Flüssigkeit auf einmal bildende Dampfmenge. Es erschien uns überflüssig, die Temperatur des Quecksilbers in den Strahlen genau zu messen, es genügte uns, sie zu schätzen, u. a. aus der Menge des einen feinen Nebel bildenden Dampfes.

An verschiedenen Tagen wurden mehrere vollkommen miteinander übereinstimmende Versuchsreihen gemacht; nebenstehende Tabelle gibt als Beispiel eine derselben.

In der zweiten und dritten Vertikalreihe bedeuten die Zahlen die Skalenablesungen in mm; von 1 Uhr 27 Min. bis 1 Uhr 31 Min. waren die Strahlen nicht erwärmt und es wurde abwechselnd abgelesen, wenn die Strahlen sich nicht berührten und bei Berührung unter zentralem Stoß; der kleine Ausschlag rührte von den im Stromkreis irgendwo existierenden Thermokräften her. Jetzt wurde die Gasflamme unter der Kupferröhre gestellt, so daß der eine Quecksilberstrahl fortwährend wärmer wurde: Die Ausschläge wurden größer; nach Fortnahme des Gasbrenners wurden die Ausschläge kleiner und waren gleich der ursprünglichen, sobald das Quecksilber die Zimmertemperatur wieder erreicht hatte. Wurde der andere Strahl erhitzt, so waren die Ausschläge kleiner als bei nicht erwärmten Strahlen: der Einfluß der Erwärmung ist also umkehrbar.

Zeit 6. März 1919	Ablesung: Die Strahlen berühren sich nicht	Ablesung: Die Strahlen berühren sich	Ausschlag
1 Uhr 27 Min.	154,2		
	153,8	161,9	+ 7,9
	154,0	161,9	+ 8,0
	154,0	161,7	+ 7,7
1 Uhr 31 Min	Flamme unter der Kupferröhre		
	153,2		
	153,0	161,4	+ 8,3
	153,0	161,7	+ 8,7
	152,5	162,0	+ 9,2
		162,6	+ 9,8
	153,0	Dämpfe sichtbar	
	153,0	163,0	+ 10,0
		163,2	+ 10,2
	153,0	sehr starker Dampf	
	152,7	163,5	+ 10,8
	153,0	163,7	+ 10,8
	Flamme entfernt		
	152,7		
	152,7	163,5	+ 10,8
	Quecksilber auf Zimmertemperatur		
	154,0		
1 Uhr 41 Min.	154,2	162,1	+ 8,0
1 Uhr 48 Min.	155,2		
	155,2	162,8	+ 7,6

Man könnte meinen, daß der Unterschied zwischen den Ausschlägen bei gleicher und ungleicher Temperatur der Quecksilberstrahlen — maximal 3,2 mm — einer etwaigen Verbindung des Quecksilbers mit einem Bestandteile des Glases zuzuschreiben wäre, wodurch der erwärmte Strahl aus verunreinigtem Quecksilber bestehen würde. Um dieses zu prüfen, wurde die eine Röhre *B* eine Stunde lang vor Anfang des Versuches stark erhitzt, so daß das sich in dieser Röhre befindende Quecksilber in höherem Grade verunreinigt werden könnte und wodurch während der ersten Minute des Versuches ein anderer Ausschlag sich ergeben würde als nachher. Dieses zeigte sich aber nicht, so daß obige Annahme nicht richtig sein kann.

Ungezwungen aber läßt sich obengenannter Unterschied, der Größe und Richtung nach, deuten als eine Folge der zwischen Quecksilber unter Druck und Quecksilber ohne Druck

auftretenden Thermokraft, welche Kraft von Des Coudres[1]) gefunden wurde und später auch von Wagner[2]) und Hörig[3]) gemessen ist. Stand doch das Quecksilber in den Glasgefäßen unter dem Druck der zusammengepreßten Luft, die Quecksilberstrahlen aber wurden von unter Atmosphärendruck stehendem Quecksilber gebildet und ihre Berührungsstellen mit dem Quecksilber unter Druck hatten ungleiche Temperatur.

Daß diese Auffassung die richtige war, wurde außerdem durch folgenden Versuch bewiesen. Über die Enden der beiden Röhren *B* wurde ein knieförmig umgebogenes enganschließendes Glasröhrchen geschoben, das durch die Strahlen mit Quecksilber gefüllt wurde; eine an der oberen Seite angebrachte kleine Öffnung diente als Ausfluß.

Wurde nun eine der Röhren *B* erwärmt, so erhielten wir Ausschläge von ganz derselben Größe wie mit den freien Quecksilberstrahlen, welche beim Ablassen des Druckes sogleich verschwanden.

Bei unseren Versuchen wurde aber dennoch eine Tatsache gefunden, welche sich nicht durch diese Thermokraft erklären läßt: immer wurde ein größerer Ausschlag konstatiert bei sehr oberflächlicher Berührung der Strahlen als beim zentralen Stoß; die Differenz war größer bei größerem Temperaturunterschied der Strahlen und zwar maximal 1,5 mm. Es wäre möglich, diese Differenz dem bei oberflächlicher Berührung stattfindenden größeren Temperaturgefälle zuzuschreiben und sie als Beweis der Existenz des Benedicks-Effektes zu betrachten. Diese Thermokraft wäre aber nur $3{,}5 \times 10^{-8}$ Volt bei dem sehr großen Temperaturunterschied von 300° C in einer Entfernung von einem Bruchteil eines Millimeters, so daß man sie bei den üblich vorkommenden Thermoströmen nicht zu berücksichtigen braucht. Da es uns erwünscht erschien, die obere Grenze dieser etwaigen Thermokraft in mehr normalen Fällen und ohne den Druckeffekt anzugeben, wurde ein dünnwandiges Glasröhrchen — Wandstärke 0,1 mm, innerer Durchmesser $\pm$ 0,8 mm — in der Mitte ausgezogen auf eine

1) Des Coudres, Wied. Ann. 43. S. 673. 1891.
2) E. Wagner, Ann. d. Phys. 27. S. 955. 1908.
3) H. Hörig, Ann. d. Phys. 28. S. 871. 1909.

Wandstärke von 0,08 mm und inneren Durchmesser von $\pm$ 0,3 mm. Dieses Röhrchen wurde mittels Stückchen Kautschukschlauch mit den Enden der Röhren *B*, deren ausgezogene Enden abgeschnitten waren, verbunden und horizontal aufgestellt; durch eine kleine Niveaudifferenz konnten wir einen schwachen Strom von Quecksilber durchfließen lassen. Ohne diesen Strom gab eine Erwärmung des Röhrchens an der einen Seite der verjüngten Stelle nicht den geringsten Ausschlag; die Oberfläche des Querschnittes des Quecksilbers im Röhrchen war 0,50 mm^2, die des Glases 0,38 mm^2 und im ausgezogenen Teil 0,08 mm^2 bzw. 0,1 mm^2; da die Wärmeleitfähigkeit des Glases den zehnten Teil derjenigen des Quecksilbers beträgt, kann der von Benedicks gefürchtete Einfluß des Glases unter diesen Umständen nur klein sein. Außerdem konnte dieser Einfluß noch in hohem Maße dadurch herabgesetzt werden, daß wir das Quecksilber dem Wärmestrom entgegen strömen ließen. Das kalte Quecksilber strömte durch die Einengung, und wurde gleich nachher durch eine das Röhrchen berührende Bunsenflamme stark erhitzt; das Quecksilber in der Einengung, wo die Geschwindigkeit das sechsfache der Geschwindigkeit im Röhrchen war, behielt seine niedrige Temperatur bei; ein Temperaturunterschied von wenigstens 250° C in einer Entfernung von wenigen Millimetern wurde hierdurch erreicht.

Da bei der Ausführung dieses Versuches die Deklinationsschwankungen äußerst gering waren, ließ sich gegebenenfalls eine Ausschlagsänderung von 0,1 mm ganz sicher nachweisen. Sogar diese Änderung wurde nicht beobachtet, so daß bei obengenanntem Temperaturgefälle die Thermokraft in Quecksilber nicht mehr als 1×10^{-9} Volt betragen kann.

Was nun die obenerwähnte kleine Differenz von 1,5 mm anbetrifft, welche bei den verschiedenen Weisen, worauf die Strahlen sich berühren, gefunden wurde, so könnte sie, ohne Annahme einer vom Temperaturgefälle abhängigen Thermokraft, wohl einer anderen Ursache zugeschrieben werden: aus der während einer Minute gespritzten Quecksilbermenge und dem Durchmesser des Strahles folgt, daß die Geschwindigkeit des Quecksilbers ungefähr 5 m/Sek. betrug, so daß die Zeit, worin bei oberflächlicher Berührung der eine Strahl den anderen passiert, weniger als $^1/_{50000}$ Sek. ist. Bei einem Temperatur-

unterschied der beiden Strahlen von 300° C läßt es sich denken, daß in dem beiden Strahlen gemeinsamen Teil die Elektronen und Molekülen während jener kurzen Zeit noch nicht in normale Verhältnisse gekommen sind, so daß jener Teil als aus einer anderen Art Quecksilber bestehend betrachtet werden kann, welches, an beiden Seiten ungleich temperiert, eine Thermokraft liefert.

Nach unserer Meinung haben diese Versuche die Existenz des von Benedicks gesuchten Effektes widerlegt, und es ist deshalb nicht nötig, die Theorie der Thermoelektrizität zu ändern.

Groningen, Physikalisches Institut d. Universität.

(Eingegangen 26. September 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE.

BAND 62.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 62.

DER GANZEN REIHE 367. BAND.

KURATORIUM:
M. PLANCK, G. QUINCKE, W. C. RÖNTGEN,
E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER FIGURENTAFEL.

LEIPZIG, 1920.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Nachweis zu der Figurentafel.

Tafel I. F. Krüger.

Inhalt.

Vierte Folge. Band 62.

Neuntes Heft. Seite

1. Jan Weyssenhoff. Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen und der Stokes-Cunninghamschen Formel. I Hydrodynamischer Teil 1
2. Gustav Mie. Die Einführung eines vernunftgemäßen Koordinatensystems in die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Gravitationsfeld einer schweren Kugel 46
3. C. Dieterici. Zum Problem der Zustandsgleichung . . . 75
4. A. Sommerfeld. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie 95

Ausgegeben am 20. Mai 1920.

Zehntes Heft.

1. Marie Anna Schirmann. Zur Theorie der Doppelgitter. I. (Ein elektrostatisches Problem.) 97
2. Karl F. Lindman. Zur Frage nach der Existenz wahrer Pyroelektrizität 107
3. W. Schottky. Thermodynamik der seltenen Zustände im Dampfraum. (Thermische Ionisierung und thermisches Leuchten.) I. Teil 113
4. Otto Schaefer. Die Schwingungen biegungssteifer Saiten . 156
5. J. Traube. Über Balloelektrizität, Molekularkräfte und elektrische Kräfte 165
6. Erich Rumpf. Über die Polarisation in der Geißlerentladung 173

Ausgegeben am 28. Mai 1920.

Elftes Heft.

1. Carl Benedicks. Galvanometrischer Nachweis der Thermospannung 1. Art beim flüssigen Quecksilber 185
2. Max Born und Elisabeth Bormann. Zur Gittertheorie der Zinkblende 218
3. Hans Vogel. Die Zungenpfeife als gekoppeltes System . . 247
4. A. Gockel. Beiträge zur Kenntnis von Farbe und Polarisation des Himmelslichtes 283

Ausgegeben am 8. Juni 1920.

Zwölftes Heft.

1. Willy Möbius. Über die Dispersion von Wasser und Äthylalkohol zwischen 7 und 35 mm Wellenlänge und Vorversuche zur Verwendung noch kürzerer elektrischer Wellen 293
2. Richard Gans. Die Trägheit der Elektrizität (eine Kritik) 323
3. Richard Gans. Ein Ultrafiltrierapparat 327
4. Richard Gans. Ultramikroskopische Studien. (Methoden zur Formbestimmung subultramikroskopischer Teilchen) . . . 331
5. Hans Ferd. Mayer. Kritik zur Wanderungsgeschwindigkeitsformel Herrn Langevins 358
6. E. Waetzmann. Über erzwungene Schwingungen bei gestörter Superposition 371

Ausgegeben am 17. Juni 1920.

Dreizehntes Heft.

		Seite
1.	O. Knopf. Die Versuche von F. Harreß über die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Körpern	389
2.	M. v. Laue. Zum Versuch von F. Harreß	448
3.	R. Seeliger. Die Aufrechterhaltung der negativen Erdladung, das Grundproblem der luftelektrischen Forschung	464
4.	H. Weyl. Erwiderung auf Hrn. Sommerfelds Bemerkungen über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie	482

Ausgegeben am 8. Juli 1920.

Vierzehntes Heft.

1.	H. Barkhausen und H. Lichte. Quantitative Unterwasserschallversuche	485
2.	H. Dember und M. Uibe. Über eine physikalische Theorie der Bewegung des Erdschattens in der Atmosphäre	517
3.	Günther Thilo. Der Strahlungsdruck auf Kreiszylinder aus beliebigem Material	531
4.	J. Wallot. Kinematische und energetische Definition der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen	569

Ausgegeben am 16. Juli 1920.

Fünfzehntes Heft.

1.	Teófilo Isnardi. Experimentaluntersuchungen an trüben Medien. (Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans)	573
2.	Max Weth. Über die Anregung des kontinuierlichen, Serien- und Bandenspektrums des Wasserstoffs durch die langsamen Kanal- und Kathodenstrahlen des positiven Spitzenstroms	589
3.	Erwin Schrödinger. Theorie der Pigmente von größter Leuchtkraft	603
4.	Reinhard Mecke. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel. (Fortsetzung)	623
5.	H. Vogel und M. Wien. Zungenpfeife und Röhrensender	649
6.	Rudolf H. Weber. Die Magnetisierbarkeit von Kupfer–Zinklegierungen. (Nach Messungen von Konrad Greulich † berichtet)	666

Ausgegeben am 4. August 1920.

Sechzehntes Heft.

1.	F. Krüger. Theorie der Schneidentöne. (Hierzu Tafel I)	673
2.	A. Rubinowicz. Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese. (I. Mitteilung)	691
3.	A. Rubinowicz. Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese. (II. Mitteilung)	716
4.	G. Hoffmann. Zur experimentellen Entscheidung der Frage der Radioaktivität aller Elemente	738
5.	Max Wien. Bemerkung zu der Arbeit von W. Hahnemann und H. Hecht: „Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons“	759

Ausgegeben am 20. August 1920.

1920. № 9.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen und der Stokes-Cunninghamschen Formel. I. Hydrodynamischer Teil;*

von Jan Weyssenhoff.

§ 1. Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung enthält eine kritische Zusammenstellung unserer Kenntnisse über die Gesetze der „langsamen" Bewegung von Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen. Der erste Teil ist der hydrodynamischen Seite des Problems gewidmet, im zweiten wird die gaskinetische Auffassung vertreten. Es wird dort auf die äußerst schwachen theoretischen Grundlagen der so oft angewandten Stokes-Cunnighamschen Formel hingewiesen. Falls manche der hier enthaltenen Tatsachen und Bemerkungen selbstverständlich oder gar trivial erscheinen sollten, so diene der Hinweis als Entschuldigung, daß in vielen der besprochenen theoretischen und experimentellen Arbeiten verschiedene Resultate der früheren Forschung teilweise übersehen oder gar mißdeutet wurden. Auch harren noch einige Unstimmigkeiten zwischen experimentellen und theoretischen Ergebnissen ihrer endgültigen Erklärung (vgl. insbesondere § 7 b).

Wir präzisieren zuerst die Bedeutung einiger Benennungen, die wir im weiteren durchgehends gebrauchen werden. Ein Teilchen bewege sich unter dem Einflusse einer konstanten Kraft F in einem Medium, dessen Koeffizienten der inneren Reibung wir mit μ bezeichnen wollen. Nach Erreichung des stationären Bewegungszustandes wird sich das Teilchen mit einer konstanten Geschwindigkeit V bewegen, und wenn wir

$$F = W \cdot V \quad \text{und} \quad V = B \cdot F \tag{1}$$

setzen, so nennen wir, wie gewöhnlich, B die *Beweglichkeit* des Teilchens; ihren reziproken Wert W werden wir als *Widerstandskoeffizienten* bezeichnen. In allen weiter unten besprochenen Fällen wird die Geschwindigkeit V der Kraft F

proportional, d. h. W bzw. B werden von V bzw. F unabhängig sein. Wo sie nicht direkt aus den Grundannahmen erschlossen werden kann, da wird diese Proportionalität von vornherein durch eine besondere (stillschweigende) Annahme eingeführt werden.

Die Ermittlung des Widerstandskoeffizienten W als Funktion der Eigenschaften des Teilchens und des Mediums, in welchem es sich bewegt, bildet den Gegenstand der vorliegenden Besprechung.

§ 2. Die allgemeine Formulierung des Problems der „langsamen" Bewegung einer zähen Flüssigkeit.

Je langsamer die Bewegung einer Flüssigkeit ist, um so mehr überwiegt die Wirkung der inneren Reibung diejenige der Trägheit. Im Grenzfall unendlich kleiner Geschwindigkeiten fallen in den klassischen Navier-Poissonschen Differentialgleichungen der Bewegung einer zähen Flüssigkeit die „Trägheitsglieder" [mit $u(\partial u/\partial x)$ usw.] fort, und für stationäre Bewegung bei Abwesenheit äußerer Volumkräfte reduzieren sich diese Gleichungen auf die einfache Form

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta v, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \Delta w. \tag{2}$$

Hierin bedeuten u, v, w die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z, μ den Koeffizienten der inneren Reibung, p den Druck und

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot$$

Dazu tritt gewöhnlich noch, als Spezialfall der physikalischen Beziehung zwischen Druck und Dichte, die Bedingung der Inkompressibilität

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2'}$$

In Verbindung mit den nötigen Randwertangaben bilden die Gleichungen (2) und (2') die mathematische Formulierung des Problems der „langsamen", stationären Bewegung einer zähen Flüssigkeit.[1]) In jedem einzelnen Falle muß man

1) A. E. H. Love, Enz. d. math. Wiss. IV, 15, Hydrodynamik I, § 13; da die „Langsamkeit" der Bewegung nicht nur von der Geschwindigkeit und der Zähigkeit, sondern auch von den Raumabmessungen

natürlich die Berechtigung der gemachten Vernachlässigungen besonders untersuchen (vgl. § 6).

Die Art der Randwertangaben hängt wesentlich davon ab, ob man an der Berührungsfläche der Flüssigkeit mit festen Körpern Gleitung zuläßt oder nicht. Im letzten Falle stimmt in jedem Punkte der Berührungsfläche die Geschwindigkeit der Flüssigkeit mit der des festen Körpers überein. Was die tropfbaren Flüssigkeiten anbetrifft, so nimmt man jetzt gewöhnlich an, daß diese letzte Bedingung immer erfüllt ist; jedenfalls ist das Bestehen der Gleitung zwischen einer tropfbaren Flüsigkeit und einer festen Oberfläche nie einwandfrei festgestellt worden.[1]) Anders verhält es sich aber mit verdünnten Gasen, für welche die Gleitung sowohl experimentell gefunden als auch theoretisch begründet wurde. Auf diesen Gegenstand werden wir im zweiten Teile noch näher zu sprechen kommen.

Vom hydrodynamisch-phänomenologischen Standpunkte aus wurde die Möglichkeit der Gleitung bereits von Navier und Poisson berücksichtigt. Die Gleitung besteht bekanntlich in einem Unterschied der Tangentialgeschwindigkeiten des festen Körpers und der angrenzenden Flüssigkeit. Navier und Poisson nahmen nun an, daß die Kraft pro Flächeneinheit, mit welcher die Flüssigkeit und der feste Körper aufeinander einwirken, dieser Differenz proportional sei, und da diese Kraft dem tangentialen Zug in der Grenzschicht der Flüssigkeit das Gleichgewicht halten muß, so ergibt sich daraus die erwünschte Grenzbedingung, die im Falle paralleler Laminarbewegung $[u = f(y),\ v = w = 0]$ die einfache Form

$$\beta(u - u') = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

annimmt. Hierin bedeutet u die Geschwindigkeit der Flüssigkeit, u' diejenige des festen Körpers und β ist der sogenannte

---

abhängig ist (vgl. § 6), so schlägt M. Smoluchowski (Krak. Anz. S. 143, 1904) zur besseren Charakterisierung dieses Bewegungszustandes den Ausdruck „mouvement calme" [ruhige, sanfte Bewegung] vor, während L. Prandtl („Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung", aus dem „Handwörterbuch der Naturwissenschaften", Bd. 4) den Ausdruck „schleichende" Bewegung gebraucht.

1) Vgl. A. E. H. Love, a. a. O., und L. Graetz, „Reibung" in Winkelmanns Handbuch der Physik, Bd. I, 2.

Koeffizient der äußeren Reibung, d. i. der Betrag der Reibung pro Einheit der Oberfläche und pro Einheit der Relativgeschwindigkeit.

Da die Gleitung um so mehr in Betracht kommt, je kleiner die äußere und je größer die innere Reibung ist, so haben Helmholtz und Piotrowski[1]) als Maß der Gleitung das Verhältnis

$$\gamma = \frac{\mu}{\beta} \tag{4}$$

unter dem Namen *Gleitungskoeffizient* eingeführt. Derselbe Name wird auch in der kinetischen Gastheorie gebraucht.

Lorentz[2]) hat eine Reihe von allgemeinen Theoremen über die „langsame", stationäre Bewegung von festen Körpern in reibenden Flüssigkeiten (bei Abwesenheit von Gleitung) aufgestellt, deren Anwendung wir im § 8 kennen lernen werden. Den Zusammenhang der Lorentzschen Arbeit mit allgemeinen Sätzen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ersieht man am besten durch Vergleich mit analogen Resultaten der Elastizitätstheorie (Reziprozitätstheorem von Betti, Formeln für die Verschiebungskomponenten von Somigliana, Integration mittels verallgemeinerter Greenscher Funktionen), wie sie z. B. in dem Enzyklopädieartikel von Tedone[3]) zusammengestellt und besprochen sind. Dieser Parallelismus stammt daher[4]), daß die Gleichungen (2) der „langsamen" Bewegung einer reibenden Flüssigkeit der Form nach identisch mit den Gleichungen für das elastische Gleichgewicht isotroper Körper sind; an Stelle der Verschiebungskomponenten der Elastizitätstheorie treten in (2) die Geschwindigkeitskomponenten ein und die beiden Laméschen Elastizitätskonstanten λ und μ reduzieren sich durch den Ansatz[5])

$$3\lambda + 2\mu = 0 \tag{5}$$

auf nur eine Konstante, den sogenannten Koeffizienten μ der inneren Reibung der Flüssigkeit.

---

1) Vgl. H. Helmholtz, Wiss. Abh. I. S. 172.

2) H. A. Lorentz, Abh. über theor. Physik, I. S. 23.

3) O. Tedone, Allg. Theoreme der math. Elastizitätslehre, Enz. d. math. Wiss. IV. 24.

4) Vgl. A. Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. S. 697. 1911.

5) Vgl. z. B. A. G. Webster, „The Dynamics of particles ..." S. 550, und A. E. H. Love, a. a. O., § 12.

Im weiteren spezialisieren wir unser Problem auf die Bewegung kugelförmiger Teilchen; nur gelegentlich werden wir noch über anders gestaltete Teilchen einige Bemerkungen einzuflechten haben.

§ 8. Das Stokessche Gesetz.

Die Lösung des Problems der „langsamen", stationären Bewegung einer Kugel in einer unbegrenzten, inkompressiblen, zähen Flüssigkeit unter dem Einflusse einer konstanten Kraft verdanken wir Stokes, der sie im Jahre 1851 in einer Abhandlung über die Bewegung von Pendeln[1]), mit Hilfe der nach ihm benannten Stromfunktion[2]) gegeben hat. Er fand, daß die Flüssigkeit auf die Kugel eine der Translation der Kugel entgegengesetzt gerichtete Kraft ausübt, die der Geschwindigkeit V der Kugel proportional ist. Der Widerstandskoeffizient drückt sich durch die folgende Formel aus:

$$W = 6\pi\mu a \tag{6}$$

(a Radius der Kugel), die allgemein unter dem Namen *Stokessches Gesetz* oder *Stokessche Formel* bekannt ist. Bei den Anwendungen kommt meistens die Spezialform

$$V = \frac{2}{9} a^2 g \frac{\sigma' - \sigma}{\mu} \tag{6'}$$

in Betracht, die die Geschwindigkeit einer unter dem Einflusse der Schwerkraft $[\frac{4}{3}\pi a^3(\sigma' - \sigma)g]$ fallenden Kugel von der Dichte σ' in einem zähen Medium von der Dichte σ angibt.

Eine einfache Ableitung des Stokesschen Gesetzes findet man in Kirchhoffs „Mechanik"[3]) und eine allgemeinere Methode zur Lösung der Gleichungen (2) durch Entwicklung in eine Reihe von räumlichen Kugelfunktionen in den §§ 323 bis 325, 335—336 des Lehrbuches der Hydrodynamik von Lamb.[4]) Andere Lösungsmethoden wurden von Boussinesq (vgl. § 8 und 12), Noether, Oseen (vgl. § 7a) u. a. gegeben.

---

1) G. G. Stokes, Cambr. Trans. 9. S. 8. 1851; Papers III, S. 59.

2) Vgl. H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (deutsch von J. Friedel) 1907, §§ 94, 95 und 325.

3) G. Kirchhoff, Vorl. über math. Phys., 4. Aufl., Leipzig 1897, Bd. I, S. 378.

4) H. Lamb, a. a. O.

Wir nehmen davon Abstand, einen vollständigen Beweis des Stokesschen Gesetzes hier wiederzugeben und erwähnen nur einige Resultate, auf die wir uns im folgenden mehrmals beziehen werden.

Da die Kugel bei der Stokesschen Problemstellung ihre Lage im Raume fortwährend ändert, so kann die Flüssigkeitsbewegung in bezug auf ruhende Achsen selbstverständlich nicht stationär sein; man pflegt deshalb das in Frage stehende Problem durch ein analoges zu ersetzen, indem man die Kugel als ruhend und die Flüssigkeit als im Unendlichen mit der konstanten Geschwindigkeit $-V$ in der x-Richtung strömend annimmt („ruhende Kugel in Parallelströmung").

Die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit sind dann durch folgende Formeln gegeben[1]):

$$(7)\qquad \begin{cases} u = V\left(\frac{a}{r} - 1\right) + \frac{1}{4} V a (r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r}, \\ v = \quad + \frac{1}{4} V a (r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r}, \\ w = \quad + \frac{1}{4} V a (r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} \end{cases}$$

und der Druck

$$(8)\qquad p = \tfrac{3}{2} \mu a V \frac{x}{r^3} + \text{konst.}$$

($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ = Abstand vom Mittelpunkte der Kugel). Diese Werte befriedigen die Gleichungen (2) mit den Grenzbedingungen $u = v = w = 0$ für $r = a$ und $u = -V, v = w = 0$ für $r = \infty$, wovon man sich durch direktes Einsetzen überzeugen kann.

Wenn wir jetzt dem ganzen betrachteten System eine Translationsgeschwindigkeit V in der x-Richtung erteilen, so kommt dadurch die Flüssigkeit im Unendlichen zur Ruhe, während die Kugel die Geschwindigkeit V erhält. Dadurch werden die Bedingungen der ursprünglichen Fragestellung wieder hergestellt; der entstandene Bewegungszustand ist stationär in bezug auf ein mit der Kugel sich bewegendes, nicht aber in bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem.

Eine Zeichnung der Stromlinien beim Problem der ruhenden Kugel in Parallelströmung findet man in dem Lehrbuche der

1) Vgl. H. Lamb, Phil. Mag. 21. S. 112. 1911.

Hydrodynamik von Lamb, S. 685. Aus dieser Figur oder aus der Linearität der Gleichungen (2) bzw. aus den Formeln (7) ist die bemerkenswerte symmetrische Form der Stromlinien vor und hinter der Kugel zu ersehen, welche von der Vernachlässigung der Wirkung der Trägheit herrührt.

Endlich findet man aus (7) für die Komponenten ξ, η, ζ des Rotors der Strömungsgeschwindigkeit folgende äußerst einfache Ausdrücke:

$$(9) \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \eta = + \tfrac{3}{2} a V \frac{z}{r^3}, \quad \zeta = - \tfrac{3}{2} a V \frac{y}{r^3}.$$

Den Symmetrieverhältnissen entsprechend sind die Wirbellinien Kreise um die x-Achse.

Wir schließen mit einer interessanten Bemerkung, die zuerst wohl von Lord Rayleigh[1]) gemacht wurde. Sowohl das Bewegungsmoment wie die Energie der gesamten Flüssigkeit fallen in der von Stokes gegebenen Lösung unendlich aus. Wir müssen uns vergegenwärtigen, daß zur vollständigen Herstellung des betrachteten stationären Bewegungszustandes eine unendlich lange Einwirkung der konstanten Kraft F auf unsere Kugel erforderlich wäre (vgl. aber die Theorie von Oseen, § 7a).

§ 4.

Die Voraussetzungen, die dem Stokesschen Gesetze zugrunde liegen, können wir schematisch etwa folgendermaßen zusammenfassen:

I. Annahme einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik (vgl. § 5).
II. „Langsamkeit" der Bewegung, d. i. Vernachlässigung der Trägheitsglieder in den hydrodynamischen Grundgleichungen (§§ 6, 7).
III. Unbegrenztheit der im Unendlich ruhenden Flüssigkeit (§ 8).
IV. Stationärer Bewegungszustand (§ 9).
V. Kugelgestalt des sich bewegenden Körpers (§ 10).
VI. Verschwinden der Gleitung zwischen der Flüssigkeit und der Kugel (§ 11).
VII. Voraussetzung, daß die Kugel ein fester Körper ist (§ 12).

---

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **21**. S. 374. 1886; Sc. Papers, Bd. III, S. 480.

Fast alle diese Annahmen und Voraussetzungen gaben Anlaß zu theoretischen und experimentellen Arbeiten, die wir jetzt der Reihe nach besprechen wollen.

§ 5. Die Annahme einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik.

Die Annahme einer Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik impliziert die Vernachlässigung der atomaren Diskontinuitäten des Mediums, in welchem sich die Kugel bewegt, was nur dann gerechtfertigt ist, wenn die Dimensionen der Kugel groß sind im Vergleiche zu dem Maßstabe der atomistischen Struktur dieses Mediums. Es ergibt sich daraus für den Radius a der Kugel eine untere Grenze, die ja selbstverständlich mit der im folgenden Paragraphen enthaltenen Bedingung (12) nichts zu tun hat. Des Zusammenhanges wegen verlegen wir die genauere Besprechung dieser Frage in den zweiten Teil und erledigen zuerst die rein hydrodynamische Seite des Problems.

Hier fällt zuerst die Voraussetzung der Inkompressibilität auf. Zwar wird bei tropfbaren Flüssigkeiten die Vernachlässigung ihrer Zusammendrückbarkeit sicher erlaubt sein, aber die Behandlung eines Gases als inkompressibles Medium kann von vornherein ziemlich bedenklich erscheinen. Eine nähere Betrachtung zeigt jedoch, daß bei „langsamer", stationärer Bewegung die Kompressibilität keinen merklichen Einfluß auf den Bewegungszustand ausüben kann. Schon ohne spezielle Rechnung können wir uns eine ungefähre Vorstellung von den hier obwaltenden Verhältnissen machen. Da die Kompressibilität zu Störungen Anlaß gibt, die sich mit Schallgeschwindigkeit fortpflanzen, so ist es ziemlich einleuchtend, daß merkliche Verdichtungen nur dann entstehen können, wenn die Kugelgeschwindigkeit mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar wird. Die Kleinheit des maßgebenden Verhältnisses dieser beiden Geschwindigkeiten wird aber durch die im folgenden Paragraphen angeführte Bedingung der „Langsamkeit" der Bewegung gewährleistet. Man überzeugt sich leicht, daß die Geschwindigkeiten, die der Ungleichung (12) genügen, noch bei den kleinsten in Betracht kommenden Radien, als verschwindend klein gegen die Schallgeschwindigkeit angesehen werden dürfen.

Eine genauere Durchrechnung dieses Problems führt im

großen und ganzen zu den nämlichen Resultaten, wie bereits O. E. Meyer[1]) bei der Behandlung des speziellen Problems der kleinen Schwingungen einer Kugel in einem zähen Medium (vgl. auch weiter unten § 9) gefunden hat. Einige Bemerkungen, die mit unserer Frage im Zusammenhang stehen, findet man auch in einer Arbeit von Lord Rayleigh[2]) über das Strömen einer kompressiblen Flüssigkeit um ein Hindernis. Von einem etwas allgemeineren Gesichtspunkte ging Smoluchowski[3]) in seiner Abhandlung über die Grundgleichungen der Ärodynamik aus, wo er nicht nur die Kompressibilität, sondern auch den Einfluß der Temperaturunterschiede, der Wärmetönungen, Wärmeleitung usw. in den Kreis seiner Betrachtungen zog. Insbesondere berechnete er auch näherungsweise die Einwirkung dieser verschiedenen Faktoren auf die Lösung des Stokesschen Problems und kam zu dem Resultate, daß sie alle bei „langsamer" Bewegung zu keinen meßbaren Störungen Anlaß geben können.[4])

§ 6. Die „Langsamkeit" der Bewegung.

Die vom hydrodynamischen Standpunkte wichtigste Einschränkung des Gültigkeitsbereiches des Stokesschen Gesetzes ist zweifellos die vorausgesetzte „Langsamkeit" der Bewegung. Wir wissen, daß die Erscheinungen bei zunehmender Geschwindigkeit der Kugel immer komplizierter werden, „eine regellose wirbelnde Bewegung wird in einer Flüssigkeitsschicht nahe bei dem Körper erzeugt, und eine sich ausbreitende Schleppe von Wirbeln wird zurückgelassen, während die Bewegung in einiger Entfernung seitlich verhältnismäßig sanft und gleichförmig vor sich geht".[5]) Die hier auftretende „regellos wirbelnde Bewegung" („Eddies"), die mit den eigentlichen Wirbeln („Vortices") der klassischen Hydrodynamik nur sehr wenig zu tun hat[6]), entzieht sich bis jetzt fast vollständig der theoretischen Behandlung, und wenn es sogar

1) O. E. Meyer, Crelles Journ. **75.** S. 31. 1873.
2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **32.** S. 1. 1916.
3) M. Smoluchowski, Anz. Ak. Krakau, S. 143, 1904.
4) M. Smoluchowski, a. a. O. § 28.
5) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (deutsch von J. Friedel), S. 736.
6) Vgl. A. E. H. Love, a. a. O., Bemerkung 97 auf S. 77.

einmal gelingen sollte, die vollständigen Navier-Poissonschen Differentialgleichungen (mit gleichzeitiger Berücksichtigung der Trägheit und der Viskosität) für diesen Fall zu integrieren, so ist es höchst zweifelhaft, ob dieser Lösung überhaupt irgendeine physikalische Bedeutung zukäme; es scheint vielmehr, daß beim Eintreten der „turbulenten Bewegung" nicht nur die klassischen Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik ihre Gültigkeit verlieren, sondern daß hier überhaupt die altüblichen Methoden, die auf einer eindeutigen Beschreibung der Naturvorgänge mittels einiger weniger Differentialgleichungen beruhen, versagen und daß wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen, statistische Betrachtungen, Schwankungsberechnungen u. dgl. zu Hilfe gezogen werden müssen. Diese höchst interessanten Fragen fallen jedoch völlig aus dem Rahmen der vorliegenden Abhandlung heraus; hier müssen wir uns nur nach einem geeigneten Kriterium umsehen, mit dessen Hilfe wir die „Langsamkeit" der Bewegung zu beurteilen haben.

Zu einem solchen gelangen wir durch Vergleich der Größenordnung der vernachlässigten „Trägheitsglieder" in den vollständigen Navier-Poissonschen Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit (σ = Dichte der Flüssigkeit)

$$(10) \qquad \sigma u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma v \frac{\partial u}{\partial y} \text{ usw.} \quad \left[\text{Größenordnung: } \frac{\sigma a}{r^2} V^2\right]$$

mit der Größenordnung der in (2) verbliebenen „Reibungsglieder"

$$(11) \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \quad \left[\text{Größenordnung: } \frac{\mu a}{r^3} V\right].$$

Die gesuchten Größenordnungen sind in die eckigen Klammern bereits eingetragen. Das zweite Resultat ergibt sich unmittelbar aus (8), vom ersten, das aus (7) ermittelt wurde, gibt man sich am leichtesten Rechenschaft, wenn man bedenkt, daß u, v, w von der Größenordnung von V sind und ihre ersten Ableitungen von der Größenordnung $(a\,V/r^2)$ der ξ, η, ζ in (9). Damit nun die Stokessche Formel irgendwelche Ansprüche auf Richtigkeit erheben kann, müssen jedenfalls die Ausdrücke (10) in der Umgebung der Kugel (r von der Größenordnung von a) gegen die Ausdrücke (11) verschwinden. Diese

Forderung führt zu der folgenden, zuerst von Lord Rayleigh[1]) abgeleiteten Bedingung für die „Langsamkeit" der Bewegung beim Stokesschen Problem

$$R = \frac{a\sigma V}{\mu} \ll 1. \tag{12}$$

In dem links stehenden Ausdrucke, den wir mit einem R bezeichnet haben, erkennen wir die sogenannte „Reynoldsche Zahl", die auch für den Eintritt der turbulenten Bewegung maßgebend ist. Doch soll das keineswegs bedeuten, daß es sich bei den ersten Abweichungen vom Stokesschen Gesetz, die durch das Hineinspielen der vernachlässigten Trägheit der Flüssigkeit zustande kommt, gleich um turbulente Bewegungszustände handeln sollte wie das von manchen Forschern, die sich des Stokesschen Gesetzes bedient haben, gelegentlich erwähnt wird. Es ist übrigens fraglich, ob bei der Translationsgeschwindigkeit einer Kugel in einem zähen Medium eine scharf definierte Grenze zwischen der regelmäßigen und der turbulenten Bewegung überhaupt vorhanden ist; weiter sei noch darauf hingewiesen, daß der Eintritt der Turbulenz bei Flüssigkeitsströmung in Röhren Reynoldschen Zahlen von über 1000 entspricht, während wir gleich sehen werden, daß die ersten Abweichungen vom Stokesschen Gesetz sich bereits bei R etwa gleich 0,2 bemerkbar machen. Das Erscheinen der Reynoldschen Zahl in der Ungleichung (12) erklärt sich einfach dadurch, daß der Verlauf der beiden Erscheinungen durch dieselben physikalischen Größen bedingt wird; der Vergleich der Dimensionen der „Trägheitsglieder" und der „Reibungsglieder" (Anwendung des Prinzips der „mechanischen Ähnlichkeit") führt unmittelbar zu dem Resultate, daß die Gültigkeit der Stokesschen Formel, ebenso wie der Eintritt der turbulenten Bewegung, wesentlich nur von dem Werte der Reynoldschen Zahl abhängig sein kann.

Die Überlegungen, mit deren Hilfe wir die Bedingung (12) abgeleitet haben, scheinen aber etwas mehr als bloße Dimensionsbetrachtungen zu sein, da sie uns zu dem Schluß geführt haben, daß es für die Gültigkeit der Stokesschen Formel notwendig ist, daß R viel kleiner als die Einheit sei. Dieses

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **36**. S. 365. 1893; vgl. auch H. A. Lorentz, a. a. O. S. 41.

Resultat sagt aber nur sehr wenig aus. Es wäre vielmehr die Beantwortung der folgenden Frage erwünscht: Unterhalb welcher Grenze muß R liegen, damit man bei der Anwendung der Stokesschen Formel sicher sein kann, keine größeren Fehler als so und so viel Prozent zu begehen? Es ist bis heutzutage — von einem diesbezüglichen Versuche, den wir am Ende des folgenden Paragraphen besprechen werden, abgesehen — nicht gelungen, der Theorie derartige Auskünfte abzuzwingen; möglicherweise kann diese Frage erst durch die Auflösung der vollständigen Navier-Poissonschen Gleichungen vollkommen streng beantwortet werden. Hier ist eine Bemerkung am Platze, welche die Mathematiker nicht müde werden, den Physikern zu wiederholen: Um aus den Fehlern einer nur angenähert gültigen Differentialgleichung, insbesondere wenn es sich um eine partielle Differentialgleichung handelt, auf die Fehler des Integrals dieser Gleichung schließen zu können, ist eine besondere Untersuchung notwendig; man kann einfache Beispiele angeben, wo die Anwesenheit beliebig kleiner Zusatzglieder in der Differentialgleichung den Verlauf der Erscheinung, die durch diese Gleichung beschrieben wird, vollständig verändert.[1])

Die Antwort auf die eben aufgeworfene Frage, der die Theorie bis heute machtlos gegenüber steht, kann aber durch unmittelbare Versuche erhalten werden. Zuerst wollen wir noch der Ungleichung (12) eine andere Form geben, die für den experimentell wichtigsten Fall, daß die äußere Kraft sich auf die Schwerkraft reduziert, besonders geeignet erscheint. Die Fallgeschwindigkeit V ist in diesem Falle mittels der Beziehung (6′) mit dem Kugelradius verknüpft und für eine bestimmte Flüssigkeit und ein bestimmtes Kugelmaterial hängt die Anwendbarkeit des Stokesschen Gesetzes nur von dem Kugelradius ab; mit wachsender Größe der Kugel hört die Gültigkeit dieses Gesetzes allmählich auf. Es ist dann zweckmäßig, einen sogenannten „kritischen Radius" a einzuführen[2]), für welchen das Verhältnis $a\sigma V/\mu$ gerade gleich eins wird. Mit Hilfe der Beziehung (6′) finden wir:

---

1) Vgl. z. B. E. Borel, Introduction géometrique à quelques théories phys., Note IV.

2) Nach H. S. Allen, Phil. Mag. 50. S. 323. 1900.

(13') $$\bar{a} = \sqrt[3]{\frac{q\mu^2}{2\sigma(\sigma'-\sigma)g}}$$

und

(14') $$R = \frac{a\sigma V}{\mu} = \frac{a^3}{\bar{a}^3}\,.$$

Die Bedingung (12) kann nun folgendermaßen geschrieben werden:

(12') $$a \ll \bar{a}\,.$$

Bei seinen Untersuchungen über fallende Metallkugeln in verschiedenen Ölen fand nun Arnold[1]) (vgl. auch §§ 7b, 8 und 12) das Stokessche Gesetz für

(15') $$a < 0{,}6\,\bar{a}$$

bestätigt. Bei etwas größeren Radien beobachtete er merkliche Abweichungen davon. Die Genauigkeit seiner Versuche betrug etwa $^1/_2$—1%. Die Ungleichung (15') oder

(15) $$\frac{a\sigma V}{\mu} < 0{,}2$$

können wir also als die experimentell gefundene Bedingung der Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes mit einer $^1/_2$ bis 1-prozentigen Genauigkeit ansehen. Dieser Befund stimmt auch gut mit den Experimenten von Zeleny und Mc Keehan[2]) an in Luft fallenden Kügelchen überein. (Nur die Versuche an natürlichen Sporen machen eine Ausnahme, vgl. weiter unten § 10.)

Zur Orientierung über die in Betracht kommenden Größenordnungen geben wir zwei Beispiele von „kritischen Radien" an: Für Kugeln vom spezifischen Gewicht 2 in Wasser wird $\bar{a}$ etwa gleich 0,011 cm; für Kugeln vom spezifischen Gewicht 1 in Luft 0,0048 cm. Wir werden so auf die bekannte Tatsache geführt, daß wir kein Recht haben, die Stokessche Formel auf gewönhliche Regentropfen anzuwenden, wohl aber auf genügend kleine Nebeltröpfchen, wie sie z. B. in den klassischen Experimenten zur Bestimmung der elektrischen Elementarladung von J. J. Thomson und H. A. Wilson gebraucht wurden.

---

1) H. D. Arnold, Phil. Mag. 22. S. 755. 1911.

2) J. Zeleny u. L. W. Mc Keehan, Phys. Zeitschr. 11. S. 78. 1911.

§ 7. Die theoretischen Untersuchungen von Oseen.

a) Um zu der Bedingung (12) zu gelangen, haben wir einfach das Verhältnis der Größenordnungen von (10) und (11) in der Umgebung der Kugel gebildet. Für beliebige r ist aber dieses Verhältnis gleich $\sigma r V/\mu$ und wächst mit r ins Unendliche, wie klein auch die Geschwindigkeit V sein mag. Von dieser Bemerkung ging Oseen[1]) aus in einer Arbeit, die er selbst folgendermaßen zusammenfaßt: „Bei der von Stokes gegebenen Ableitung der sogenannten Stokesschen Formel werden Glieder vernachlässigt, welche in großer Entfernung von der Kugel ausschlaggebend sind. Durch diesen Umstand wird es bedingt, daß der von Herrn Whitehead[2]) gemachte Versuch, die von Stokes gegebenen Formeln für die durch die Translation der Kugel hervorgerufene Bewegung einer Flüssigkeit durch Berücksichtigung der quadratischen Glieder zu verbessern, scheitern mußte. Um dem genannten Übelstand abzuhelfen, muß man auch in erster Annäherung in den Navierschen Differentialgleichungen gewisse mit dem Faktor V behaftete Glieder beibehalten. Zu dem so erhaltenen linearen Systeme wurden die verallgemeinerten Greenschen Formeln aufgestellt. Mittels der so gewonnenen Hilfsmittel wurde die durch die genügend langsame Translation einer Kugel hervorgerufene Bewegung einer Flüssigkeit untersucht. Diese Bewegung weicht in hinreichender Entfernung von der Kugel selbst bei den kleinsten Werten von V beträchtlich von der Stokesschen Bewegung ab. Die Stokessche Formel für den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel erleidet dadurch keinen Eintrag in ihrer Gültigkeit."

Die Arbeit von Oseen wurde von Lamb[3]) in eleganter Weise kommentiert; gleichzeitig gab auch Lamb eine viel einfachere Ableitung der Oseenschen Formeln. Die veränderte Berechnungsmethode von Oseen besteht nach Lamb in einer *teilweisen* Berücksichtigung der Wirkung der Trägheit der Flüssigkeit. Dadurch fällt der errechnete Bewegungszustand in bezug auf die Äquatorebene ($x = 0$) nicht mehr symmetrisch aus; in größeren Entfernungen von der Kugel

1) C. W. Oseen, Arkiv för Mat. Astr. och Fysik **6.** Nr. 29. 1910; **7.** Nr. 9—12. 1911.

2) J. B. Whitehead, Quart. Journ. of Math. **23.** S. 78. 1888.

3) H. Lamb, Phil. Mag. **21.** S. 112. 1911.

weicht er beträchtlich von demjenigen der Stokesschen Theorie ab, geht aber in der Umgebung der Kugel in diesen über und ergibt deshalb dieselbe Formel für den Widerstandskoeffizienten. Aus diesem Grunde kommt der Oseenschen Untersuchung nur rein theoretisches Interesse zu, um so mehr als auch die korrigierten Ausdrücke für die Strömungskomponenten (die nebenbei bemerkt viel komplizierter als die Stokesschen sind) physikalisch keinen merklichen Fortschritt bedeuten: Es ist zwar richtig, daß mit zunehmender Entfernung von der Kugel die bei der Stokesschen Lösung vernachlässigten Trägheitsglieder groß im Vergleich zu den beibehaltenen Reibungsgliedern werden, aber während das Verhältnis der Trägheitsglieder zu den Reibungsgliedern wie die erste Potenz des Radiusvektors mit diesem ins Unendliche wächst, verschwinden diese Glieder selbst wie $1/r^2$ bzw. $1/r^3$. Die Oseensche Korrektion bezieht sich also auf Gebiete, wo die Strömung (oder die Abweichungen von der ungestörten Parallelströmung beim Problem der „ruhenden Kugel in Parallelströmung") sowieso wegen ihrer Kleinheit physikalisch nicht mehr in Betracht kommt. Immerhin ist es beruhigend, zu erfahren, daß für genügend kleine Geschwindigkeiten die Stokessche Theorie den ganzen Strömungsverlauf, soweit dieser überhaupt noch merklich ist, richtig wiedergibt, unbeachtet der Tatsache, daß diese Theorie auf Annahmen fußt, die für sehr große Entfernungen von der Kugel sicher nicht erfüllt sind.

Was den Zusammenhang der Oseenschen Theorie mit der Lorentzschen Methode der Berechnung des Einflusses fester Wände betrifft, vergleiche man den Schluß des folgenden Paragraphen.

b) Außer dem obenerwähnten Versuche von Whitehead, der, wie Oseen gezeigt hat, an der Unzulänglichkeit der Stokesschen Lösung für sehr große Entfernungen von der Kugel scheiterte, wurde dieselbe Aufgabe auch von Noether[1]) in Angriff genommen. Da der betrachtete Vorgang der gleichmäßigen Translation einer Kugel in einem zähen Medium, wie bereits besprochen, wesentlich nur von dem Werte der Reynoldschen Zahl $R = a\sigma V/\mu$ abhängt, und da die

1) F. Noether, Zeitschr. für Math. u. Phys. 62. S. 1. 1913.

Stokessche Formel den Grenzfall der allgemein gültigen Widerstandsformel für verschwindende Reynoldsche Zahlen darstellt, so können wir für die durch Berücksichtigung der „Trägheitsglieder" korrigierte Stokessche Formel die folgende Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von R

$$W = 6\pi a\,(1 + A_1 R + A_2 R^2 + \ldots) \tag{16}$$

ansetzen; in den Untersuchungen von Whitehead, Noether und einer neueren Arbeit von Oseen[1]) handelte es sich im wesentlichen um die Berechnung des Koeffizienten A_1.

Noether gibt zuerst eine Abänderung der Stokesschen Problemstellung, mittels welcher man auch die von Oseen, vermerkte Schwierigkeit umgehen kann, ohne die Gleichung (2) für „langsame" Bewegung aufgeben zu müssen. Dazu braucht man nur an Stelle der „ruhenden Kugel in Parallelströmung" eine Strömung zu betrachten, die durch eine in großer Entfernung von der Kugel sich befindende Quelle und eine auf der entgegengesetzten Seite in gleicher Entfernung sich befindende Senke hervorgerufen wird; in der Nähe der Kugel fällt diese Strömung mit der Stokesschen praktisch zusammen, vorausgesetzt natürlich, daß die Entfernung der Quellen hinreichend groß gegenüber dem Kugelradius ist. Leider können die weiteren Ausführungen von Noether, wie Oseen[1]) in einer besonderen Abhandlung gezeigt hat, nicht mehr als einwandfrei bezeichnet werden, was um so mehr zu bedauern ist, als sie zu sehr anschaulichen und recht plausiblen Schlüssen führen und in mancher Beziehung mit experimentellen Ergebnissen in besserer Übereinstimmung zu stehen scheinen, wie die entsprechenden korrigierten Ausdrücke von Oseen.

So findet Noether, daß „die Stokessche Formel Gültigkeit hat, bis auf Zusatzglieder, deren Verhältnis zum ursprünglichen quadratisch in der Reynoldschen Zahl $R = a\sigma V/\mu$ ist", während Oseen für den Koeffizienten A_1 nicht den Wert Null, wie Noether, sondern $^3/_8$ ausrechnet; das führt zu dem Näherungsausdrucke

$$W = 6a\pi\mu\left(1 + \frac{3}{8}\,\frac{a\sigma V}{\mu}\right) \tag{17}$$

1) C. W. Oseen, Arkiv usw. 9. Nr. 16. 1913.

für die korrigierte Stokessche Formel. Dieser steht aber im offensichtlichen Widerspruch mit den Versuchen von Arnold (vgl. oben § 6), indem der experimentell ermittelte Gültigkeitsbereich der ursprünglichen Stokesschen Formel sich merklich größer erweist als der aus (17) folgende. Um die Arnoldschen Resultate bequem mit (17) vergleichen zu können, macht man am besten von dem bereits eingeführten „kritischen Radius" Gebrauch, wodurch (17) folgende Gestalt annimmt:

$$W = 6a\pi\mu\left(1 + \frac{3}{8}\,\frac{a^3}{\bar{a}^3}\right). \tag{17'}$$

Der direkte Vergleich mit den von Arnold angegebenen Kurven fällt ganz zuungunsten dieses Ausdrucks aus. Bereits bei $a = 0{,}3\,\bar{a}$ verlangt die Oseensche Formel (17') eine einprozentige Korrektion des Stokesschen Gesetzes; die Genauigkeit der Arnoldschen Messungen betrug aber etwa $^1/_2$ Proz. und es müßten also nach (17') für alle Kugeln von größerem Radius wie $0{,}3\,\bar{a}$ mit Sicherheit feststellbare Abweichungen vom Stokesschen Gesetz auftreten, was, wie bereits erwähnt [vgl. Ungleichung (15')] keineswegs der Fall war. Erst bei Kugelradien, die 0,6—0,7 des kritischen Radius betrugen, traten die ersten Anzeichen des Versagens des Stokesschen Gesetzes auf; für $a/\bar{a} = 0{,}6$ beträgt aber das Korrektionsglied in (17') nicht weniger als 8% des ursprünglichen Wertes. Auch in den Messungen von Zeleny und Mc Keehan[1]) an fallenden Wachskügelchen in Luft, deren Genauigkeit den Arnoldschen Messungen etwas nachsteht, kam die Oseensche Korrektion gar nicht zum Vorschein.

Die Versuche von Arnold wurden in zylindrischen Gefäßen ausgeführt, und der Einfluß der Gefäßwände wurde mit Hilfe der Lorentz-Ladenburgschen Korrektionsformel [vgl. § 8, Gleichung (10)] ermittelt. Die Richtigkeit dieser Korrektion wurde von Ladenburg[2]) selbst für $a/r = 0{,}01 - 0{,}09$ (a = Kugelradius, r = Zylinderradius) und von Arnold bis 0,1 bestätigt. Für Kugeln, deren Durchmesser ein Zehntel des Zylinderdurchmessers überstieg, beobachtete zwar Arnold eine Abnahme der Fallgeschwindigkeit, die größer war, als

1) J. Zeleny und L. W. Mc Keehan, a. a. O.

2) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. **22.** S. 287. 1907; **23.** S. 447. 1907.

die aus der Ladenburgschen Korrektionsformel folgende; durch Vergleich der Fallgeschwindigkeiten in verschieden weiten Röhren lassen sich jedoch — Näheres in der Originalabhandlung von Arnold — die Abweichungen infolge des Versagens der Ladenburgschen Korrektion und infolge des Hineinspielens der Trägheit der Flüssigkeit ziemlich sicher voneinander unterscheiden, und es scheint, daß man auf diesem Wege zu keiner brauchbaren Erklärung der Unstimmigkeit der Formel (17) mit der Erfahrung gelangen kann. Auch die folgende Bemerkung kann das nicht tun. Der Ausdruck (17) wurde streng genommen nur für eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit abgeleitet, und da die Trägheit der Flüssigkeit den Bewegungszustand hauptsächlich in größeren Entfernungen von der Kugel beeinflußt (vgl. § 7, am Anfang), so wäre es denkbar, daß die Vergrößerung des Widerstandskoeffizienten durch die Trägheit bei Anwesenheit fester Wände kleiner wird als bei einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, und daß es deshalb nicht erlaubt ist, die Abweichungen vom Stokesschen Gesetz einfach als Summe der Korrektionen (17) und (20) zu berechnen. Doch kann man auf den von Arnold angegebenen Kurven auch Punkte aufsuchen, wo die beobachtete Abweichung vom Stokesschen Gesetz auch ohne Anbringen der Ladenburgschen Korrektion unterhalb des von (17) geforderten Wertes liegt; beim Festhalten an der Formel (17) würde dieses Resultat auf eine Verkleinerung des Widerstandes durch die Einführung der Wände hinweisen, was wohl gänzlich ausgeschlossen erscheint.

Wir haben uns bei dieser Frage etwas länger aufgehalten, weil es sich hier um die einzige Unstimmigkeit zwischen Theorie und Experiment handelt, die uns im Laufe der vorliegenden Besprechung aufgestoßen ist, und die durch Berufung auf anderweitig bekannte Tatsachen nicht beseitigt werden konnte. Es will fast scheinen, als ob in den langwierigen und etwas unübersichtlichen Rechnungen von Oseen irgendein Versehen untergelaufen wäre, und als ob der Koeffizient der linearen Glieder in (16) sich dennoch als Null herausstellen sollte, wie in der unkorrigierten Arbeit von Noether. Vielleicht ließe sich die einfache und anschauliche Rechnungsmethode von Noether derart vervollkommnen, daß man sie dadurch von dem von Oseen erhobenen Einwand freimachen kann?

Die weitere theoretische und experimentelle Verfolgung dieser Kontroverse wäre jedenfalls von Interesse.

§ 8. Einfluß der Gefäßwände.

Die Voraussetzung einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit stellt selbstverständlich nur einen Grenzfall dar, der bei experimentellen Prüfungen des Stokesschen Gesetzes nie streng erfüllt sein kann. Es erwächst nun der Theorie die Aufgabe, den Einfluß verschieden gestalteter Gefäßwände, mindestens näherungsweise zu berechnen, was leider bis jetzt, trotz des allgemeinen dazu von Lorentz (vgl. unten) angegebenen Näherungsverfahrens, nur in zwei Spezialfällen gelungen ist. Das experimentell so wichtige Problem der Beeinflussung der langsamen Bewegung von Kugeln durch *zwei* parallele, ebene Wände ist theoretisch noch nicht gelöst worden. Jedenfalls genügt aber der eine der ausgerechneten Spezialfälle — die Bewegung längs der Achse eines Kreiszylinders —, um das Stokessche Gesetz einer experimentellen Prüfung unterziehen zu können, und der zweite — die Beeinflussung der Bewegung durch *eine* ebene Wand — kann mindestens dazu verwendet werden, um den Einfluß der Gefäßwände abzuschätzen und in manchen Fällen als vernachlässigbar zu erkennen.

Die eben erwähnte Lorentzsche Methode[1]) besteht in einer schrittweisen Lösung des betrachteten Problems durch Superposition von Bewegungszuständen, die zwar jedesmal die Gleichungen (2) für die „langsame" Bewegung einer zähen Flüssigkeit streng erfüllen, die gegebenen Randwertbedingungen aber nur teilweise befriedigen. Die sukzessive Bestimmung der Strömung, die durch eine gleichförmige Translation einer Kugel in einer von festen Wänden eingeschlossenen Flüssigkeit hervorgerufen wird, stellt sich etwa folgendermaßen dar: Als erste Näherung nimmt man die aus der Stokesschen Theorie bekannte Strömung einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit um eine sich translatorisch bewegende Kugel. Die zweite Näherung ergibt sich durch Superposition der ersten mit der „reflektierten" Strömung. Diese unterliegt der Randwertbedingung, daß die Geschwindigkeiten an der von den festen Wänden eingenommenen Fläche entgegengesetzt gleich den-

1) A. H. Lorentz, a. a. O.

jenigen des ersten Bewegungszustandes sein sollen. Im übrigen ist die „reflektierte" Strömung wiederum so berechnet, als ob die Kugel nicht da wäre und die Flüssigkeit sich bis ins Unendliche erstrecken würde. Die Berechtigung dieser Superposition ist durch die Linearität der zugrunde gelegten Gleichungen (2) bedingt. Wir sehen, daß die „reflektierte" Strömung derart gewählt ist, daß sie die „direkte" an der Wandoberfläche gerade aufhebt, wodurch die Randwertbedingungen an dieser Fläche erfüllt werden ($u = v = w = 0$, da die Gleitung gleich Null vorausgesetzt wird); an der Oberfläche der beweglichen Kugel ist das aber keineswegs der Fall, denn dort erfüllt bereits die „direkte" Strömung für sich die Randwertbedingungen unseres Problems ($u = V$, $v = w = 0$) und die hinzukommenden Geschwindigkeitskomponenten der „reflektierten" Strömung sind dort im allgemeinen von Null verschieden. Das eben geschilderte Näherungsverfahren kann aber weiter fortgesetzt werden; als dritte Näherung haben wir die Superposition der zweiten mit der von der Kugel „reflektierten" Strömung zu nehmen, dann wiederum die „Zurückwerfung" von der festen Wand usw.

Die Aufgabe wird wesentlich erleichtert, wenn die Kugel als unendlich klein angesehen werden darf. Dann sind auch die Geschwindigkeiten, die diese Kugel in endlicher Entfernung hervorruft, unendlich klein und ebenso alle die Geschwindigkeiten, welche die „reflektierte" Strömung ausmachen. Es genügt dann, bereits bei der zweiten Näherung stehen zu bleiben. Wie die Geschwindigkeiten, so setzt sich auch der Widerstand, den die Kugel erleidet, additiv aus demjenigen der direkten (Widerstand $= 6\pi\mu a V$) und der reflektierten Strömung (Widerstand $= 6\pi\mu a V_1$) zusammen. Wir brauchen nur die Geschwindigkeit V_1 der reflektierten Strömung am Orte des Mittelpunktes der Kugel zu berechnen; da wir diese Strömung in der unmittelbaren Umgebung der unendlich kleinen Kugel als Parallelströmung auffassen können, berechnen wir die Kraft, die die „reflektierte" Strömung auf unsere Kugel ausübt, mit Hilfe der gewöhnlichen Stokesschen Formel zu $6\pi\mu a V_1$ und daraus den gesuchten Widerstandskoeffizienten zu $6\pi\mu a(1 + V_1/V)$. In der letzten Überlegung haben wir stillschweigend angenommen, daß die Richtung der Geschwindigkeit der „reflektierten" Bewegung

mit der Richtung der ursprünglichen Bewegung zusammenfällt. Im allgemeinen, d. h. bei beliebig gestalteten Wänden, braucht das aber keineswegs der Fall zu sein. Wir müssen dann in der eben hingeschriebenen Formel V_1 durch die Komponente der „Zusatzgeschwindigkeit" in der Richtung der ursprünglichen Geschwindigkeit ersetzen und außerdem die Entstehung einer, durch die Anwesenheit der Wände bedingten, der Geschwindigkeit proportionalen, transversalen Kraft auf die Kugel in Betracht ziehen. Bewegt sich eine Kugel im Abstande d von einer ebenen Wand parallel zu derselben, so ist eine solche Kraft, wie Stock[1]) nachgewiesen hat, sogar bei Berücksichtigung der Glieder vierter Ordnung in a/d nicht vorhanden; die Kugel wird infolge ihrer Bewegung von der Wand weder angezogen noch abgestoßen, ebensowenig erleidet sie einen Drehimpuls.

Die Anwendung der Lorentzschen Methode auf konkrete Probleme stößt aber gewöhnlich auf große rechnerische Schwierigkeiten, denn die Bestimmung der „reflektierten" Bewegung erfordert die Berechnung eines Integrals der Differentialgleichungen (2) mit vorgegebenen Geschwindigkeitskomponenten an einer vorgegebenen Fläche, eine Aufgabe, für deren Behandlung zwar allgemeine Methoden vorhanden sind (vgl. § 2), wogegen aber die explizite Durchführung der Rechnung nur in einigen speziell einfachen Fällen bekannt ist. Für eine Kugel ist die Lösung als Entwicklung in eine Reihe von räumlichen Kugelfunktionen von Oberbeck und Lamb[2]) gegeben worden; ebenso läßt sie sich für einen unendlich langen Kreiszylinder mit Hilfe der Besselschen Funktionen behandeln.[3]) Für eine unendlich ausgedehnte Ebene hat Lorentz[4]) einen Kunstgriff angegeben, wie man direkt aus einer beliebigen „direkten" Strömung die zugehörige „reflektierte" ausrechnen kann.

Das Lorentzsche Annäherungsverfahren ist also nur dann anwendbar, wenn die explizite Berechnung der „reflektierten" Strömung, sowohl von dem bewegten Körper (der Kugel), als auch von den festen Wänden möglich ist. Das

1) J. Stock, Anz. Ak. Krakau, S. 18, 1911.
2) Vgl. H. Lamb, Lehrb. d. Hydrodynamik, §§ 323—325, 335—336.
3) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. **23**. S. 447. 1907.
4) H. A. Lorentz, a. a. O.

ist z. B. nach dem oben Gesagten für das bereits mehrfach erwähnte Problem der Bewegung einer Kugel in einer von einer festen, ebenen Wand begrenzten, zähen Flüssigkeit der Fall, wo die Berechnung der „Zurückwerfung" von der Wand mit Hilfe des Lorentzschen Kunstgriffes und die „Zurückwerfung" von der Kugel mit Hilfe der von Lamb angegebenen Reihenentwicklung ausgeführt werden kann. Lorentz fand derart für den Widerstandskoeffizienten einer Kugel, die sich senkrecht zu einer ebenen Wand in der Entfernung d von derselben bewegt

$$W = 6\pi\mu a\left(1 + \frac{9}{8}\frac{a}{d}\right) \tag{18}$$

und analog für parallele Bewegung

$$W = 6\pi\mu a\left(1 + \frac{9}{16}\frac{a}{d}\right). \tag{19}$$

Stock[1]) setzte im Falle der Parallelbewegung diese Berechnung bis zu den Gliedern vierter Ordnung in a/d fort, und erhielt

$$W = 6\pi\mu a\left\{\frac{1}{1 - \frac{9}{16}\frac{a}{d}} - \left(\frac{a}{2d}\right)^3\left(1 + \frac{9}{16}\frac{a}{d}\right)\right\}. \tag{19'}$$

Mit Beibehaltung der quadratischen Glieder in a/d können wir also sagen, daß die Anwesenheit einer ebenen, zur Translationsrichtung der Kugel parallelen Wand den Widerstandskoeffizienten in der Stokesschen Formel im Verhältnis 1 zu $1 - \frac{9}{16}\frac{a}{d}$ vergrößert.

Ebenso sind nach dem oben Gesagten alle „Zurückwerfungen" bei der analogen Behandlung des Problems der Bewegung einer Kugel längs der Achse eines Kreiszylinders (vom Radius r) explizite berechenbar. Ladenburg[2]) findet für den Widerstandskoeffizienten in diesem Falle

$$W = 6\pi\mu a\left(1 + 2{,}4\frac{a}{r}\right). \tag{20}$$

Die Ergänzung dieser Formel durch Berücksichtigung der quadratischen Glieder in a/r, die nach dem oben Gesagten eine bloße Rechenarbeit darstellt, wäre aus mehreren Gründen erwünscht. Arnold[3]) beobachtete bei seinen

1) J. Stock, a. a. O.
2) R. Ladenburg, a. a. O.
3) H. D. Arnold, a. a. O.

Experimenten an fallenden Metallkügelchen in ölgefüllten Zylindergefäßen Abweichungen von der Ladenburgschen Korrektionsformel, die sicherlich durch die Vernachlässigung der quadratischen Glieder in (20) zu erklären sind. Auch würde man durch diese Fortsetzung der Reihenentwicklung (20) instand gesetzt, die experimentell gefundenen Abweichungen vom Stokesschen Gesetz infolge des Überschreitens des Bereiches der „langsamen" Bewegung besser von denjenigen, die bei sehr engen Gefäßen hervortreten, auseinander zu halten, was für die am Schlusse des vorigen Paragraphen durchgeführte Diskussion von Belang ist.

Auf viel größere Schwierigkeiten stößt man bei der theoretischen Behandlung des Problems der langsamen Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die von *zwei* festen, ebenen Wänden eingeschlossen ist. Eine direkte Berechnung der „Zurückwerfung" von den beiden Ebenen zusammen ist hier nicht bekannt, der Lorentzsche Kunstgriff, der nur die Geschwindigkeitskomponenten an einer Ebene auf einmal aufzuheben gestattet, ist nicht anwendbar. Ladenburg[1]) hat versucht, durch wiederholte Anwendung dieses Kunstgriffes zum Ziele zu kommen, doch auch dieses Verfahren scheint für die Lösung dieses Problems nicht sehr geeignet zu sein. Denn die Brauchbarkeit der Lorentzschen Methode hängt wesentlich mit der Kleinheit der Kugel im Verhältnis zu ihrer Entfernung von den Wänden zusammen, welche Kleinheit das schnelle Abnehmen jeder darauffolgenden „Zurückwerfung" im Vergleich mit der vorangehenden gewährleistet. Aber wenn wir die von einer unendlich ausgedehnten Ebene „reflektierte" Strömung an der entgegengesetzten, ebenfalls unendlich ausgedehnten Ebene „reflektieren", so ist kein Grund vorhanden, warum die zweite „Zurückwerfung" aus wesentlich kleineren Geschwindigkeiten bestehen sollte als die erste. In der Tat nehmen die abwechselnd positiven und negativen Glieder, die Ladenburg für den Widerstandskoeffizienten erhält, der absoluten Größe nach nur sehr langsam ab. Wenn wir auch so viele dieser „Zurückwerfungen" bestimmt hätten, daß alle weiteren bereits mit Recht vernachlässigt werden könnten, so hätte doch die

1) R. Ladenburg, a. a. O.

Superposition aller berechneter „Zurückwerfungen" erst das ergeben, was wir in der allgemeinen Beschreibung der Lorentzschen Methode als „erste reflektierte Strömung" bezeichnet haben: eine Strömung, die zu der gewöhnlichen Stokesschen Strömung addiert, deren Geschwindigkeitskomponenten an beiden Ebenen zusammen gerade aufhebt. Dann käme erst die Berechnung der „zweiten Näherung" (quadratische Glieder in a/d) an die Reihe usw.

Das eben Gesagte soll aber keineswegs einen Einwand gegen die Landenburgsche Arbeit sein, denn bei seinen Versuchen war diese Korrektion vernachlässigbar klein, da sie nur notwendig war, um die Anwesenheit der beiden Deckel seiner zylindrischen Gefäße zu berücksichtigen (a/l etwa gleich 0,005). Es soll nur davor gewarnt werden, die von Ladenburg angegebene Korrektionsformel [vgl. (6′)]

$$V = \frac{2g\,a^2(\sigma' - \sigma)}{9\mu\left(1 + 2{,}4\,\frac{a}{r}\right)\left(1 + 3{,}3\,\frac{a}{2l}\right)} \tag{20′}$$

(l = halbe Entfernung zwischen den beiden parallelen, ebenen Deckeln) falsch zu interpretieren: Der erste Klammerausdruck im Nenner trägt der Vergrößerung des Widerstandes durch die Zylinderwand Rechnung, und stellt das nach der Lorentzschen Methode berechnete erste Glied einer Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen von a/r dar. Der zweite Klammerausdruck hat aber eine davon ziemlich verschiedene Bedeutung; denn erstens ist die Beeinflussung der Bewegung der fallenden Kugel durch die beiden Deckel mit dem Verhältnis der Entfernungen der Kugel von diesen Deckeln veränderlich und der Koeffizient 3,3 stellt einen Mittelwert für die in den Experimenten von Ladenburg in Betracht kommenden Entfernungen (etwa 1 : 9 bis 9 : 1) dar und zweitens ist nach dem oben Gesagten die ganze Berechnung dieses Korrektionsfaktors bei weitem nicht so einwandfrei, wie die des vorigen.

Die Beeinflussung der Bewegung von Teilchen durch zwei parallele Ebenen (Objektträger und Deckgläschen) spielt eine so wichtige Rolle bei verschiedenen experimentellen Untersuchungen, daß es jedenfalls der Mühe wert wäre, dieses Problem auf die eine oder andere Weise theoretisch zu lösen. Man kann ferner versuchen, eine empirische Formel dafür

aufzustellen, was auch von Westgren[1]) gemacht worden ist. Seine Experimente, die nach einer äußerst eleganten Methode ausgeführt wurden, bezeichnet er aber selbst als nur vorläufige Orientierung und ihre Genauigkeit dürfte etwa 10 Proz. nicht übersteigen (Störungen infolge Konvektionsströmungen, Zeitmessung mit einer gewöhnlichen Stoppuhr usw.). Für den Widerstandskoeffizienten in der Mitte zwischen den beiden Platten stellte Westgren die folgende empirische Formel auf

$$W = 6\pi\mu a\left(1 + 3{,}3\,\frac{a^2}{l^2}\right), \tag{21}$$

worin l die halbe Entfernung der beiden Platten bedeutet. Es fällt hier das Fehlen des linearen Gliedes in a/l auf; man hätte eher in Analogie mit der entsprechenden Formel (19) eine Reihenentwicklung

$$W = 6\pi\mu a\left(1 + A_1\,\frac{a}{l} + A_2\,\frac{a^2}{l^2} + \dots\right) \tag{21'}$$

erwartet, mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten A_1. [Es handelt sich übrigens wohlgemerkt um den Widerstandskoeffizienten in der Mitte zwischen den beiden Platten; im allgemeinen Falle müßte eine entsprechend kompliziertere Reihenentwicklung an Stelle von (21') treten.] Man kann sogar in Anlehnung an die Lorentzsche Methode von vornherein etwas über die Größe des Koeffizienten A_1 aussagen: Er muß zwischen dem Werte $^9/_{16}$, der für eine Platte gilt und dem Doppelten dieses Wertes liegen, denn die von jeder Platte „reflektierte" Strömung wird jedenfalls durch die Einführung der anderen Platte (auf welcher sie verschwinden muß) derart in ihrer Ausbildung gestört, daß sie eine kleinere Geschwindigkeit am Orte des Mittelpunktes der Kugel besitzen wird. Eine nähere Betrachtung der Westgrenschen Resultate zeigt auch, daß sie der Formel (21') zum mindesten nicht widersprechen. Die von Westgren gemessenen Fallzeiten für gleichgroße Fallstrecken seien mit z bezeichnet, dann sind die Werte von $a^2 z$ [vgl. Formel (6')] den Widerstandskoeffizienten offenbar proportional; wenn wir $a^2 z$ als Funktion von a/l aufzeichnen, so können wir uns davon leicht überzeugen, daß die Tangente keineswegs die Tendenz hat, für verschwindende Radien der a-Achse parallel zu werden, wie es die Formel (21) verlangen

1) A. Westgren, Ann. d. Phys. **52**. S. 308. 1917.

würde. Eine sichere Entscheidung kann nach den vorliegenden Messungen nicht getroffen werden, weil die experimentellen Kurven zu weit von der $a^2 z$-Achse weg abbrechen (zu wenig Messungen für kleine a/l); eine Berechnung der Schnittpunkte mit der $a^2 z$-Achse nach dem gewöhnlichen Stokesschen Gesetz, welches an dieser Achse gelten muß, mit Berücksichtigung der anderweitig bestimmten Werte für die Dichte der Teilchen und die innere Reibung der Fallflüssigkeit (Wasser) führt ebenso zu ganz ungeeigneten Resultaten; offenbar ist die Dichte der Gummigutt- und Mastixteilchen wegen der zufälligen Veränderlichkeit von Teilchen zu Teilchen nicht genau genug bestimmbar. Eine rohe Schätzung des Koeffizienten A_1 kann folgendermaßen erhalten werden: Wir berücksichtigen nur die Punkte, für welche a/l kleiner als 0,2 ist, was etwa für die Hälfte aller Messungen der Fall ist; a^2/l^2 ist dann kleiner als 0,04 und da A_2 etwa gleich 3 ist, so übersteigt dann das quadratische Glied in (21′) kaum die Genauigkeit der Messungen; die berücksichtigten Teile der Kurven approximieren wir nun durch Gerade, und aus der Neigung dieser Geraden gegen die a/l-Achse erhalten wir bei den Gummigutteilchen die folgenden Werte für A_1: 1,46, 1,50, 1,04, 1,20, 0,84, die gerade von der vermuteten Größe, $^9/_{16}$—$^9/_8$, sind. Man könnte auch den Einwand machen, daß, wenn A_1 nicht gleich Null wäre, auch die Kurven in der Westgrenschen Figur 6 ($a^2 z$ als Funktion von a^2/l^2) keine Geraden sein würden; doch lassen sich die Abweichungen in der Figur deshalb gar nicht bemerken, weil alle Punkte mit kleinen a, infolge der gewählten Auftragungsart, in die unmittelbare Nähe der $a^2 z$-Achse zusammengedrängt sind. Die weitere experimentelle Untersuchung dieser Frage wäre sehr erwünscht. Jedenfalls ist es interessant, zu wissen, daß man in einem ziemlich großen Bereich von a/l (0,05—0,7) den Widerstandskoeffizienten einer Kugel, die sich in der Mitte zwischen zwei planparallele Platten, parallel zu diesen bewegt, durch die Formel (21) darstellen kann; doch muß man sich daran erinnern, daß diese Formel nur auf eine 5—10 prozentige Genauigkeit Anspruch erhebt und man darf sich jedenfalls nicht durch sie verleiten lassen, die Abweichungen vom Stokesschen Gesetz für kleine Werte von a/l zu unterschätzen. Für Radien, die kleiner sind als etwa ein Zehntel der halben Entfernung der

beiden Platten, wird es deshalb angezeigt sein, sich zu Orientierungszwecken etwa der Formel

$$W = 6\pi\mu a\left(1+\frac{a}{l}\right) \tag{21''}$$

zu bedienen.

Eine weitere Anwendung der Lorentzschen Methode finden wir in einer Arbeit von Smoluchowski[1]), wo die gegenseitige Beeinflussung zweier fallenden Kugeln untersucht wird. Die Berechnung einer jeden der aufeinanderfolgenden „reflektierten" Strömungen ist hier durch die oft erwähnte Lambsche Reihenentwicklung nach räumlichen Kugelfunktionen ermöglicht, und falls beide Kugeln in Bewegung sind, so findet man die mechanischen Wirkungen durch Superposition der Kräfte in den beiden Spezialfällen, in welchen je nur eine Kugel in Bewegung und die andere in Ruhe ist.

Für den Fall, wo beide Kugeln (gleiche Radien a) sich parallel zueinander mit der gleichen Geschwindigkeit V bewegen, findet Smoluchowski die folgenden Resultate: 1. Es wirken auf beide Kugeln gleiche und *gleichgerichtete* Kräfte. 2. Eine Komponente in der Bewegungsrichtung verkleinert den Widerstand um

$$\frac{9}{2}\,\frac{a^2\pi\mu}{r}\,V\left(1-\frac{3}{4}\,\frac{a}{r}\right).$$

Hierin bedeutet r den gegenseitigen Abstand der beiden Kugelmittelpunkte. 3. Die andere Komponente längs der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte, und zwar in der Richtung von der zurückgelegenen zur voranschreitenden Kugel, hat die Größe:

$$\frac{9}{2}\,\frac{a^2\pi\mu}{r}\,V\cos\Theta\left(1-\frac{9}{4}\,\frac{a}{r}\right).$$

Hierin bedeutet Θ den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte. 4. Außerdem ergibt die Rechnung, daß die Kugeln von Drehungsmomenten beansprucht werden. In allen angegebenen Resultaten sind die Glieder bis zu der zweiten Ordnung in a/r berücksichtigt. Interessant ist der scheinbare Widerspruch mit dem Satze von Wirkung und Gegenwirkung, der sich

1) M. Smoluchowski, Anz. Ak. Krakau S. 28. 1911; Cambridge Intern. Math. Congress 1912.

aber sofort durch die Bemerkung aufklärt, daß zwischen den Kugeln keine inneren Kräfte wirken, sondern die Flüssigkeit mitberücksichtigt werden muß.

Es ergibt sich auch u. a. aus diesen Resultaten, daß zwei nebeneinander fallenden Kugeln nicht nur etwas schneller als nach dem Stokesschen Gesetz fallen, sondern auch, daß die Fallbahn der beiden Kugeln von der Vertikalen um einen kleinen Winkel ε nach der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte hin geneigt ist, wo

$$\sin \varepsilon = \frac{3}{4} \frac{a}{r} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r}\right) \sin \Theta \cos \Theta .$$

Die eben erwähnten hydrodynamischen Sätze von Smoluchowski wurden von Oseen[1]) einer Kritik unterzogen, die sich ebenso auf alle mit der Lorentzschen Methode ausgeführten Rechnungen bezieht. Oseen geht wieder von der von ihm angegebenen modifizierten Lösung des Stokesschen Problems aus. Wie wir gesehen haben (§ 7a), bezog sich seine Korrektur nur auf größere Entfernungen von der Kugel, wo die von Stokes vernachlässigten Trägheitsglieder bereits über die Reibungsglieder hinauswachsen. Der Strömungszustand in der unmittelbaren Umgebung der Kugel war in beiden Theorien gleich und deshalb erhielt auch Oseen denselben Wert für den Widerstandskoeffizienten einer Kugel in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, wie Stokes. Bei der Lorentzschen Methode muß man aber bei der Berechnung der „reflektierten" Bewegung von den Werten der Strömungsgeschwindigkeiten in größeren Entfernungen von der Kugel Gebrauch machen und dabei könnte die Oseensche Korrektion von Belang werden. Aus dem von Oseen durchgerechneten Spezialfall der gegenseitigen Beeinflussung zweier fallenden Kugeln kann man die charakteristischen Merkmale für alle analogen Fälle übersehen, wo man die Rechnungen nach dem Lorentzschen Näherungsverfahren ausführt, mit dem einzigen Unterschiede, daß man die Oseensche Lösung des Stokesschen Problems an Stelle der ursprünglichen Stokesschen als Ausgangsströmung nimmt. Die Zusatzkräfte, die nach Oseen auf die Kugeln wirken, sind einander nicht mehr gleich, wie bei Smoluchowski; es entspricht

1) C. W. Oseen, Arkiv för Mat. Astr. och Fysik 7. Nr. 33. 1911.

das der Unsymmetrie der Oseenschen Strömung (§ 7a) vor und hinter der Kugel, einer Unsymmetrie, die, wie bereits erwähnt, durch die teilweise Berücksichtigung der Trägheit der Flüssigkeit zustande kommt. Die Oseenschen Formeln werden mit den Smoluchowskischen identisch, wenn $r\sigma V/2\mu$ gegen die Einheit vernachlässigt werden kann; im entgegengesetzten Falle wird der Widerstand nach den Oseenschen Formeln nicht mehr proportional der Geschwindigkeit, die Begriffe der Beweglichkeit und des Widerstandskoeffizienten verlieren ihre Bedeutung, und man kann das auch so ausdrücken, daß man dann außerhalb des Gültigkeitsbereiches der „langsamen" Bewegung gelangt ist. Die Bedingung $\frac{r\sigma V}{2\mu} \ll 1$ hat dieselbe Form, wie die Bedingung (12) der „Langsamkeit" der Bewegung, nur daß die gegenseitige Entfernung r der beiden Kugeln an die Stelle des Kugelradius a getreten ist. Da r viel größer als a ist (die Lorentzsche Methode besteht ja in einer Entwicklung nach Potenzen von a/r), so ist diese Bedingung viel einschränkender als (12); in den klassischen Kondensationsversuchen von J. J. Thomson und A. H. Wilson und den Untersuchungen von Perrin über Emulsionen war sie jedenfalls erfüllt. Wie Smoluchowski bemerkt hat, überschätzt Oseen in seiner Abhandlung die Tragweite seiner Korrektion, weil er durch ein Versehen den Faktor σ in $r\sigma V/2\mu$ weggelassen hat.

Die Lösung des Problems der gegenseitigen Beeinflussung zweier Kugeln setzt uns auch in den Stand, das Problem der gleichzeitigen Bewegung einer großen Anzahl von Kugeln, einer Wolke, in Angriff zu nehmen. Da diese Frage in letzter Zeit, seitdem man in der experimentellen Elektronik allgemein zu der Methode der Messung an Einzelpartikeln (Millikan-Ehrenhaft) übergegangen ist, sehr an Aktualität eingebüßt hat, verweisen wir in bezug auf nähere Einzelheiten auf die diesbezügliche Abhandlung von Smoluchowski[1]), wo auch ein früherer Lösungsversuch von Cunningham[2]) kritisch besprochen wird.

Wir haben bereits am Anfang dieses Paragraphen darauf hingewiesen, daß die Ermittlung der Korrektionsformeln für

1) M. Smoluchowski, Cambr. Intern. Math. Congress 1912.
2) E. Cunningham, Proc. Roy. Soc. 83. S. 357. 1910 (zweiter Teil).

den Einfluß der Wände die einwandfreie experimentelle Verifikation des Stokesschen Gesetzes erst ermöglicht hat. Es kommen hier hauptsächlich die ausgedehnten experimentellen Untersuchungen von Ladenburg[1]) und von Arnold[2]) in Betracht. In diesen beiden Abhandlungen findet man auch eine kritische Zusammenstellung der früheren diesbezüglichen Arbeiten. Im großen und ganzen kann man aber aus diesen älteren Arbeiten nur wenig schließen, weil in ihnen der Einfluß der Gefäße, die „Langsamkeit" der Bewegung, die Konstanz der Temperatur usw. meistenteils nicht genügend berücksichtigt wurden. Speziell die Konstanthaltung der Temperatur stellt große Anforderungen an die Geschicklichkeit des Experimentators, denn erstens ist der Koeffizient der inneren Reibung mit der Temperatur gewöhnlich ziemlich stark veränderlich, und zweitens, was noch wichtiger erscheint, bewirken bereits sehr kleine Temperaturdifferenzen Strömungen in der Flüssigkeit, die die ganzen Messungen illusorisch machen können. In den beiden letztgenannten Untersuchungen wurden alle nötigen Vorsichtsmaßregeln getroffen und eine Meßgenauigkeit von etwa $^1/_2$ Proz. erreicht. Die Messungen wurden in zylindrischen Gefäßen ausgeführt und die Korrektion für den Einfluß der Wände mittels der Ladenburgschen Korrektionsformel (20′) berechnet. Sowohl das Stokessche Gesetz, wie auch diese Korrektionsformel selbst, fanden sich vorzüglich bestätigt. Dabei arbeitete Ladenburg mit Stahlkugeln von 0,1—0,2 cm Radius und einer sehr zähen Flüssigkeit (Lösung von Kolophonium in Terpentinöl, μ etwa gleich 1800, also rund 100000mal größer wie bei Wasser von 10° C), während Arnold mit verschiedenen Ölen von einer mehr als 1000mal kleineren Viskosität ($\mu = 0{,}07$—$0{,}69$) experimentierte. Die Metallkugeln, die er gebrauchte, mußten entsprechend viel kleiner gewählt werden, um innerhalb des Bereiches der „langsamen" Bewegung zu bleiben. Wie bereits besprochen, stellte auch Arnold experimentell die Grenzen dieses Bereiches fest [vgl. (15′)].

Außer diesen beiden Arbeiten, die das Stokessche Gesetz für tropfbare Flüssigkeiten bestätigten, wurden auch neuer-

1) R. Ladenburg, a. a. O.
2) H. D. Arnold, a. a. O.

dings verschiedene Untersuchungen über das Fallen von Kugelteilchen in Gasen angestellt. Alle die im zweiten Teil zu besprechenden experimentellen Prüfungen der Stokes-Cunninghamschen Formel ergaben auch eine gute Bestätigung des gewöhnlichen Stokesschen Gesetzes für nicht zu niedrige Gasdrucke.

§ 9. Ungleichförmige Bewegung.

Ein längst bekanntes Beispiel einer ungleichförmigen Bewegung eines festen Körpers in einem zähen Medium ist das ebenfalls zuerst von Stokes[1]) gelöste Problem der kleinen Schwingungen einer Kugel in einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit. Wenn die Kugel kleine Pendelschwingungen von der Frequenz n (Periode $2\pi/n$) auf einer geraden Linie ausführt, so ist der Widerstand

$$6\pi\mu a V + M\left\{\frac{9n}{4as} V + \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4as}\right)\frac{dV}{dt}\right\}, \tag{22}$$

worin M die Masse der verdrängten Flüssigkeit ($\frac{4}{3}\pi a^3\sigma$) bedeutet und $\sqrt{\frac{n\sigma}{2\mu}} = s$ gesetzt wurde. Der Widerstand bei der gleichförmigen Translation ergibt sich als Grenzfall von (22) für unendlich langsame Schwingungen ($n = 0$, $\frac{dV}{dt} = 0$). Andererseits wird für $\mu = 0$, $s = \infty$ und der Widerstand reduziert sich auf eine Kraft $\frac{1}{2} M \frac{dV}{dt}$, die proportional der Beschleunigung ist; es ist das das bekannte Resultat aus der Hydrodynamik der idealen (reibungslosen) Flüssigkeit, wo die „scheinbare Masse" gleich der Hälfte der von der Kugel verdrängten Flüssigkeitsmasse ist.

Die Kenntnis der Lösung für die oszillierende Bewegung eines festen Körpers in einer zähen Flüssigkeit setzt uns in den Stand, auch das Problem einer beliebigen („langsamen") Bewegung dieses Körpers in Angriff zu nehmen. Infolge der Linearität der Differentialgleichungen der Bewegung kann man hier eine ähnliche Anwendung des Fourierschen Integrals machen, wie sie bei der Lösung spezieller Probleme der Potentialtheorie seit langem üblich ist. In bezug auf nähere Einzelheiten verweisen wir auf eine Abhandlung von

1) G. G. Stokes, a. a. O.

Lord Rayleigh[1]), wo auch Literaturangaben über die früheren diesbezüglichen Arbeiten von Basset, Boussinesq u. a. zu finden sind.

Für den Widerstand, den eine Kugel bei geradliniger Bewegung in einer zähen Flüssigkeit erleidet, wenn ihre Geschwindigkeit $V(t)$ als Funktion der Zeit gegeben ist, findet man derart die folgende, höchst interessante Formel

$$(23) \qquad -F = M\left\{\tfrac{1}{2}\dot{V} + \frac{9\mu}{2\sigma a^2}V + \frac{9\sqrt{\mu}}{2a\sqrt{\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot{V}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right\}.$$

Das erste Glied ist [wie in (22)] die scheinbare Masse, wie sie auch bei verschwindender innerer Reibung vorhanden wäre, das zweite Glied ist gleich dem Widerstande bei gleichförmiger Translation, wie er durch die gewöhnliche Stokessche Formel gegeben wird und der letzte Ausdruck bringt den Einfluß der Vorgeschichte der Kugel zur Geltung; der Widerstand im Momente t hängt zwar nur von dem gleichzeitigen Strömungszustande der Flüssigkeit ab, aber der Strömungszustand selbst wird durch die frühere Bewegung der Kugel mitbestimmt.

Viel schwieriger wird das Problem, wenn nicht die Geschwindigkeit, sondern die Kräfte vorgegeben sind; für den Fall einer Kugel, die unter dem Einflusse der Schwerkraft fällt, wurde dieses Problem von Picciati[2]) und von Boggio[3]) gelöst. Die Aufgabe besteht im wesentlichen in der Auflösung einer integro-differentiellen Gleichung für $V(t)$, die man dadurch erhält, daß man den Ausdruck (23) für den Widerstand F in die Bewegungsgleichung der Kugel

$$(24) \qquad M'\frac{dV}{dt} = (M' - M)g + F$$

einsetzt (M' = Masse der Kugel, M = Masse der verdrängten Flüssigkeit, wie früher). Boggio hat gezeigt, wie diese und ähnliche Gleichungen durch die Anwendung eines bekannten Theorems von Abel über die Inversion von Integralen gelöst werden können. Die Formeln für V und für den von der Kugel in einer gewissen Zeit zurückgelegten Weg, zu denen er in dem Falle, daß die Kugel und die Flüssigkeit ursprüng-

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. S. 697. 1911.
2) G. Picciati, Rend. Acc. Lincei 16. S. 45. 1907.
3) T. Boggio, Rend. Acc. Lincei 16. S. 613 u. 730. 1907.

lich in Ruhe waren, gelangt, sind verhältnismäßig einfach und eignen sich zur unmittelbaren numerischen Auswertung. Es ist auffallend, daß die analytische Form dieser Funktionen von dem Verhältnis σ'/σ der Dichtigkeiten der Kugel und der Flüssigkeit abhängt, und Basset hat sogar dieses Resultat als einen Einwand gegen die Anwendbarkeit der gewöhnlichen angenäherten Gleichungen für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit [Differentialgleichungen (2) der „langsamen" Bewegung] betrachtet. Diese Ansicht wird jedoch von Lord Rayleigh nicht geteilt: vergleiche seine eben erwähnte Arbeit, wo auch weitere höchst interessante Beispiele für die Anwendung der Methode von Boggio behandelt werden.[1])

In verschiedenen experimentellen Arbeiten kann es wünschenswert sein, zu erfahren, wie lange die Kugel dazu braucht, um vom Zustande der Ruhe eine mit einer gewissen Annäherung konstante Endgeschwindigkeit zu erreichen. Die Formeln von Boggio geben eine genaue Antwort auf diese Frage; eine ungefähre Orientierung kann aber auf einem viel einfacheren Wege erreicht werden. Wenn wir annehmen, daß der Widerstandskoeffizient auch bei beschleunigter Bewegung in jedem Moment durch das Stokessche Gesetz gegeben wird, so fällt in (23) das Glied mit dem Integral weg, die Bewegungsgleichung (24) wird zu einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(24') \qquad (M' + \tfrac{1}{2} M) \frac{dV}{dt} = 6\pi\mu a V + (M' - M) g \quad .$$

und als partikuläre Lösung, die der Bedingung unterworfen ist, daß sie für $t = 0$ verschwinden soll, erhalten wir

$$(25) \qquad V = \frac{(M' - M) g}{6\pi\mu a} \left(1 - e^{-\frac{6\pi\mu a}{M' + \frac{1}{2} M} t}\right) .$$

Wenn wir hier für die Masse der Kugel M' und für die Masse der verdrängten Flüssigkeit M ihre Werte $\frac{4}{3}\pi a^3 \sigma'$ bzw. $\frac{4}{3}\pi a^3 \sigma$ einsetzen, erhalten wir

$$(26) \qquad V = \tfrac{2}{9} a^2 g \frac{\sigma' - \sigma}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{9\mu t}{2a^2(\sigma' + \frac{1}{2}\sigma)}}\right),$$

1) Es hätte sich vielleicht gelohnt, die verschiedenen Theorien der Brownschen Bewegung, bei welchen die Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes sogar für die einzelnen Zickzackwege der unregelmäßigen Bahn vorausgesetzt wird, im Lichte der eben erwähnten theoretischen Untersuchungen durchzudiskutieren.

wo der erste Koeffizient gleich demjenigen der Formel (6') ist und der Ausdruck

$$\frac{2}{9}\,\frac{a^2}{\mu}\,(\sigma' + \tfrac{1}{2}\,\sigma) \tag{27}$$

die Rolle einer Art Relaxationszeit spielt. Von ihr hängt die Schnelligkeit, mit welcher die Kugel ihre Endgeschwindigkeit erreicht, in einfacher Weise ab. Sie wird ersichtlich desto größer, je größer die Dichte des Kugelmaterials oder der Flüssigkeit und je kleiner die innere Reibung der Flüssigkeit ist. Der Ausdruck $\frac{2}{9}\,(\sigma' + \frac{1}{2}\,\sigma)$ ist von der Größenordnung der Einheit und aus dem Faktor a^2/μ kann man leicht entnehmen, wie klein diese Relaxationszeit ist für alle allein in Betracht kommenden Fälle, die die Bedingung der „langsamen" Bewegung noch erfüllen.

Neuerdings sind zwei experimentelle Arbeiten erschienen, die in einem gewissen Zusammenhange mit dem Gegenstande dieses Paragraphen stehen. Shewhart[1]) und Abbott[2]) untersuchten mit Hilfe einer photographischen Methode die Fallbewegung von geladenen Wassertröpfchen und Lycopodiumteilchen, die gleichzeitig durch ein elektrisches Wechselfeld in transversale Schwingungen versetzt wurden. Shewhart beobachtete eine Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit mit zunehmender Amplitude der transversalen Schwingungen, Abbott zeigte nachträglich, daß dieser Befund auf einem experimentellen Trugschluß beruhte. Keiner der beiden Autoren berücksichtigte leider die eben erwähnte umfangreiche Literatur über diesen Gegenstand, und die Schlußfolgerung von Abbott, daß „kein Grund aufgefunden wurde, warum die Stokessche Konstante $6\pi\mu a$ auch für diese Fälle von beschleunigter Bewegung nicht gelten sollte", ist jedenfalls mit größter Vorsicht aufzunehmen. Speziell die letzte Versuchsreihe von Abbott mit dem fallenden Gummiball von 9 cm Durchmesser zeigt, wie kritiklos er bei der Auswertung seiner experimentellen Resultate vorgegangen ist, indem er auf die Eindeutigkeit der von ihm gewählten Erklärungsweise gar keine Rücksicht nahm. Aus der Übereinstimmung der experimentellen Kurve der Fallstrecken als Funktion der Zeit mit der aus der Annahme

1) W. A. Shewhart, Phys. Rev. 9. S. 425. 1917.
2) R. B. Abbott, Phys. Rev. 12. S. 381. 1918.

der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit berechneten schließt er auf das Bestehen dieser Proportionalität. Da aber die in Rede stehende Kurve bei jedwedem Widerstandsgesetze von Null ausgehen und nach sehr kurzer Zeit zu einer Geraden (V = konst.) werden muß, so ist es einleuchtend, daß man aus dem kurzen gebogenen Anfangsstück der Kurve in Anbetracht der kleinen Genauigkeit der Messungen, die mit einer gewöhnlichen Stoppuhr ausgeführt wurden, gar keine bindende Schlüsse ziehen kann. Der letzte Schluß von Abbott, daß „für viel größere Geschwindigkeiten, als diejenigen, die innerhalb der Gültigkeitsgrenzen des Stokesschen Gesetzes liegen, die Widerstandskraft proportional mit der Geschwindigkeit ist", enthält einen inneren Widerspruch: Da das Stokessche Gesetz für sehr kleine Geschwindigkeiten sicher gültig ist, so behält es offenbar seine Gültigkeit solange, als die Widerstandskraft proportional der Geschwindigkeit ist. In den Experimenten von Abbott war die Fallgeschwindigkeit des Gummiballes (die durch die Neigung der Zeit-Fallstrecke-Kurve bestimmt ist) viele hundertmal größer als nach dem Stokesschen Gesetze!

Auch Fräulein Snethlage[1]) hat einige Experimente über schwingende Teilchen in einem elektrischen Wechselfelde angestellt, ohne dabei zu irgendwelchen positiven Schlüssen zu gelangen.

Auf die klassischen experimentellen Verifizierungen der Formel (22) für Pendelschwingungen gehen wir hier nicht näher ein.[2]) Es sei nur erwähnt, daß Love sie geradezu als den überzeugendsten Beweis für die Richtigkeit der allgemein angenommenen Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit (bei kleinen Geschwindigkeiten) betrachtet, bei deren Ableitung ja manches (Linearität der Beziehung zwischen Spannung und Deformationsgeschwindigkeit, Reduktion von zwei Konstanten auf eine [vgl. § 2, Gleichung (5)]) einen etwas hypothetischen Charakter trägt.

§ 10. Berücksichtigung der Gleitung.

Die hydrodynamische Berechnung des Stokesschen Gesetzes kann leicht durch Berücksichtigung der Gleitung an

1) A. Snethlage, Proc. Ac. Amsterdam 19. S. 1006. 1917.
2) Vgl. A. E. H. Love, a. a. O. § 12.

der Oberfläche der Kugel ergänzt werden und in diesem Falle bekommt man, wie Basset[1]) gezeigt hat,

$$W = 6\pi\mu a \frac{\beta a + 2\mu}{\beta a + 3\mu} = 6\pi\mu a \frac{a + 2\gamma}{a + 3\gamma} . \tag{28}$$

Der Koeffizient der äußeren Reibung β und der Koeffizient der Gleitung γ wurden bereits im § 2, Gleichungen (4) und (5), definiert. Wir werden im zweiten Teile, wo die Teilchenbewegung in Gasen behandelt wird, auf die Formel (28) noch zu sprechen kommen. Bei tropfbaren Flüssigkeiten kommt bekanntlich die Gleitung der Flüssigkeit längs der festen Wände gar nicht in Betracht. In den bereits mehrfach erwähnten experimentellen Untersuchungen von Arnold war der Koeffizient der äußeren Reibung β jedenfalls größer als 5000, und wahrscheinlich größer als 50000. Arnold hat auch die Formel (28) zur Diskussion seiner Experimente an aufsteigenden Luftblasen hinzugezogen, doch, wie Smoluchowski[2]) bereits bemerkt hat, konnte es sich dabei unmöglich um eine eigentliche Gleitung handeln, sondern man muß diesen Vorgang als eine Bewegung einer flüssigen Kugel in einer anderen Flüssigkeit auffassen. Näheres darüber vgl. § 12.

§ 11. Widerstandsgesetze für nicht kugelförmige Teilchen.

Das Problem der gleichförmigen, „langsamen" Translation eines festen Ellipsoids in einem zähen Medium wurde von Oberbeck[3]) gelöst. Aus den allgemeinen Formeln von Oberbeck hat Gans[4]) Näherungsausdrücke für den Widerstandskoeffizienten in verschiedenen Spezialfällen abgeleitet, wie z. B. für kleine Abweichung von Kugelgestalt, für sehr abgeplattete Rotationsellipsoide (Näherung für Scheibchen), sehr gestreckte (Stäbchen) usw. Diese Formeln wurden von Zeleny und Mc Keehan[5]) dazu gebraucht, um aus den mikroskopisch gemessenen Abweichungen von der Kugelgestalt verschiedener natürlicher Sporen (Lycopodium, Lyco-

1) A. B. Basset, Phil. Trans. 179. S. 43. 1877.
2) M. Smoluchowski, Cambr. Intern. Math. Congress 1912.
3) A. Oberbeck, Journ. f. Math. 81. S. 62. 1876; vgl. H. Lamb, „Hydrodynamik" § 326.
4) R. Gans, S.tsb. Akad. München, S. 191, 1911.
5) J. Zeleny und L. W. Mc Keehan, a. a. O.

perdon und Polytrichum) auf die Abweichungen vom Stokesschen Gesetz beim Fallen derselben in Luft zu schließen. Die derart geschätzten Abweichungen waren jedoch viel kleiner als die experimentell gefundenen Anomalien, die wahrscheinlich auf eine schwammartige Struktur dieser Teilchen zurückzuführen sind (vgl. auch die diesbezügliche Bemerkung von Abbott)[1]. In einer Arbeit von Przibram[2] über die Brownsche Bewegung langgestreckter Teilchen findet man eine graphische Darstellung des Widerstandskoeffizienten eines gestreckten Ellipsoids, in Richtung der großen Achse und senkrecht dazu, als Funktion des Achsenverhältnisses, aufgetragen.

Für anders gestaltete Teilchen sind die theoretischen Werte der Widerstandskoeffizienten unbekannt, doch kann man nach Gans[3] aus der Linearität der Differentialgleichungen der „langsamen" Bewegung für alle Teilchen die drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen besitzen, eine wichtige Folgerung ziehen: Solche Teilchen erleiden infolge der Druckkräfte der Flüssigkeit keine Drehimpulse, sie haben also nicht die Tendenz, beim langsamen Fallen in der Flüssigkeit sich irgendwie einzustellen. Bei der Bewegung eines Körpers mit drei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen in der Richtung einer der Hauptachsen kommt offenbar kein Drehmoment zustande. Es folgt daraus, daß das auch bei der Translation in einer beliebigen Richtung der Fall sein wird, denn infolge der Linearität der zugrunde gelegten Bewegungsgleichungen gibt die Superposition zweier Lösungssysteme wieder ein mögliches Lösungssystem, und man kann den Strömungszustand bei der betrachteten Translation als Superposition dreier Strömungszustände auffassen, die durch Translation des Körpers in der Richtung der drei Hauptachsen entstehen.

Ausdrücklich soll hier nochmals die vorausgesetzte „Langsamkeit" der Bewegung betont werden, denn nur dadurch wird der Widerspruch, in welchem die Gansche Regel mit alltäglichen Beobachtungen an fallenden Gegenständen zu stehen scheint, gehoben. Selbstverständlich handelt es sich auch bei der eben aufgestellten Regel erstens um Teilchen, deren

1) R. B. Abbott, a. a. O.
2) K. Przibram, Sitzb. Akad. Wien. 121. Abt. IIa. S. 2346. 1912.
3) R. Gans, a. a. O.

Schwerpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkt zusammenfällt, und zweitens um eine Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik; bei hinreichend kleinen Teilchen muß die Brownsche Rotationsbewegung berücksichtigt werden.

§ 12. Bewegung einer flüssigen Kugel.

Das Stokessche Gesetz läßt sich auch leicht auf den Fall der Bewegung einer flüssigen Kugel (Koeffizient der inneren Reibung μ') ausdehnen, indem sowohl die Bewegung der äußeren, wie die der inneren Flüssigkeit durch die Differentialgleichung (2) der „langsamen" Bewegung beherrscht werden; der Zusammenhang der beiden Strömungszustände ergibt sich aus der Bedingung, daß die drei Geschwindigkeitskomponenten und die drei Komponenten der Zugkraft sich beim Überschreiten der Kugeloberfläche stetig aneinanderschließen müssen. Die Rechnung zeigt, daß die Kugel ihre Gestalt während der Bewegung beibehält; offenbar wird das nur solange der Fall sein, als die Trägheitskräfte, die eine Abplattung der Kugel bewirken, vernachlässigt werden können, d. h. solange die Bewegung „langsam" und die Bewegungsgleichungen linear in den Geschwindigkeitskomponenten bleiben. Da die Lage des Angriffspunktes der äußeren Kräfte nicht gleichgültig ist, so nimmt man zweckmäßig von vornherein die infolge der Dichtedifferenz der beiden Flüssigkeiten wirkende Schwere als Bewegungsursache an.

Unabhängig voneinander finden Rybczynski[1]) und Hadamard[2]) die folgende Formel für den Widerstandskoeffizienten der flüssigen Kugel

$$W = 6\pi\mu a \frac{3\mu' + 2\mu}{3\mu' + 3\mu} \,. \tag{29}$$

Danach ist die Fallgeschwindigkeit im Verhältnis

$$k = \frac{3\mu' + 3\mu}{3\mu' + 2\mu} \tag{29'}$$

größer als diejenige einer eben solchen festen Kugel; k ist also zwischen den Grenzen 1 und $^3/_2$ (für $\mu' \ll \mu$) veränderlich. Die Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit, oder die Ver-

1) W. Rybczynski, Anz. Ak. Krakau, S. 40, 1911.

2) J. Hadamard, Compt. rend. 152. S. 1735. 1911; 154. S. 109. 1912.

kleinerung des Widerstandskoeffizienten hängt nur von dem Verhältnis der Koeffizienten der inneren Reibung der beiden Flüssigkeiten und keineswegs vom Radius der Kugel ab.

Die Experimente an fallenden Quecksilberkugeln in Ricinusöl von Roux[1]) und an Quecksilberkugeln in wasserhaltigem Glyzerin und Nitrobenzolkugeln in Wasser von Nordlund[2]) haben jedoch die Rybczynski-Hadamardsche Formel keineswegs bestätigt. Vielmehr ergaben sich Fallgeschwindigkeiten, die nur ganz wenig diejenigen gleichgroßer, fester Kugeln überstiegen; auch zeigte sich in den Experimenten von Roux ein gewisser Gang dieser Vergrößerung mit dem Radius der Kugeln, worauf wir noch gleich zu sprechen kommen. In den besonders sorgfältig ausgeführten Messungen von Nordlund an Quecksilberkügelchen von etwa 20 μ Durchmesser wurde die Fallgeschwindigkeit im Bereiche der experimentellen Fehler gleich derjenigen gefunden, die sich aus dem gewöhnlichen Stokesschen Gesetze ergibt, während sie nach Formel (29) um etwa 46 Proz. größer sein sollte. Übrigens gibt Nordlund an, daß „die Fallgeschwindigkeit von 0,076 Proz. größer als nach Stokes-Ladenburg[3]) ist", was wohl als eine grobe Überschätzung der Genauigkeit seiner Messungen bezeichnet werden darf. Es bedeute $\bar{\mu}$ den „scheinbaren" Koeffizienten der inneren Reibung der „Fallflüssigkeit" (Glyzerin mit etwa 11 Proz. Wasser), wie er mit Hilfe des gemessenen Wertes der Fallgeschwindigkeit aus dem Stokesschen Gesetze [mit der Ladenburgschen Korrektion (30) für den Einfluß der zylindrischen Gefäßwand] berechnet wird und μ, wie gewöhnlich, den Koeffizienten der inneren Reibung der Fallflüssigkeit, dann stellen die bei Nordlund tabellierten Werte von $100\,\frac{\bar{\mu}-\mu}{\bar{\mu}}$ die relativen, prozentuellen Vergrößerungen des Widerstandskoeffizienten in bezug auf das gewöhnliche Stokessche Gesetz für die einzelnen Messungen dar. Nach der Formel (29) mit Einsetzung der entsprechenden Reibungskoeffizienten des Quecksilbers und des Glyzerins sollten diese Werte etwa gleich -46 sein, während sie bei Nordlund unregelmäßig etwa zwischen

1) J. Roux, Ann. de Chim. et Phys. **29**. S. 69. 1913.

2) J. Nordlund, Ark. för Mat. Astr. och Fysik **9**. Nr. 13. 1913.

3) Das Fallgesetz, nach welchem feste Kugeln in den gebrauchten zylindrischen Gefäßen sich bewegen würden.

$\pm$ 10 schwanken. Ihr arithmetisches Mittel beträgt $-0{,}0076$ (zufällig haben sich also die positiven und negativen Werte fast aufgehoben, die Auslassung einer einzigen Messung wäre aber genügend, um diesen Mittelwert auf das 10fache zu steigern), während der (quadratische) Mittelwert der Abweichungen vom arithmetischen Mittel etwa 3,4 beträgt. Daraus kann man die Genauigkeit des Resultates der 105 Messungen auf etwa 0,3 Proz. schätzen und als Schlußresultat die Tatsache ansehen, daß bei den Nordlundschen Messungen die Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit in bezug auf die Fallgeschwindigkeit eben so großer fester Kugeln 0,3 Proz. jedenfalls nicht viel überschreiten kann. Da die Rybczynski-Hadamardsche Formel (29) 46 Proz. erfordert, so ist dadurch ihre Unhaltbarkeit zur Genüge bewiesen.

Beide Autoren haben nun die Vermutung ausgesprochen, daß es sich hier um eine gewisse Wirkung der bei der Ableitung der Formel (29) nicht berücksichtigten Oberflächenspannung handeln müßte, was durch die theoretischen Untersuchungen von Boussinesq[1]) auch bestätigt erscheint. Selbstverständlich kommt man hier mir dem gewöhnlichen Ansatz für die Oberflächenspannung nicht aus, denn die Oberflächenspannung, wie man sie gewöhnlich betrachtet, könnte höchstens die Erhaltung der kugelförmigen Gestalt des Teilchens begünstigen, was in der Rybczynski-Hadamardschen Theorie sowieso durch die „Langsamkeit" der Bewegung gewährleistet wird. Um zu einer brauchbaren Erklärung der eigenartigen Wirkung der Kapillarkräfte zu gelangen, welche darin besteht, daß eine kleine Flüssigkeitskugel sich beim Fallen fast wie ein fester Körper verhält, muß man die Oberflächenschicht in einem Bewegungszustande und nicht, wie das gewöhnlich geschieht, in einem Gleichgewichtszustande betrachten und eine Art innerer Reibung in dieser Schicht einführen. Das Bestehen einer solchen Oberflächenviskosität ist ja bereits von vornherein als sehr wahrscheinlich zu bezeichnen; Boussinesq, der unseres Wissens zum ersten Male ihre Wirkung auf die Bewegung der Flüssigkeit untersuchte, kommt mit Hilfe sehr plausibler molekularkinetischer Vorstellungen und gewisser Symmetriebetrachtungen zu den folgenden Aus-

1) J. Boussinesq, Ann. d. Chimie et Phys. 29. S. 349, 357, 364. 1913; vgl. auch Beibl. d. Phys. 37. S. 1357. 1913.

drücken für die beiden „Haupt"-Oberflächenspannungen (pro Längeneinheit)

$$\text{(30)} \qquad \begin{cases} F = f + e_1(\partial + \partial') + 2e\partial, \\ F' = f + e_1(\partial + \partial') + 2e\partial', \end{cases}$$

wo ∂ und ∂' die beiden „Haupt"-Dilatationsgeschwindigkeiten der Oberflächenschicht (in zwei zueinander senkrechten „Haupt"-Richtungen) bedeuten; e und e_1 sind zwei Koeffizienten der Oberflächenviskosität, und f, die Oberflächenspannung im Gleichgewicht, ist die gewöhnliche Kapillaritätskonstante.

In (30) sehen wir das zweidimensionale Analogon der Ansätze für die elastischen Spannungen, die gewöhnlich zum Plausibelmachen der Ansätze für die Spannungen in einer viskosen Flüssigkeit gebraucht werden. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man in der Theorie der inneren Reibung von Flüssigkeiten die beiden Konstanten mittels einer besonderen Annahme [§ 2, Gleichung (5)] auf nur eine reduziert, während hier diese Reduktion nicht durchgeführt wurde. Übrigens ist das für das Weitere sowieso ohne Belang, da in der endgültigen Formel für den Widerstandskoeffizienten die beiden Konstanten e und e_1 nur in einer Kombination

$$\text{(31)} \qquad \varepsilon = e + e_1$$

auftreten.

Das am Anfange dieses Paragraphen formulierte hydrodynamische Problem ist nun in ersichtlicher Weise zu modifizieren; anstatt die Differenz der Zugkräfte in den beiden Flüssigkeiten an der Oberfläche der Kugel gleich Null anzunehmen, muß man sie gleich den durch (30) gegebenen Spannungen in der Oberflächenschicht setzen. Der weitere Gang der Rechnung wird von Boussinesq nach einer von ihm bereits im Jahre 1885 angegebenen, allgemeinen Methode zur Lösung des Stokesschen Problems durchgeführt, und schließlich gelangt er zur folgenden Formel für k, die Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit der flüssigen Kugel im Verhältnis zu der Geschwindigkeit einer ebenso großen festen Kugel

$$\text{(32)} \qquad k = \frac{\varepsilon + a(3\mu' + 3\mu)}{\varepsilon + a(3\mu' + 2\mu)}.$$

Hierin bedeuten μ' den Reibungskoeffizienten der inneren, μ denjenigen der äußeren Flüssigkeit und ε ist die oben erwähnte Konstante der Oberflächenviskosität.

Wir bemerken gleich, daß diese Formel mindestens qualitativ von den oben besprochenen experimentellen Ergebnissen Rechenschaft zu geben gestattet. Die Werte für den Widerstandskoeffizienten, die sie liefert, liegen stets zwischen den Werten für feste Kugeln ($k = 1$) und denjenigen, die sich aus der Rybczynski-Hadamardschen Formel ergeben [k nach Formel (29′)]; mit kleiner werdendem Radius nähert sich die Fallgeschwindigkeit immer mehr der Geschwindigkeit fester Kugeln. Deshalb konnte auch Nordlund bei seinen Versuchen an Quecksilberkugeln keine merklichen Abweichungen vom gewöhnlichen Stokesschen Gesetz finden, während Roux, der mit viel größeren Hg-Kugeln arbeitete (600—900 μ, allerdings in einer anderen Flüssigkeit — Olivenöl bei Roux — Glyzerin bei Nordlund) 6—12 prozentige Abweichungen beobachtete. Auch der allgemeine Gang dieser Abweichungen — sie wuchsen mit dem Radius der Teilchen — stimmt mit der Boussinesqschen Theorie überein.[1]) Nichtsdestoweniger muß die Frage nach der experimentellen Verifizierung der von Boussinesq für die Oberflächenviskosität gemachten Ansätze solange als offen betrachtet werden, als keine ausgedehnteren Untersuchungen (für größere, einheitliche Bereiche von a) vorliegen. Denn daß das ursprüngliche Stokessche (feste Kugeln) und das Rybczynski-Hadamardsche Problem (flüssige Kugeln ohne Oberflächenviskosität) zwei Grenzfälle darstellen, zwischen welche sich die tatsächlich beobachteten Fallgeschwindigkeiten flüssiger Kugeln einordnen würden, das war von vornherein, ohne spezielle Theorie, einleuchtend; auch die Vergrößerung der Abweichungen vom Stokesschen Gesetze mit wachsenden Durchmessern der Teilchen konnte wohl ohne weiteres vorhergesehen werden. Es ist nur die Frage zu beantworten, ob der tatsächlich beobachtbare Gang der Veränderlichkeit des Widerstandskoeffizienten mit dem Teilchenradius dem von Boussinesq abgeleiteten wirklich entspricht, und dazu reichen die Experimente von Roux und Nordlund keineswegs aus. Es wäre vielmehr

1) Der numerische Wert von s läßt sich daraus ganz roh zu 1,4 g/sek schätzen.

erforderlich, in derselben Fallflüssigkeit und mit denselben flüssigen Teilchen, nur mit veränderlichen Radien, die allmählige Veränderung des Widerstandskoeffizienten von solchen Werten an, die dem Stokesschen Gesetz für feste Kugeln entsprechen, bis zu solchen, wo die Oberflächenviskosität zu vernachlässigen ist und die also der Rybczynski-Hadamardschen Formel gehorchen, zu verfolgen.

Teilweise kann eine solche Kenntnis den bereits oft erwähnten Messungen von Arnold an aufsteigenden Luftbläschen in verschiedenen Ölen, sowie den analogen, früheren Messungen von Allen[1]) an Luftbläschen in Anilin entnommen werden. Wie wir im § 10 bereits erwähnt haben, hat Smoluchowski darauf hingewiesen, daß hier ein Beispiel für die Anwendung der Rybczynski-Hadamardschen Theorie vorliegt, aber erst durch Mitberücksichtigung der Oberflächenviskosität findet ein großer Teil der Arnoldschen Resultate seine sachgemäße Erklärung. So liegt die Mehrzahl der Steighöhen der Bläschen zwischen den Voraussagen des Stokesschen und des Rynczynski-Hadamardschen Gesetzes. Die Fig. 8 von Arnold, die den „scheinbaren" Reibungskoeffizienten des Olivenöls (der unserem k umgekehrt proportional ist) in Funktion des Radius der Luftblasen darstellt, zeigt alle die von der Boussinesqschen Formel (32) geforderten Phasen der Abhängigkeit des Widerstandskoeffizienten vom Radius: Sehr kleine Kugeln ($a < 0{,}01$ cm) befolgen das gewöhnliche Stokessche Gesetz; der „scheinbare" [nach der Formel (20′) aus der gemessenen Steiggeschwindigkeit berechnete] Koeffizient der inneren Reibung ist gleich dem wirklichen, mit einem Viskosimeter meßbaren Koeffizienten. Mit wachsenden Radien folgt ein schnelles Abnehmen der scheinbaren Viskosität, die Steiggeschwindigkeit nimmt schneller zu, wie bei festen Kugeln, und bei $a = 0{,}04$—$0{,}05$ cm erreicht die Steiggeschwindigkeit den von der Rybczynski-Hadamardschen Formel geforderten Wert, d. h. (da μ' gegen μ zu vernachlässigen ist) $^2/_3$ der Geschwindigkeit gleichgroßer fester Kugeln. Das weitere Ansteigen der Arnoldschen Kurve erklärt sich durch das bereits erwähnte (vgl. § 8) Versagen der Ladenburgschen Korrektion.

---

1) H. S. Allen, a. a. O.

So weit stimmt alles schön mit der Theorie überein; doch kann man sich bei näherer Betrachtung leicht davon überzeugen, daß die Arnoldsche Kurve unmöglich mit der Boussinesqschen zur Deckung gebracht werden kann: Während die erste für verschwindende Radien der a-Achse parallel wird, ist das für die theoretische Kurve keineswegs der Fall. Noch schlimmer steht es um die Übereinstimmung in den Experimenten von Arnold in Leinöl. Die Frage, ob man die Schuld der Theorie oder den Experimenten zuschreiben soll, muß bis auf weiteres offen gelassen werden. In den Experimenten von Arnold trat eine interessante Nebenerscheinung auf, die die Messungen sehr erschwerte; es war das nämlich die „Erosion" der Oberfläche der Teilchen, ein stetiges Abnehmen des Teilchenradius mit der vom Teilchen zurückgelegten Strecke.[1]) Bei größeren Tropfen von Alkohol in Olivenöl konnte man das Loslösen der Außenschicht, die sich dann zu einer großen Zahl von kleinen Tröpfchen zusammenzieht, direkt beobachten. Arnold hat gezeigt, daß man aus der Annahme, daß während der Bewegung der Kugel eine Schicht von der Dicke der Wirkungssphäre der molekularen Attraktion von der Kugel abgeschält wird und in der Fallflüssigkeit zurückbleibt, zu einer sehr plausiblen Größe dieser Wirkungssphäre gelangt. Obwohl es sich hier um eine grobe Schätzung handelt, so ist jedenfalls dadurch die Tatsache nahegelegt, daß wir es mit einer gewissen Wirkung der Kapillarkräfte zu tun haben, und es ist sehr wohl möglich, daß diese Erscheinung von der Bewegung der Kugel durch die Flüssigkeit, wie sie die Theorie von Boussinesq behandelt, nie streng geschieden werden kann.[2]) Auch wird wohl, wie bei allen Oberflächeneffekten,

1) Einige analoge Erscheinungen, wo die Kapillarkräfte vielleicht eine ausschlaggebende Rolle spielen und von denen man sich noch schwerer eine geeignete Vorstellung bilden kann, fand Targonski (Arch. d. Geneve 41. S. 187. 1916) an Quecksilbertröpfchen in Luft; die Teilchen waren so klein, daß sie eine merkliche Brownsche Bewegung zeigten; das erschwert ungemein das Verständnis des beobachteten Einflusses der sichtbaren Bewegung auf die Größenabnahme der Teilchen.

2) Die Erosion muß um so kleiner sein, je größer der Molekulardruck, die Zerreißfestigkeit ist. Vielleicht ließen sich die Experimente über die Erosion zu einer Methode der Messung des Molekulardruckes ausbilden.

die Reinheit der benutzten Materialien bei jeder experimentellen Verifikation der Boussinesqschen Formel eine große Rolle spielen; so beobachtete Allen bei seinen Luftbläschen in Anilin unregelmäßige Schwankungen der Steiggeschwindigkeit von Teilchen zu Teilchen, die höchstwahrscheinlich mit der zufälligen Beschaffenheit der Oberfläche (des Koeffizienten ε der Oberflächenviskosität) im Zusammenhange standen.

Jedenfalls scheinen die theoretische und die experimentelle Evidenz dafür zu sprechen, daß sich genügend kleine, flüssige Teilchen, wie klein auch ihre Oberflächenviskosität sein mag, in bezug auf ihre Beweglichkeit von ebensolchen, festen Teilchen nicht unterscheiden lassen. Diese Tatsache ist für die theoretische Kolloidchemie von außerordentlicher Wichtigkeit. Auch wird dadurch ein Einwand behoben, den Smoluchowski[1]) gegen die Anwendung der verschiedenen Theorien der Kataphorese auf Emulsoide erhebt, Theorien, die alle nur für feste (nichtleitende) Teilchen aufgestellt wurden; für Teilchen, die in der Kolloidchemie in Betracht kommen, werden schon die Kapillarkräfte dafür sorgen, daß man diese Teilchen als fest ansehen darf. Die Theorie der Kataphorese braucht also nur noch auf leitende Teilchen ausgedehnt zu werden.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

1) M. v. Smoluchowski, „Elektrische Endosmose und Strömungsströme", § 32 in Graetz' „Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus", Bd. II, Lf. 2.

(Eingegangen 14. August 1919.)

2. *Die Einführung eines vernunftgemäßen Koordinatensystems in die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Gravitationsfeld einer schweren Kugel;* *von Gustav Mie.*

1. Die Einsteinsche Gravitationstheorie bringt die eigentümliche Schwierigkeit mit sich, daß die gewöhnlichen praktischen Definitionen der geraden Linie und der Längengleichheit unbrauchbar werden. Die praktische Durchführbarkeit der ganzen Geometrie beruht auf der Existenz unveränderlicher Körper, die man an den verschiedensten Orten und zu den verschiedensten Zeiten als Maßstäbe benutzen kann, um die zu messenden Abstände irgendwelcher Raumpunkte mit ihrer Länge zu vergleichen. Ebenso braucht man zur Vergleichung von Zeitintervallen unveränderliche physikalische Vorgänge (Schwingungen). Daß man solche unveränderlichen Maßstäbe für Längen und Zeiten praktisch einwandfrei herstellen kann, beruht letzten Grundes auf der Unveränderlichkeit der Atome und der Unabhängigkeit ihrer Beschaffenheit von Ort und Zeit.

Die Existenz absolut unveränderlicher Atome galt als eine Selbstverständlichkeit, solange man glaubte, zwischen den „von Materie erfüllten" Teilchen und dem sie umgebenden „absolut leeren Raum" scharf unterscheiden zu können. Nun wissen wir aber, daß diese Auffassung nicht richtig ist, daß vielmehr der sogenannte leere Raum als Weltäther selber der Schauplatz mannigfacher physikalischer Vorgänge ist und daß er überall auch in die Vorgänge, die man speziell als materielle Vorgänge bezeichnet, ganz wesentlich mit eingreift. Sobald man aus diesen Erkenntnissen die notwendige Konsequenz zieht und die scharfe Abgrenzung zwischen „Materie" und „leerem Raum" fallen läßt, gelangt man dazu, in einer nunmehr zu erstrebenden „Theorie der Materie" die materiellen Teilchen nur als Stellen im Äther aufzufassen, an welchen eine Zusammen-

ziehung ganz enormer Energiemengen auf einen winzigen Raumteil stattfindet. Sie können dann keine absolut unveränderlichen Atome sein. Man muß vielmehr mit Bestimmtheit erwarten, daß diese Energiekroten im Äther sich verändern, wenn sie von Gegenden, wo der Äther an und für sich feldfrei ist, in Gebiete überführt werden, wo von vornherein starke elektromagnetische oder Gravitationsfelder vorhanden sind. Es ist eines der wichtigsten Probleme der „Theorie der Materie", eine Erklärung dafür zu finden, daß sich trotzdem in Wirklichkeit die materiellen Teilchen fast wie feste harte Partikelchen verhalten, die von dem Vorhandensein irgendwelcher Felder so wenig beeinflußt werden, daß man ihre Veränderungen mit den uns jetzt zur Verfügung stehenden experimentellen Hilfsmitteln noch nicht beobachtet hat.[1]) Für die Gravitationsfelder ist dieses Problem durch die Einsteinsche Gravitationstheorie vollständig gelöst. Nach dieser Theorie sind die Veränderungen der materiellen Teilchen in einem Gravitationsfeld ganz allein durch das Gravitationspotential bedingt. Die Feldstärke des Gravitationsfeldes kommt lediglich als Gefälle des Gravitationspotentials in dem Teilchen zur Geltung, so daß in einem Gravitationsfeld nach Maßgabe dieses Gefälles die Veränderung des Teilchens mehr oder weniger inhomogen ist. Die Veränderungen selber bestehen nach der Einsteinschen Theorie nur in einer Veränderung sämtlicher Maßeinheiten, man kann sagen: sie bestehen in einer Deformation des von dem Teilchen und den in ihm sich abspielenden Vorgängen erfüllten kleinen Raum-Zeitgebietes. Das Gravitationspotential selber ist ein vierdimensionaler Tensor, seine Komponenten seien im folgenden mit $\omega^{\mu\nu}$ bezeichnet. Ich will die aus diesen $\omega^{\mu\nu}$ gebildete Determinante mit ω bezeichnen, ferner seien die Größen $\omega_{\mu\nu}$ durch folgende Gleichungen gegeben:

$$(1)\quad \begin{cases} \sum_i \omega_{\mu i} \cdot \omega^{i\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}, \\ \text{wo} \\ \delta^{\mu}_{\mu} = 1 \text{ und } \delta^{\nu}_{\mu} = 0, \ \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Endlich führe ich noch ein:

1) G. Mie, Physik. Zeitschr. 18. S. 551. 574. 596. 1917.

$$(2)\quad \begin{cases} g_{\mu\nu} = \sqrt{\omega}\cdot\omega_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} = \dfrac{\omega^{\mu\nu}}{\sqrt{\omega}}, \end{cases}$$

so daß also auch

$$\sum g_{\mu i}\cdot g^{i\nu} = \delta_\mu^\nu.^{1})$$

Ein Raum-Zeitelement, das im gravitationsfreien Gebiet die Form einer vierdimensionalen Kugel vom Radius 1 hat, bekommt durch den Einfluß des Gravitationspotentials $\omega^{\mu\nu}$ die Form eines Ellipsoides, dessen Gleichung lautet:

$$(3)\quad \begin{cases} g_{11}\cdot\xi_1^2 + g_{22}\cdot\xi_2^2 + g_{33}\cdot\xi_3^2 + g_{44}\cdot\xi_4^2 + 2g_{23}\cdot\xi_2\xi_3 \\ \quad + 2g_{31}\cdot\xi_3\xi_1 + 2g_{12}\cdot\xi_1\xi_2 + 2g_{14}\cdot\xi_1\xi_4 \\ \quad + 2g_{24}\cdot\xi_2\xi_4 + 2g_{34}\cdot\xi_3\xi_4 = \pm 1. \end{cases}$$

Das Vorzeichen ist, je nachdem es sich um raumartige oder um zeitartige Radienvektoren handelt, als + oder als − zu wählen. Im gravitationsfreien Gebiet nimmt das Gravitationspotential den skalaren Wert 1 an, $\omega^{\mu\nu} = \delta_\mu^\nu$, entsprechend ist dann auch $g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\nu$.

Sollen in einem Gravitationsfeld Längen und Zeiten bestimmt werden, so muß man an den mit den deformierten Atomen direkt gemessenen Werten nach Maßgabe des Gravitationspotentials an der betreffenden Stelle erst noch Korrekturen anbringen. Man muß also zur Bestimmung der richtigen Werte von Längen und Zeiten das Gravitationspotential schon haben. Dazu aber muß man ein Koordinatensystem besitzen, denn das Potential kann nur als Funktion der Raum-Zeitkoordinaten gegeben sein. Da man nun dieses Koordinatensystem nicht durch praktisch-geometrische Messungen, die sich auf die Annahme unveränderlicher Atome stützen, bekommen kann, so muß man sich fürs erste mit einer willkürlichen Numerierung der Raum-Zeitpunkte begnügen. Um ein für die physikalischen Anwendungen brauchbares Koordinatennetz zu ge-

1) Da ich im folgenden öfters das Buch von H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, zitiere, sei hier gleich bemerkt, daß meine $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ das *umgekehrte* Vorzeichen haben, wie die entsprechend bezeichneten Größen bei Weyl. Ferner ist in diesem Buch, wie auch in den Einsteinschen Veröffentlichungen die Determinante der $g_{\mu\nu}$ mit g bezeichnet, es ist leicht zu sehen, daß $\omega = g$.

winnen, geht man am besten von der fundamentalen Tatsache aus, daß das Tensorpotential $\omega^{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes auch in den stärksten Feldern, die in der Wirklichkeit vorkommen, nur um ganz winzig kleine Beträge von dem skalaren Wert 1 abweicht. Es sind also auch die vier Werte g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44} von der 1, und die $g_{\mu\nu}$, $\mu \neq \nu$, von der 0 praktisch kaum zu unterscheiden. Wir legen nun durch einen geeignet gewählten Koordinatenanfang vier aufeinander senkrechte Koordinatenachsen, indem wir die Methoden der praktischen Geometrie, die auf der Annahme der Unveränderlichkeit der Atome beruhen, zur Konstruktion der Geraden und der senkrechten Winkel benutzen. Die so konstruierten Geraden und Winkel werden wir mit Einstein als die natürlichen Geraden und Winkel bezeichnen. Die Konstruktionsmethoden sind für *räumliche* Geraden jedem, der einmal geometrisch gezeichnet hat, so geläufig, daß ich sie hier wohl nicht zu erörtern brauche. Eine *zeitliche* natürliche Gerade wird von dem Schwerpunkt eines materiellen Körpers beschrieben, wenn auf ihn keine Kräfte wirken. Ruht der Punkt in dem Koordinatenanfang, so beschreibt er eine zeitliche Gerade, die auf den drei zur Zeit $t = 0$ konstruierten räumlichen Koordinatenachsen senkrecht steht. Wir denken uns nun weiter die Koordinatenachsen in lauter „natürlich" gleiche Teile geteilt, beispielsweise die drei räumlichen Achsen in Zentimeter, die zeitliche Achse in die entsprechende Zeiteinheit: $\frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$ Sek. Wir können uns diese Teilung immer so fein denken, daß in dem kleinen vierdimensionalen Einheitswürfel am Koordinatenanfang die Geometrie auch mit den feinsten jeweils praktisch zur Verfügung stehenden Mitteln von der Euklidischen bzw. Minkowskischen Geometrie nicht zu unterscheiden ist. Schreitet die Verfeinerung der Meßmethoden fort, so macht man die Teilung entsprechend feiner, so daß unsere Bedingung für den Würfel im Koordinatenanfang immer erfüllt bleibt. Wir wollen nun zunächst die beiden Koordinatenachsen 1 und 2 betrachten. In der Nähe des Koordinatenanfanges bestimmen sie eine Ebene, in welcher die eine quadratische Seitenfläche des Würfels liegt. Wir verlängern die beiden anderen Seiten dieses Quadrates zu beliebig langen, natürlichen Geraden 1′ und 2′ und bringen auf diesen beiden zu den Achsen 1 und 2 „parallel" laufenden Geraden eine ganz gleiche Teilung an, wie auf den Achsen

selber. Legen wir durch je zwei entsprechende Punkte von 1 und 1′ und ebenso von 2 und 2′ immer je eine natürliche Gerade, so bekommen wir eine Art ebenes Koordinatennetz.[1]) Jedoch wird sich in etwas größeren Entfernungen vom Koordinatenanfang der Einfluß der Deformationen durch das Gravitationsfeld in der Weise bemerkbar machen, daß sich die Netzfäden in den Netzknoten nicht richtig schneiden, sondern nur dicht aneinander vorbeikreuzen. Da das Gravitationspotential nur sehr wenig von dem skalaren Wert 1 verschieden ist, so sind die Mängel des unter der Annahme unveränderlicher Atome konstruierten Netzes auch in weiten Gebieten des Raumes nur sehr klein. Man denke sich nun an jedem der etwas mangelhaften Netzknoten einen Punkt zwischen den beiden sich kreuzenden Geraden, an welchem beide sehr dicht vorbeigehen, und betrachte diesen mit einer gewissen Willkürlichkeit gewählten Punkt als den eigentlichen Netzknoten. Die so festgelegten Netzknoten definieren dann zusammen, wenn man das Netz unendlich dicht macht, die Koordinatenebene (1. 2.). Wir wollen die wirklich durch die Netzknoten hindurchlaufenden Linien als die „richtigen" korrigierten Koordinatengeraden auffassen im Gegensatz zu den unkorrigierten „natürlichen Geraden". In derselben Weise konstruieren wir mit ähnlichen Willkürlichkeiten Koordinatenebenen (1. 3.) und (2. 3.) mit Koordinatennetzen darin, ferner drei sehr benachbarte Ebenen (1′ 2′) sowie (1′ 3′) und (2′ 3′), welche in der Nähe des Koordinatenanfanges in die entsprechenden Seitenflächen des kleinen vierdimensionalen Einheitswürfels übergehen. Auch in diesen drei sehr benachbarten Ebenen denken wir uns Koordinatennetze ausgeführt. Legen wir schließlich durch je zwei entsprechende Punkte der Ebenen (1. 2.) und (1′ 2′), ebenso (1. 3.) und (1′ 3′), endlich auch (2. 3.) und (2′ 3′), je eine natürliche Gerade, so bekommen wie ein dreidimensionales Koordinatennetz, welches aber denselben Mangel

1) Ich beschränke mich in dieser Untersuchung der Einfachheit halber auf den Fall, daß der leere Raum an sich euklidisch ist. Bekanntlich hat Einstein seine Theorie in der Abhandlung „Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie"(Ber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin, Jahrgang 1917, S. 142) auf den Fall ausgedehnt, daß der dreidimensionale leere Raum sphärisch ist. Die Übertragung meiner Betrachtungen auf diesen Fall bietet keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten.

richtiger Netzknoten aufweist, wie das aus natürlichen Geraden vorhin konstruierte zweidimensionale Netz. Die natürlichen Geraden des dreidimensionalen Netzes schneiden sich wenigstens in größeren Entfernungen von den Achsen nicht mehr genau in Netzknoten, sondern sie kreuzen nur an den Knotenstellen dicht aneinander vorbei. Man wählt nun wieder mit einiger Willkür an jeder Knotenstelle einen Punkt, an welchem die drei Koordinatenlinien sehr dicht vorbeigehen, als den eigentlichen Netzknoten, legt durch das so bestimmte System von Netzknoten Linien, die man im Gegensatz zu den natürlichen Geraden als die richtigen korrigierten Geraden des Koordinatennetzes zu bezeichnen hat. Macht man die Maschen des Netzes unendlich klein, so bilden die gewählten Netzknotenpunkte die dreidimensionale Koordinatenebene (1. 2. 3.). Genau ebenso kann man die anderen dreidimensionalen Ebenen, nämlich (2. 3. 4.), ferner (3. 1. 4.) und (1. 2. 4.) mit ihrem ganzen Koordinatennetz konstruieren. Es ist leicht zu sehen, wie man von da aus weiter zu einem vierdimensionalen Koordinatennetz kommt, in welchem überall in einem ziemlich weiten Bereich um den Koordinatenanfang herum, die korrigierten geraden Koordinatenlinien nur wenig von natürlichen Geraden abweichen, in welchem also auch die natürlichen Geraden an den Netzknoten überall sehr nahe vorbeikreuzen.

Hat man auf diese Weise, nicht ohne einige Willkürlichkeit, ein Koordinatennetz konstruiert, so kann man weiter so verfahren, daß man die Deformationen der Atome und der Atomvorgänge bestimmt, indem man die gewählten Koordinatenlinien als die richtigen Geraden betrachtet. Die Abweichungen der natürlichen unkorrigierten Geraden von ihnen geben die Möglichkeit, überall den Deformationstensor, dessen Komponenten ich $g_{\mu\nu}$ nennen will, zu berechnen. Für die Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) einer natürlichen Geraden bestehen nämlich die vier Differentialgleichungen[1]):

$$\frac{d^2 x_i}{dp^2} + \sum_{h,k} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{dp} \cdot \frac{dx_k}{dp} = 0, \tag{4}$$

wo p ein den Punkten der Kurve zugeordneter Parameter ist, z. B. die Bogenlänge von einem bestimmten Kurvenpunkt an,

1) H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, S. 102.

wo ferner die $\left\{\begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix}\right\}$ die Christoffelschen Symbole[1]) bedeuten:

$$\left\{\begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\sum_j g^{ij}\cdot\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h}-\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_j}\right). \tag{5}$$

Im folgenden werde ich mich in allen Formeln, die ich gelegentlich noch brauche, der von Einstein eingeführten einfacheren Schreibweise bedienen, in welcher die Summenzeichen einfach weggelassen werden. Es soll also ein für allemal festgesetzt sein, daß ein Ausdruck, in welchem ein Indexzeichen doppelt vorkommt, über diesen Index von 1 bis 4 zu summieren ist. Nach dieser Schreibweise sehen die Gleichungen (4) und (5) folgendermaßen aus:

$$\frac{d^2x_i}{dp^2}+\left\{\begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix}\right\}\cdot\frac{dx_h}{dp}\cdot\frac{dx_k}{dp}=0. \tag{4'}$$

$$\left\{\begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}g^{ij}\cdot\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h}-\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_j}\right). \tag{5'}$$

Um noch ein Beispiel zu bringen, sei angeführt:

$$\left\{\begin{matrix} \mu\,r \\ r \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \mu\,1 \\ 1 \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} \mu\,2 \\ 2 \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} \mu\,3 \\ 3 \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} \mu\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\}.$$

In den Formeln (4) und (5) bedeuten, um es noch einmal deutlich hervorzuheben, die $g_{\mu\nu}$ die Komponenten des Tensors der Deformation der Atome und der Atomvorgänge in bezug auf das von uns konstruierte und als geradlinig-orthogonal angenommene Koordinatensystem, die $g^{\mu\nu}$ sind Funktionen der $g_{\mu\nu}$, die sich aus den Gleichungen

$$g_{i\mu}\cdot g^{i\nu}=\delta^{\nu}_{\mu}$$

berechnen lassen. Wir wollen nun sehen, wie man die Werte $g_{\mu\nu}$ finden kann. Da die natürlichen Geraden uns empirisch gegeben sind, so sind auch die Differentialquotienten dx_i/dp und d^2x_i/dp^2 durch Messungen zu ermitteln, und die Gleichungen (4) geben uns, wenn wir eine bestimmte natürliche Gerade herausgreifen, vier Differentialgleichungen erster Ordnung für die gesuchten Tensorkomponenten $g_{\mu\nu}$ mit empirisch bestimmten Koeffizienten. Gehört die herausgegriffene Gerade zu einer Schar von Geraden, die Raum und Zeit lückenlos ausfüllen, etwa zu der Schar aller natürlichen Ge-

1) H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, S. 98.

raden, die auf einer dreidimensionalen Koordinatenebene senkrecht stehen, so bekommt man die Koeffizienten der Differentialgleichungen (4) als Funktionen der Koordinaten, die man aus den Ergebnissen der praktischen Messungen bestimmen kann. Wenn man in derselben Weise andere Scharen von natürlichen unkorrigierten Geraden benutzt, so bekommt man andere Differentialgleichungen für die $g_{\mu\nu}$, und man kann sich so immer eine genügende Zahl von Gleichungen verschaffen, um schließlich die $g_{\mu\nu}$ vollständig als Funktionen der (x_1, x_2, x_3, x_4) zu gewinnen. Wie man diese Berechnung des Deformationstensors $g_{\mu\nu}$ wirklich durchführen kann, werden wir weiter unten an einem einfachen Beispiel sehen.

Aus den so erhaltenen Werten $g_{\mu\nu}$ kann man nun aber ohne weiteres nach (1) und (2) das Gravitationspotential berechnen:

$$\omega^{ik} \cdot g_{ih} = \sqrt{g} \cdot \delta_h^k.$$

Denn bei Annahme dieses Gravitationspotentials sind zunächst einmal die Deformationen der von dem Gravitationsfeld erfüllten Raum-Zeitgebiete gerade die, welche die Einsteinsche Gravitationstheorie verlangt. Außerdem aber erfüllen die $\omega^{\mu\nu}$ auch die Grundgleichungen des Gravitationsfeldes, immer vorausgesetzt natürlich, daß die Einsteinsche Gravitationstheorie zutrifft, denn nach dieser Theorie müssen die Abweichungen der Geometrie der natürlichen Geraden von der Minkowskischen Geometrie folgendermaßen mit der Anwesenheit schwerer Körper verknüpft sein: Man berechne 40 Größen $\mathfrak{k}^{\alpha}_{\mu\nu}$, die wir späterhin als die 40 Komponenten des Gravitationsfeldes bezeichnen werden, nach den Formeln:

$$(6) \qquad \mathfrak{k}^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\mu\,\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} - \frac{1}{4}\delta^{\alpha}_{\nu} \cdot \left\{\begin{matrix}\mu\,r\\ r\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\mu} \cdot \left\{\begin{matrix}\nu\,r\\ r\end{matrix}\right\},$$

wo die Christoffelschen Symbole nach (5) zu berechnen sind, dann ist:

$$(7) \qquad \frac{\partial \mathfrak{k}^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} = -h_{\mu\nu},$$

wo $h_{\mu\nu}$ die $\mu\nu$-Komponente des Tensors „Dichtigkeit der schweren Masse" bedeutet. Diese Dichtigkeit der schweren Masse kann man aus der Weltfunktion H des gesamten Ätherzustandes an der betreffenden Stelle berechnen als:

$$(8) \qquad h_{\mu\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \omega^{\mu\nu}}.$$

Das von uns ziemlich willkürlich angenommene Koordinatensystem ist also für die Physik sofort brauchbar, insofern in ihm die Grundgleichungen der Physik die einfachste Form annehmen, die sie haben können. Denn auch die Gleichungen für das elektromagnetische Feld haben in ihm die bekannte einfache Form. Es ist eben die charakteristische Eigentümlichkeit der Einsteinschen Theorie, daß die Grundgleichungen für jedes ganz beliebig gewählte Koordinatensystem ihre Form unverändert behalten. Oder mit anderen Worten: Die Grundgleichungen der Physik sind, wenn man das Gravitationspotential in der eben beschriebenen Weise definiert, für jede beliebige Koordinatentransformation invariant.

2. Danach könnte es so scheinen, als ob jedes beliebige Koordinatensystem für Raum und Zeit völlig gleichberechtigt wäre. Wir haben aber schon im vorhergehenden eine wesentliche Beschränkung eingeführt, deren Notwendigkeit jeder ohne weiteres zugeben wird, indem wir verlangten, daß die korrigierten Geraden des anzunehmenden Koordinatensystems in einem weiten Gebiet um den Nullpunkt herum von den natürlichen Geraden nur äußerst wenig abweichen dürfen. Würde man diese Beschränkung nicht machen, so würde man zu solchen physikalischen Monstra geführt werden, wie ich in meinen Göttinger Vorträgen[1]) eines in dem sich ohne alle reelle Ursachen schlängelnden Stabe geschildert habe, oder es würden Wellen vorkommen können, die sich, ohne Energie zu übertragen, durch den Raum fortpflanzen[2]), dergleichen Unsinnigkeiten kann es noch mehr geben. Wir müssen das Koordinatensystem so wählen, daß auch die allerwinzigsten Spuren solcher physikalischer Sinnlosigkeiten ausgeschlossen werden.

Wie notwendig für die Physik die Wahl eines in dieser Beziehung einwandfreien Koordinatensystems ist, erkennt man besonders gut an einem einfachen Beispiel, an welchem ich zugleich das bisher Gesagte erläutern will, nämlich dem Gravitationsfeld einer im Raume ruhenden Kugel.

Als Koordinatenanfang wähle ich den Kugelmittelpunkt O. Dieser Punkt liefert, wenn man sich ihn im Ablauf der Zeit

1) G. Mie, Physik. Zeitschr. 18. S. 599. 1917.

2) A. Einstein, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin 1916. S. 696.

vorstellt, eine zeitartige Gerade, welche wir als Zeitachse wählen. Außerdem konstruiere ich in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ nach den Methoden der praktischen Geometrie drei aufeinander senkrechte Gerade durch O, welche die x-, y- und z-Achse darstellen. Weiter konstruiere ich in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ ein vollständiges Koordinatennetz. Erfahrungsgemäß wird die räumliche Geometrie von dem Gravitationsfeld so wenig beeinflußt, daß man auch mit den allerfeinsten Mitteln von der Unvollkommenheit der Netzknoten des natürlich konstruierten Koordinatensystems nichts bemerken kann. Das korrigierte Koordinatennetz in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ ist also praktisch völlig identisch mit dem unkorrigierten natürlichen Netz. Ich teile nun mit Hilfe einer Uhr die Zeitachse in lauter gleiche Abschnitte und lege durch jeden Teilpunkt einen Raum $t = \text{const.}$ mit einem Koordinatennetz, das genau so liegt, wie das im Raume $t = 0$. Ein Punkt $(x, y, z) = \text{const.}$ beschreibt dann eine zeitartige Linie, die überall von der Zeitachse gleichen Abstand hat, eine „Parallele" zur Zeitachse. Aber diese Parallele ist nicht identisch mit einer natürlichen Geraden. Beobachten wir einen freischwebenden schweren Massepunkt, der zur Zeit $t = 0$ im Punkte (x, y, z) ruht, so nähert er sich, wenn keine Kräfte (selbstverständlich außer der Schwerkraft) auf ihn wirken, wenn er also eine natürliche zeitartige Gerade beschreibt, nach dem Fallgesetz beschleunigt dem Kugelzentrum O. Wollen wir also das vierdimensionale Koordinatennetz nach den natürlichen Methoden konstruieren, so finden wir, daß in einiger Entfernung von der dreidimensionalen Ebene $t = 0$ die unkorrigierten zweiartigen Koordinatenlinien an den ihnen entsprechenden Netzknoten des raumartigen Netzes in der dreidimensionalen Ebene $t = \text{const.}$ vorbeikreuzen. Die zeitartigen natürlichen Koordinatenlinien werden von solchen schweren Punkten beschrieben, die bis zur Zeit $t = 0$ aufwärts steigen, im Punkte $t = 0$ ihre größte Höhe erreichen, und von da an fallen. Die so definierten Zeitlinien stehen auf der dreidimensionalen Ebene $t = 0$ senkrecht, weil zur Zeit $t = 0$ der Punkt die Geschwindigkeit Null hat, d. h. die von ihm beschriebene zeitartige Linie keine raumartigen Komponenten hat. Zu den $t = 0$ unendlichen benachbarten Zeiten gehen diese zeitartigen Linien durch die entsprechenden

Netzknoten genau hindurch, wenn man von unendlich kleinen Abweichungen zweiter Ordnung absieht.

Daß die zeitartigen Linien gegenüber den raumartigen Linien eine besondere Rolle spielen, liegt an der Konstitution der Welt, wenn man sie vierdimensional betrachtet. Die materiellen Körper bilden in der Raum-Zeit massive Zylinder, die sich in zeitartiger Richtung beiderseits ins Unendliche erstrecken, während ihre raumartigen Querschnitte (die von den Körpern erfüllten dreidimensionalen Raumgebiete) verhältnismäßig sehr eng begrenzt sind. Man muß dabei beachten, daß eine Zeitstrecke von nur 1 Sekunde Länge gleich zu setzen ist einer raumartigen Strecke von 300000 km. Danach ist es leicht zu verstehen, daß an zeitlichen Linien, die in unbegrenzter Ausdehnung nahe an dem schweren Körper verlaufen, die Abweichungen der natürlichen Geometrie von der Minkowskischen Geometrie viel eher zu beobachten sind, als an raumartigen Linien, die nur über eine kurze Strecke dem Gravitationszentrum nahe sind und im allgemeinen in fast gravitationsfreien Gebieten verlaufen.

Wollte man nun einfach nach der oben gegebenen Anweisung zur Konstruktion des vierdimensionalen Koordinatennetzes verfahren, so hätte man als Netzknoten irgendwelche Punkte zu wählen, die zwischen den Punkten, wo sich die raumartigen natürlichen Geraden ungefähr schneiden, und zwischen der daran vorbeikreuzenden zeitartigen natürlichen Geraden liegen. So willkürlich darf man nun aber in der Physik nicht verfahren. Man *muß* vielmehr als korrigierte zeitartige Geraden die vorhin als Parallelkurven zur Zeitachse definierten Linien wählen, die überall durch entsprechende Netzknoten der durch die Punkte der Zeitachse hindurchgelegten dreidimensionalen ebenen Koordinatennetze gehen. Das heißt mit anderen Worten, man *muß* die Punkte der schweren Kugel selbst und alle Punkte, die, natürlich gemessen, relativ zu ihr ruhen, als ruhend ansehen. Wollte man das Koordinatennetz anders konstruieren, so würden sich die Punkte der Kugel selber bewegen, ohne daß diese Bewegung eine andere Ursache hätte, als die Wahl des Koordinatennetzes. Diese Wahl des Koordinatennetzes verstieße gegen den obersten Grundsatz der Vernunft, keine anderen Veränderungen in der Welt und im Weltgeschehen anzunehmen, als solche, die durch den objektiven Tatbestand

unbedingt notwendig begründet sind. Diesen Grundsatz nennt Kant die Maxime der Vernunft. Sie ist es, die uns zwingt, den ohne reelle Ursache sich schlängelnden Stab und die Gravitationswellen ohne Energieübertragung zu verwerfen. Ebenso zwingt sie uns, ein Koordinatennetz, in welchem sich die Punkte unserer Kugel noch bewegen, als „unvernünftig" zu verwerfen.

3. Das Koordinatennetz im Felde einer ruhenden schweren Kugel ist danach schon so weit festgelegt, daß wir „praktisch" keine Wahl mehr haben. In der Tat sind denn auch praktisch im Felde der Erde Ort und Zeit überall ganz eindeutig zu definieren. Ich will nun zeigen, wie man das Gravitationspotential aus den Abweichungen der natürlichen von den vernünftig korrigierten Zeitgeraden berechnen kann. Eine vernünftig korrigierte Zeitgerade beschreibt ein Punkt $(x_0\, y_0\, z_0)$, der sich relativ zur Kugel immer an derselben Stelle befindet. Dieser Punkt $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ sei der Kulminationspunkt eines senkrecht aufwärts geworfenen Massenteilchens, welches sich zur Zeit t im Punkte $(x,\ y,\ z)$ befinde, zur Zeit $t = 0$ gerade $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ erreiche und dann wieder frei herunterfalle. Dieses Massenteilchen beschreibt eine natürliche Zeitgerade, welche die vernünftige Gerade in dem Punkt $(x_0,\ y_0,\ z_0,\ 0)$ berührt. In einem unendlich benachbarten Punkt $(x_0,\ y_0,\ z_0,\ i\,dt)$ hat die natürliche Zeitgerade von der vernünftigen Geraden eine Abweichung, die unendlich klein von zweiter Ordnung ist, wir haben demnach an dieser Stelle in die Gleichung (4) einzusetzen:

$$d\,x_1 = d\,x_2 = d\,x_3 = 0, \quad d\,x_4 = i \cdot d\,t.$$

Wir bekommen so für das Gravitationspotential die Gleichungen:

$$d^2x = \left\{\begin{matrix}44\\1\end{matrix}\right\} \cdot dt^2, \quad d^2y = \left\{\begin{matrix}44\\2\end{matrix}\right\} \cdot dt^2, \quad d^2z = \left\{\begin{matrix}44\\3\end{matrix}\right\} \cdot dt^2,$$

$$d^2t = \left\{\begin{matrix}44\\4\end{matrix}\right\} \cdot dt^2.$$

Beachtet man nun, daß in außerordentlich guter Näherung $g^{ij} = \delta^j_i$, daß ferner alle Differentialquotienten nach $x_4 = i\,t$ Null sind, so ergibt sich:

$$\left\{\begin{matrix}44\\1\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial x}, \quad \left\{\begin{matrix}44\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial y}, \quad \left\{\begin{matrix}44\\3\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{44}}{\partial z},$$

$$\left\{\begin{matrix}44\\4\end{matrix}\right\} = 0,$$

wenigstens mit äußerst guter Näherung. $-\frac{1}{2} g_{44}$ ist also das, was man das Newtonsche Gravitationspotential nennen könnte, sein Gradient ist die Fallbeschleunigung. Setzt man die in der Nähe einer schweren Kugel empirisch ermittelten Werte für d^2x/dt^2 usw. in die Gleichungen ein, so bekommt man für g_{44} Differentialgleichungen, durch welche es vollkommen bestimmt ist. Bekanntlich ergibt sich, jedenfalls mit einer Annäherung, welche die Beobachtungen durchweg mit ausreichender Genauigkeit wiedergibt:

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{r},$$

wo a eine Konstante ist, die von der schweren Masse der Kugel abhängt. Praktisch ist a/r immer winzig klein gegen 1. Die anderen Komponenten des Deformationstensors lassen sich aus praktischen physikalischen oder geometrischen Messungen noch nicht ermitteln, aber nur aus dem Grunde, weil die räumlichen Deformationen unmeßbar klein sind und deswegen die empirischen Unterlagen für die Aufstellung der zur Berechnung notwendigen Gleichungen zur Zeit noch fehlen. Sehen wir über diesen Mangel zunächst hinweg, so haben wir die auf S. 52 allgemein gestellte Aufgabe der Ermittelung der $g_{\mu\nu}$ in unserm Spezialfall wirklich gelöst.

4. Ich will jetzt annehmen, die Meßkunst sei so weit fortgeschritten, daß man die räumlichen Deformationen ebenfalls erkennen kann, daß man also feststellen kann, in welchen Entfernungen die natürlichen unkorrigierten räumlichen Koordinatenlinien an den Knotenstellen aneinander vorbeikreuzen, anstatt sich wirklich zu schneiden. Dann wäre die Wahl des Koordinatensystems nicht mehr so eindeutig, wie wir bisher angenommen haben. Denn dann müßte man erst noch über die Lage der „richtigen korrigierten" Netzknoten des räumlichen Koordinatensystems Annahmen machen, die bis zu einem gewissen Grade wieder willkürlich wären. Daß man aber auch hier nicht völlig willkürlich vorgehen kann, sieht man daraus, daß die Koordinatengeraden in der Umgebung eines Körpers, der als kugelsymmetrisch beschrieben werden *kann*, auch so definiert werden *müssen*, daß der Körper in dem Koordinatensystem wirklich kugelsymmetrisch ist. Denn im anderen Falle handelte man wieder gegen die oben ausgesprochene Maxime unserer Vernunft, indem man lediglich durch die Wahl des Koordinaten-

systems eine Unsymmetrie bekäme, die gar nicht im objektiven Tatbestand begründet ist.

Es ist nun die Frage, ob dieser Grundsatz ausreicht, um, abgesehen natürlich von den immer erlaubten Lorentzschen Transformationen, ein einziges Koordinatensystem als das vernünftige oder das physikalisch ausgezeichnete Koordinatensystem festzulegen und damit die vernünftigen Geraden und die vernünftige Teilung der Geraden eindeutig zu definieren.

Es könnte auf den ersten Blick so scheinen, als ob das nicht der Fall wäre. Schwarzschild, der zuerst das Gravitationsfeld einer ruhenden kugelig-symmetrischen schweren Masse durch Integration der Einsteinschen Differentialgleichungen (7) des Schwerefeldes berechnete[1]), fand, daß auch bei Hinzuziehung der Annahmen, daß

1. alle im Problem vorkommenden Größen von x_4 unabhängig sind,
2. bei Annahme eines Polarkoordinatensystems alle Größen nur vom Radiusvektor abhängen,
3. das Potential in großen Entfernungen vom Gravitationszentrum in den skalaren Wert 1 ($g_{ik} = \delta_i^k$) übergeht,

doch immer noch Willkürlichkeiten bleiben, daß also durch diese Bedingungen immer das Koordinatensystem noch nicht festgelegt ist. Zunächst fügt Schwarzschild deswegen ohne besondere Begründung noch die weitere Annahme $g_{h4} = 0$, $h = 1, 2, 3$, hinzu, deren Bedeutung wir im folgenden einsehen werden. Dann bleibt immer noch eine willkürliche Konstante in der Lösung. So ergibt sich für die 4-4-Komponente:

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{\sqrt{r^3 + a^3}},$$

wo über a noch ganz willkürlich verfügt werden darf.[2]) Setzt man $a = 0$, so wird der Wert g_{44} mit dem oben von uns als sehr gute Annäherung gefundenen Wert

---

1) K. Schwarzschild, Ber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin 1916. S. 186.

2) Übrigens bekommt Schwarzschild diese spezielle Form der Funktion von r nur deswegen, weil er verlangt, daß die Determinante g konstant den Wert 1 habe. Läßt man diese durch nichts begründete Forderung fallen, so findet man für g_{44} eine ganz willkürliche Funktion von r, die nur der einen Beschränkung unterworfen ist, daß sie überall äußerst wenig von $1 - a/r$ abweicht.

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{r}.$$

identisch. Mit den praktischen Messungen sehr wohl vereinbar wäre es aber auch, wenn a nur eine Länge bedeutet, die gegen r sehr klein ist. Schwarzschild setzt beispielsweise $a = a$, was deswegen möglich ist, weil a die Dimension einer Länge hat und a/r praktisch immer äußerst klein gegen 1 ist. Dagegen rechnet Hilbert[1]) mit der Lösung $a = 0$, welche den Vorteil der größeren Einfachheit hat. Beide Lösungen unterscheiden sich also nur durch eine etwas verschiedene Wahl der richtigen Netzknoten, an denen die unkorrigierten natürlich konstruierten raumartigen Koordinatenlinien dicht vorbeikreuzen.

5. So ist die Sachlage denn im höchsten Grade unbefriedigend, da man gar nichts darüber weiß, nach welchem Prinzip denn eigentlich das Koordinatennetz, in welchem sich $a = a$, und das, in welchem sich $a = 0$ ergibt, gewählt ist.

Offenbar genügt es nicht, wenn man nur verlangt, daß das Koordinatensystem so gewählt wird, daß alle nicht im objektiven Tatbestand begründeten Unregelmäßigkeiten ausgeschlossen sind. Unsere Vernunft verlangt weiter noch, daß wir im Besitz eines einheitlichen Prinzips zur Konstruktion des Koordinatensystems sind, welches wir anwenden können, ohne von vorneherein zu wissen, welche Symmetrieeigenschaften das Gravitationsfeld etwa haben mag, und welches ganz von selber zu einem vernünftigen, durch den objektiven Tatbestand begründeten Weltbild führt.

Ein allgemeines Prinzip der Konstruktion von Koordinatennetzen, welches diese Bedingung erfüllt, habe ich in meinen Göttinger Vorträgen angegeben.[2]) Ich bin freilich nicht imstande zu beweisen, daß es das einzig mögliche brauchbare Konstruktionsprinzip sei. Es lautet folgendermaßen: Wenn man die natürlich konstruierten Geraden als kürzeste Verbindungen zweier ihrer Punkte auffaßt und wenn man die natürlich gewonnene Teilung von Längen und Zeiten, ohne sie zu korrigieren, als richtig ansieht, also auch überall mit konstanter Lichtgeschwindigkeit (gleich 1) rechnet, so kann

1) D. Hilbert, Nachr. d. Kgl. Ges. d. W. zu Göttingen, math.-phys. Klasse vom 23. Dezember 1916. S. 18.

2) G. Mie, Physik. Zeitschr. 18. S. 601. 1917.

man die vierdimensionale Raum-Zeit als ein geometrisches Gebilde auffassen, in welchem eine ganz allgemeine Riemannsche Geometrie an die Stelle der speziellen Minkowskischen Geometrie getreten ist. Es gibt nun einen allgemein gültigen Satz der Geometrie, nach welchem man ein n-dimensionales Gebilde, in welchem eine allgemeine Riemannsche Geometrie herrscht, auffassen kann als ein mehr oder weniger unregelmäßig gekrümmtes Gebilde, welches ganz in einem ebenen Raum von $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ Dimensionen enthalten ist. So kann man die Raum-Zeit mit ihrer durch die Anwesenheit schwerer Massen gestörten Geometrie — ich habe sie in meinen Göttinger Vorträgen als Hilbertsche Welt im Gegensatz zu der Minkowskischen Welt bezeichnet — auffassen als ein gekrümmtes vierdimensionales Gebilde, welches ganz in einem ebenen Raum von 10 Dimensionen enthalten ist. Und zwar müssen wir uns das Hilbertsche Kontinuum als ein Gebilde denken, welches in weiten Strecken fast genau mit einer vierdimensionalen Ebene zusammenfällt, in der die Minkowskische Geometrie gilt. Diese Ebene muß man sich durchzogen denken von vielen ziemlich scharfen Falten oder Rillen, die in zeitartigen Richtungen beiderseits ins Unendliche laufen. Die Falten stellen die Weltröhren der materiellen Teilchen dar, in der Nähe der Falten zeigt das Hilbertsche Kontinuum Abweichungen von der Ebenheit, welche sich als das Gravitationsfeld der Teilchen bemerkbar machen. Wir wollen nun eine vierdimensionale Ebene konstruieren, welche mit den großen ebenen Gebieten des Hilbertschen Kontinuums, die unendlich weit von den Weltröhren der Teilchen entfernt sind, zusammenfällt, und wir wollen ferner in diese vierdimensionale Ebene, welche wir die Koordinatenebene oder auch die physikalische Welt nennen, die Hilbertsche Welt Punkt für Punkt senkrecht hineinprojizieren. Wenn wir dann dieses Abbild der Hilbertschen Welt beschreiben, so beschreiben wir die uns objektiv gegebene Welt jedenfalls richtig. Die Geraden in der Koordinatenebene wollen wir als die vernünftigen Geraden ansehen und ihre Teilung als die vernünftige Teilung. In der Koordinatenebene ist das Koordinatennetz ohne weiteres bis auf die Lorentzschen Transformationen eindeutig definiert und zugleich liefert uns die Projektion in die Koordinatenebene ein vernünftiges Bild der Welt, welches vollkommen auf den ob-

jektiven Tatbestand begründet ist und keine anderen örtlichen oder zeitlichen Unterschiede aufweist, als die objektiv vorhandenen.

Benutzen wir die so definierten Koordinaten zur Numerierung der Raum-Zeitpunkte an Stelle der vorhin mehr oder weniger willkürlich gewählten x_1, x_2, x_3, x_4, so müssen zwischen den $g_{\mu\nu}$ vier Bedingungsgleichungen bestehen, durch welche die besondere Wahl des Koordinatensystems ausgedrückt wird. Die Willkür in der Wahl der Numerierung der Raum-Zeitpunkte nach der Einsteinschen Gravitationstheorie bringt es mit sich, daß vier von den physikalischen Grundgleichungen sich aus den übrigen ergeben.[1]) Die Zahl der selbständigen Gleichungen ist also um vier kleiner als die Zahl der selbständigen Zustandsgrößen, wenn man keine Vorschrift über die Wahl des Koordinatensystems macht. Bei unserer bestimmten Wahl des Koordinatensystems werden die vier fehlenden Grundgleichungen ersetzt durch die vier Bedingungen, welche die Festlegung des Koordinatensystems mit sich bringt. Wahrscheinlich ist es sehr schwer, diese vier Bedingungen allgemein zu formulieren und mit ihnen zu arbeiten. Ich will nun zeigen, daß man das Problem des Gravitationsfeldes einer schweren Kugel lösen kann, ohne die vier Bedingungen explizite zu kennen.

6. Es seien die 10 Koordinaten eines Punktes des Hilbertschen Kontinuums (x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6), davon seien die vier x die Koordinaten in der „Koordinatenebene" und die sechs u die Projektionen des Radiusvektors auf die sechs zur Koordinatenebene senkrechten Achsen. Die Gleichungen der „physikalischen Welt" sind also:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_6 = 0.$$

Das Hilbertsche Kontinuum habe die Gleichungen:

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \ldots, \quad u_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Wir wollen das Problem zunächst einschränken auf den Fall der Statik. Dann muß jeder Schnitt $x_4 = \text{const.}$ aus dem Hilbertschen Kontinuum genau dasselbe dreidimensionale Gebilde ausschneiden, ich will es kurz „die dreidimensionale Welt"

1) D. Hilbert, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-physikal. Klasse. 20. November 1915. Theorem I. S. 3.

nennen. Keineswegs müssen die Gleichungen des Hilbertschen Kontinuums von x_4 unabhängig sein, aber sie müssen für verschiedene Werte $x_4 = a$ und $x_4 = b$ kongruente Schnitte ergeben. Bezeichnen wir die u-Koordinaten eines Punktes (x_1, x_2, x_3, a) durch u, die des Punktes (x_1, x_2, x_3, b) durch u', so müssen sich die u' aus den u durch eine orthogonale Transformation ergeben:

$$u_1' = a_{11}\,u_1 + a_{12}\,u_2 + \ldots + a_{16}\,u_6$$
$$\ldots\ldots$$
$$u_6' = a_{61}\,u_1 + a_{62}\,u_2 + \ldots + a_{66}\,u_6\,.$$

Hier sind also die u Funktionen von (x_1, x_2, x_3, a), die $a_{\mu\nu}$ sind von den räumlichen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) unabhängig, hängen dafür aber außer von a auch noch von b ab. Wenn wir die Zeit x_4 als einen besonderen Parameter von den anderen Koordinaten aussondern, so können wir sagen: Im Falle des statischen Problems rotiert die dreidimensionale Welt als starres Gebilde um den euklidischen Raum ($u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\ldots$ $u_6 = 0$), der als Rotationsachse vollkommen in Ruhe bleibt,

Da im Falle eines statischen Problems das Verhalten des Hilbertschen Kontinuums für jeden Wert von x_4 das gleiche sein muß, so muß ferner die Rotationsgeschwindigkeit der dreidimensionalen Welt konstant sein. Um diese Bedingung mathematisch zu formulieren, beachten wir, daß man eine orthogonale Transformation in einem sechsdimensionalen Gebiet durch drei voneinander unabhängige Drehungen in drei aufeinander senkrechten Ebenen beschreiben kann. Eine solche dreifache Drehung läßt sich auffassen als schiefsymmetrischer Tensor mit 15 Komponenten, man könnte sagen als Flächenvektor, das genaue Analogon des sogenannten Sechservektors (Drehung in zwei aufeinander senkrechten Ebenen) im vierdimensionalen Gebiet. Die 15 voneinander unabhängigen Drehungskomponenten reichen ebensowohl zur Beschreibung der orthogonalen Transformation hin, wie die Transformationskoeffizienten $a_{\mu\nu}$ in den oben hingeschriebenen Transformationsformeln. Denn zufolge der Orthogonalitätsbedingungen sind von den $a_{\mu\nu}$ nur 15 voneinander unabhängig.

Ich betrachte nun die infinitesimale Drehung, welche der dreidimensionale Raum in der kleinen Zeit $d\,x_4$ macht. Das Koordinatensystem der u sei so gelegt, daß in dem Moment

$x_4 = 0$ die drei aufeinander senkrechten Koordinatenebenen (1, 2), (3, 4), (5, 6) gerade mit den drei Drehungsebenen zusammenfallen. Die drei Drehungswinkel seien:

$$\alpha_1 = a_1 \cdot x_4, \qquad \alpha_2 = a_2 \cdot x_4, \qquad \alpha_3 = a_3 \cdot x_4,$$

wo a_1, a_2, a_3 Konstante sind, also unabhängig von allen vier Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4). Die Transformationsformeln lauten nun:

$$\begin{aligned}
u_1' &= u_1 \cdot \cos\alpha_1 + u_2 \cdot \sin\alpha_1, \\
u_2' &= -u_1 \cdot \sin\alpha_1 + u_2 \cdot \cos\alpha_1, \\
u_3' &= u_3 \cdot \cos\alpha_2 + u_4 \cdot \sin\alpha_2, \\
u_4' &= -u_3 \cdot \sin\alpha_2 + u_4 \cdot \cos\alpha_2, \\
u_5' &= u_5 \cdot \cos\alpha_3 + u_6 \cdot \sin\alpha_3, \\
u_6' &= -u_5 \cdot \sin\alpha_3 + u_6 \cdot \cos\alpha_3.
\end{aligned}$$

Durch diese Formeln ist die Bedingung von der Konstanz der Rotationsgeschwindigkeiten wiedergegeben. Die Größen u_k hängen nur von x_1, x_2, x_3 ab, die Größen α_1, α_2, α_3 nur von x_4.

Wir sind nun imstande, den natürlich gemessenen Abstand ds zweier Punkte des Hilbertschen Kontinuums zu berechnen, von denen der eine durch das Wertesystem (x_1, x_2, x_3, x_4), der andere durch ($x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$, $x_4 + dx_4$) charakterisiert ist:

$$ds^2 = \sum dx_i^2 + \sum du_k^2.$$

Die Größen du_k berechnen sich aus den soeben hingeschriebenen Transformationsformeln, beispielsweise:

$$\begin{aligned}
du_1 &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \cos\alpha_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \cdot \sin\alpha_1\right) \cdot dx_i \\
&\quad - (u_1 \cdot \sin\alpha_1 - u_2 \cdot \cos\alpha_1) \cdot a_1 \cdot dx_4, \\
du_2 &= -\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \sin\alpha_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \cdot \cos\alpha_1\right) \cdot dx_i \\
&\quad - (u_1 \cdot \cos\alpha_1 + u_2 \cdot \sin\alpha_1) \cdot a_1 \cdot dx_4, \\
&\text{usw. } i = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte du_k in den Ausdruck für ds^2 ein, so sieht man leicht, daß die drei Größen α_1, α_2, α_3, welche x_4 enthalten, herausfallen, man bekommt also Koeffizienten, die nur von x_1, x_2, x_3 abhängen:

$$ds^2 = \sum dx_i^2 + \sum dx_i \cdot dx_k \cdot f_{ik}(x_1, x_2, x_3),$$
$$i, k = 1, 2, 3, 4,$$

wo die f_{ik} aus den u_k und ihren Ableitungen zu berechnen sind. Beispielsweise ist:

$$f_{44} = a_1^2 \cdot (u_1^2 + u_2^2) + a_2^2 \cdot (u_3^2 + u_4^2) + a_3^2 \cdot (u_5^2 + u_6^2).$$

7. Wir kommen jetzt zu dem Problem der ruhenden, kugelig-symmetrischen schweren Masse. Dieser Symmetrieforderung wird jedenfalls genügt durch die Bedingung, daß die dreidimensionale Welt, d.h. der Schnitt des Hilbertschen Kontinuums mit einer Ebene $x_4 = \text{const.}$, selber kugelig-symmetrisch sei, daß also die u_k nur von der Länge $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ des vom Symmetriezentrum ausgehenden Radiusvektors abhängen sollen. Man darf vermuten, daß diese Bedingung auch notwendig ist, daß sich also keine Abhängigkeit der u_k von den Winkelkoordinaten des Radiusvektors angeben läßt, bei welcher sich in dem Ausdruck für ds^2 die Winkelkoordinaten in ähnlicher Weise wegheben würden, wie vorhin die Zeitkoordinate x_4. Einen strengen Beweis vermag ich allerdings für die Notwendigkeit der Bedingung noch nicht zu geben. Wir werden aber sehen, daß der Ansatz, der auf ihrer Annahme beruht, zur Lösung des Problems führt, also zur Konstruktion eines Hilbertschen Kontinuums, das die Eigenschaften des Gravitationsfeldes einer Kugel richtig wiedergibt. Auch das spricht für die Notwendigkeit der Bedingung, weil andernfalls das Hilbertsche Kontinuum nicht eindeutig zu bestimmen wäre. Aus unserer Symmetriebedingung ergibt sich:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + f_1(r) \cdot dr^2 + 2 \cdot f_2(r) \cdot dr \cdot dx_4 + f_3(r) \cdot dx_4^2,$$

wo f_1, f_2, f_3 leicht aus den u_k (r) und ihren Ableitungen nach r zu berechnen sind.

Setzen wir ein:

$$r \cdot dr = x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + x_3 \cdot dx_3,$$

so bekommen wir für die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Deformationstensors die folgende Tabelle:

$$(9)\quad \begin{cases} 1+f_1\cdot\frac{x_1^2}{r^2}, & f_1\cdot\frac{x_1x_2}{r^2}, & f_1\cdot\frac{x_1x_3}{r^2}; & f_2\cdot\frac{x_1}{r}, \\ f_1\cdot\frac{x_1x_2}{r^2}, & 1+f_1\cdot\frac{x_2^2}{r^2}, & f_1\cdot\frac{x_2x_3}{r^2}; & f_2\cdot\frac{x_2}{r}, \\ f_1\cdot\frac{x_1x_3}{r^2}, & f_1\cdot\frac{x_2x_3}{r^2}, & 1+f_1\cdot\frac{x_3^2}{r^2}, & f_2\cdot\frac{x_3}{r}, \\ f_2\cdot\frac{x_1}{r}, & f_2\cdot\frac{x_2}{r}, & f_2\cdot\frac{x_3}{r}, & 1+f_3\,. \end{cases}$$

Die Determinante des Tensors $g_{\mu\nu}$, die wir wie oben (S. 48) mit g bezeichnen wollen, ergibt sich als:

$$(10)\qquad g=(1+f_1)\cdot(1+f_3)-f_2^2.$$

Ich will nun die Abkürzungen einführen:

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{f_1\cdot(1+f_3)-f_2^2}{(1+f_1)(1+f_3)-f_2^2}=F_1(r)\,, \\ \frac{f_2}{(1+f_1)(1+f_3)-f_2^2}=F_2(r)\,, \\ \frac{f_3\cdot(1+f_1)-f_2^2}{(1+f_1)(1+f_3)-f_2^2}=F_3(r)\,, \end{cases}$$

$$(11\,a)\quad 1-F_1=\frac{1+f_3}{g},\quad 1-F_3=\frac{1+f_1}{g},\quad F_2=\frac{f_2}{g}\,.$$

Dann ergeben sich für den Tensor $g^{\mu\nu}$, der durch die Gleichungen:

$$g_{\nu h}\cdot g^{\nu k}=\delta_h^k$$

definiert ist, die Ausdrücke:

$$(12)\quad \begin{cases} 1-F_1\cdot\frac{x_1^2}{r^2}, & -F_1\cdot\frac{x_1x_2}{r^2}, & -F_1\cdot\frac{x_1x_3}{r^2}, & -F_2\cdot\frac{x_1}{r}, \\ -F_1\cdot\frac{x_1x_2}{r^2}, & 1-F_1\cdot\frac{x_2^2}{r^2}, & -F_1\cdot\frac{x_2x_3}{r^2}, & -F_2\cdot\frac{x_2}{r}, \\ -F_1\cdot\frac{x_1x_3}{r^2}, & -F_1\cdot\frac{x_2x_3}{r^2}, & 1-F_1\cdot\frac{x_3^2}{r^2}, & -F_2\cdot\frac{x_3}{r}, \\ -F_2\cdot\frac{x_1}{r}, & -F_2\cdot\frac{x_2}{r}, & -F_2\cdot\frac{x_3}{r}, & 1-F_3\,. \end{cases}$$

Nach einer einfachen Rechnung erhält man für die Christoffelschen Ausdrücke (5) folgende Werte:

$$
(13)\quad
\begin{cases}
\left\{\begin{matrix} h\,k \\ \alpha \end{matrix}\right\} = \dfrac{x_\alpha}{r}\cdot\left[\delta_h^k\cdot\dfrac{F_1}{r}+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{x_h\cdot x_k}{r^2}\cdot\left(f_1'\cdot(1-F_1)\right.\right. \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \left.\left. -\,2\cdot f_2'\cdot F_2-\dfrac{2\cdot F_1}{r}\right)\right]. \\
\left\{\begin{matrix} h\,k \\ 4 \end{matrix}\right\} = \delta_h^k\cdot\dfrac{F_2}{r}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{x_h\cdot x_k}{r^2}\cdot\left(f_1'\cdot F_2-2\cdot f_2'\cdot(1-F_3)+\dfrac{2F_2}{r}\right). \\
\left\{\begin{matrix} h\,4 \\ \alpha \end{matrix}\right\} = -\,\dfrac{1}{2}\cdot F_2\cdot f_3'\cdot\dfrac{x_h}{r}\cdot\dfrac{x_\alpha}{r}, \\
\left\{\begin{matrix} h\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\} = \dfrac{1}{2}\cdot(1-F_3)\cdot f_3'\cdot\dfrac{x_h}{r}, \\
\left\{\begin{matrix} 4\,4 \\ \alpha \end{matrix}\right\} = -\,\dfrac{1}{2}\cdot(1-F_1)\cdot f_3'\cdot\dfrac{x_\alpha}{r}, \quad \left\{\begin{matrix} 4\,4 \\ 4 \end{matrix}\right\} = +\,\dfrac{1}{2}\cdot F_2\cdot f_3', \\
\qquad h,\ k,\ \alpha = 1,\ 2,\ 3.
\end{cases}
$$

In diesen und in den im folgenden noch vorkommenden Gleichungen soll durch den Strich die Differentiation nach r bezeichnet werden. Setzt man die Ausdrücke (6) für die vierzig Komponenten des Gravitationsfeldes $\mathfrak{k}_{\mu\nu}^{\alpha}$ ein, so findet man:

$$
2\cdot\frac{\partial\,\mathfrak{k}_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial\,x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial\,x_\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\,\nu\\ \alpha\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\,x_\mu}\left\{\begin{matrix}\nu\,\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right\} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\,x_\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\,\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right\},
$$
$$
\mu,\ \nu,\ \alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4.
$$

Hier ist:

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix}\mu\,\alpha\\ \alpha\end{matrix}\right\} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x_\mu}{r}\cdot(f_1'\cdot(1-F_1)+f_3'\cdot(1-F_3)-2\cdot f_2'\cdot F_2), \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{g'}{g}\cdot\frac{x_\mu}{r}, \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\ln g}{\partial\,x_\mu}.
\end{aligned}
$$

Eine kurze Rechnung ergibt schließlich:

$$
(14)\quad
\begin{cases}
2\cdot\dfrac{\partial\,\mathfrak{k}_{hk}^{\alpha}}{\partial\,x_\alpha} = \left(\delta_h^k-\dfrac{x_h\cdot x_k}{r^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{d}{dr}(r\cdot F_1)-\dfrac{1}{2r}\cdot\dfrac{g'}{g}\right) \\
\qquad\qquad -\,\dfrac{x_h\cdot x_k}{r^2}\cdot\dfrac{1}{2r^2}\cdot\left[\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{r^2\cdot f_3'}{g}\cdot(1+f_1)\right)-2r\cdot\dfrac{g'}{g}\right], \\
2\cdot\dfrac{\partial\,\mathfrak{k}_{h4}^{\alpha}}{\partial\,x_\alpha} = -\,\dfrac{x_h}{r}\cdot\dfrac{1}{2r^2}\cdot\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{r^2\cdot f_3'}{g}\cdot f_2\right), \\
2\cdot\dfrac{\partial\,\mathfrak{k}_{44}^{\alpha}}{\partial\,x_\alpha} = -\,\dfrac{1}{2r^2}\cdot\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{r^2\cdot f_3'}{g}\cdot(1+f_2)\right), \\
\qquad h,\ k = 1,\ 2,\ 3, \qquad \alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4.
\end{cases}
$$

Diese Differentialausdrücke hätte man in einem Raum, der völlig frei von schwerer Masse ist, gleich Null zu setzen. Indessen ist dabei zu bedenken, daß man in einem Raum, wo ein Gravitationsfeld vorhanden ist, zumindest die Energie des Gravitationsfeldes selber hat, und daß diese auch ihren Beitrag zu der schweren Masse liefert. Die Dichtigkeit der dem Gravitationsfeld zukommenden schweren Masse berechnet sich nach Formel (8), wenn man hier für H den auf die Gravitation entfallenden Anteil der Hamiltonschen Funktion der Welt einsetzt. Ich will diesen Anteil G nennen, dann ist in der Einsteinschen Theorie[1])

$$(15) \qquad G = \frac{1}{2} \cdot \omega^{\mu\nu} \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} \mu\,\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \alpha\,\beta \\ \beta \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu\,\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \nu\,\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right)$$

und

$$(16) \qquad h_{\mu\nu} = -\frac{\partial G}{\partial \omega^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} \mu\,\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \alpha\,\beta \\ \beta \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu\,\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \nu\,\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right).$$

Setzt man hier die Werte (13) ein, so erhält man:

$$(17) \quad \begin{cases} 2 \cdot h_{kl} = \left(\delta_k^l - \frac{x_k x_l}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{2r} \cdot \frac{g'}{g} \cdot F_1 \\ \qquad\qquad + \frac{x_k x_l}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{f_1' \cdot f_2'}{g} - \frac{1}{4} \cdot \frac{g' \cdot f_2' \cdot (1 + f_1)}{g^2} \right), \\ 2 \cdot h_{k4} = \frac{x_k}{r} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{f_2' \cdot f_3'}{g} - \frac{1}{4} \cdot \frac{g' \cdot f_2' \cdot f_3}{g^2} \right), \\ 2 \cdot h_{44} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_2'^2}{g} - \frac{1}{4} \cdot \frac{g' \cdot f_2' \cdot (1 + f_2)}{g^2}. \end{cases}$$

Die Gleichungen:

$$\frac{\partial t_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_\alpha} + h_{\mu\nu} = 0$$

ergeben vier Differentialgleichungen für die f_1, f_2, f_3:

$$\frac{1}{r^3} \cdot \frac{d}{dr}(r \cdot F_1) - \frac{1}{2r} \cdot \frac{g'}{g}(1 - F_1) = 0,$$

$$\frac{1}{r^3} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{r^3 \cdot f_2'}{g} \cdot (1 + f_1) \right) - \frac{f_2' \cdot f_1'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_2' \cdot g' \cdot (1 + f_1)}{g^2} - \frac{2 \cdot g'}{r \cdot g} = 0,$$

$$\frac{1}{r^3} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{r^3 \cdot f_2'}{g} \cdot f_3 \right) - \frac{f_2' \cdot f_3'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_2' \cdot g' \cdot f_3}{g^2} = 0,$$

$$\frac{1}{r^3} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{r^3 \cdot f_3'}{g} \cdot (1 + f_3) \right) - \frac{f_3' \cdot f_3'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_3' \cdot g' \cdot (1 + f_3)}{g^2} = 0;$$

1) H. Weyl, a. a. O., S. 189 u. S. 191. Unser G ist gleich $-\frac{1}{2}\mathfrak{H}$ bei Weyl, ferner $\omega^{\mu\nu} = -\sqrt{g} \cdot g^{\mu\nu}$ bei Weyl, vgl. die Fußnote auf S. 48.

oder nach einer einfachen Umformung der drei letzten Gleichungen:

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{r^2}\ \frac{d}{dr}(r\cdot F_1)-\frac{1}{2r}\cdot\frac{g'}{g}\cdot(1-F_1)=0, & \\ \frac{1+f_1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\cdot f_3'}{\sqrt{g}}\right)-\frac{2\cdot g'}{r\cdot g} & =0, \\ \frac{f_2}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\cdot f_3'}{\sqrt{g}}\right) & =0, \\ \frac{1+f_3}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\cdot f_3'}{\sqrt{g}}\right) & =0. \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen sind gleichwertig mit den folgenden drei Gleichungen:

$$(19)\quad \frac{dg}{dr}=0,\quad \frac{d}{dr}(r^2\cdot f_3')=0,\quad \frac{d}{dr}(r\cdot F_1)=0.$$

Mit Rücksicht darauf, daß f_1, f_2, f_3 im Unendlichen verschwinden, ergibt sich aus der ersten Gleichung (19):

$$(20)\qquad g=1.$$

Daraus folgt weiter, weil:

$$1-F_1=\frac{1+f_3}{g}=1+f_3,$$

$$F_1=-f_3.$$

Die beiden letzten Gleichungen (19) fallen demnach zusammen in die *eine* Gleichung:

$$\frac{d(r\cdot f_3)}{dr}=0,$$

deren Lösung ist:

$$(21)\qquad f_3=-\frac{a}{r},\quad g_{44}=1-\frac{a}{r},$$

wo die Integrationskonstante a sich aus der schweren Masse der Kugel berechnet, die nur noch mit einem von den Maßeinheiten abhängigen Faktor zu multiplizieren ist.

8. Zur Berechnung von f_1 und f_2 haben wir die einzige Gleichung:

$$(22)\qquad g=(1+f_1)\cdot(1+f_3)-f_2^2=1.$$

Die gewonnene Lösung enthält noch eine willkürliche Funktion. Die bisher gemachten Annahmen reichen also immer noch nicht ganz aus, um das Koordinatensystem ein-

deutig zu definieren. Woher diese Vieldeutigkeit rührt, erkennt man, wenn man unter $x_4 = \text{const.}$ nicht ein ebenes Kontinuum versteht, sondern einen auf der Koordinatenebene $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots u_6 = 0$ senkrecht stehenden Zylinder, dessen Spur in der Koordinatenebene ein dreidimensionales Kontinuum ist, das zwar rotationssymmetrisch in bezug auf die Achse $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, im übrigen aber ganz beliebig gekrümmt ist. Bei dieser Wahl des Koordinatensystems ergibt sich durch eine leichte geometrische Überlegung für irgend ein Linienelement in der Koordinatenebene die Form:

$$ds'^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + \varphi_1(r) \cdot dr^2 + 2\varphi_2(r) \cdot dr \cdot dx_4 .$$

Für die natürliche Länge eines Linienelementes ds im Hilbertschen Kontinuum bekommt man demnach aus:

$$ds^2 = ds'^2 + \sum du_k^2$$

genau dieselbe Form (9), welche wir bisher benutzt haben. In Formel (9) ist demnach noch nicht von der Bedingung Gebrauch gemacht, daß $x_4 = \text{const.}$ eine Ebene sein soll. Diese Bedingung können wir folgendermaßen formulieren: die Projektion des Hilbertschen Kontinuums in der Koordinatenebene muß zu $x_4 = \text{const.}$ beiderseits symmetrisch sein. Denn das ist dann und nur dann der Fall, wenn die $x_4 = \text{const.}$ ebene Kontinua sind. Es müssen also alle geodätischen Linien, die den Raum $x_4 = \text{const.}$ berühren, überhaupt ganz in seinem Inneren verlaufen, und alle geodätischen Linien, die senkrecht auf $x_4 = 0$ stehen, müssen für $+x_4$ und $-x_4$ genau gleich beschaffen sein. Wenn man die Gleichungen (4) also für raumartige Linien aufstellt, für welche in einem Punkt $dx_4 = 0$ ist, so muß sich auch überall $dx_4 = 0$ ergeben, das heißt: für diese Linien muß $d^2 x_4 = 0$ sein, oder:

$$\left\{ \begin{matrix} h\,k \\ 4 \end{matrix} \right\} \cdot dx_h \cdot dx_k = 0 .$$

Nach (13) ergibt sich:

$$\left\{ \begin{matrix} h\,k \\ 4 \end{matrix} \right\} \cdot dx_h \cdot dx_k = -\frac{1}{2} (f_1' \cdot F_2 - 2 \cdot f_2' \cdot (1 - F_3)) \cdot dr^2 .$$

Da $F_2 = f_2$, $1 - F_3 = 1 + f_1$, so muß also sein:

$$(1 + f_1) \cdot f_2' - \tfrac{1}{2} f_2 \cdot f_1' = 0. \tag{23}$$

Stellt man die Gleichungen (4) für zeitartige Linien auf, so müssen in den Gleichungen für die raumartigen Koordinaten die Glieder mit der ersten Potenz von dx_4 wegfallen, es muß also sein:

$$\left\{\begin{matrix} h\,4 \\ \alpha \end{matrix}\right\} \cdot dx_h = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

oder, da nach (18):

$$\left\{\begin{matrix} h\,4 \\ \alpha \end{matrix}\right\} \cdot dx_h = -\frac{1}{2} F_2 \cdot f_3' \cdot \frac{x_\alpha}{r} \cdot dr,$$

so muß sein:

$$f_2 \cdot f_3' = 0. \tag{24}$$

Die beiden Symmetriebedingungen (23) und (24) sind dann, und auch nur dann, erfüllt, wenn:

$$f_2(r) = 0. \tag{25}$$

Damit ist auch die letzte Willkürlichkeit beseitigt, das Koordinatensystem ist nunmehr eindeutig festgelegt. $f_1(r)$ berechnet sich aus $g = (1 + f_1) \cdot (1 + f_3) = 1$. Wir haben nun:

$$f_1 = \frac{\frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r}}, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = -\frac{a}{r}, \tag{26}$$

$$F_1 = \frac{a}{r}, \qquad F_2 = 0, \quad F_3 = -\frac{\frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r}}. \tag{27}$$

Vergleichen wir diese Formeln mit dem Schwarzschildschen Integral, so sehen wir, daß in unserem Koordinatensystem die willkürliche Konstante a zu Null bestimmt wird, es ist das der von Hilbert bevorzugte Wert.

9. Schwarzschild macht für den natürlich gemessenen Abstand ds zweier unendlich benachbarter Raum-Zeitpunkte den Ansatz[1]):

$$ds^2 = F \cdot dt^2 - G \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2) - H \cdot r^2 \cdot dr^2.$$

Vergleicht man hiermit unseren Ansatz auf Seite 65:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + f_1 \cdot dr^2 + 2f_2 \cdot dr \cdot dx_4 + f_3 \cdot dx_4^2,$$

1) K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin 1916. S. 191. Formel (6).

so findet man, abgesehen von der Wahl des Vorzeichens, völlige Übereinstimmung, wenn man setzt:

$$f_2 = 0,$$
$$H = \frac{f_1}{r^2}.$$
$$F = 1 + f_3.$$
$$G = 1.$$

Da sich bei Schwarzschild

$$G = \frac{\sqrt[3]{(r^3 + a^3)^2}}{r^2}$$

ergibt, so erkennt man, daß die Annahme $G = 1$ schon den Wert $a = 0$ involviert. Die Annahme $G = 1$ ergibt sich aber in meinem Ansatz deswegen mit Notwendigkeit, weil die Projektion der Verbindungslinie ds zweier Punkte des Hilbertschen Kontinuums, welche in dem Schnitt mit einer Ebene $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, ... $u_6 = c_6$ liegen, auf die Koordinatenebene $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ... $u_6 = 0$, denselben Wert ds haben muß, wie die Verbindungslinie selbst. Würden wir für die Projektion den Wert ds' annehmen, wo:

$$ds' = \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

so würde sich der Schwarzschildsche Ansatz ergeben. Wegen der Symmetrieverhältnisse schneidet die zur Koordinatenebene parallele Ebene $u_1 = c_1$, ... $u_6 = c_6$ aus der Hilbertschen Welt eine zweidimensionale Kugelfläche $r = \text{const.}$, $x_4 = \text{const.}$ aus: Man erkennt das sofort, wenn man setzt:

$$\sum du_k^2 = f_1 \cdot dr^2 + f_3 \cdot dx_4^2 = 0.$$

Um zu dem Schwarzschildschen Maß für die Projektion zu kommen, muß man den Wert des Radius dieser Kugel, dessen natürlich gemessene Länge ich mit Schwarzschild R nennen will, zu

$$r = \frac{R}{\sqrt{G}}$$

rechnen, denn dann ist

$$ds' = \frac{ds}{\sqrt{G}}.$$

Setzt man ein:

$$\sqrt{G} = \frac{\sqrt[3]{r^3 + \alpha^3}}{r},$$

so erhält man:

$$R = \sqrt[3]{r^3 + \alpha^3}$$

oder:

$$r = \sqrt[3]{R^3 - \alpha^3}.$$

Um zu dem Koordinatensystem zu kommen, welches der Schwarzschildschen Lösung zugrunde liegt, verfahren wir also zuerst genau nach dem von mir angegebenen Prinzip: wir projizieren das Hilbertsche Kontinuum senkrecht auf die Koordinatenebene $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ... $u_6 = 0$. Dann aber rechnen wir in der Koordinatenebene nicht mit den natürlichen Längen, sondern wir rechnen so, als ob ein Punkt, der vom Koordinatenanfang natürlich gemessen die raumartige Entfernung R hat, nur um $r = \sqrt[3]{R^3 - \alpha^3}$ von ihm entfernt sei.

Man muß also, um zu der Schwarzschildschen Lösung zu kommen, der Koordinatenebene rein willkürlich eine recht unvernünftige nichteuklidische Geometrie verleihen.

Übrigens kommt man zu einem Integral der Einsteinschen Differentialgleichungen auch dann, wenn man setzt $G = 1 + \varphi(r)$, wo $\varphi(r)$ eine ganz beliebige Funktion von r ist, deren Größe wir aber immer als äußerst klein gegen 1 ansehen wollen.[1])

Ergebnisse.

1. Nach der Einsteinschen Gravitationstheorie ist es unmöglich, in einem Gravitationsfeld die „natürlich" konstruierten raumartigen und zeitartigen Geraden zum Bau eines Koordinatensystems zu verwenden, weil sich die natürlichen Geraden im allgemeinen nicht in Netzknoten schneiden, sondern an den Knotenstellen vorbeikreuzen.

2. Wenn man eine beliebige Numerierung der Raum-Zeitpunkte annimmt, so ergeben sich nach dem Prinzip der allgemeinen Transformierbarkeit, welches der Einsteinschen

1) Vgl. S. 59, Fußnote 1.

Theorie zugrunde liegt, zwar stets die physikalischen Grundgleichungen in derselben einfachen Form, aber eine ungeeignete Wahl des Koordinatensystems kann es mit sich bringen, daß in ihm scheinbar physikalische Unterschiede, Bewegungsvorgänge oder auch Wellen auftreten, die nicht wirklich im objektiven Tatbestand begründet sind, sondern nur der Wahl des unvernünftigen Koordinatensystems ihr Dasein verdanken.

3. Es wird in dieser Arbeit ein Prinzip zur praktischen Ausführung eines stets vernünftigen Koordinatennetzes und damit zur praktischen Bestimmung von geraden Linien und ihrer Teilung angegeben, so daß man also niemals zu Widersprüchen mit der Forderung der Vernunft kommt, daß keinerlei zeitliche Veränderungen oder örtliche Unterschiede in der physikalischen Beschreibung der Welt vorkommen dürfen, die nicht wirklich im objektiven Tatbestand begründet sind.

4. Es wird gezeigt, daß bei dieser vernunftgemäßen Wahl des Koordinatennetzes das Gravitationsfeld einer kugelförmigen schweren Masse eindeutig bestimmt ist. Die willkürliche Konstante, oder die willkürliche Funktion, die in dem von Schwarzschild gefundenen Integral noch vorkommt, wird als Null bestimmt. Schon Hilbert hat die Null dem von Schwarzschild angenommenen positiven Wert vorgezogen, jedoch nur aus dem Grunde, weil der Ausdruck für das Gravitationspotential dadurch einfacher wird. Nach meiner Untersuchung kommt man notwendig zu diesem Integral, wenn man das Koordinatensystem vernünftig wählt.

5. Um zu der Schwarzschildschen oder überhaupt irgend einer anderen Lösung zu kommen, muß man der Wahl des Koordinatennetzes eine ganz unvernünftige nichteuklidische Geometrie zugrunde legen.

Halle a. S., Physik. Institut, d. 17. September 1919.

(Eingegangen 21. September 1919.)

3. *Zum Problem der Zustandsgleichung; von C. Dieterici.*

In der vorliegenden Arbeit kommt es mir zunächst darauf an, aus den Druckisothermen verschiedener Substanzen tatsächlich bestehende Gesetzmäßigkeiten hervorzuheben, welche bisher nicht oder nicht scharf genug in ihren Folgerungen für die Frage nach der Bildung der Zustandsgleichung bemerkt sind. Ich werde diese Folgerungen dann soweit verfolgen, wie es heute möglich ist; eine endgültige Lösung des Problems der Zustandsgleichung ist noch nicht erreichbar.

Das Beobachtungsmaterial, auf welches sich die folgende Untersuchung stützt, sind die Beobachtungen S. Youngs[1]) am Isopentan und diejenigen Amagats[2]) an Kohlensäure und Äthylen. Im späteren Verlauf der Arbeit werden noch die umfangreichen Beobachtungen S. Youngs[3]) über die Sättigungsdrucke und Volumina von Substanzen herangezogen.

§ 1. In Tab. 1[4]) ist die kritische Druckisotherme des Isopentans unter p wiedergegeben. Eine Aufzeichnung in $p\,v$-Blatt ergibt den bekannten Verlauf, der von großen Werten von p bei kleinem v stark abfällt, bei v_k einen Sattelpunkt hat, dann wieder erst langsam, dann schneller abnimmt, um schließlich sich dem Nullwert bei $v = \infty$ zu nähern.

Fragt man, wie bei T_k $\partial p/\partial v$ verlaufen muß, so ist aus Tab. 1 ersichtlich, daß $\partial p/\partial v$ in dem Volumenintervall

1) S. Young, Zeitschr. f. phys. Chem. **29.** S. 193—241. 1899.

2) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. (6) **29.** S. 68—136. 1893.

3) S. Young, Proc. Dublin Soc. **12.** S. 374—443. 1910.

4) In allen nachfolgenden Zahlenangaben ist die Gaskonstante pro Gramm

$$R = \frac{1{,}985}{M}\ \text{cal/°C}$$

gesetzt, wo M das Molekulargewicht ist. Das mechanische Wärmeäquivalent wird gleich 427,4 gm/cal. gesetzt. Die in mm Hg angegebenen Drucke sind durch Multiplikation mit 0,00003181 in cal/cm³ umgewandelt.

Tabelle 1.

Kritische Isothermen des Isopentans C_5H_{12} $M = 72{,}10$.

$T_k = 460{,}8$ °C. $R = 0{,}02753$ cal/°C $RT_k = 12{,}686$ cal $\frac{p_k v_k}{RT_k} = 3{,}735$.

v cm³	p cal/cm³	$\frac{\partial p}{\partial v}$ cal/cm⁶	$\frac{p}{v}$ cal/cm⁶	$\frac{pv}{RT_v}$	$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ cal/cm³ °C	$\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right)$ cal/cm³	$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v}$
2,4	1,5612		0,6505	0,2954	0,04042	17,064	10,930
2,5	1,2902	− 2,243	0,5161	0,2542	0,03616	15,371	11,914
2,6	1,1127	− 1,478	0,4273	0,2281	0,03196	13,610	12,231
2,7	0,9947	− 0,961	0,3680	0,2117	0,02820	12,000	12,064
2,8	0,9206	− 0,6125	0,3287	0,2032	0,02562	10,885	11,823
2,9	0,8722	− 0,4075	0,3009	0,1994	0,02330	9,864	11,310
3	0,8417	− 0,275	0,2806	0,1990	0,02037	8,542	10,149
3,2	0,8108	− 0,106	0,2530	0,2045	0,01837	7,654	9,440
3,4	0,7994	− 0,035	0,2350	0,2143	0,01649	6,800	8,506
3,6	0,7968	− 0,008	0,2215	0,2261	0,01477	6,009	7,541
3,8	0,7962	− 0,003	0,2094	0,2385	0,01346	5,406	6,790
4	0,7959	− 0,001	0,1990	0,2510	0,12305	5,217	6,55
4,268	0,7956	− 0,0000	0,1864	0,2678	0,01273	5,070	6,373
5	0,7949	− 0,0018	0,1590	0,3133	0,01115	4,029	5,069
6	0,7902	− 0,0089	0,1317	0,3737	0,00840	3,094	3,916
8	0,7542	− 0,0233	0,0943	0,4757	0,00579	1,914	2,538
10	0,7011	− 0,0283	0,0701	0,5527	0,00414	1,207	1,721
12	0,6457	− 0,0265	0,0538	0,6108	0,00334	0,893	1,383
15	9,5719	− 0,0231	0,0383	0,6763	0,00255	0,603	1,054
20	0,4721	− 0,0168	0,236	0,7443	0,00185	0,381	0,807
30	0,3469	− 0,0106	0,0116	0,8204	0,00110	0,160	0,461
30	0,2726	− 0,0049	0,0066	0,8596	0,00078	0,086	0,315
60	0,1909	− 0,0027	0,0031	0,9029	0,00048	0,030	0,157
80	0,1468	− 0,0017	0,0018	0,9255	0,00037	0,023	0,157
100	0,1190	− 0,0011	0,0012	0,9381	0,00029	0,015	0,126
∞	0	− 0,0000	0,0000	1	0,00000	0,000	

vom kleinsten v bis v_k von sehr großen negativen Werten bis zum Nullwert bei v_k zunimmt. Da $\partial p/\partial v$ alle Werte von großen negativen Werten bis zur Null kontinuierlich durchläuft, muß also auch ein Wert $(\partial p/\partial v)_m$ auftreten, bei dem

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m = -\left(\frac{p}{v}\right)_m$$

ist; denn p/v nimmt von großen Werten anfangend nur bis zu dem in der Tabelle angegebenen immer noch positiven Wert $(p/v)_k$ ab. Daher muß bei einem bestimmten Volumen v_m ein Wert auftreten, bei dem

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m = -\left(\frac{p}{v}\right)_m$$

ist. Die Tab. 1 zeigt diesen Wert bei dem Volumen 3 cm³.[1]) Bei v_k ist

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_k = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_k = 0,$$

die Druckisotherme hat ihren Sattelpunkt. In dem Volumenintervall zwischen v_k und $v = \infty$ hat die Größe $(\partial p/\partial v)$ sowohl bei v_k wie bei $v = \infty$ den Wert 0, dazwischen aber ist sie negativ, folglich muß notwendig ein Volumen auftreten, bei dem $\partial p/\partial v$ ein negatives Maximum hat. Die Tabelle ergibt dieses Volumen bei $v = 10\,\text{cm}^3$. Der gesamte Verlauf der Kurve, welche bei T_k $(\partial p/\partial v)$ als Funktion von v darstellt, ist in Fig. 1 wiedergegeben, durch eine Kurve, welche stets

Verlauf von $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T_k}$ und $-\frac{p}{v}$ bei T_k.

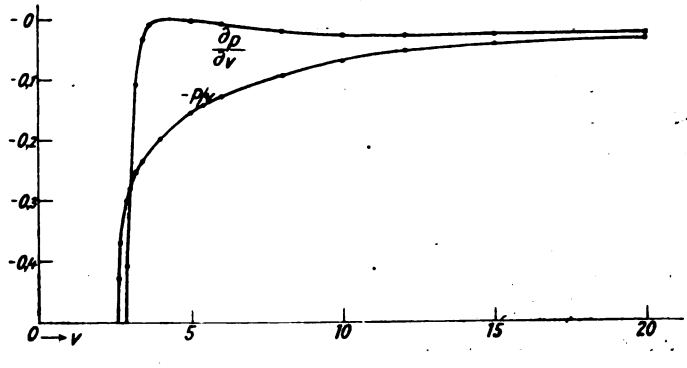


Fig. 1.

negativ ist, ein Maximum bei v_k und ein Minimum ergibt. Die Lage des Volumens v_m, bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, ergibt die Zeichnung genauer bei $v_m = 2{,}95\,\text{cm}^3$, so daß also

$$\frac{v_m}{v_k} = \frac{2{,}95}{4{,}268} = 0{,}6912$$

1) L. Schames, Ann. d. Phys. 57. S. 321—346. 1918, bezeichnet diesen Punkt als Boylepunkt.

ist und die Lage des zweiten Minimum ist genauer

$$v = 11{,}50 \text{ cm}^3 = 2{,}5\, v_k .$$

Die Festlegung dieser zwei ausgezeichneten Punkte in dem Verlauf von $\partial p/\partial v$ ist deshalb von Wichtigkeit, weil man damit zur Bestimmung der Konstanten in einer Zustandsgleichung nicht mehr auf den kritischen Doppelpunkt allein angewiesen ist, sondern noch zwei ausgezeichnete Punkte in der kritischen Isotherme zur Verfügung hat, den ersten bei v_m, wo

$$\frac{\partial p}{\partial v_m} = -\frac{p}{v}$$

ist, und noch einen zweiten, in dem zwar

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

ist, aber $\partial p/\partial v$ negativ ist. Beide sind durch die Beobachtungen sicher festgelegt. Die für $T = T_k$ gegebene graphische Darstellung der Kurve für $\partial p/\partial v$ läßt sofort erkennen, wie der Verlauf derselben Größe bei $T > T_k$ und $T < T_k$ sein muß. Denn bei $T > T_k$ findet sich stets eine Stelle, bei der

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, aber das erste Maximum der $\partial p/\partial v$-Kurve steigt nicht mehr bis zum Werte 0, sondern bleibt unter der Nullinie. Während bei $T < T_k$ die Nullinie durch das Maximum von $\partial p/\partial v$ überschritten wird. Demnach müßten sich bei den unteren Isothermen fünf ausgezeichnete Volumina finden, eines bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, zwei Volumina, in denen

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0$$

ist und zwei, in denen $\partial p/\partial v$ ein Maximum und ein Minimum hat. Diese Volumina liegen alle im Zweiphasengebiet und sind der unmittelbaren Beobachtung nicht zugänglich. Bei der kritischen Isotherme fallen die drei mittleren ausgezeichneten Punkte im kritischen Doppelpunkte zusammen, bei den oberen

Isothermen schieben sich die drei verbleibenden ausgezeichneten Werte von $\partial p/\partial v$ immer mehr zusammen, um bei genügend hoher Temperatur beim Übergang in den idealen Gaszustand ganz zu verschwinden.

Das Volumen v_m, bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v},$$

ist, findet man am sichersten, indem man bei verschiedenen Temperaturen die Kurve aufzeichnet, welche pv/RT oder das Verhältnis $v : v_0$ des tatsächlichen zum „idealen" Gasvolumen darstellt. In den folgenden Tab. 2a, 2b, 2c ist diese Größe für die kritische und einige obere und untere Isothermen für Isopentan, Kohlensäure und Äthylen wiedergegeben und

Tabelle 2a.

pv/RT für Isopentan bei verschiedenen T und v.
$R = 0{,}02753$ cal/°C.

v cm³	$T = 493$	473	460,8	453	443
2,4			0,2954	0,2412	0,1694
2,5		0,3332	0,2542	0,2045	0,1370
2,6		0,3016	0,2281	0,1816	
2,7		0,2802	0,2117	0,1685	
2,8		0,2674	0,2032	0,1630	
2,9	0,3536	0,2599	0,1994		
3	0,3487	**0,2566**	**0,1990**		
3,2	**0,3418**	0,2569	0,2045		
3,4	0,3422	0,2629	0,2143		
3,6	0,3474	0,2721	0,2261		
3,8	0,3554	0,2899	0,2385		
4	0,3646	0,2945	0,2510		
4,268	0,3760	0,3090	0,2678		
5	0,4170	0,3549	0,3133		
6	0,4690	0,4126	0,3737		
8	0,5550	0,5083	0,4757	0,4536	
10	0,6194	0,5804	0,5527	0,5344	
12	0,6685	0,6352	0,6108	0,5960	
15	0,7232	0,6950	0,6763	0,6627	0,6452
20	0,7812	0,7596	0,7443	0,7349	0,7218
30	0,8455	0,8298	0,8204	0,8138	0,8039
40	0,8794	0,8665	0,8596	0,8551	0,8482
60	0,9138	0,9063	0,9029	0,8997	0,8959
80	0,9360	0,9295	0,9255	0,9225	0,9204
100	0,9475	0,9414	0,9381	0,9350	0,9340
	1	1	1	1	1

Tabelle 2b.[1])

pv/RT für Kohlensäure bei verschiedenem T und v.
$R = 0{,}04516$ cal/°C.

$T = 293$		$T = 303$		$T = 313$	
v cm³	pv/RT	v	pv/RT	v	pv/RT
12,149	0,7767	11,594	0,7934	11,76	0,8042
11,250	0,7600	10,939	0,7727	10,052	0,7733
10,053	0,7344	9,271	0,7367	9,200	0,7550
8,673	0,6967	8,414	0,7133	8,684	0,7424
8,354	0,6865	7,895	0,6971	7,976	0,7228
7,491	0,6567	7,169	0,6711	7,534	0,7084
		6,723	0,6531		
6,927	0,6325	5,671	0,6009	6,554	0,6723
6,122	0,5925	4,662	0,5352	5,690	0,6322
5,603	0,5628	4,007	0,4813	5,206	0,6052
5.321	0,5442	3,420	0,4228	4,897	0,5860
				4,162	0,5338
1,320	0,1877	1,650	0,2069	3,438	0,4702
1,290	0,1414	1,578	0,2006		
		1,507	0,1970	3,125	0,4380
		1,487	0,1970	2,606	0,3788
		1,440	0,1983	1,930	0,2969
		1,417	0,2001	1,684	0,2734
				1,574	0,2691
				1,450	0,2726

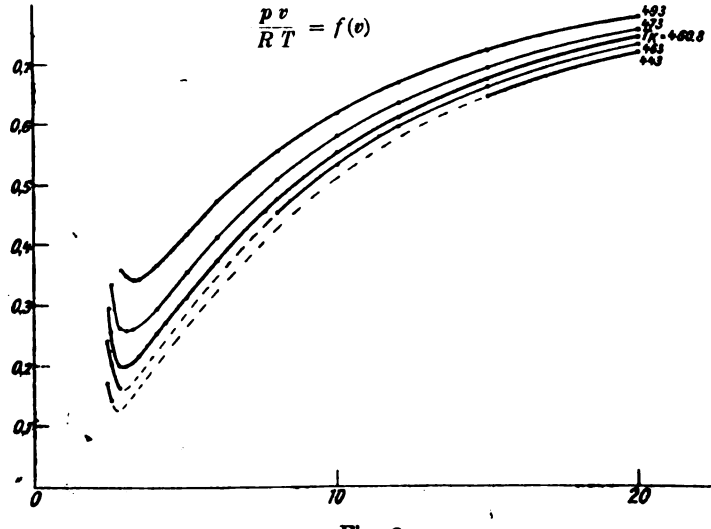


Fig. 2.

1) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. (6) **29**. S. 110—111. 1893.

Tabelle 2c.[1])

pv/RT für Äthylen bei verschiedenen T und v. $R = 0{,}071$ cal/°C.

$T = 273$		$T = 278$		$T = 283$		$T = 293$		$T = 303$	
v	pv/RT	v	pv/RT	v	pv/RT	v	pv/RT	v	pv/RT
14,10	0,6340	13,67	0,6373	13,995	0,6579	13,95	0,6820	11,70	0,6586
13,34	0,6165	12,32	0,6044	13,38	0,6449	12,42	0,6503	10,24	0,6221
12,89	0,5955	10,92	0,5627	12,14	0,6145	11,90	0,6373	8,271	0,5582
10,67	0,5330	10,18	0,5372	10,97	0,5817	10,07	0,5860	6,773	0,4955
		9,366	0,5057	9,78	0,5422	9,197	0,5567	5,523	0,4352
3,143	0,1610	8,468	0,4684						
2,992	**0,1570**			8,465	0,4896	8,315	0,5227	4,641	0,3874
2,941	0,1580	3,289	0,1856	7,677	0,4534	7,482	0,4877	3,992	0,3595
2,910	0,1600	3,150	**0,1817**	6,723	0,4052	6,630	0,4477	3,482	**0,3527**
2,862	0,1645	3,093	0,1822	4,552	0,2798	5,736	0,4006	3,226	0,3631
2,827	0,1695	3,062	0,1841	3,694	0,2315	4,076	0,3084		
				3,394	0,2209				
2,809	0,1755	3,042	0,1866			3,556	**0,2896**		
2,786	0,1810	2,994	0,1910	3,245	**0,2190**	3,319	**0,2896**		
2,701	0,2055	2,930	0,2013	3,153	0,2204	3,167	0,2949		
2,587	0,2425	2,861	0,2106	3,088	0,2233	2,997	0,3140		
2,566	0,2565	2,705	0,2489	2,833	0,2561	2,882	0,3354		
2,481	0,3100			2,786	0,2687				
				2,645	0,3188				

für den ersten Stoff in Fig. 2 dargestellt. Da

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{pv}{RT_k}\right) = \frac{1}{RT_k}\left(v\frac{\partial p}{\partial v} + p\right)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{pv}{RT_k}\right) = \frac{1}{RT_k}\left(2\frac{\partial p}{\partial v} + v\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)$$

ist, folgt, daß bei T_k dasjenige Volumen, bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, dasjenige ist, bei dem die Größe pv/RT_k ein Minimum hat. Dieses Volumen v_m findet sich hier noch sicherer als aus den Differentialquotienten bei $v = 2{,}95\,\text{cm}^3 = 0{,}6912\,v_k$. Mit steigender Temperatur verschiebt sich, wie die Kurvendarstellung erkennen läßt, die Lage des Minimums, wenn auch nur wenig, nach größerem Volumen und ebenso deutet der Verlauf der Größe pv/RT bei niederen Temperaturen darauf hin, daß im Zweiphasengebiet die Lage des Minimums bei kleinerem Volumen als bei T_k zu suchen ist.

1) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. (6) **29**. S. 113. 1893.

Im kritischen Punkt ist

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

und folglich hat bei v_k die Kurve, welche das Verhältnis

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p v}{R T_k}$$

darstellt, ihren Wendepunkt und zwar ist hier ihre maximale Neigung

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{p v}{R T_k}\right) = \frac{p_k}{R T_k} = \frac{1}{v_{0k}} = s_{0k}$$

gleich der „idealen" Gasdichte.

Bei höheren Temperaturen verschiebt sich auch die Stelle, an der die Kurve $p v / R T$ ihren Wendepunkt hat nach größerem Volumen. Bei niederen Temperaturen ist eine sichere Aussage über die Lage des Wendepunktes nicht möglich.

In bezug auf den Verlauf der Größe $p v / R T$ bei Kohlensäure und bei Äthylen sei hervorgehoben: Kohlensäure zeigt in der Isotherme von 30° C das Minimum von $p v / R T$ bei $v_m = 1{,}49\,\text{cm}^3$. In der kritischen Isotherme bei 31,35° C kann das Minimum von $p v / R T$ nicht merklich verschieden sein. Das kritische Volumen ist $v_k = 2{,}155\,\text{cm}^3$, so daß auch hier wieder

$$\frac{v_m}{v_k} = \frac{1{,}49}{2{,}155} = 0{,}6914$$

ist. Bei Äthylen findet sich bei der kritischen Temperatur 10° C das Volumen v_m des Minimums von $p v / R T$ bei $v_m = 3{,}20\,\text{cm}^3$; das kritische Volumen v_k ist leider nicht so scharf bestimmt, annähernd ist $v_k = 4{,}55\,\text{cm}^3$. Daraus ergibt sich hier $v_m = 0{,}703\, v_k$. Wie es scheint, steht also dasjenige Volumen, in dem bei T_k die Größe $p v / R T$ ein Minimum hat, in einem bestimmten konstantem Verhältnis zu v_k und es ist:

$$v_m : v_k = 0{,}6912 = \ln 2, \text{ also } e^{\frac{v_m}{v_k}} = 2\,.$$

Im übrigen zeigen auch die Kurven, welche für Kohlensäure und Äthylen die Größe $p v / R T$ darstellen, daß auch bei diesen Stoffen sich die Lage des Minimums mit steigender Temperatur langsam nach größerem Volumen verschiebt. In allen Stücken tritt ein gleichartiges Verhalten, wie bei Isopentan, auf.

§ 2. Ein ganz anders Verhalten zeigt der Druck in seiner Abhängigkeit von der Temperatur oder der Spannungskoeffizient $(\partial p/\partial T)_v$, für den Young besondere Tabellen gegeben hat. Für die kritische Temperatur ist in Tab. 1 der Spannungskoeffizient verzeichnet und mit ihm sind die durch die Überschriften der einzelnen Spalten gekennzeichneten Rechnungsoperationen ausgeführt. $\partial p/\partial T$ ist stets größer als p/T, so daß, wenn man den Spannungskoeffizienten bei T_k durch

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{p}{T} f(v)$$

darstellen wollte, $f(v)$ eine Funktion sein müßte, die mit zunehmender Dichte zunimmt, aber nicht gleichmäßig, sondern bei v_k tritt eine deutliche Verlangsamung der Zunahme mit der Dichte auf. Bei v_k tritt die schon früher bemerkte auffällige Tatsache hervor[1]), welche auch Kohlensäure zeigt, daß

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v_k} = \frac{2R}{v_k}$$

wird, also

$$f(v_k) = 2\frac{R T_k}{p_k v_k}.$$

Entsprechend zeigt die thermodynamische Größe $\partial U/\partial v$ bei v_k den Wert

$$\frac{1}{v_k}(2 R T_k - p_k v_k).$$

Da der Spannungskoeffizient $\partial p/\partial T$ ähnlich verläuft wie p selbst, insofern beide Größen von $v = \infty$ anfangend beschleunigt mit abnehmendem Volumen wachsen, bei v_k nahezu konstant sind, um dann bei geringeren Dichten wieder weiter zu wachsen, könnte man auf den Gedanken kommen, daß

$$\frac{T}{p}\frac{\partial p}{\partial T} = f(v)$$

eine einfache Gesetzmäßigkeit zeigt. Das ist aber nicht der Fall, denn diese Funktion zeigt ebenso, wie die in Tab. 1 berechnete

$$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{T}{p}\frac{\partial p}{\partial T} - 1$$

ein ausgesprochenes Maximum beim Volumen $v = 2{,}6\,\mathrm{cm}^3$.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 12. S. 144—153. 1903.

§ 3. Es soll nunmehr untersucht werden, wie die bisher vorliegenden Formen der Zustandsgleichungen den hier hervorgehobenen Tatsachen entsprechen. Die van der Waalssche Zustandsgleichung

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

verlangt ja, solange man bei $T =$ konst. die Größen a und b als konstant ansieht, die Bestimmung

$$b = \tfrac{1}{3} v_k, \quad a = \tfrac{9}{8} R T_k v_k.$$

Wie diese Gleichung die tatsächlichen Beobachtungen wiederzugeben vermag, ist wohl am übersichtlichsten und kürzesten durch die Tab. 3 dargestellt, in der die nach van der Waals ausgeführte Berechnung mit der Beobachtung verglichen ist.

Tabelle 3.

Kritische Isotherme des Isopentans berechnet nach van der Waals. $RT_k = 12{,}686$; $a = \frac{9}{8} R T_k v_k = 60{,}912$ cal·cm³; $b = \frac{1}{3} v_k = 0{,}423$ cm³.

v	p cal/cm³		$\frac{\partial p}{\partial v}$ cal/cm⁶		$\frac{pv}{RT_k}$	
	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
2,4	2,410	1,5612	− 4,479		0,4559	0,2954
2,5	2,033	1,2902	− 3,141	− 2,243	0,4006	0,2542
2,6	1,767	1,1127	− 2,227	− 1,478	0,3621	0,2281
2,7	1,578	0,9947	− 1,590	− 0,961	0,3358	0,2117
2,8	1,444	0,9206	− 1,141	− 0,613	0,3187	0,2032
2,9	1,346	0,8722	− 0,820	0,408	0,3077	0,1994
3,0	1,276	0,8417	− 0,589	− 0,275	0,3017	**0,1990**
3,2	1,191	0,8108	− 0,300	− 0,106	**0,3004**	0,2045
3,4	1,148	0,7994	− 0,146	− 0,035	0,3077	0,2143
3,6	1,127	0,7968	− 0,065	− 0,008	0,3198	0,2261
3,8	1,119	0,7962	− 0,042	− 0,003	0,3352	0,2385
4	1,115	0,7959	0,006	− 0,001	0,3516	0,2510
4,268	1,114	0,7956	**− 0,0000**	**− 0,000**	0,3748	0,2678
5	1,111	0,7949	− 0,038	− 0,002	0,4379	0,3133
6	1,080	0,7902	− 0,042	− 0,009	0,5109	0,3737
8	0,977	0,7542	**− 0,055**	− 0,023	0,6161	0,4757
10	0,870	0,7011	− 0,051	**− 0,028**	0,6859	0,5527
12	0,7764	0,6457	− 0,036	− 0,026	0,7344	0,6108
15	0,6636	0,5719	− 0,033	− 0,023	0,7845	0,6763
20	0,5306	0,4721	− 0,022	− 0,017	0,8365	0,7443

Daraus ergibt sich: qualitativ ist der Verlauf des Druckes als Funktion von p richtig wiedergegeben, quantitativ aber

nicht; die berechneten Werte von p sind stets erheblich größer als die beobachteten. Damit hängt natürlich auch zusammen, die schon früher[1]) bemerkte Tatsache, daß das Verhältnis $p\,v/R\,T_k$ im kritischen Punkt keineswegs der Beobachtung entspreiht.

Die Lage des Minimums dieses Verhältnisses ergibt die Berechnung bei $v = 3{,}2\,\mathrm{cm}^3$, während es bei Isopentan bei $v = 2{,}95\,\mathrm{cm}^3$ beobachtet ist. Es erfüllt also die Berechnung auch nicht die Bedingung, daß $v_m = 2{,}95\,\mathrm{cm}^3$ ist. Endlich gibt die Berechnung die Lage des Minimums von $\partial p/\partial v$ bei $v = 8\,\mathrm{cm}^3$, während sie bei $v = 10{,}5$ beobachtet ist. Die Waalssche Gleichung gibt also in der Tat zwar die Möglichkeit, die zwei ausgezeichneten Punkte, in denen

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

wird, auf die im Abschnitt 1 die Aufmerksamkeit gelenkt ist, zu berücksichtigen, aber gibt nicht ihre Lage richtig wieder.

Es liegt natürlich nahe, die vielseitigen Untersuchungen von Lorentz, Boltzmann, Happel[2]) und neuerdings Holm[3]) zu berücksichtigen, um die Größe b so als Funktion von v so darzustellen, daß auch die zwei neuen ausgezeichneten Punkte der kritischen Isotherme erfüllt werden. Indessen scheint mir bei diesen Bemühungen ein Punkt übersehen zu sein, der ihren Erfolg in Frage stellt.

Nach den kinetischen Vorstellungen, die allen diesen Untersuchungen zugrunde liegen, kommt eine Molekel, welche aus dem Innern eines Gases oder kondensierten Gases sich zur druckempfindenden Wand bewegt, nicht selbst zu dieser Wand, sondern trifft auf ihrer Fahrt auf andere Molekeln, die den Transport der Bewegungsgröße übernehmen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die jedesmaligen Zusammenstöße bizentrale seien, so wird bei jedem Zusammenstoß eine Strecke gleich dem Durchmesser der Molekeln gespart, es tritt also eine „Förderung der Bewegungsgröße" ein und die vom Stoß der Molekel zurückgelegte Strecke erscheint kürzer, als der lineare Abstand von der Wand um die Zahl der Kollisionen

1) C. Dieterici, Wied. Ann. **69.** S. 685—705. 1899.
2) H. Happel, Ann. d. Phys. **21.** S. 342—380. 1906.
3) E. A. Holm, Ann. d. Phys. **51.** S. 768—796. 1916.

multipliziert mit dem Durchmesser der Molekeln bei der gemachten vereinfachenden Annahme von bizentralen Zusammenstößen.

Diese einleuchtende Vorstellung ist aber nur dann richtig, wenn man die Molekeln selbst als vollkommen starr ansieht; das ist aber im Widerspruch mit der Grundanschauung der kinetischen Gastheorie, nach denen die Molekeln als vollkommen elastische Körper angesehen werden. Wenn aber die Molekeln elastische Körper sind, so verläßt die getroffene Molekel ihre bisherige Stelle erst um so viel später, als die Zeit ist, welche der elastische Stoß gebraucht, um sich durch den Körper der Molekeln hindurch um die Strecke ihres Durchmessers fortzupflanzen. Es kann also nur eine Förderung der Bewegungsgröße auftreten, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des elastischen Stoßes in der Molekel größer ist als die translatorische Schwerpunktsgeschwindigkeit. Die Verfolgung dieser Vorstellung ist, wenn überhaupt möglich, jedenfalls nur verfolgbar unter neuen Annahmen über die Geschwindigkeit der Stoßfortpflanzung in der Molekel selbst. Sie würde dahin führen die Waalssche Größe b, in anderer Weise, als es schon Reingamm tat, als Temperaturfunktion aufzufassen und damit die Möglichkeit geben, auch die Waalssche Gleichung in ihren Folgerungen auf den Spannungskoeffizienten $\partial p/\partial T$, die in keiner Weise mit den Beobachtungen sich decken, mit diesen in Einklang zu bringen. Ich verlasse hier die Waalssche Zustandsgleichung, um so mehr als ein zweiter Weg wesentlich weiter führt.

§ 4. Clausius hat die Vorstellung ausgesprochen, daß im Gleichgewichtszustand zwischen Flüssigkeit und gesättigtem Dampf gleichviel Molekeln aus der Flüssigkeit und koexistenten Dampf ein- und austreten, also in der Oberfläche ein fortgesetzter Austausch der „fortschreitenden, schwingenden und drehenden Bewegung" eintritt.

Beschränkt man sich entsprechend der Grundanschauung der kinetischen Gastheorie, daß für den Druck nur die Energie der fortschreitenden Bewegung in Betracht kommt, allein auf diese und dehnt die Clausiusschen Vorstellungen aus auf jeden Zustand, den die Substanz annehmen kann, so wird man unter Annahme, daß für alle Zustände die mittlere lebendige Kraft der Schwerpunktsbewegung proportional RT sei,

auf eine Zustandsgleichung

$$p = \frac{RT}{v} e^{-\frac{D}{RT}}$$

geführt, worin D die Durchbruchsarbeit zum kohäsionsfreien idealen Gaszustand bedeutet. Diese Gleichung ist heute auf dem Gebiet der Elektronenemission bekannt. Ich habe früher[1]) nachgewiesen, daß, wenn man bei $T = \text{konst.}$

$$\frac{D}{RT} = \frac{a}{v}$$

setzt, und die Waalssche Volumenkorrektion einführt, man durch

$$p = \frac{RT}{v-b} e^{-\frac{a}{v}}$$

eine Zustandsgleichung erhält, die dieselben glücklichen Eigenschaften der Kontinuität hat, wie die Waalssche, und daß die Bedingungen des kritischen Doppelpunktes auf

$$b = \tfrac{1}{3} v_k, \quad a = 4b = 2v_k$$

führt.

Inwieweit diese Zustandsgleichungen die kritische Isotherme des Isopentans zu berechnen gestattet, zeigt die folgende Tab. 4.

Die berechneten und die beobachteten Werte des Druckes sind, abgesehen von den kleinsten Volumen, faßt durchgängig in überraschend guter Übereinstimmung. Entsprechend gibt auch pv/RT_k fast überall die Beobachtungen gut wieder. Aber, wie auch in der Tabelle kenntlich gemacht ist, gibt die Berechnung das Volumen v_m, wo pv/RT_k ein Minimum hat, oder wo

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, nicht genau bei dem Volumen $v_m = 2{,}95\,\text{cm}^3$, welches die Beobachtungen verlangen, sondern bei $v = 2{,}80\,\text{cm}^3$; eine zwar kleine, aber doch deutlich erkennbare Differenz. Dagegen zeigt die Tabelle wiederum dasjenige Volumen, wo $\partial p/\partial v$ sein Minimum hat, in Berechnung und Beobachtung gut übereinstimmend bei $v = 10\,\text{cm}^3$.

---

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 5. S. 51—88. 1901. Vgl. auch Künen, Die Zustandsgleichung. Braunschweig 1907.

Tabelle 4.

Kritische Isothermen des Isopentans, berechnet nach $p_k = \frac{R\,T}{v-b}\,e^{-\frac{a}{v}}$.

$R\,T_k = 12{,}686$ cal; $a = 2v_k = 8{,}536$ cm³; $b = \frac{1}{2}v_k = 2{,}134$ cm³.

v	p $\frac{\text{cal}}{\text{cm}^3}$		$\frac{\partial p}{\partial v}$ $\frac{\text{cal}}{\text{cm}^6}$		$\frac{p\,v}{R\,T_k}$		$\frac{p}{v}$ $\frac{\text{cal}}{\text{cm}^6}$	
	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
2,4	1,361	1,561	− 3,100		0,2575	0,2975	0,567	0,651
2,5	1,125	1,290	− 1,537	− 2,243	0,2217	0,2542	0,450	0,516
2,6	1,022	1,113	− 0,902	− 1,478	0,2095	0,2281	0,303	0,427
2,7	0,9485	0,995	− 0,995	− 0,961	0,2019	0,2117	0,351	0,368
2,8	0,9034	0,921	− 0,371	− 0,613	0,1994	0,2032	0,323	0,329
2,9	0,8734	0,8722	− 0,2532	− 0,408	0,1997	0,1994	0,301	0,301
3,0	0,8505	0,8417	− 0,1675	− 0,275	0,2010	,1990	0,283	0,281
3,2	0,8258	0,8108	− 0,0859	− 0,106	0,2083	0,2045	0,258	0,253
3,4	0,8140	0,7994	− 0,0423	− 0,035	0,2182	0,2143	0,240	0,235
3,6	0,8071	0,7968	− 0,0186	− 0,008	0,2212	0,2261	0,224	0,222
3,8	0,8056	0,7962	0,0072	− 0,003	0,2413	0,2385	0,212	0,209
4,0	0,8043	0,7959	− 0,0016	− 0,001	0,2536	0,2510	0,201	0,199
4,268	0,8046	0,7956	− 0,0000	− 0,000	0,2707	0,2678	0,188	0,1864
6	0,8028	0,7949	− 0,0092	− 0,002	0,3164	0,3133	0,160	0,159
6	0,7907	0,7902	− 0,0187	− 0,009	0,3740	0,3737	0,132	0,132
8	0,7436	0,7542	− 0,0275	− 0,023	0,4689	0,4757	0,093	0,094
10	0,6869	0,7011	− 0,0290	− 0,028	0,5415	0,5527	0,069	0,070
12	0,6305	0,6457	− 0,0267	− 0,026	0,5964	0,6108	0,053	0,054
15	0,5581	0,5719	− 0,0223	− 0,023	0,6599	0,6763	0,037	0,038
20	0,4631	0,4721	− 0,0161	− 0,017	0,7301	0,7443	0,023	0,024

Man wird also zugeben müssen, daß die mit dieser Zustandsgleichung ausgeführte Berechnung einen unvergleichlich besseren Anschluß an die Beobachtungen gibt als die in Tab. 8 nach der Waalsschen Gleichung angestellte und wird daraus die Berechtigung herleiten müssen, die hier aufgestellte Form der Zustandsgleichung weiter zu verfolgen.

Die Unzulänglichkeit auch dieser Zustandsgleichung tritt aber hervor, wenn man den Spannungskoeffizienten berücksichtigt. Denn durch die für $T = T_k$ eingeführte Hypothese für die Durchbruchsarbeit D ist

$$\frac{D}{R\,T_k} = \frac{a}{v}$$

gesetzt, eine Hypothese, die der Waalsschen Annahme über den Kohäsionsdruck nachgebildet ist.

Es liegt nahe, mit van der Waals die Durchbruchsarbeit als eine rein mechanische, von T unabhängige Größe aufzufassen, also allgemein

$$\frac{D}{RT} = \frac{a}{vT}$$

und damit

$$p = \frac{RT}{v-b} e^{-\frac{a}{vT}}$$

anzunehmen. Damit folgt aber sofort, sofern man nur b als unabhängig von T betrachtet, gleichgültig ob und welche Funktion b von v ist,

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{p}{T} + p\frac{a}{vT^2}$$

und

$$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{1}{p}\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right) = \frac{a}{vT}$$

oder bei $T = c$ müßte die Größe

$$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v}$$

mit der Dichte kontinuierlich zunehmen. In Tab. 1 ist aber diese Größe berechnet und schon von vorn darauf hingewiesen, daß zwar die thermodynamische Größe $\partial U/\partial v$ ähnlich verläuft, wie p selbst, daß aber das Verhältnis

$$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v}$$

ein ausgeprägtes Maximum bei $v = 2{,}6\,\mathrm{cm}^3$ zeigt. Daher läßt sich also nicht die Größe

$$\frac{1}{p}\frac{\partial U}{\partial v}$$

durch eine einfache mit v kontinuierliche abnehmende Funktion darstellen.

§ 5. Durch den Übergang auf den Spannungskoeffizienten und die zusammenhängende Änderung der Gesamtenergie U mit dem Volumen ist aber auch sofort dargetan, daß weder die van der Waalssche noch die von mir auf Grund der Clausiusschen Vorstellungen aufgestellte Zustandsgleichung den Bedingungen des Problems genügen können, denn beide Zustandsgleichungen halten den Grundsatz der kinetischen Gastheorie fest, daß nur die lebendige Kraft der Schwerpunkts-

bewegung der Molekeln für den Druck entscheidend ist, wenn diese auch durch Berücksichtigung der Raumanfüllung und der Kohäsion gegenüber dem idealen Gasdruck verändert ist, daß aber die innere Energie keinen Anteil an dem kinetischen Druck hat. Da aber die mit U bezeichnete thermodynamische Energie in kinetischer Deutung die Energie der gesamten Bewegungszustände umfaßt, also neben der Energie der fortschreitenden Bewegung auch die der „drehenden und schwingenden" nach Clausius, die in neuerer Zeit als schwingende allein angesehen wird, so muß auch in den Ausdruck für p, also in die Zustandsgleichung, ein Ausdruck aufgenommen werden, der einen Umsatz dieser Bewegungen Rechnung trägt. Gelingt es, durch einen solchen Schritt die endgültige Form der Zustandsgleichung zu finden, so ist damit auch zugleich die thermodynamische Energie U als Funktion von T und v dargestellt, und damit ist gesagt, daß der tiefere Sinn des Problems der Zustandsgleichung darin liegt, durch eine kinetische Vorstellung die Energiefunktion in ihrer Abhängigkeit von T und v darzustellen.

Daß die inneren Bewegungen sich in äußere Arbeit umsetzen können, wissen wir aus den adiabaten Vorgängen idealer Gase, wenn auch bisher die Ausbildung der kinetischen Gastheorie auf Arbeitsprozesse noch fehlt und sich daher die Mechanik des Umsatzes innerer Energie in translatorische nicht übersehen läßt. Es liegt aber im Sinne der Clausiusschen Vorstellungen die Annahme nahe, daß die „befähigten" Molekeln, welche aus dem Innern an die Grenze zwischen Flüssigkeit und Dampf kommen, mit genügend großer lebendiger Kraft, um die Kohäsion zu überwinden, im dichteren Zustand einen anderen Energiebetrag an drehenden und schwingenden Bewegungen haben als im weniger dichten und daß sich die Energiedifferenz in kinetischen Druck umsetzt.

Ich habe versucht, diese Vorstellungen durch den Ansatz

$$p = \frac{RT}{v} x e^{-y} \quad \text{oder} \quad \ln \frac{pv}{RT} = \ln x - y$$

zum Ausdruck zu bringen, worin x und y zwei nach den Beobachtungen zu bestimmende Funktionen von T und v sind. Aber obgleich man in der kritischen Isotherme, die die ausgezeichneten Punkte des Minimums von pv, den kritischen

Doppelpunkt und der zweite Punkt in der

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

ist, zur Verfügung hat, ferner auch die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{pv}{RT} = \frac{1}{RT} \cdot v \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{1}{v} = \frac{\partial}{\partial v} [\ln x - y]$$

und

$$\frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{pv}{RT} = \frac{1}{pT} \cdot \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial T} [\ln x - y],$$

in ihrem ganzen Verlauf nach den Beobachtungen angebbar sind, ist es mir nicht gelungen, in den beiden Funktionen x und y den Umsatz innerer Energie in translatorische zum Ausdruck zu bringen.

Auch der Versuch, durch Hinzufügen einer weiteren Funktion von v durch

$$p = \frac{RT}{v} \left[x e^{-y} + \varphi(v) \right]$$

den Umsatz innerer Energie zum Ausdruck zu bringen, schlug fehl, so daß ich mich damit begnügen muß, darauf hinzuweisen, daß ein grundsätzlicher Fortschritt in der Lösung des Problems der Zustandsgleichung nicht durch weiteren Ausbau der Waalsschen Raumkorrektion erzielt werden kann, sondern nur, indem man den bisher in der kinetischen Gastheorie festgehaltenen Grundsatz, daß nur die lebendige Kraft der translatorischen Bewegung für den Druck bestimmend sei, dahin erweitert, daß auch ein Umsatz von innerer Energie in Arbeitsenergie, auch bei isothermen Vorgängen, angenommen wird.

§ 6. Für die Verfolgung dieses Gedankens ist die Frage von wesentlicher Bedeutung, was unter der inneren Verdampfungswärme

$$\varrho = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial U}{\partial v} dv = \left(T \frac{dp_s}{dT} - p_s \right) (v_2 - v_1)$$

in kinetischer Deutung zu verstehen ist. Hr. W. Voigt hat zuerst die Deutung ausgesprochen, daß die Durchbruchsarbeit D, welche in der Gleichung

$$p = \frac{RT}{v - b} e^{-\frac{D}{RT}}$$

auftritt, gleich der inneren Verdampfungswärme ϱ sein müsse, so daß auf die Sättigungszustände angewendet

$$D = \varrho = R T \ln \frac{v_2 - b}{v_1 - b}$$

folgt, wobei wiederum die Waalssche Raumkorrektion als konstant angenommen ist. Ich habe dann durch empirische Berechnung nachgewiesen[1]), daß man die Raumkorrektion entbehren und

$$\varrho = c R T \ln \frac{v_2}{v_1}$$

setzen kann, worin c ein Faktor ist, der für alle Substanzen, die S. Young als normale bezeichnet, einen nahezu gleichen Wert hat, der durch die kritischen Daten durch

$$c = \frac{1}{R T_k} \left(T_k \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_k - p_k \right) v_k = 2 - \left(\frac{p v}{R T} \right)_k$$

bestimmt ist und weil alle „normalen" Substanzen nach Young den fast gleichen Wert für das Verhältnis des idealen zur tatsächlichen Volumen im kritischen Punkt

$$\frac{R T_k}{p_k v_k} = 3{,}75$$

zeigen, findet sich auch der Faktor c nahezu konstant für alle solche Stoffe.

Es ist mir aber nicht gelungen, die innere Verdampfungswärme so in zwei Teile zu zerlegen, daß der eine die Kohäsionsarbeit, der andere die Änderung der totalen Bewegungsenergie der Molekeln darstellt.

Bei diesen vielfältigen Berechnungen bin ich aber auf eine Beziehung gestoßen, die allgemeine Bedeutung hat und deshalb der Mitteilung wert erscheint.

Bildet man die Differenz der Arbeit, welche eine Substanz im idealen Gaszustand zwischen den beiden Sättigungsvolumen leisten könnte:

$$A_{id} = R T \ln \frac{v_2}{v_1}$$

und der tatsächlichen äußeren Arbeit:

$$A_s = p_s (v_2 - v_1),$$

so ergibt sich, daß diese Differenz, die im $p v$-Blatt eine leicht verständliche Bedeutung hat, dargestellt werden kann durch

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. **25.** S. 569—585. 1908 u. Ann. d. Phys. **35.** S. 220—242. 1911.

$$A_{id} - A_s = (a - R\,T\,v_k)\,(s_1 - s_2),$$

worin s_1 und s_2 die Sättigungsdichten bezeichnet und a eine Konstante ist, die wiederum durch den Faktor c der inneren Verdampfungswärme bestimmt ist, durch

$$a = c\,R\,T_k\,v_k.$$

In den folgenden Tab. 5 und 6 ist für Isopentan und Kohlensäure die Berechnung mit Hilfe der Sättigungsdaten ausgeführt.

Verfolgt man in Tab. 5 den Gang der „idealen" Sättigungsarbeit

$$A_{id} = R\,T \ln \frac{v_2}{v_1}$$

für Isopentan und den der tatsächlichen $A_s = p_s\,(v_2 - v_1)$, so sieht man, daß die erstere kontinuierlich mit abnehmenden T wächst, die zweite aber ein deutlich ausgeprägtes Maximum hat. Trotzdem ist die Differenz mit überraschender Schärfe

Tabelle 5.

Isopentan; $M = 72{,}10$.

$T_k = 460{,}8$ °C; $R = 0{,}02753$ cal/°C; $R\,T_k = 12{,}686$ cal; $v_k = 4{,}268$ cm³; $\frac{R\,T_k}{p_k\,v_k} = 3{,}735$; $a = 93{,}79$ cal/cm³.

T	p_s cal/cm³	v_2	v_1	A_s	A_{id}	$A_{id} - A_s$	$(a - R\,T\,v_k)\,(s_1 - s_2)$
460,8	0,7956	4,268	4,268	0	0	0	0
458	0,7637	6,355	3,183	2,423	8,72	6,30	6,27
453	0,7086	7,95	2,858	3,608	12,76	9,15	9,09
443	0,6078	10,71	2,555	4,956	17,48	12,52	12,44
433	0,5184	13,72	2,378	5,879	20,89	15,01	14,92
423	0,4394	17,14	2,250	6,542	23,64	17,10	17,03
413	0,3699	21,15	2,153	7,027	25,98	18,95	18,87
403	0,3090	26,10	2,072	7,425	28,11	20,68	20,63
393	0,2559	32,20	2,0037	7,727	30,04	22,31	22,28
383	0,2100	39,80	1,9455	7,949	31,82	23,87	23,86
373	0,1704	49,5	1,8940	8,112	33,51	25,40	25,38
363	0,1367	61,7	1,8475	8,181	35,06	26,88	26,85
353	0,1082	77,7	1,8055	8,212	36,56	28,35	28,31
343	0,08444	98,7	1,7679	8,185	37,98	29,80	29,71
333	0,06479	127,6	1,7329	8,155	39,41	31,25	31,09
323	0,04877	67,9	1,7005	8,105	40,84	32,74	32,50
313	0,0360	24,4	1,6700	8,018	42,24	34,22	33,89
303	0,02595	306,2	1,6413	7,905	43,61	35,70	35,26
293	0,01821	426,6	1,6141	7,747	44,18	36,43	36,65
283	0,01243	606,0	1,5885	7,514	46,31	38,80	38,01

Tabelle 6.

Kohlensäure; CO_2[1]) $M = 44$.

$T_k = 304{,}35$; $R = 0{,}04518$ cal/°C; $v_k = 2{,}155$ cm³; $\frac{RT_k}{p_k v_k} = 3{,}620$;

$a = 51{,}08$ cal/cm³.

T	p_s cal/cm³	v_2 cm³	v_1 cm³	A_s	A_{ts}	$A_{ts} - A_s$	$\frac{(a - RTv_k)}{(s_1 - s_2)}$
304,35	1,7635	2,155	2,155	0	0	0	0
304	1,7103	2,994	1,672	2,261	7,979	5,718	5,663
298	1,5313	4,167	1,422	4,203	14,473	10,473	10,218
293	1,3619	5,262	1,308	5,385	18,425	13,040	12,946
288	1,2095	6,329	1,228	6,170	21,336	15,166	15,213
283	1,0692	7,518	1,168	6,789	23,806	17,017	17,011
273	0,8329	10,42	1,095	7,767	27,790	20,023	20,017
263	0,6474	13,70	1,042	8,196	30,608	22,412	22,574
253	0,4820	18,87	1,000	8,613	33,578	24,965	25,04
248	0,4140	23,10	0,983	9,157	35,360	26,203	26,21

gleich $(a - R\,T\,v_k)\,(s_1 - s_2)$, einem Ausdruck, in dem die auftretenden Konstanten allein durch die kritischen Daten bestimmt sind.

Auch Kohlensäure zeigt eine vollkommene Übereinstimmung in dem Temperaturbereich, für den Beobachtungen vorliegen.

Auch an anderen normalen Stoffen, wie Benzol, Methylformiat und anderen, für welche das Beobachtungsmaterial in Youngs umfangreichen Tabellen vorliegt, bestätigt sich die aufgestellte Beziehung, bei anomalen Stoffen, wie Wasser und Äthylalkohol zeigen sich allerdings Abweichungen.

Man hat also in der aufgestellten Beziehung eine ähnliche aus den Beobachtungen abgelesene empirische Tatsache, wie die für die innere Verdampfungswärme $\varrho = c\,R\,T \ln \frac{v_2}{v_1}$ schon früher ermittelte.

Alle meine Versuche, diese Beobachtungstatsachen im Sinne eines Umsatzes von innerer Energie in Arbeitsenergie in die kinetische Gastheorie einzuführen und sie damit für die notwendige Erweiterung der Zustandsgleichung fruchtbar zu machen, haben aber nicht zu einem Resultat geführt, welches ich der Mitteilung für wert erachte.

Kiel, Oktober 1919.

1) Sättigungsdaten nach Landolt-Börnsteinschen Tabellen.

(Eingegangen 28. November 1919.)

4. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie; von A. Sommerfeld.

Hr. Weyl hat dieses von mir vor zehn Jahren behandelte Problem einer Neubearbeitung unterzogen und dabei *in methodischer Hinsicht* erfreuliche Fortschritte erreicht, wie bei einem Mathematiker vom Range des Hrn. Weyl selbstverständlich ist. So gelten die Näherungen Weyls für den ganzen Halbraum $z > 0$ (Luft), während ich mich auf die nächste Umgebung der Trennungsfläche $z = 0$ (Luft gegen Erde) beschränkt habe. Auch die von Weyl betonte (von mir übrigens ebenfalls ins Auge gefaßte) Darstellung meiner Lösung als eines komplexen Doppelintegrales (an Stelle eines komplexen, einfachen Integrales mit Besselschen Funktionen) leuchtet ein. Ob der Weylsche Weg zur Diskussion meiner Lösung schließlich bequemer ist als der meinige, läßt sich objektiv kaum beurteilen und hängt von der Denkgewöhnung ab; daß er eine Verschärfung der Fehlerabschätzung bedeutet, ist sicher.

Dagegen glaube ich, für solche Leser, welche sich auf den verschlungenen Pfaden komplexer Integration, zumal denjenigen der Weylschen komplexen Doppelintegrale, nicht mühelos zurechtfinden — und das dürfte bei den Interessenten der drahtlosen Telegraphie die Mehrzahl sein — feststellen zu sollen, daß die Weylsche Behandlung *in sachlicher Hinsicht* und *für praktische Zwecke* nichts Neues bietet. Die Weylsche Schlußformel (23) für $z = 0$ ist mit meinen Formeln (47) und (55) bis auf die abgeänderten Bezeichnungen völlig identisch. Ebenso stimmen seine Reihenentwicklungen von S. 498 mit meinen Reihen (54) und (42) nach auf- und absteigenden Potenzen der numerischen Entfernung genau überein. Unter diesen Umständen ist mir die von Hrn. Weyl an meinen Resultaten geübte Kritik nicht recht verständlich. Wenn Hr. Weyl als Raumwellen nur solche Wellen definiert, deren Energie wie $1/r^2$ abnimmt, so ist seine Zerlegung auf S. 500 von der meinigen natürlich verschieden. Ich definierte als „Raumwellen“

solche Wellen, deren Energie wie $1/r^2$ und stärker, als „Oberflächenwellen" solche, deren Energie wie $1/r$ abnimmt (Zylinder statt Kugel als Wellenfläche). Ich glaube, daß man dieser Definition ebensoviel oder ebensowenig „sachliche Berechtigung zuerkennen" muß, wie der Weylschen. Das interessante Resultat meiner Arbeit war doch, daß die von Uller und Zenneck früher beschriebenen elektromagnetischen Wellen sich aus der Strahlung eines Dipols heraus von selbst entwickeln und sich hier als Oberflächenwellen erweisen, weil die Energie, abgesehen von der exponentiellen Dämpfung, wie $1/r$ abnimmt. Daß diese Wellen bei mir aus dem Gesamtvorgang durch bloße Residuenbildung isoliert werden konnten (mein Pol $\lambda = s$ ist identisch mit dem Weylschen Pole $\gamma = ta$), war besonders befriedigend. Auch die „Nebenwellen" des Hrn. Weyl kommen bei mir als „Raumwellen Q_2" [Gl. (34)] vor; daß sie belanglos sind, ist auch aus meiner Darstellung unmittelbar ersichtlich. Wenn Hr. Weyl am Ende von § 2 „keine Andeutung für die Trennung des Vorganges in Raum- und Oberflächenwellen" findet, so steht auch das nicht in Widerspruch mit meinen Resultaten, da Hr. Weyl hier stillschweigend den Fall großer numerischer Entfernung voraussetzt, in welchem die Oberflächenwellen exponentiell abgedämpft sind und in der asymptotischen Darstellung von Weyl naturgemäß nicht mehr vorkommen. Die dann allein übrigbleibenden Raumwellen andererseits lauten für die Nähe der Trennungsfläche bei Weyl und mir wieder vollkommen gleich.

Die von mir als „numerische Entfernung" bezeichnete und in ihrer prinzipiellen Bedeutung herausgearbeitete Größe kommt bei Hrn. Weyl anhangweise als rechnerische Abkürzung $r_1 = r/|n^2|$ vor. Daß aber in der Einführung dieser Abkürzung das *Ähnlichkeitsgesetz der drahtlosen Telegraphie* liegt und daß die Verhältnisse für kleine und große numerische Entfernung sich ganz verschieden gestalten, trotzdem sie sich in eine einheitliche Formel, bei mir Gl. (55), bei Weyl Gl. (23), zusammenfassen lassen, wird dem Leser der Weylschen Abhandlung kaum zum Bewußtsein kommen.

(Eingegangen 7. Januar 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 10.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Zur Theorie der Doppelgitter. I. (Ein elektrostatisches Problem);* von *Marie Anna Schirmann.*

1. Problemstellung.

In neuester Zeit gelangen für Verstärkerzwecke Hochvakuumröhren mit Doppelgitter mit Vorteil zur Verwendung. Das elektrische Verhalten dieser Elektronenröhren steht in engster Beziehung zu einer bloß von den Elektrodendimensionen abhängigen, in der Röhrendynamik meist „*Durchgriff*" genannten Konstanten. Diese gibt an, in welchem Maße bei gegebener Spannung die Anode durch die Gitter hindurch, im Vergleich mit dem Steuergitter, zu dem auf der Kathode mündenden Kraftflusse beiträgt. Sie ist für einige ganz einfache Elektrodenanordnungen von J. Cl. Maxwell[1]), M. Abraham[2]) und M. v. Laue[3]) berechnet worden.

Im folgenden soll der Durchgriff für eine gewisse Anordnung der Elektroden in Doppelgitterröhren (die sogenannte Zylinderanordnung) berechnet werden. Das Schema dafür ist in Fig. 1 angegeben: Als *Kathode* (K) dient ein Draht von kreisförmigem Querschnitt (Radius k), als *Anode* (A) ein konzentrischer Kreiszylinder (Radius b); zwischen ihnen befinden sich zwei *Gitter* (G_1) und (G_2), jedes bestehend aus n gleichen Drähten (Radius c), deren äquidistante Mittelpunkte $p_\varkappa$ und $q_\varkappa$ ($\varkappa = 0, 1 \ldots n-1$) auf ebenfalls konzentrischen Zylindern vom Radius a_1 und a_2 liegen, und zwar so, daß a_1 größer als a_2 ist.

2. Mathematische Formulierung.

Das vorliegende Problem ist ein Sonderfall des Vierleiterproblems der Elektrostatik. Die zu den Leitern A, G_1, G_2, K gehörigen Potentiale sind V_1, V_2, V_3, V_4, die Ladungen

1) J. Cl. Maxwell, Treatise I, § 203—206.
2) M. Abraham, Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 1919. S. 13.
3) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 59. S. 465. 1919.

pro Längeneinheit e_1, e_2, e_3, e_4. Da die Gesamtladung des Systems gleich Null ist:

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0, \tag{1}$$

so sind von den vier Ladungen nur drei voneinander unabhängig. Andererseits sind von den sechs Spannungen zwischen

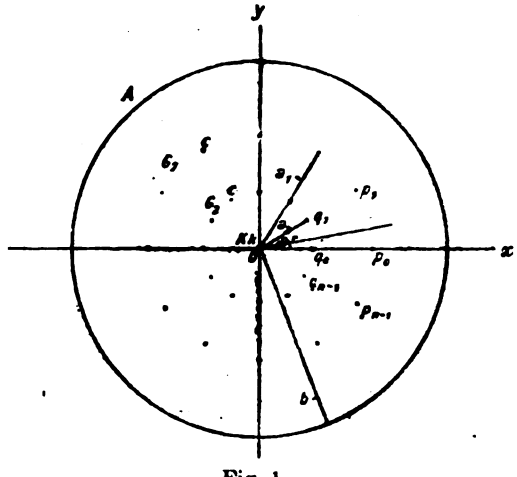


Fig. 1.

den Leitern

$$\{V_1 - V_2,\ V_1 - V_3,\ V_1 - V_4,\ V_2 - V_3,\ V_2 - V_4,\ V_3 - V_4\}$$

nur drei unabhängig vorzugeben. Es sind also die Beziehungen zwischen Ladungen und Spannungen vollständig charakterisiert durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} e_1 = C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) + C_{14}(V_1 - V_4), \\ e_3 = C_{13}(V_3 - V_1) + C_{23}(V_3 - V_2) + C_{34}(V_3 - V_4), \\ e_4 = C_{14}(V_4 - V_1) + C_{24}(V_4 - V_2) + C_{34}(V_4 - V_3). \end{cases} \tag{2}$$

Die gestellte Aufgabe geht dahin, von den sechs *Kapazitätskoeffizienten*[1])

$$\left.\begin{matrix} C_{12},\ C_{13},\ C_{14} \\ C_{23},\ C_{24} \\ C_{34} \end{matrix}\right\} \text{die drei in der letzten Kolonne angeschriebenen als Funktionen von } (a_1,\ a_2,\ b,\ c,\ k,\ n)$$

zu bestimmen. Setzt man

1) Auch *wechselseitige* (elektrostatische) *Induktionskoeffizienten* genannt.

$$(3) \qquad \alpha_1 = \frac{C_{14}}{C_{24}}, \quad \alpha_2 = \frac{C_{24}}{C_{34}},$$

so kann man die letzte der Gleichungen (2) schreiben:

$$(4) \qquad -e_4 = C_{34}\{\alpha_1\alpha_2(V_1 - V_4) + \alpha_2(V_2 - V_4) + (V_3 - V_4)\}.$$

Hier bedeuten $-e_4$ den Betrag der Ladung der Kathode, $V_1 - V_4$, $V_2 - V_4$ und $V_3 - V_4$ die Spannungen von Anode, erstem und zweitem Gitter gegen die Kathode. Die Zahl α_1 bzw. α_2 gibt an, in welchem Maße die Anodenspannung durch das erste bzw. dann durch das zweite Gitter „hindurchgreift". Der Durchgriff durch das Doppelgitter ist gleich dem Produkt aus den Durchgriffen durch G_1 und dann durch das G_2

$$D = D_1 D_2,$$

und da

$$D_1 = \alpha_1, \quad D_2 = \alpha_2,$$

so wird

$$D = \alpha = \frac{C_{14}}{C_{24}} \cdot \frac{C_{24}}{C_{34}} = \frac{C_{14}}{C_{34}}.$$

3. Lösung.

Es seien (Fig. 2) R, Θ Polarkoordinaten in der X Y-Ebene. In dem Ursprung O und in den Punkten $P(A_1)$ und $Q(A_2)$ der X-Achse $(A_1 > A_2)$ wird die X Y-Ebene senkrecht von elektrisch, mit den Liniendichten λ', λ_1 und λ_2 geladenen Linien durchstochen. Dann ist das elektrostatische Potential im Aufpunkt T:

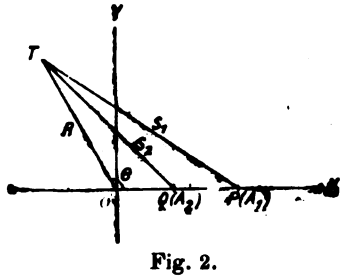


Fig. 2.

$$(5) \qquad \begin{cases} V = -2\lambda_1 \log S_1 - 2\lambda_2 \log S_2 \\ \qquad\quad - 2\lambda' \log R + C, \end{cases}$$

mit

$$(6) \qquad \begin{cases} S_1 = \sqrt{A_1^2 - 2A_1 R\cos\Theta + R^2} \\ S_2 = \sqrt{A_2^2 - 2A_2 R\cos\Theta + R^2}. \end{cases}$$

In Entfernungen $R \gg A_1$ von O wird $S_1 = S_2 = R$ und

$$V = -2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda')\log R;$$

also gehen die Niveaulinien im Kreise um O über. Einer von ihnen vom Radius $B \gg A_1$ soll als Durchschnitt eines das

System abschließenden Kreiszylinders gedacht werden, welcher innen die Ladung $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda')$ pro Längeneinheit trägt.

Nun werde durch die Beziehung:

$$X + iY = (x + iy)^n \tag{7}$$

die XY-Ebene konform auf die xy-Ebene abgebildet; sind r, ϑ Polarkoordinaten in der letzteren, so ergibt (7):

$$Re^{\Theta i} = r^n \cdot e^{n\vartheta i}, \tag{7a}$$

mithin

$$R = r^n, \quad \Theta = n\vartheta. \tag{7b}$$

Dem Ursprung ($R = 0$) der XY-Ebene entspricht somit der Ursprung ($r = 0$) der xy-Ebene. Dem Punkt P in Fig. 2 mit den Polarkoordinaten $R = A_1$, $\Theta = 2\pi\varkappa$ ($\varkappa$ ganzzahlig) entsprechen in Fig. 1 die n Gitterpunkte $p_\varkappa$ mit den Koordinaten

$$r = a_1, \quad \vartheta = \frac{2\pi}{n}\varkappa, \qquad (\varkappa = 0, 1 \ldots n-1)$$

dem Punkte Q in Fig. 2 mit den Polarkoordinaten $R = A_2$, $\Theta = 2\pi\varkappa$ ($\varkappa$ ganzzahlig) entsprechen in Fig. 1 die n Gitterpunkte $q_\varkappa$ mit den Koordinaten

$$r = a_2, \quad \vartheta = \frac{2\pi}{n}\varkappa, \qquad (\varkappa = 0, 1 \ldots n-1)$$

falls

$$A_1 = a_1^n \quad A_2 = a_2^n \tag{8}$$

gesetzt wird.

Der Niveaulinie $R = B$ entspricht in der xy-Ebene wiederum eine kreisförmige Niveaulinie $r = b$, wobei

$$B = b^n \tag{8a}$$

ist. Die Bedingung $B \gg A_1$ läßt sich schreiben:

$$\left(\frac{a_1}{b}\right)^n \ll 1. \tag{8b}$$

Diese ist z. B. mit genügender Genauigkeit erfüllt, wenn $b = 7/4\, a_1$, und $n = 10$ ist; dann ist der Fehler nur von der Ordnung 10^{-3}, wenn man den Durchschnitt des Anodenzylinders, der in Fig. 1 das Feld abschließt, als Niveaulinie des Potentials (5) betrachtet. Das Potential (5) entspricht nämlich nach der Theorie der konjugierten Funktionen in der xy-Ebene einem zweidimensionalen Felde, mit einer Punkt-

ladung $n\lambda'$ in O, n Punktladungen, je mit der Ladung λ_1, in den n Gitterpunkten $p_\varkappa$ und n Punktladungen λ_2 in den n Gitterpunkten $q_\varkappa$. Sein analytischer Ausdruck folgt aus (7b) und (8):

$$V = -2\lambda_1 \log S_1 - 2\lambda_2 \log S_2 - 2n\lambda' \log r + C \tag{9}$$

mit

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{a_1^{2n} - 2a_1^n r^n \cos n\vartheta + r^{2n}}, \\ S_2 = \sqrt{a_2^{2n} - 2a_2^n r^n \cos n\vartheta + r^{2n}}. \end{cases} \tag{9a}$$

Zwar bezieht sich das vorliegende Vierleiterproblem nicht auf geladene Linien durch O, $p_\varkappa$ und $q_\varkappa$, sondern auf leitende Drähte von kleinem, aber endlichem kreisförmigen Querschnitt. Doch ist bekannt, daß in der Nähe der geladenen Punkte O, $p_\varkappa$, $q_\varkappa$ die Niveaulinien des ebenen Potentiales in Kreise übergehen, so daß man, falls die Radien k, c der Drähte klein gegen deren Abstände sind, die Begrenzung ihrer Querschnitte als Niveaulinien ansehen kann. Das Potential (9) führt dann durch Einführung der Grenzbedingungen zur angenäherten Lösung des gestellten Problems.

Für $r^n \ll a_2^n$ ergibt (9a) $S_1 = a_1^n$, $S_2 = a_2^n$; also wird

$$V = -2n\lambda_1 \log a_1 - 2n\lambda_2 \log a_2 - 2n\lambda' \log r + C.$$

Somit ist auf der Oberfläche der *Kathode* K, wo $r = k$, das *Potential*

$$V_4 = -2n\lambda_1 \log a_1 - 2n\lambda_2 \log a_2 - 2n\lambda' \log k + C \tag{10}$$

falls

$$\left(\frac{k}{a_2}\right)^n \ll 1. \tag{10a}$$

Auch zeigt es sich, daß das Potential (9) konstant ist auf Kreisen vom Radius c um die Gitterpunkte $p_\varkappa$ und $q_\varkappa$, wofern

$$\frac{nc}{a_2} \ll 1. \tag{10b}$$

Dann wird für die Punkte[1]) auf der Oberfläche des ersten Gitters (G_1)

$$r^{(1)} = a_1 \pm c, \quad \vartheta = \frac{2\pi\varkappa}{n}$$

1) Die eingeklammerten oberen Indizes bezeichnen den Ort (1. oder 2. Gitter), an welchem die Größen gelten.

und für die Punkte auf der Oberfläche des zweiten Gitters (G_2)

$$r^{(2)} = a_2 \pm c, \quad \vartheta = \frac{2\pi\varkappa}{n},$$

wo die Radienvektoren $o\,p_\varkappa$ bzw. $o\,q_\varkappa$ jene Kreise schneiden gemäß (9a):

$$(11)\begin{cases} S_1^{(1)} = \left| a_1^n - r^{(1)n} \right| = a_1^n \left| 1 - \left(1 \pm \frac{c}{a_1}\right)^n \right| = a_1^n \left(\frac{n\,c}{a_1}\right), \\ S_2^{(1)} = \left| a_2^n - r^{(1)n} \right| = a_1^n \left| \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n - \left(1 \pm \frac{c}{a_1}\right)^n \right| \\ \qquad\qquad = a_1^n \left| 1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n \right| = a_1^n e^{-n\delta_1}, \\ S_1^{(2)} = \left| a_1^n - r^{(2)n} \right| = a_2^n \left| \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n - \left(1 \pm \frac{c}{a_2}\right)^n \right| \\ \qquad\qquad = a_2^n \left| \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n - 1 \right| = a_2^n e^{-n\delta_2}, \\ S_2^{(2)} = \left| a_2^n - r^{(2)n} \right| = a_2^n \left| 1 - \left(1 \pm \frac{c}{a_2}\right)^n \right| = a_2^n \left(\frac{n\,c}{a_2}\right). \end{cases}$$

mithin

$$(11a)\begin{cases} \log S_1^{(1)} = n\,(\log a_1 - \gamma_1) \\ \log S_2^{(1)} = n\,(\log a_1 - \delta_1) \\ \log S_1^{(2)} = n\,(\log a_2 - \delta_2) \\ \log S_2^{(2)} = n\,(\log a_2 - \gamma_2). \end{cases}$$

wobei

$$(11b)\begin{cases} \gamma_1 = -\frac{1}{n} \log \frac{n\,c}{a_1}, \\ \gamma_2 = -\frac{1}{n} \log \frac{n\,c}{a_2}, \\ \delta_1 = -\frac{1}{n} \log \left| 1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n \right|, \\ \delta_2 = -\frac{1}{n} \log \left| \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n - 1 \right|. \end{cases}$$

Gleichung (9) ergibt somit die Potentiale auf den Gittern; und zwar das *Potential auf dem Gitter* G_1:

$$V_2 = -2\lambda_1 \log S_1^{(1)} - 2\lambda_2 \log S_2^{(1)} - 2n\,\lambda' \log a_1 + C,$$

$$12) \qquad V_2 = -2n\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda') \log a_1 + 2n\,\lambda_1\,\gamma_1 + 2n\,\lambda_2\delta_1 + C,$$

das *Potential auf dem Gitter* G_2:

$$V_3 = -2\lambda_1 \log S_1^{(2)} - 2\lambda_2 \log S_2^{(2)} - 2n\,\lambda' \log a_2 + C,$$

$$13) \qquad V_3 = -2n\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda') \log a_2 + 2n\,\lambda_2\,\gamma_2 + 2n\,\lambda_1\,\delta_2 + C.$$

Schließlich wird auf der *Anode* $r = b$, unter der Bedingung (8b), $S_1 = S_2 = b^n$, mithin das *Potential*

$$V_1 = -2n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda')\log b + C. \tag{14}$$

Zusammenstellung der *Potentiale*:

Auf

A .... $V_1 = -2n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda')\log b + C$,

G_1 .... $V_2 = -2n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda')\log a_1 + 2n\lambda_1\gamma_1 + 2n\lambda_2\delta_1 + C$,

G_2 .... $V_3 = -2n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda')\log a_2 + 2n\lambda_2\gamma_2 + 2n\lambda_1\delta_2 + C$,

K .... $V_4 = -2n\lambda_1 \log a_1 - 2n\lambda_2 \log a_2 - 2n\lambda' \log k + C$.

Zusammenstellung der *Ladungen auf den Leitern*:

Auf

$$A \ldots . e_1 = -n(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda'), \tag{15}$$

$$G_1 \ldots . e_2 = n\lambda_1, \tag{16}$$

$$G_2 \ldots . e_3 = n\lambda_2, \tag{17}$$

$$K \ldots . e_4 = n\lambda'. \tag{18}$$

Somit ergeben sich aus (10), (12), (13), (14) folgende Ausdrücke für die *Spannungen zwischen den Leitern*:

$$\left\{\begin{aligned}
V_1 - V_2 &= 2e_1\left[\log\left(\frac{b}{a_1}\right) + \gamma_1\right] + 2e_3(\gamma_1 - \delta_1) + 2e_4\gamma_1,\\
V_1 - V_3 &= 2e_1\left[\log\left(\frac{b}{a_2}\right) + \delta_2\right] - 2e_3(\gamma_2 - \delta_2) + 2e_4\delta_2,\\
V_1 - V_4 &= 2e_1\log\left(\frac{b}{a_1}\right) + 2e_3\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - 2e_4\log\left(\frac{a_1}{k}\right),\\
V_2 - V_3 &= -2e_1\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \gamma_1 - \delta_2\right] - 2e_3(\gamma_1 + \gamma_2 - \delta_1 - \delta_2)\\
&\qquad - 2e_4(\gamma_1 - \delta_2),\\
V_2 - V_4 &= -2e_1\gamma_1 + 2e_3\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - \gamma_1 + \delta_1\right]\\
&\qquad - 2e_4\left[\log\left(\frac{a_1}{k}\right) + \gamma_1\right],\\
V_3 - V_4 &= 2e_1\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - \delta_2\right] + 2e_3\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \gamma_2 - \delta_2\right]\\
&\qquad - 2e_4\left[\log\left(\frac{a_1}{k}\right) + \delta_2\right].
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Indem man aus der 3., 5. und 6. dieser Gleichungen e_1 und e_3 eliminiert, erhält man eine Gleichung nach dem Schema der 3. Gleichung von (2) mit

$$(19a)\quad C_{14} = \frac{8\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left\{\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left[\delta_2 - \delta_1 - \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\right] - (\gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2)\right\}}{N(a_1, a_2, b, c, k, n)},$$

$$19b)\quad C_{24} = \frac{8\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left\{\log^2\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - \log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \gamma_2\right] - \delta_2\log\left(\frac{a_2}{b}\right)\right\}}{N(a_1, a_2, b, c, k, n)},$$

$$(19c)\quad C_{34} = \frac{8\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left\{\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \delta_1\right] + \gamma_1\log\left(\frac{a_2}{b}\right)\right\}}{N(a_1, a_2, b, c, k, n)},$$

wobei N eine ganz bestimmte Funktion von (a_1, a_2, b, c, k, n) ist. Durch (19a, b, c) und (11b) ist das gestellte Problem gelöst, nämlich die zur Berechnung der durch (8) definierten „Durchgriffe" erforderlichen Kapazitätskoeffizienten des Vierleitersystems durch dessen geometrische Bestimmungsstücke auszudrücken.

Der Durchgriff durch das erste bzw. dann durch das zweite Gitter ist demnach:

$$(20)\quad \begin{cases} D_1 = \alpha_1 = \dfrac{\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left[\delta_2 - \delta_1 - \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\right] - (\gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2)}{\log^2\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - \log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \gamma_2\right] - \delta_2\log\left(\frac{a_2}{b}\right)}, \\ D_2 = \alpha_2 = \dfrac{\log^2\left(\frac{a_2}{a_1}\right) - \log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \gamma_2\right] - \delta_2\log\left(\frac{a_2}{b}\right)}{\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \delta_1\right] + \gamma_1\log\left(\frac{a_2}{b}\right)}, \end{cases}$$

somit wird der *Durchgriff durch das Doppelgitter*:

$$(21)\quad D = D_1 D_2 = \frac{\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left[\delta_2 - \delta_1 - \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\right] - (\gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2)}{\log\left(\frac{b}{a_1}\right)\left[\log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \delta_1\right] + \gamma_1\log\left(\frac{a_2}{b}\right)};$$

er ist also wie beim Einfachgitter von k, dem Radius des Kathodendrahtes unabhängig.

Die im vorstehenden angegebene Lösung für den Durchgriff in Doppelgitterröhren ist eine näherungsweise, da ihre

Gültigkeit (unter Vernachlässigung der Raumladungen und des Potentialabfalls längs der stromdurchflossenen Glühkathode) an die Bedingungen (8b), (10a) und (10b) des zweidimensionalen Problems geknüpft ist, die aber unter den praktischen Verhältnissen meist erfüllt sind.

Ist auch noch

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n \ll 1, \tag{22}$$

so vereinfachen sich die Ausdrücke für die Durchgriffe zu:

$$\begin{cases} D_1 = \dfrac{\log\left(\dfrac{a_1}{nc}\right)}{n\log\left(\dfrac{b}{a_1}\right)}, \\ D_2 = \dfrac{\log\left(\dfrac{a_2}{nc}\right)\log\left(\dfrac{b}{a_1}\right)}{n\log\left(\dfrac{b}{a_1}\right)\log\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)+\log\left(\dfrac{b}{a_2}\right)\log\left(\dfrac{a_1}{nc}\right)}, \end{cases} \tag{23}$$

und somit

$$D = \frac{\log\left(\dfrac{a_1}{nc}\right)\log\left(\dfrac{a_2}{nc}\right)}{n\left[n\log\left(\dfrac{b}{a_1}\right)\log\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)+\log\left(\dfrac{b}{a_2}\right)\log\left(\dfrac{a_1}{nc}\right)\right]}. \tag{24}$$

In allen jenen Fällen, in denen die vorausgesetzten einschränkenden Bedingungen zutreffen, wird der in Formel (21) und (24) angegebene Durchgriff bzw. seine Faktoren, die — wie die Theorie der Verstärkerröhren zeigt — nicht nur ein Maß für die Größe des inneren Widerstandes und der Verstärkung sind, sondern auch ohne wesentliche Beeinträchtigung der Verstärkung für die Herabsetzung des Sättigungsstromes (Minimalbelastung des Glühfadens), wertvolle Dienste leisten.

4. Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit behandelt einen Sonderfall des Vierleiterproblems der Elektrostatik, nämlich die folgende Zylinderanordnung: Ein Draht von kreisförmigem Querschnitt (Kathode), ein konzentrischer Kreiszylinder (Anode), dazwischen zwei Gitter (Hilfselektroden), jedes bestehend aus n gleichen, äquidistanten auf ebenfalls konzentrischen Kreiszylindern angeordneten Drähten.

Unter gewissen einschränkenden, in den praktischen Fällen aber meist erfüllten Bedingungen wird jene, bloß von den Elektrodendimensionen abhängige, in der Röhrendynamik „Durchgriff" genannte Konstante berechnet, welche angibt, in welchem Maße bei gegebener Spannung die Anode durch die Gitter hindurch, im Vergleich mit dem Steuergitter, zu dem auf der Kathode mündenden Kraftflusse beiträgt.

Wien, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 17. November 1919.)

2. *Zur Frage nach der Existenz wahrer Pyroelektrizität;*

von Karl F. Lindman.

1. Die Frage, ob es überhaupt eine wahre, d. h. nur durch Temperaturveränderung bedingte Pyroelektrizität gibt oder ob die pyroelektrische Erregung sich vollständig auf die durch die Erwärmung bzw. Abkühlung erzeugte Deformation des Kristalles zurückführen läßt, ist bekanntlich verschieden beantwortet worden, je nach den Werten der thermischen Ausdehnungskoeffizienten des Turmalins (des einzigen Kristalles, in dem man eine wahre pyroelektrische Wirkung überhaupt hat nachweisen zu können geglaubt), welche man der Rechnung zugrunde gelegt hat. Eine von Riecke und Voigt[1]) gemeinsam ausgeführte Untersuchung, bei der die von Pfaff[2]) gefundenen Werte der Dilatationskoeffizienten des Turmalins benutzt wurden, ergab einen so geringen Unterschied zwischen der piezo- und der pyroelektrischen Erregung — es betrug dieser Unterschied etwa 10 Proz. —, daß diese Forscher angesichts der Unsicherheit der vielen verschiedenartigen Messungen, auf welche sich ihre Berechnung stützte, den Schluß zogen, daß in Übereinstimmung mit der von Röntgen und den Entdeckern der Piezoelektrizität, F. und P. Curie, schon früher ausgesprochenen Ansicht eine wahre Pyroelektrizität nicht existiere. In einer späteren Abhandlung kam Voigt[3]) dagegen zu einem entgegengesetzten Ergebnis. Es war ihm und Riecke früher entgangen, daß der Pfaffsche Wert für den Koeffizienten der thermischen Dilatation des Turmalins senkrecht zur Hauptachse von dem von Fizeau nach einer genaueren Methode gefundenen Werte stark abwich. Auf Voigts Veranlassung

1) E. Riecke u. W. Voigt, Wied. Ann. 45. S. 523. 1892.
2) F. Pfaff, Pogg. Ann. 104. S. 171. 1858.
3) W. Voigt, Wied. Ann. 66. S. 1030. 1898.

war jetzt der von ihm (und Riecke) in anderen Beziehungen untersuchte Turmalin mit Bezug auf seine thermische Ausdehnung von Pulfrich und Kellner in Jena untersucht worden und zwar mit einem Ergebnis, das mit dem Fizeauschen Werte des soeben erwähnten Dilatationskoeffizienten besser als mit dem Pfaffschen übereinstimmte. Mit Benutzung der Pulfrich-Kellnerschen Werte der Dilatationskoeffizienten des Turmalins [1]), bezogen auf eine mittlere Temperatur von +22,2°C., fand Voigt jetzt, daß 18 oder rund 20 Proz.[2]) der bei der Erwärmung des Turmalins stattfindenden pyroelektrischen Erregung als eine direkte Wirkung der Temperaturerhöhung aufzufassen sei und somit übrig bleibe, wenn man durch geeignete Drucke die thermische Deformation aufheben könnte.

In einer Abhandlung vom Jahre 1914, wo er seine späteren pyro- und piezoelektrischen Untersuchungen zusammenfaßt, erörtert Röntgen[3]) auch die Frage nach der Existenz einer wahren Pyroelektrizität. Nach seinen Erfahrungen ist die Bestimmung namentlich der elektrischen Konstanten des Turmalins noch mit mancher Unsicherheit verknüpft. Zwar sind von Voigt wohl alle Konstanten an Präparaten aus einem Kristall beobachtet worden, aber ob deshalb alle Präparate in ihren, namentlich elektrischen, Eigenschaften auch wirklich gleichartig waren, das scheint nicht festzustehen angesichts der Versuche von ihm (Röntgen) und Riecke, nach denen ein anscheinend homogener Kristall an zwei Stellen verschieden stark pyroelektrisch erregbar sein kann. Als Ergebnis seiner und der von ihm veranlaßten Versuche teilt Röntgen zuletzt Zahlenwerte mit, die kein Anzeichen für die Existenz wahrer Pyroelektrizität in Turmalin liefert (die lediglich aus den thermischen Deformationen berechnete pyroelektrische Erregung

1) Auch einige andere Konstanten des Kristalles waren jetzt von neuem sorgfältig bestimmt worden. Die Abweichung von den älteren Werten dieser Konstanten war jedoch so gering, daß sie bei der Berechnung des Moduls der wahren Pyroelektrizität nur eine untergeordnete Rolle spielte.

2) Durch Wiederholung seiner Rechnung mit Benutzung der von ihm angegebenen Konstanten habe ich als Resultat die Zahl 18,6 bekommen.

3) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 45. S. 737. 1914. — Wegen des Krieges habe ich erst kürzlich Kenntnis von dieser Arbeit bekommen.

γ' ist bei der Temperatur $+ 20^\circ$ C. nach seinen Versuchen 4 Proz. größer als die beobachtete pyroelektrische Konstante γ, während Voigt für seinen Turmalin bei $+ 22{,}2^\circ$ C. γ um etwa 20 Proz. größer als γ' fand). Obwohl Röntgen diesem Ergebnis keineswegs volle Beweiskraft für die Nichtexistenz wahrer Pyroelektrizität beilegt, so findet er doch, daß die Voigtschen Versuche nicht genügen, um das Vorhandensein dieser Pyroelektrizität außer allem Zweifel zu stellen oder, richtiger ausgedrückt, um den Betrag der wahren Pyroelektrizität, deren Existenz er jetzt aus theoretischen Gründen nicht als unwahrscheinlich hält, festzustellen.

2. Bei der Ausrechnung der Ergebnisse der von Kellner ausgeführten Messungen der thermischen Ausdehnung des Hrn. Voigt gehörigen Turmalins bediente sich Pulfrich des von Reimerdes[1]) kurz vorher bestimmten Wertes des axialen Dilatationskoeffizienten des als Vergleichskörper benutzten Quarzringes, welcher Wert indessen, wie ich durch Versuche mit demselben Quarzringe nachgewiesen habe[2]), nicht unwesentlich (bei $t = 50^\circ$ C. um etwa $0{,}25 \cdot 10^{-6}$ Einh.) zu klein ist. Die Pulfrich-Kellnerschen Werte der Ausdehnungskoeffizienten des oben erwähnten Turmalins müssen demnach auch etwas zu klein sein, welches auch meine Untersuchung über

1) F. Reimerdes, Inaug.-Dissert., Jena 1896.

2) Karl F. Lindman, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, XLVI. Nr. 5. 1916. Die Versuche wurden von mir schon im Winter 1898/99 im Physikalischen Institut der Universität Jena mit wohlwollender Unterstützung der Firma Zeiss (durch Vermittlung von Dr. Pulfrich) ausgeführt, obwohl die Bearbeitung des Beobachtungsmaterials (hauptsächlich wegen eines erst viele Jahre später entdeckten verhängnisvollen Rechenfehlers) leider so lange Zeit unbeendigt blieb, daß die Veröffentlichung erst im Jahre 1916 stattfinden konnte. Meine Versuche über die Ausdehnung des Quarzes $\parallel$ zur Achse bezogen sich auf Temperaturen zwischen $+ 9^\circ$ und $+ 434^\circ$ C. und zwar stimmen die von mir erhaltenen Werte mit den von Scheel (Ann. d. Phys. 9. S. 837. 1902) für Temperaturen zwischen $+ 15^\circ$ und $+ 100^\circ$ C. gefundenen sehr gut überein. Die Diskrepanz zwischen meinen und Reimerdes' Beobachtungen dürfte darauf zurückgeführt werden können, daß die von ihm gemessenen Temperaturen im allgemeinen ein wenig höher als die des Quarzpräparates waren. — Außer der Ausdehnung $\parallel$ zur Achse untersuchte ich auch die Ausdehnung eines Quarzwürfels $\perp$ zur Achse im Temperaturintervall $+ 10^\circ$ bis $+ 334^\circ$ C.

die thermische Ausdehnung desselben Turmalinkristalles, die Hr. Voigt durch Hrn. Pulfrich gütigst zu meiner Verfügung gestellt hatte, direkt bestätigte.[1]) Hierzu kommt noch, daß die Temperatur von 22,2° C., auf welche sich Voigts Untersuchung über die pyro- und piezoelektrischen Eigenschaften des Turmalins bezieht, nicht unwesentlich außerhalb des Temperaturintervalles fällt, für welches die Pulfrich-Kellnerschen Dilatationsformeln aufgestellt worden sind (für α_1 41,0—52,5° und für α_3 33,5—50,5° C.).

Für Temperaturen zwischen etwa + 9° und + 320° C. lassen sich die Koeffizienten α_1 und α_3 der thermischen Ausdehnung des Turmalins $\perp$ und $\parallel$ zur kristallographischen Hauptachse nach meinen Versuchen durch die folgenden Formeln darstellen:

$$\perp \text{ zur Achse: } \alpha_1 = (3{,}583 + 0{,}00898\,t)\cdot 10^{-6},$$
$$\parallel \text{ „ „ } \alpha_3 = (8{,}624 + 0{,}01125\,t)\cdot 10^{-6}.$$

Für $t = +\,22{,}2°$ C. hat man demnach

$$\alpha_1 = 3{,}782\cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 8{,}874\cdot 10^{-6},$$

während die entsprechenden durch Extrapolation erhaltenen Pulfrich-Kellnerschen Werte waren:

$$\alpha_1 = 3{,}36\cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 8{,}29\cdot 10^{-6}.$$

Zum Vergleich mag hier erwähnt werden, daß man nach Fizeau[2]) für dieselbe Temperatur hat:

$$\alpha_1 = 3{,}481\cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 8{,}480\cdot 10^{-6},$$

welche Werte auch etwas größer als die zuletzt erwähnten sind. Die entsprechenden Pfaffschen Werte (a. a. O.), die für eine mittlere Temperatur von + 50° C. gefunden wurden, sind dagegen:

$$\alpha_1 = 7{,}732\cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 9{,}369\cdot 10^{-6}.$$

1) Karl F. Lindman, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, XLVI. Nr. 6. 1916. Die Versuche, auf welche diese Abhandlung sich stützt, wurden im Zusammenhang mit meinem soeben erwähnten Versuche über die Ausdehnung des Quarzes im Winter 1898/99 in Jena ausgeführt.

2) H. Fizeau, l'Annuaire du Bureau des Longitudes 1877, zitiert nach Jamin, Cours de physique 2. S. 80. 1878.

Für den von Röntgen (a. a. O.) untersuchten Turmalin hatte sich ergeben für $t = 20^0$ C.:

$$\alpha_1 = 3{,}51 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 8{,}72 \cdot 10^{-6}.$$

Aus meinen Formeln ergibt sich für $t = 20^0$ C.:

$$\alpha_1 = 3{,}763 \cdot 10^{-6} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 8{,}849 \cdot 10^{-6}.$$

Die Übereinstimmung zwischen den zuletzt angeführten Werten ist sogar sehr gut, wenn man bedenkt, daß sie an verschiedenen Kristallen beobachtet worden sind und daß Röntgen die Dilatationskonstanten seines Kristalles als „mit kleiner Unsicherheit behaftet" bezeichnet, während die nach meinen Formeln berechneten um $0{,}1 \cdot 10^{-6}$ unsicher sein dürften.

3. Die Frage nach der Existenz wahrer Pyroelektrizität spitzt sich nach Voigts Theorie zu auf die Untersuchung des Wertes der mit dem Modul der wahren Pyroelektrizität proportionalen Größe λ, definiert durch

$$\lambda = \nu - \mu \frac{(s_{11} + s_{12})\alpha_3 - 2 s_{13} \alpha_1 + (s_{33} \alpha_1 - s_{13} \alpha_3) 2 \delta_{31}/\delta_{33}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2 s_{13}^2}.$$

Es bezeichnen hier die Größen $s_{hk} (h = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3)$ Elastizitätsmodulen, δ_{31} und δ_{33} zwei piezoelektrische Modulen, α_1 und α_3 die Koeffizienten der thermischen Dilatation $\perp$ und $\parallel$ zur Hauptachse, μ eine mit δ_{13} und ν eine mit dem Modul der totalen pyroelektrischen Wirkung proportionale Größe. Je nachdem λ von Null verschieden oder gleich Null ist, ist wahre Pyroelektrizität vorhanden oder nicht. Im ersteren Falle ergibt dann λ/ν den Bruchteil der ganzen pyroelektrischen Erregung, der als wahre Pyroelektrizität zu bezeichnen ist.

Die Zahlenwerte der im Ausdrucke für λ vorkommenden Größen — mit Ausnahme von α_1 und α_3 — welche Voigt in seiner letzteren Untersuchung benutzte, sind die folgenden (zum Teil in willkürlichen Einheiten ausgedrückt und auf eine mittlere Temperatur von $+ 22{,}2^0$ C. bezogen):

$$\nu = 645; \qquad \mu = 30{,}2; \qquad \delta_{31}/\delta_{33} = 0{,}129;$$

$$s_{11} = 3{,}91 \cdot 10^{-7}; \qquad s_{12} = -1{,}01 \cdot 10^{-7}; \qquad s_{13} = -0{,}16 \cdot 10^{-7};$$

$$s_{33} = 6{,}12 \cdot 10^{-7}.$$

Mit Benutzung dieser Konstanten und die oben erwähnten von mir erhaltenen Werte von α_1 und α_3 ergibt sich

$$\lambda = 645 - 568 = 77 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda}{r} = \frac{77}{645} = 0{,}119.$$

Der Teil der totalen Pyroelektrizität des betreffenden Turmalins, der als eine wahre Pyroelektrizität aufgefaßt werden könnte, hat sich hierdurch von dem von Voigt angegebenen Werte 18 (eigentlich 18,6 oder rund 20) zu nur 11,9 Proz. reduziert. Der durch zufällige Versuchsfehler bedingte mittlere Fehler dieser Prozentzahl (11,9) beträgt allerdings, wie eine Durchmusterung der Genauigkeit der verschiedenen Konstantenbestimmungen, auf welche sich die Berechnung von λ stützt, ergeben hat, nicht mehr als etwa $\pm$ 1,5. Wenn man aber in Betracht zieht, daß die betreffende Prozentzahl nicht direkt erhalten worden ist, sondern auf einem Umweg durch Kombination vieler Konstantenbestimmungen, bei denen systematische Fehler nicht ganz ausgeschlossen und namentlich die elektrischen Konstanten nach Röntgen nicht ganz zuverlässig sind, so scheint jedoch die nur durch die Neubestimmung der thermischen Dilatationskonstanten bewirkte Reduzierung dieses Teils von dem von Voigt angegebenen Werte zu dem hier erhaltenen die Zuverlässigkeit der Voigtschen Schlußfolgerung von der Existenz wahrer Pyroelektrizität so wesentlich zu verringern, daß man wohl behaupten darf, daß es gegenwärtig keinen experimentellen Beweis für die Existenz wahrer Pyroelektrizität gibt. Unter solchen Umständen scheint die oben erwähnte Röntgensche Untersuchung die Nichtexistenz dieser Elektrizität recht genau bewiesen zu haben.

Åbo, im Januar 1920.

(Eingegangen 14. Januar 1920.)

3. *Thermodynamik der seltenen Zustände im Dampfraum.*[1]) *(Thermische Ionisierung und thermisches Leuchten.) I. Teil;*

von W. Schottky.

(Würzburger Habilitationsschrift.)

Einleitung.

Im überwiegenden Teile ihres Anwendungsbereiches erscheint die Thermodynamik als eine Wissenschaft von ausgesprochen demokratischem Charakter. Maßgebend für das Verhalten eines thermodynamischen Systems ist der Durchschnitt; die spezifische Wärme, die Arbeitsfähigkeit, die Raumerfüllung sind nur abhängig von den betreffenden Durchschnittsbeiträgen außerordentlich vieler Elementarbestandteile des Systems. Das abweichende Verhalten einiger weniger Bestandteile interessiert nicht, weil es die Durchschnittswerte nicht nennenswert zu beeinflussen imstande ist.

Eine andere Betrachtungsweise wird notwendig, wenn die seltenen Zustände mit neuen spezifischen Erscheinungen verknüpft sind, die der Gesamtheit der durchschnittlichen Zustände fremd sind. Auffallende Erscheinungen elektrischer und optischer Natur, die mit gewissen ausgezeichneten Zuständen verknüpft sind, lenken die Aufmerksamkeit in ganz anderem Maße als es etwa die Beiträge zu der Gesamtenergie tun würden, auch auf die seltenen Zustände der Elementarteilchen eines thermischen Systems. Die Zahl dieser seltenen Zustände, die sonst nur als Fehlergröße Bedeutung hätte, erfährt durch das Spezifische der mit diesen Zuständen verbundenen Erscheinungen unter Umständen eine derartig größenordnungsmäßige Verschiebung ihrer Bedeutung, daß eine ganz andere Genauigkeit in ihrer Berechnung notwendig wird als für die gewöhnlichen Zwecke der Thermodynamik.

1) Auf einige Resultate dieser Arbeit ist bereits bei einem Vortrag in der Deutschen Phys. Gesellschaft am 25. Juli 1919 hingewiesen worden. (Verh. d. D. Phys. Ges. 21. S. 529–532. 1919.)

Dem Historiker sind ähnliche Dinge ja geläufig: er kennt die spezifische Wirkung der Ausnahmenaturen, die aus der Masse hervorragen und trotz ihrer geringen Zahl doch für gewisse Züge im Leben der Völker ausschlaggebend sind.

Ehe man jedoch daran gehen kann, eine statistische Behandlungsweise auszuarbeiten, die genügend viel Faktoren enthält, um das Auftreten der seltenen Erscheinungen mit berücksichtigen zu können, ist noch ein Einwand zu prüfen, der nicht nur auf historischem, sondern auch auf physikalischem Gebiete im Hinblick auf diese Ausnahmeerscheinungen gemacht wird. Das Fremdartige, den Gesetzen der Masse Widersprechende, das in dem Auftreten der seltenen Erscheinungen liegt, fordert offenbar dazu heraus, für diese Erscheinungen die Gültigkeit der ausgleichenden Gesetze, die die Masse beherrschen, zu leugnen; eine neue Ursache (zunächst unbekannten Ursprungs) wird für ihr Auftreten verantwortlich gemacht.

Etwas Derartiges trifft nun auch auf die Beurteilung der Vorgänge zu, deren Behandlung wir uns zum Ziel gesetzt haben: der „seltenen Zustände im Dampfraum", worunter ich vor allem das Auftreten geladener Bestandteile (Elektronen, Ionen, geladener Moleküle und Molekülgruppen) verstehe, daneben aber auch (im allgemeinen Einsteinschen[1]) Sinne) die Zustände der Teilchen, die sie befähigen, Licht von bestimmter Frequenz auszusenden. Es ist das also das Gebiet der Ionenbildung an glühenden Substanzen, die Frage des Auftretens (oder Nichtauftretens) von Ladungen beim Verdampfen eines geladenen Körpers, ferner ein großer Teil der Vorgänge in der Flamme, bei der Verdampfung von Salzen und anderen Substanzen. Auch gewisse Erscheinungen im elektrischen Lichtbogen kommen dabei in Frage.

Das Problem ist also: Ist das Auftreten von Ladungen und von spektralem Licht in dem genannten so außerordentlich umfassenden und komplizierten Erscheinungskomplex im wesentlichen aus den Gesetzen eines statistischen Gleichgewichtszustandes zu verstehen oder nicht? Sind diese Erscheinungen im wesentlichen thermische oder nicht?

Man erinnert sich, daß dieselbe Frage auf dem speziellen

1) A. Einstein, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 18. S. 318—323. 1916.

Gebiet der Elektronenemission aus Glühelektroden die Geister vor etwa 6—8 Jahren besonders lebhaft beschäftigt hat und damals durch Versuche Richardsons an Wolfram unter Zuhilfenahme der Langmuirschen Vakuumtechnik prinzipiell zugunsten der thermischen Auffassung entschieden worden ist.[1]) Hier handelt es sich nun um dieselbe Fragestellung, jedoch auf einem weit größeren und schwerer zu übersehenden Gebiet.

Wenn zwischen thermischen und nichtthermischen Ursachen unterschieden wird, so ist allerdings zu bemerken, daß eine bewußte und prinzipielle Unterscheidung dieser Art meines Wissens nur von einem Autor versucht worden ist: von K. Fredenhagen, der in seiner Habilitationsschrift „Spektralanalytische Studien"[2]) für das Gebiet der Salzspektren in Flammen ausdrücklich die Hypothese einführt, daß die Serienstrahlung als eine Art geordneter Vorgang nur durch einen einseitig verlaufenden Prozeß (chemische Reaktion) hervorgerufen werden kann. Eine ähnliche Anschauung hat Fredenhagen bekanntlich später auch für die Entstehung von geladenen Teilchen, insbesondere Elektronen verfochten.

Diese Ansicht kann widerlegt werden, wenn man gewisse, ziemlich allgemein für richtig gehaltene und naheliegende Voraussetzungen akzeptiert, die sich auf die Art der Entstehung geladener und leuchtfähiger Teilchen beziehen. Wenn die Trennung eines Teilchens in geladene Unterbestandteile und die Lichtaussendung ein Vorgang ist, der nur von dem Zustand eines, oder einiger weniger (zusammenstoßender) Teilchen abhängt, so ist es klar, daß der Unterschied zwischen Gleichgewichts- und einseitig verlaufenden Vorgängen nur eine graduelle, nicht eine prinzipielle Änderung der Erscheinungen bewirken kann, da es als eine sehr wohl begründete Tatsache angesehen wird, daß im Gleichgewicht genau so wie vor dem Erreichen des Gleichgewichtszustandes Reaktionen im einen und im anderen Sinne sich abspielen. Das Verschwinden eines mit einer Reaktion verbundenen Effektes könnte also

1) Vgl. zu allen Glühelektrodenfragen Richardsons Abhandlung über Glühelektroden in Marx' Handb. d. Radiologie, Bd. 4, und meinen „Bericht über thermische Elektronenemission", Jahrb. für Radioakt. u. Elektr. 15. S. 147—205. 1915.

2) K. Fredenhagen, Ann. d. Phys. 20. S. 133—173. 1906.

im Gleichgewichtszustand nur dann eintreten, wenn das Gleichgewicht eine so extreme Verschiebung nach einer Seite zeigt, daß praktisch keine Bestandteile in der ursprünglichen reaktionsfähigen Form mehr vorhanden sind.

Damit ist allerdings noch nicht die weitergehende Voraussetzung bewiesen, daß das Auftreten der „seltenen Erscheinungen" (Leitungs- und Kraftwirkungen von Elektrizität im Dampfraum, Auftreten spektralen Lichtes) mit der Häufigkeit gewisser „seltener *Zustände*" konform geht. Von den elektrischen Strömungs- und Kraftwirkungen weiß man allerdings, daß sie mit der Zahl der geladenen Teilchen in der Volumeinheit, die eine statistisch erfaßbare Größe ist, eng zusammenhängen müssen, doch ist es von vornherein ganz unsicher, wie weit gerade bei Strommessungen, die fast das einzige Mittel sind, um das Auftreten geladener Teilchen erkennen zu lassen, die Versuchsbedingungen von den statistischen abweichen. Und bei der Lichtemission bedarf es erst recht besonderer Annahmen (die in der Form, wie wir sie später zugrunde legen, der neueren Quantentheorie entstammen), um einen direkten Zusammenhang mit der Häufigkeit gewisser *Zustände* gelten zu lassen.

So ist es denn nicht wunderbar, wenn bei einer anderen Gruppe von Forschern die Frage nach dem statistischen Charakter der Erscheinungen zurücktritt hinter der direkten Frage nach der Entstehungsart, nach den Elementargesetzen der elektrischen und optischen Vorgänge auf unserem Gebiete. Ein derartiges Verfahren, das alle Erscheinungen aus direkten Annahmen über ihren Mechanismus so vollständig als möglich zu erklären sucht, geht natürlich im Grunde über das der thermodynamischen Betrachtungsweise hinaus und muß, wenn es vollständig durchgeführt ist, unter anderem auch zu den Bedingungen des Gleichgewichtszustandes führen. Um aus der Zahl der auf diesem Wege vorwärtsdringenden Autoren nur einige herauszugreifen, nenne ich P. Lenard mit seinen zum Teil sehr detaillierten Annahmen über die Entstehung der Ladungsträger in Flammen[1]) sowie den Mechanismus der Lichterregung. Ferner die lichtelektrische Theorie

1) Über Elektronen und Metallatome in Flammen. Sitzungsber. d. Heidelb. Akademie 1914. A. 17. Abhandl.

der Elektronenemission von W. Wilson[1]) und die lichtelektrische Theorie der Flammenleitung von E. Marx.[2])

Gerade die bei einer derartigen Betrachtungsweise etwas in den Hintergrund gerückte Frage, ob es sich im wesentlichen um thermische Gleichgewichtszustände handelt oder nicht, bedeutet aber für die Prüfbarkeit und Unterscheidbarkeit derartiger spezieller Hypothesen auf unserem Gebiete eine gewisse Gefahr. Der Gleichgewichtszustand ist durch viel weniger Variable charakterisiert als die Reaktionen, die zu diesem Gleichgewichtszustand führen, und es ist eine bekannte Regel, die mit dem zweiten Wärmesatz zusammenhängt, daß verschiedene voneinander unabhängige Ursachen, die einen Gleichgewichtszustand herbeizuführen vermögen (z. B. Zusammenstöße und Strahlungsaustausch), derartig wirksam sein müssen, daß jede einzelne von ihnen für sich dieselbe Verteilung der Energie auf die materiellen Teilchen hervorzurufen vermag, die dem thermischen Gleichgewicht entspricht. Wenn aber ein solcher Satz gilt, und der beobachtete Zustand ist dem Gleichgewichtszustand mehr oder minder verwandt, so ist es klar, daß es sehr schwer sein wird, aus dem Studium dieses Zustandes zu entnehmen, auf welche Weise er zustande gekommen ist. Im allgemeinen wird es jedenfalls viel leichter sein, spezielle Hypothesen über die Einzelvorgänge mittels solcher Versuche zu prüfen, bei denen die Versuchsbedingungen mit Absicht möglichst das Gegenteil eines thermischen Gleichgewichts darstellen.

Unter diesem Gesichtspunkt hat also die Frage, wie weit sich die Erscheinungen auf unserem Gebiet auf Gleichgewichtszustände zurückführen lassen, für die Ökonomie der Forschung selbst eine maßgebende Bedeutung. Verfolgen wir nun die Entwicklung derjenigen Richtung, die insbesondere auf dem Gebiet der Dampfionisation an einen wesentlich oder rein thermischen Effekt glaubt, so haben wir hier wieder zwei verschiedene Methoden zu unterscheiden. Die eine, deren Hauptvertreter für das Gebiet der Glühelektroden O. W. Richardson ist, nimmt zwar das Bestehen von thermischen Gleichgewichtszuständen an, verknüpft aber die thermische

1) Ann. d. Phys. **42.** S. 1154. 1913.
2) Ann. d. Phys. **50.** S. 521—554. 1916.

Betrachtungsweise von vornherein mit speziellen Annahmen über den Zustand der Elektronen (oder Ionen) in glühenden Metallen. Ebenso finden sich bei den meisten anderen Autoren, die über Glühelektroden, Flammenleitung, Lichtbogen gearbeitet haben, Gleichgewichtsbetrachtungen, die in Verbindung mit speziellen Anschauungen über die Einzelvorgänge herangezogen werden. Im gewissen Sinne gehören hierher auch gleich die weiter unten zu besprechenden thermodynamischen Betrachtungen von K. F. Herzfeld, insofern sie spezielle Annahmen über die Zustände der Ionen und Elektronen im Metallinnern (Möglichkeit eines dissoziierten und eines nicht dissoziierten Zustandes) involvieren.

Eine rein thermodynamische Betrachtungsweise tritt, soviel ich sehe, zuerst auf bei der Behandlung der Salzdissoziation in Flammen (Arrhenius[1]) 1891), wo der Vergleich mit der Dissoziation in wässerigen Lösungen nahe lag. Eine Anwendung der Thermodynamik auf die Verdampfung von Elektronen aus glühenden Metallen gibt H. A. Wilson mit seiner bekannten rein thermodynamischen Ableitung der Richardsonschen Dampfdruckformel. Eine wichtige, aber in ihren Anwendungen auf die Dampfionisierung nicht ausgewertete Formel für das Ionisierungsgleichgewicht findet sich bei K. Herzfeld (vgl. weiter unten). Neuerdings ist der aus den Wilsonschen Betrachtungen folgenden Dampfdruckformel von M. von Laue eine andere, ebenfalls thermodynamisch abgeleitete, an die Seite gestellt worden[2]), deren Allgemeingültigkeit und Übereinstimmung mit der Wilsonschen Formel vom Verfasser nachgewiesen wurde.[3])

Damit sind jedoch die rein thermodynamischen Untersuchungen über die Entstehung von Ladungen an der Oberfläche glühender Körper und im Dampfraum einigermaßen erschöpft. Angesichts der Wichtigkeit der Frage, welche Erscheinungen auf diesem Gebiete bereits durch die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichtszustandes erklärt werden können, gewiß eine ergänzungsbedürftige Literatur. Er-

1) Svenska Vet. Ak. Handl. Afh. 1. S. 1. 1890; Wied. Ann. 42. S. 18. 1891.

2) Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik 18. S. 205—256. 1918.

3) W. Schottky, Phys. Zeitschr. 20. S. 49—51. 1919.

gänzungsbedürftig um so mehr, als in neuerer Zeit unsere sozusagen aprioristische Kenntnis der thermodynamischen Konstanten durch das Nernstsche Theorem und die Ausdrücke für die Entropiekonstanten idealer Gase so vermehrt worden ist, daß als unbekannte Größen in den Gleichgewichtsbeziehungen überhaupt nur noch Energiedifferenzen verschiedener Zustände aufzutreten brauchen. Und gerade was das Gleichgewicht zwischen Ionen, Elektronen und neutralen Atomen betrifft, so ist hier durch die experimentellen Messungen der Ionisierungsspannung von J. Frank, Davis und Goucher auf der eine Seite[1]), durch Berechnung der Ionisierungsspannungen der Alkalimetalle aus der ultravioletten Grenze der Hauptserien auf der anderen Seite ein so wertvolles Material für die völlige Bestimmung von Gleichgewichtszuständen gegeben, daß eine Prüfung der daraus folgenden Beziehungen im Gebiet der Dampfionisation, Flammenleitung, Lichtbogenvorgänge, sehr erwünscht erscheint.

In der Absicht, eine derartige Prüfung zu ermöglichen, ist die vorliegende Arbeit geschrieben. Das Verfahren ist dabei so, daß zunächst ganz ohne Rücksicht auf bestimmte Erscheinungen und Versuche eine „Thermodynamik der seltenen Zustände" aufgestellt wird, die aus den bisher vorhandenen Teilresultaten durch Hinzuziehung der neueren thermodynamischen Erkenntnisse und, was beinahe noch wichtiger ist, durch eine genaue und von der bisherigen etwas abweichende Definition gewisser elektrochemischer und thermodynamischer Begriffe, ein einigermaßen in sich geschlossenes Gebäude errichtet (I. und II. Teil). Eine Spezialisierung auf die wirklichen Versuchsbedingungen wird dabei nur insoweit vorgenommen als es sich durch Aufstellung von Bedingungen wiederum rein thermodynamischen Charakters ermöglichen läßt. Nachdem dann die Frage der Selbstbestimmung des elektrostatischen Potentials im Dampfraum und der Potentialsprünge an den Grenzflächen in einem weiteren Abschnitt behandelt ist, sollen erst zuletzt die Bedingungen der wirklichen Versuche (Elektronen-, Ionenstrommessungen, Flammenleitung, Lichtemission in Flammen) ins Auge gefaßt und einige

1) Literatur vgl. bei J. Frank und G. Hertz, Phys. Zeitschr. 20. S. 132—143. 1919.

Deutungen von Tatsachen auf Grund der gewonnenen thermodynamischen Resultate versucht werden.

Was zur näheren Einführung in die Gedankengänge dieser Arbeit und insbesondere des vorliegenden I. Teils notwendig ist, werde ich am besten entwickeln können, indem ich nunmehr noch derjenigen Bemerkungen meiner Vorgänger gedenke, die mit den hier zur Anwendung kommenden Voraussetzungen und Methoden in einem direkten Zusammenhang stehen.

An erster Stelle ist da wohl eine von K. Herzfeld berichtete Äußerung O. Sterns, anscheinend aus dem Jahre 1913, zu erwähnen, daß für das „Elektronengas" derselbe Wert der idealen Gaskonstanten einzuführen sei wie für gewöhnliche Gase; als „Atommasse" sei dabei die träge Masse des Elektrons einzusetzen. Damit war eine, wie man sehen wird, für die Thermionik des Dampfraumes sehr fruchtbare Anregung gegeben, die indessen von K. Herzfeld zunächst auf das Dissoziationsgleichgewicht *innerhalb* des Metalles[1]) und später auf das Gleichgewicht Metall-Salzlösung angewandt wurde[2]), Gebiete, in denen, wie sich gezeigt hat, die Voraussetzungen viel weniger eindeutig und einfach sind als auf dem reinen Dampfgebiet. Für uns bemerkenswert ist jedoch, daß Herzfeld in seiner ersten elektrochemischen Arbeit (Herzfeld I) die Dissoziation eines Wasserstoffatomes im Dampfraum in ein Ion und ein Elektron als Zwischenvorgang benutzt (in der zweiten Arbeit wird dieses Zwischenglied umgangen) und dabei für das Ionisierungsgleichgewicht eine Formel aufgestellt, die sich bis auf kleine numerische Abweichungen in den quantentheoretischen Konstanten vollständig mit der aus unseren Voraussetzungen folgenden (§ 4) deckt.

Für wichtig in diesem Zusammenhange halte ich auch eine im Jahre 1916 erschienene Arbeit Herzfelds „Zur Statistik des Bohrschen Wasserstoffatommodells"[2]), die aus

---

1) K. Herzfeld, Elektronentheorie der Metalle und Nernstsche Formel, Phys. Zeitschr. **16**. S. 354—362. 1915. Im folgenden zitiert als Herzfeld I. Zur Berechnung der elektrochemischen Normalpotentiale, Ann. d. Phys. **56**. S. 133—160. 1918 (zitiert als Herzfeld II).

2) K. Herzfeld, Ann. d. Phys. **51**. S. 261—284. 1916 (Herzfeld III).

Zweifeln an der Anwendbarkeit der Tetrode-Sternschen Berechnungsweise auf die Entropiekonstante nicht elektrisch neutraler Gase geboren ist. An dem einfachsten Beispiel des Bohrschen Wasserstoffatommodells, wo man das Dissoziationsgleichgewicht aus den Quantenansätzen und den üblichen Verteilungsannahmen ungefähr berechnen kann, wird gezeigt, daß sich hier eine Gleichgewichtskonstante ergibt, die bis auf einen Zahlenfaktor mit dem Tetrode-Sternschen Ausdrucke identisch ist; ein Verfahren, dessen Verallgemeinerung den eigentlichen Zusammenhang dieses Ausdruckes mit den Voraussetzungen der Quantentheorie wohl weitgehend klären würde. Jedenfalls scheint mir durch diese Betrachtungen Herzfelds jeder Zweifel an der Anwendbarkeit der gewöhnlichen Ausdrücke für die Entropiekonstanten auf Elektronen- und Ionengase beseitigt. — Eine Berechnung der „Grenzladungslichte" unter dieser Voraussetzung und ein Vergleich mit den Messungen an Wolfram findet sich zum ersten Male bei M. von Laue, „Die Entropiekonstante der Glühelektronen".[1])

Eine der Herzfeldschen Arbeiten (1) ist ferner — neben Betrachtungen von F. Haber und M. Born — heranzuziehen für die historische Beurteilung einer einfachen energetischen Beziehung, die für das Verhältnis von Elektronenemission, neutraler Verdampfung und positiver Ionenabgabe von Metallen von größter Bedeutung ist, und, wie wir sehen werden (II. Teil), auch interessante strukturtheoretische Schlüsse gestattet. Ich hatte im Jahre 1915 die (genau nur für den absoluten Nullpunkt der Temperatur geltende) Gleichung zwischen den molaren Verdampfungswärmen $l^{\times}$ der neutralen Atome, l^{-} der Elektronen, l^{+} der Ionen aus einem Metalle und der Ionisierungsspannung aufgestellt:

$$l^{-} - l^{+} = l^{\times} + J.$$

Da die Verdampfungswärmen für den Dampfdruck in erster Linie maßgebend sind, kann vermöge dieser Beziehung z. B. auf die Verdampfung von positiven Ionen aus dem Dampfdruck der Elektronen und neutralen Atome sowie der Ionisierungsspannung geschlossen werden. Daß ich damals diese

1) M. von Laue, Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik 15. S. 257 bis 270. 1918.

Zusammenhänge nicht weiter verfolgte, lag — neben anderen wichtigeren Gründen — an einer ganz ähnlichen Gleichung, die ich bei Herzfeld vorfand; in unserer Schreibweise:

$$A - \Phi E + l^* = l^\times + J .$$

Hier bedeutet A die Arbeit für die Dissoziation eines Metallatoms in ein Ion und ein Elektron im Innern des Metalls, Φ ist der Potentialunterschied zwischen dem Dampfraum und dem Innern des Metalls, in dem die Elektronen im Richardsonschen Sinne gasförmig angenommen werden, und E ist die molare Elektrizitätsmenge. Wie man sieht, entspringen beide Gleichungen einer ähnlichen Betrachtungsweise, unterscheiden sich aber dadurch, daß die Herzfeldsche Gleichung von speziellen — wie wir jetzt wissen unzulässigen — Annahmen über den Zustand des Metallinnern ausgeht, während die erste Gleichung ganz allgemein gilt; es kommt dabei gar nicht darauf an, ob die Elektronen und Ionen im Metall voneinander getrennt oder vereinigt existieren, eine „Dissoziation" im Metallinnern spielt keine Rolle. In allgemeinerer Bedeutung wird eine Beziehung der hier betrachteten Art neuerdings bei M. Born[1]) und F. Haber[2]) benutzt; doch werden hier statt der einfachen Größen l^- und l^+ Ausdrücke eingeführt, die mit selbst wieder prüfungsbedürftigen Theorien zusammenhängen; außerdem fehlt die Beziehung zu den Dampfdruckfragen geladener Teilchen.

Wenn man sich zu erklären versucht, weshalb eine derartige energetisch so naheliegende und für die Verdampfung von Ladungen so wichtige Beziehung bisher für die Thermodynamik der Ladungen im Dampfraum noch nicht nutzbar gemacht worden ist, so kann man den Grund dafür wohl nur in der Unsicherheit erblicken, die in bezug auf die thermodynamische Behandlungsweise geladener Teilchen überhaupt bestand. Es ist bekannt, daß in einem Gas, welches im thermischen Gleichgewicht ist, der Druck und die Dichte durchaus nicht an allen Stellen des Raumes dieselben zu sein brauchen; befindet sich das Gas in einem Kraftfeld, so variiert Dichte und Druck gemäß dem bekannten Boltzmannschen e-Gesetz.

1) M. Born, Verhandl. der D. Phys. Ges. 21. S. 13—24. 1919.
2) F. Haber, Berl. Ber. 1919. S. 497.

Die Wirkungen solcher Kraftfelder sind nun bei elektrisch geladenen Teilchen von ganz anderer Größenordnung als bei neutralen, wo sie im allgemeinen vernachlässigt werden können; und, was die Verhältnisse noch schwieriger macht, das Kraftfeld ist selbst von der Verteilung der Ladungen, also von Dichte und Druck der Teilchen abhängig.[1]) Wohl ist der *Unterschied* der Dichte im Dampfraum durch Potential*unterschied*, Elementarladung und Temperatur eindeutig bestimmt, aber wie hängt der *Absolut*wert der Dichte mit dem Absolutwert des Potentials zusammen? Oder — da Absolutwerte des Potentials keine Bedeutung haben — auf welchen Nullpunkt ist das für den absoluten Druck maßgebende Potential zu beziehen? Ist das ein temperaturunabhängiger Wert oder läßt sich für diesen Wert von irgendeinem Standpunkt aus wieder eine Temperaturabhängigkeit feststellen? Soll man den Potentialwert im Innern des Metalls als Bezugswert nehmen? Aber welchen Potentialwert, da sich doch die Elektronen wahrscheinlich im Laufe ihrer Bewegungen auf ganz verschiedenen Potentialwerten befinden und diese Werte zudem sicher andere sind für die positiven Ionen, andere für die Elektronen? Dieser letzte Gesichtspunkt zeigt zudem, daß selbst bei Annahme eines idealen Elektronengases im Metallinnern, das sich auf konstantem Potential befindet, die Austrittsarbeit nicht, wie noch Herzfeld anzunehmen scheint (Herzfeld I, S. 354), mit dem Potentialsprung an der Grenze identifiziert werden kann; jedenfalls ist es dann kein „objektiver Potentialsprung", der für alle Teilchen gälte, sondern das Grenz- und Kontaktpotential wäre für positive und negative Teilchen verschieden zu rechnen; eine unmögliche Definition. Oder soll man den für den Dampfdruck bestimmenden Potentialwert gegen einen Fixwert an der Grenze Metall-Vakuum rechnen? Auch das ist nicht möglich, weil die Bereiche, in denen die Energie und die Bewegung der geladenen Teilchen durch atomistische „Strukturwirkungen" bestimmt werden, in das Gebiet, das, wenigstens prinzipiell, durch die

1) Vgl. dazu die Raumladungstheorie des thermischen Gleichgewichts bei O. W. Richardson, Phil. Trans. A. 201. S. 516. 1913; W. Schottky, Jahrb. der Radioakt. u. Elektronik 15. S. 199. 1915 und M. von Laue, ebenda 18. S. 205—256. 1918.

Raumladung und die äußeren Felder beeinflußt werden kann, übergreift, so daß sich nirgends ein Fixpunkt angeben läßt.[1])

Es ist begreiflich, wenn unter der Fülle dieser ungeklärten Fragen der Gedanke auftaucht, daß der Elektronen- und Ionendampfdruck über einem Metall überhaupt nichts in dem Sinne thermodynamisch Bestimmtes ist, wie etwa der Dampfdruck neutraler Atome. Es hatte den Anschein, als ob man für einen beliebigen Punkt des Außenraumes den Elektronendampfdruck ganz beliebig geben könnte, da sich ja dabei immer das elektrische Potential so einstellen kann, daß Gleichgewicht besteht. In einem gewissen Grade ist so etwas sogar realisiert, wenn man zwei gleichtemperierte Metalle, die, sagen wir, die Neigung haben, verschiedene Dampfdrucke hervorzurufen, nahe aneinander bringt. Andererseits ist wiederholt der Gedanke ausgesprochen worden, daß es sich bei dem Elektronendampfdruck, ähnlich wie dem Ionendampfdruck in wässerigen Lösungen, um eine Größe handle, die für den ganzen Raumbereich außer in unmittelbarer Nähe des Metalls beliebig als Konstante gegeben werden könne; so bei F. Krüger[2]), und in dem etwas anderen Sinne, daß der Dampfdruck der positiven und negativen Teilchen gleich sein muß und durch diese Bedingung der Wert des Potentialsprunges an der Oberfläche festgelegt ist, bei F. Haber.[3]) Es schien also, als ob man, ehe man an die endgültige Theorie dieser Erscheinungen herantreten könne, überhaupt erst noch die Frage nach den unabhängigen Variablen des Problems zu lösen hätte.

Nicht wenig hat zu der Erschwerung des Einblicks in diese Zusammenhänge jedoch nach meiner Ansicht auch die gewissermaßen zufällige Tatsache beigetragen, daß unsere gewöhnlichen thermodynamischen Gleichgewichtsgesetze entweder in Form von Differentialgleichungen angegeben werden (Claudius-Clapeyronsche Gleichung, Temperatur und Druckabhängigkeit der Massenwirkungskonstanten) oder, wenn sie in

1) Ganz bei Seite gelassen ist hier noch die von M. von Laue aufgeworfene Frage, ob den Elektronen im Dampfraum überhaupt Gaseigenschaften zuzuschreiben sind; *diese* Schwierigkeit läßt sich, wie ich gezeigt habe, durch Beschränkung auf nicht allzugroße Ladungsdichten umgehen.

2) F. Krüger, Phys. Zeitschr. 12. S. 360. 1911.

3) F. Haber, Berl. Ber. 1919. S. 503.

integrierter Form benutzt werden, nicht mehr nur Größen enthalten, die sich bloß auf den Zustand bei der betreffenden Temperatur beziehen, sondern noch Annahmen über die Temperaturabhängigkeit verschiedener thermodynamischer Größen enthalten. Hierbei treten dann die *Zustands*beziehungen, die zwischen Verteilung und Energieunterschieden der Teilchen in verschiedenen Phasen herrschen, natürlich stark in den Hintergrund. Das hat aber gerade für unser Problem große Nachteile; soll man z. B. die Temperaturabhängigkeit einer inneren Verdampfungswärme definieren, die zum Teil durch Raumladungen bedingt ist, so steht man — Verzeihung wegen des rustikalen Vergleichs — wie der Ochs vor dem Berge.

In dieser Bedrängnis hat uns nun das Glück, mit Benutzung eines ganz merkwürdigen Seitenweges, auf eine andere Art von integrierter Thermodynamik hingewiesen durch das Auftauchen der von Laueschen Dampfdruckformel[1]), in der außer der Konzentration im Dampfraum und angebbaren Konstanten nur die *freie Energie* μ eines (geladenen oder ungeladenen) Bestandteiles in bezug auf die feste Phase auftritt. Nicht als ob es sich bei dieser „μ-Thermodynamik" um etwas prinzipiell Neues handelte. Die Gleichsetzung der spezifischen freien Energie eines Bestandteils in verschiedenen Phasen, die zu der μ-Formel führt, gehört neben der Gibbs-Planckschen Gleichsetzung der spezifischen thermodynamischen Potentiale schon seit langem zu den bekanntesten Hilfsmitteln der Phasenlehre. Der Grund, weshalb man diese einfachste und bei hinreichend geringen Dampfdichten ganz allgemeine Formel bisher nicht verwendet hat, kann wohl nur in der Scheu gefunden werden, spezifische Energien, Entropien, thermodynamische Potentiale und freie Energien eines Bestandteils in bezug auf eine feste oder flüssige Phase explicite in der endgültigen Formel stehen zu lassen. Man glaubte hier auf direkt meßbare Größen zurückgreifen zu müssen und nahm deshalb die Einführung des ganzen Temperaturintervalls von 0 bis T in die Dampfdruckformel mit in Kauf. Wenn ich trotzdem die Vermutung ausspreche, daß die zukünftige Thermodynamik eine starke Annäherung an die „μ-Thermodynamik" zeigen wird — aus der sich die Gleichgewichtsbeziehungen im homogenen Gasraum auf die einfachste Weise ableiten lassen —, so hat

1) Vgl. Anm. 2. S. 116.

das zwei Gründe. Einmal entfällt mit der Verfeinerung der Betrachtungsweise, die die Atome nicht mehr als unveränderliche und untrennbare Individuen ansieht, sondern Elektronen, einfach und mehrfach geladene Ionen usw. mitberücksichtigt, die Möglichkeit, Verdampfungswärmen und spezifische Wärmen dieser Bestandteile in der festen Phase direkt zu messen, so daß in diesem Falle die Einführung dieser Größen in die Dampfdruckformel zum mindesten keinen Vorteil bedeutet. Auf der anderen Seite steht gerade die spezifische freie Energie mit allen Verteilungsfragen in einem derart innigen Zusammenhang, daß man die Verteilungsprobleme zweckmäßig in zwei Aufgaben trennt: einmal, den Zusammenhang zwischen freier Energie und Verteilung zu suchen — eine Aufgabe, die mit der Aufstellung einiger einfachster und allgemeinster Beziehungen gelöst ist — und zweitens, die spezifische freie Energie eines Bestandteils als Funktion von Temperatur, Arbeitskoordinaten und Stoffmengen zu bestimmen. Für die letztere Aufgabe müssen dann alle thermischen Messungen verwendet werden, die einem zugänglich sind; als ebenbürtiges und ergänzendes Hilfsmittel kommen aber daneben auch statistische Berechnungen auf Grund strukturtheoretischer Modelle in Frage. Als wichtigste Beziehung spielt hierbei noch das Zusammenfallen von freier Energie und Totalenergie in den Fällen, wo irgendein Energieunterschied allen statistischen Zuständen des Systems gemeinsam ist, eine Rolle; daneben ist aber zu bemerken, daß der statistische Ausdruck für die freie Energie, oder noch unmittelbarer für das in der Dampfdruckformel auftretende Glied $e^{\frac{\mu}{RT}}$, die einfachste Funktion darstellt, die wir auf diesem Gebiete kennen; Entropie, mittlere Energie, thermodynamisches Potential, alle diese Größen sind kompliziertere statistische Bildungen.[1])

Um nun zu dem Elektronen- und Ionendampfdruckproblem zurückzukehren: Gerade der in seiner Temperaturabhängigkeit so schwer zu definierende Teil der freien Energie der geladenen Teilchen in bezug auf einen Punkt des Außenraumes, der von elektrostatischen Ladungen in der Grenzschicht und dem Dampfraum abhängt, gehört zu den Größen,

1) Vgl. dazu meine Bemerkungen Phys. Zeitschr. 20. S. 220 bis 228. 1919.

die von dem Momentanzustand des Metallinnern unabhängig sind und sich infolgedessen von dem statistisch zu berechnenden Teil der freien Energie von vornherein abtrennen lassen. Wie diese Trennung und die genauen Definitionen durchzuführen sind, wird im § 1 des I. Teils auseinandergesetzt und durch die dort eingeführte „natürliche freie Energie" scheint mir auch der Wert der Kontaktpotentiale zwischen Metallen erst einwandfrei definiert (§ 2).

In den letzten Betrachtungen ist fast ausschließlich von der thermischen *Elektrizitäts*bildung die Rede gewesen. Ich bin deshalb noch eine Erklärung darüber schuldig, wie ich dazu gekommen bin, das „thermische (spektrale) *Leuchten*" in den Untertitel meiner Arbeit mit aufzunehmen, und beide Erscheinungen: Auftreten von Ladungen, und Auftreten von Spektrallinien, unter dem Begriff der „seltenen Zustände" zu vereinigen.

Nach der Bohr-Einsteinschen Quantentheorie ist ein gasförmiges Teilchen, das aus verschiedenen Bausteinen (Ionen, Elektronen) besteht, nur einer gewissen Anzahl diskreter Zustände fähig. Unmittelbar an den Zustand größtmöglicher Energie schließt sich der Zustand an, wo irgendein Baustein (z. B. ein Elektron) von dem Gasteilchen abgetrennt wird. So erscheint die Frage nach dem Auftreten der höheren Energiestufen mit der Frage nach der Häufigkeit der völligen Trennung aufs engste verknüpft. Werden aber die diskreten Energiezustände der Gasteilchen gesondert in die Rechnung eingeführt, so ergibt sich noch eine weitere Vereinfachung: *innere* freie Energien (genauer: Unterschiede der inneren freien Energien gegenüber dem Zustand beim absoluten Nullpunkt) treten nicht auf, und in allen auf das Gasgleichgewicht bezüglichen Formeln erscheinen außer angebbaren Konstanten[1]) nur die einfachen und zum Teil theoretisch oder experimentell direkt zugünglichen Energieunterschiede der verschiedenen Zustände. Diese Betrachtungsweise, die auf A. Einstein zurückgeht, erscheint also im Interesse der Einfachheit geboten. Der Zusammenhang mit der spektralen Lichtemission ist dann

1) Eine gewisse Unsicherheit in der Konstantenbestimmung kann allerdings vorläufig noch in Fällen vorhanden sein, wo das „Gewicht" von Quantenzuständen in die Rechnung eingeht. Vgl. Anmerkungen zu § 1, 2 und 4.

aber, wiederum nach Einstein[1]), dadurch gegeben, daß die Intensität des von einer dünnen leuchtenden Gasschicht ausgesandten spektralen Lichtes nur von der Zahl der Teilchen abhängt, die sich auf irgendwelchen höheren Energiestufen befinden.

Wie man sieht, nehmen wir mit Zugrundelegung der hier skizzierten Anschauungen über thermische Ionisation und thermisches Leuchten zu der eingangs gestellten Frage nach dem Charakter der spezifischen Erscheinungen elektrischer und optischer Natur in der Weise Stellung, daß wir eine eindeutige Verknüpfung dieser Erscheinungen mit statistisch geregelten „*Zuständen*" voraussetzen und somit eine thermodynamisch statistische Behandlungsweise dieser Phänomene für erlaubt und fruchtbar halten; ohne dabei natürlich in der Frage nach dem Gleichgewichts- oder Reaktionscharakter der Erscheinungen in den verschiedenen in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fällen einer sorgfältigen Prüfung vorgreifen zu wollen. Mit dem Augenblick, wo wir von den spezifischen Erscheinungen, die mit den seltenen Zuständen verknüpft sind, absehen und die Frage der Häufigkeit dieser Zustände unter die gewöhnlichen Gesetze der Thermodynamik stellen, scheint dann allerdings das ursprünglich von uns eingeführte Merkmal der seltenen Zustände verwischt; denn das einzige, was diese seltenen Zustände noch von den gewöhnlichen unterscheidet, ist der Absolutwert der Energien, die zur Ionisierung sowie zur Erzeugung eines sichtbaren spektralen Leuchtens notwendig sind. Tatsächlich sind denn auch die folgenden Darlegungen, wenigstens in ihrem rein theoretischen Teil, völlig allgemein und schließen die Dissoziation in nicht geladene Dampfteilchen sowie das Auftreten jeder Art von geringerwertigen Quantenzuständen (wie bei der Rotation von Molekülen) ein.[2]) Doch wird der Umstand, daß die hier behandelten Abweichungen von der üblichen Thermodynamik besonders mit Rücksicht auf das mögliche Auftreten von gewöhnlich ver-

1) A. Einstein, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 18. S. 318—323. 1916.

2) Sogar das Auftreten elektrischer Potentiale in diesen Gleichungen kann insofern von einem allgemeineren Standpunkte aufgefaßt werden, als in derselben Weise wie hier die elektrischen Kräfte allgemein Fernkräfte beliebiger Art in dieser Form in den Gleichgewichtsbeziehungen berücksichtigt werden müßten.

nachlässigten Zuständen der Materie eingeführt sind, wenn auch nur noch von einem konventionellen Standpunkte aus, die Bezeichnung „Thermodynamik der seltenen Zustände" rechtfertigen.

I. Teil. Die freie Energie des festen und dampfförmigen Zustandes.

§ 1. Die freie Energie der festen Phase.

Wir betrachten ein echtes thermisches Gleichgewicht zwischen einem festen oder flüssigen Körper und seinen Verdampfungsprodukten. Ein solches echtes thermisches Gleichgewicht ist dadurch definiert, daß bei gegebener Gesamtenergie die Entropie des Gesamtsystems ein Maximum besitzt oder bei gegebenen Variabeln (Arbeitskoordinaten und Temperatur) die freie Energie sich auf ihren kleinsten Wert eingestellt hat. Wir bemerken gleich, daß bei festen Körpern und gewöhnlichen Temperaturen derartige echte Gleichgewichte in Wirklichkeit höchst selten sind; so wird sich z. B. bei einem zusammengesetzten festen Körper, dessen verschiedene Bestandteile verschieden flüchtig sind, sehr bald eine Oberflächenschicht von anderer Zusammensetzung bilden als sie das Innere des festen Körpers besitzt und es wird wegen der Unmöglichkeit oder äußersten Langsamkeit der Umsetzung im festen Körper eine gegen die Beobachtungsdauer überaus lange Zeit brauchen, ehe sich ein neues Gleichgewicht im Inneren des festen Körpers hergestellt hat. Günstiger scheinen die Verhältnisse bei reinen Metallen zu liegen, wo die Elektronen infolge ihrer selbst beim absoluten Nullpunkt noch vorhandenen großen Beweglichkeit anscheinend imstande sind, jede Störung des Gleichgewichtes von der Oberfläche nach dem Inneren zu auszugleichen. Bei flüssigen Körpern wird man wohl in den meisten Fällen mit einer raschen Einstellung des echten Gleichgewichtszustandes rechnen können. Desgleichen werden genügend hohe Temperaturen die raschere Einstellung des Gleichgewichtes herbeizuführen vermögen, vielleicht auch ohne daß bei festen Körpern direkt ein Übergang in den flüssigen Zustand stattgefunden hat.

Die Frage nach der Realisierung des echten Gleichgewichtszustandes in den verschiedenen Spezialfällen lassen wir aber im folgenden zunächst gänzlich außer acht; wir nehmen an, durch genügend langes Warten oder irgendwelche katalytischen Kunstmittel hätten wir es erreicht, daß der echte Gleich-

gewichtszustand in dem betrachteten System eingetreten wäre. Dann haben wir im Dampfraum über der festen Phase (unter die wir ein für allemal auch Flüssigkeiten mit einrechnen wollen) im allgemeinsten Falle Verdampfungsprodukte der verschiedensten Art zu erwarten: neutrale Atome, Moleküle oder Molekülgruppen, einfach oder mehrfach positiv oder negativ geladene Atome, Moleküle oder Molekülgruppen, endlich freie Elektronen. Für die Dampfdruck- und Gleichgewichtsbetrachtungen ist es, wie wir sehen werden, bis zu einem gewissen Punkte völlig gleichgültig, welcher der hier aufgezählten Arten die betrachteten Teilchen angehören. Leider existiert jedoch kein allgemein gebräuchlicher Name, der alle diese Arten von dampfförmigen Bestandteilen zusammenfaßt; um mit einer einheitlichen Bezeichnung arbeiten zu können, ohne zu einer direkten Neubildung gezwungen zu sein, wollen wir im folgenden alle im gaskinetischen Sinne freibeweglichen Teilchen im Dampfraum als „*Molekeln*" bezeichnen, während unter *Molekülen* speziell mehratomige ungeladene Systeme verstanden sein sollen. In diesem Sinne ist also z. B. ein Elektron, das sich frei im Dampfraum bewegt (und das bei genügend kleiner Dampfdichte im Dampfraum den Gasgesetzen gehorcht) eine Molekel; dagegen wird es zum bloßen Baustein einer Molekel, wenn es sich an ein Ion, Atom oder Molekül angelagert hat und dadurch seiner freien thermischen Beweglichkeit verlustig gegangen ist.

Unsere Aufgabe ist, die Gleichgewichtskonzentrationen aller Molekeln im Dampfraum zu ermitteln, und wir bedienen uns hierfür der Bedingung, daß die freie Energie der Molekeln irgendeiner betrachteten Art innerhalb der festen und dampfförmigen Phase die gleiche sein muß. Um diese Bedingungsgleichung aufstellen zu können, haben wir nun zunächst genau anzugeben, was unter der freien Energie einer Molekel innerhalb der festen Phase verstanden werden soll. Hierbei treten zwei Schwierigkeiten auf.

Die erste ist mehr formaler Natur und für unser Problem nicht charakteristisch. Sie besteht darin, daß bekanntlich bei einer rein thermischen Betrachtungsweise die freie Energie eines Systems nur bis auf Glieder von der Form $a\,T + b$ bestimmt werden kann, deren Unbekanntheit jedoch bei der Betrachtung von Gleichgewichten wichtige Konstanten unbe-

stimmt läßt. Eine ganz radikale Beseitigung dieser Schwierigkeit halten wir nur für möglich mit Hilfe einer statistischen Betrachtungsweise, welche alle Teile des Systems (feste bzw. flüssige Phase und Dampf) in einer einzigen Gesamtheit zusammenfaßt, die freie Energie dieses Doppelsystems aus der Energiefunktion und der Verteilung im (Gibbsschen) Phasenraum bestimmt und durch Variation innerer Variabler die wahrscheinlichste Verteilung feststellt. Ein derartig systematisches Vorgehen ist jedoch zurzeit nicht möglich, und es sollen daher aus der Statistik nur zwei wohl nicht zu bezweifelnde Resultate übernommen werden: ersters die Voraussetzung, daß die freie Energie der einzelnen Phasen bei gegebener Temperatur und gegebenen Lagenkoordinaten (am einfachsten dem Volumen) vollständig bestimmt ist durch gewisse Mittelwerte, welche nur von der *Energiefunktion* des Teilsystems abhängen (Phasenintegral); die Energie jedes Einzelzustandes muß dabei auf denselben Nullzustand, der einem bestimmten Punkt oder Gebiet im Gibbsschen Phasenraum entspricht, bezogen werden. Und zweitens wird vorausgesetzt, daß, wenn für ein System von Teilchen, das man in verschiedenen Phasen betrachtet, als Nullzustand der Energie derselbe Zustand gewählt wird, daß dann die für das Gleichgewicht maßgebenden Konstanten der freien Energie eindeutig bestimmt sind, und zwar, falls der Dampf den idealen Gasgesetzen gehorcht, in einer bestimmten bekannten Weise (Entropiekonstante idealer Gase).

Die zweite Schwierigkeit, die bei der Definition der freien Energie einer Molekel in bezug auf eine feste Phase auftritt, ist ganz anderer Art. Es ist bekannt, daß das Studium des festen Zustandes der Materie in neuerer Zeit die früher ziemlich verbreitete Vorstellung als unhaltbar erwiesen hat, als ob der innere Zustand der Bestandteile des festen Körpers (z. B. der NaCl-Moleküle im festen Kochsalz) derselbe sei wie der entsprechenden Bestandteile in gasförmiger Phase. Man weiß jetzt, daß die Kräfte zwischen den kleinsten Teilchen jedes beliebigen Aggregates im wesentlichen elektrischer Natur, also gewissermaßen Fernkräfte sind und daß infolgedessen zwischen den einzelnen Bausteinen eines Moleküls im festen Körper im allgemeinen durchaus kein anderer und engerer Zusammenhang besteht, als zwischen den verschiedenen im festen Körper benachbarten

Molekülen. Man sieht sich infolgedessen gezwungen, den Begriff eines im gewöhnlichen Sinne definierten Moleküls im festen Körper völlig aufzugeben, ebensowenig wird es im allgemeinen möglich sein, von Molekeln im oben definierten Sinne innerhalb des festen Körpers zu sprechen. Daß die Übertragung der Definition einer Molekel aus dem Dampfraum in die feste Phase nicht ohne weiteres möglich ist, geht schon daraus hervor, daß als wichtigstes Kennzeichen die freie Beweglichkeit im gaskinetischen Sinne benannt wurde. Streng genommen, ist diese Definition also überhaupt nur dann durchführbar, wenn bekannt ist, daß der betreffende Stoff sich wie ein ideales Gas verhält.

Um nun trotzdem die freie Energie irgendeiner bestimmten Art von Molekeln in der festen Phase definieren zu können, müssen wir einen Umweg machen. Wir denken uns im Innern der festen Phase, so weit von der Grenzfläche, daß keine Inhomogenitäten, insbesondere keine räumlichen Ladungen, mehr auftreten, ein zusammenhängendes Stück in der Weise abgegrenzt, daß es genau so viel positive wie negative Ladungen enthält. Anstatt die Energiefunktion des ganzen festen Körpers einschließlich der Oberflächenschichten zu studieren, beschränken wir uns auf dieses homogene Stück. Es handelt sich nun zunächst um die Festlegung des Nullzustandes der Energie dieses Stückes. Zu diesem Zwecke denken wir uns das Stück unter Festhaltung aller Koordinaten und Bewegungszustände in einen von fremden Feldern freien Raum gebracht und dort in seine kleinsten Bestandteile aufgelöst, die so weit voneinander entfernt werden, daß eine weitere Verschiebung keine Energieänderung mehr bedeutet. Zugleich wird die Bewegung aller Teilchen zur Ruhe gebracht. Den so entstandenen Zustand, über dessen thermodynamische Realisierbarkeit wir nichts vorauszusetzen brauchen, bezeichnen wir als Nullzustand[1]) der Energie oder als „Zustand völliger Dissipation".

1) Die Auflösung in Elementarbestandteile muß sich hierbei, genau genommen, nicht nur auf die Trennung in Atome oder Ionen und leicht abspaltbare Elektronen erstrecken, sondern auch auf die fester gebundenen Elektronen, in letzter Konsequenz sogar auf die Bestandteile der Atomkerne. Man kann jedoch bei solchen Bestandteilen von der Auflösung absehen, von denen man weiß, daß ihr Zustand in allen betrachteten Gleichgewichtsphasen und bei allen be-

Durch die — im allgemeinen negative — Energiedifferenz gegen diesen Nullzustand ist die Energie jedes Momentanzustandes des herausgegriffenen Stückes des festen Körpers eindeutig definiert, und damit also auch die Energiefunktion des festen Körpers.[1]) Die *freie* Energie des festen Körpers ist damit jedoch auch vom Standpunkt der Statistik noch nicht vollkommen definiert; denn der Umstand, daß z. B. in der Gibbsschen Statistik keine willkürliche Konstante in der Definition der freien Energie auftritt, ist eine rein formale Zufälligkeit; in Wirklichkeit müßte genau so eine Konstante a mitgeführt werden wie in der Thermodynamik. Nun haben wir, da es bei der Betrachtung von Gleichgewichten immer nur auf die Differenzen von freien Energien und demnach auch der Konstanten a ankommt, bei der festen Phase die Verfügung über diese Konstante frei; wir treffen sie, indem wir a mittels der Bedingungsgleichung

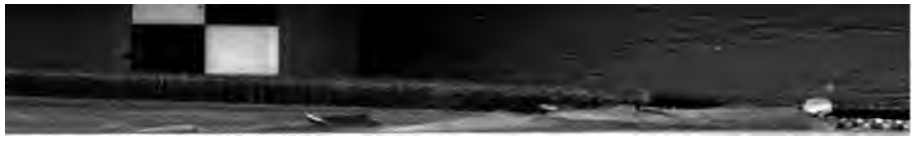
$$\frac{dF}{dT} = \frac{dU}{dT} \text{ für } T = 0 \tag{1}$$

festlegen (F freie Energie, U Gesamtenergie). Da definitionsgemäß $F = U - TS$ (S Entropie des Systems) und demnach $d/dT\,(F - U) = -S_0$ für $T = 0$ ist, so stimmt diese Festsetzung mit der bekannten Nullsetzung der Entropie beim absoluten Nullpunkt überein.

In dieser Weise ist also die „freie Energie des festen Körpers", bezogen auf einen sehr weitgehend dissipierten Nullzustand, eindeutig definiert. Von dieser freien Energie ist aber die „freie Energie" irgendeiner Molekel innerhalb des festen Körpers wohl zu unterscheiden. Zur Definition dieses Begriffes gelangen wir folgendermaßen: Wir sondern aus dem vollständig dissipierten System der Bestandteile des festen Körpers ohne irgenwelchen Energieaufwand (wegen der unendlich weiten

trachteten Temperaturen derselbe ist. Für die Elektronen außerhalb der Atomkerne trifft dies allerdings, soviel wir wissen, nicht zu (dielektrische Verschiebungen).

1) Bei der Abtrennung des herausgegriffenen Stückes aus dem Rest des festen Körpers ist eine gewisse potentielle Energie zu überwinden und es würde also einen Unterschied machen, ob man die freie Energie des herausgegriffenen oder des noch im Verband des festen Körpers befindlichen Stückes betrachtet. Diese Oberflächenenergie verschwindet jedoch mit wachsendem Verhältnis des Volums zur Oberfläche des betrachteten Stückes.



gegenseitigen Entfernung der Teilchen) diejenigen Bausteine ab, die zum Aufbau einer gewissen (gegen die Gesamtzahl der vorhandenen Materie kleinen) Anzahl von Molekeln desjenigen Stoffes nötig sind, dessen „freie Energie im festen Körper" wir definieren wollen. Diese herausgegriffenen Bausteine setzen wir dann zu der Molekel zusammen, deren freie Energie im festen Körper wir untersuchen wollen, und zwar soll sich dabei diese Molekel in einem gewissen eindeutigen Energiezustand y befinden, auf dessen Definition wir weiter unten zurückkommen.

Zur vollständigen Bestimmung der freien Energie unserer Molekel im festen Körper haben wir aber noch eine andere Energiefunktion zu betrachten, die des „verarmten Restbestandteiles". In der Tat ist für diesen, nachdem die betreffenden Teilchen abgesondert sind, von neuem eine Energiefunktion eindeutig definiert, folglich bei gegebenem Volumen und gegebener Temperatur auch eine frei Energie (bis auf die Konstante a). Setzen wir nun fest, daß das Volumen[1]) und die Temperatur ebensogroß seien wie vorher die des aus dem festen Körper herausgegriffenen Stückes, und daß die Konstante a wiederum durch die Gleichung (1) definiert sei[2]), so haben wir die freie Energie des „verarmten Restbestandteiles" wiederum eindeutig definiert.

Nun bleibt aber noch ein letzter Schritt übrig: Der verarmte Restbestandteil ist wieder in den Verband des festen Körpers einzuführen. Ist der Restbestandteil im ganzen neutral, so ist hierbei nur noch die Energiefunktion zu betrachten, die auf der Wechselwirkung der Oberflächenteilchen des Restbestandteiles mit den Oberflächenteilchen des Hohlraums im ursprünglichen Körper beruht. Dieser Teil der Energie-

1) Wenn, wie wir angenommen hatten, die Zahl der abgetrennten Teilchen klein ist im Verhältnis zur gesamten herausgegriffenen Materie, so läßt sich leicht zeigen, daß eine etwaige Verkleinerung des Volums, der der Restbestandteil bei dem gegebenen äußeren Druck zustrebt, keine merkliche Korrektur bedingt.

2) In dieser zweimaligen Anwendung der Gleichung (1) ist das Nernstsche Theorem noch nicht enthalten. Es würde erst dann in Erscheinung treten, wenn man die abgetrennten Molekeln in einem festen Körper von anderer Zusammensetzung wie der ursprüngliche kondensierte, und auf die freie Energie der Molekel in bezug auf diesen zweiten festen Körper von neuem die Gleichung (1) anwendete.

funktion ist aber, wie wir schon oben bemerkten, zu vernachlässigen, wenn man das Volumen groß genug gegen die Oberfläche wählt.

Ferner tritt, auch nachdem der Kontakt zwischen dem verarmten und dem vollwertigen Teil des festen Körpers hergestellt ist, keine nachträgliche Veränderung der freien Energie ein, da angenommen werden kann, daß die Abweichung vom Gleichgewichtszustande beliebig klein ist.

Wohl aber ist noch ein konstantes Zusatzglied in der Energiefunktion und damit auch in der freien Energie zu berücksichtigen, wenn der abgetrennte Bestandteil geladen (und der Restbestandteil infolgedessen dann entgegengesetzt geladen) ist.[1]) Wenn, was wir der Allgemeinheit wegen annehmen müssen, an der Grenze des festen Körpers und im Dampfraum freie Ladungen, demnach elektrische Felder und verschiedene Potentialwerte angenommen werden müssen, so ist die „freie Energie eines geladenen Bestandteiles in bezug auf den festen Körper" verschieden je nach dem Potential φ, auf dem sich nach der Trennung der herausgegriffene Bestandteil befindet. In unserer Betrachtung macht sich dies folgendermaßen geltend: Das herausgegriffene Stück des festen Körpers war nach unserer Voraussetzung nach einem weit entfernten feldfreien Raum gebracht und dort in die kleinsten Bestandteile (d. h. die größten Bestandteile, die bei allen zu betrachtenden Prozessen ganz unverändert bleiben) dissipiert worden. Da der Körper im ganzen neutral angenommen wurde, so war es hierbei gleichgültig, welches Potential gegen das Innere des festen Körpers man diesem Raum zuschreibt. Auch nach der Absonderung der geladenen Bestandteile sind alle diejenigen Potentialunterschiede belanglos, die bei der Herstellung des Endzustandes von den beiden entgegengesetzt geladenen Bestandteilen in gleicher Weise durchlaufen werden; wohl aber kommt der Potentialunterschied der Orte in Frage, an denen sich schließlich der (beispielsweise negativ geladene) Gasbestandteil und der (positiv geladene) Restbestandteil befinden. Der durch diese Trennung der Ladungen bewirkte Energie-

1) Allgemeiner: Wenn zwischen den von uns herausgegriffenen und den übrigen Bestandteilen des Gesamtsystems Wechselwirkungen bestehen, die nicht im wachsenden Verhältnis des Volums zur Oberfläche des herausgegriffenen Stückes verschwinden.

unterschied gegenüber dem Anfangszustand ist offenbar gleich der Ladung des abgesonderten Bestandteiles, multipliziert mit dem Potentialunterschied $\varphi - \varphi^{01})$ der betreffenden Stelle des Gasraumes gegenüber dem Inneren des festen Körpers, und zwar sind bei der Bestimmung dieser beiden Potentialwerte nur die Coulombschen Kräfte derjenigen Ladungen zu berücksichtigen, die sich außerhalb des im Endzustande von den beiden Bestandteilen eingenommenen Raumes befinden, da alle Kräfte innerhalb dieser Systeme in den Energiefunktionen bereits mit berücksichtigt sind. Von einer Wechselkraft des Gasteiles auf den entgegengesetzt geladenen festen Rest kann man dabei absehen, sofern, wie wir immer vorausgesetzt haben, die Zahl der abgesonderten Bestandteile genügend klein ist. Durch dieselbe Festsetzung kann man erreichen, daß der verarmte feste Bestandteil mit hinreichender Genauigkeit noch durch denselben Potentialwert φ^0 charakterisiert werden kann wie der feste Körper in seinem Anfangszustand. Es ist dann dieser Wert auch mit dem *Mittelwert* des Potentials im Innern des festen Körpers identisch, wie sich leicht zeigen läßt.

Die „freie Energie eines (geladenen) Bestandteiles in bezug auf den festen Körper" ist also schließlich durch den Vergleich folgender 4 Terme zu gewinnen: 1. Totale freie Energie F' eines genügend großen neutralen homogenen Stückes des festen Körpers in bezug auf einen vorgeschriebenen Nullzustand 2. Energie $n \cdot y$ des zu dem gewünschten Elementarsystem (Molekel) vereinigten abgetrennten Bestandteiles gegenüber dem Nullzustand (n = Zahl der gebildeten Molekeln, y Nullenergie einer solchen Molekel, gemessen gegen den gewählten Dissipationszustand ihrer Bausteine [s. w. u.]). 3. Freie Energie F'' des verarmten Restbestandteiles gegenüber einem nach Abtrennung der betreffenden Bestandteile geschaffenen Nullzustand. 4. Bei geladenen Körpern Unterschied der mittleren elektrostatischen Energie des abgetrennten Bestandteiles gegenüber dem in den Körper zurückversetzten verarmten Restbestandteil $n\,\nu\,\varepsilon\,(\varphi - \varphi^0)$. ($\nu$ Zahl der Elementarladungen ε einer Molekel, eine Zahl, die positiv, negativ oder Null sein kann.)

1) Da eine ganze Anzahl verschiedenartiger Indexbezeichnungen verwendet werden sollen, müssen wir auch den Raum rechts oben für Indizes in Anspruch nehmen.

Der Unterschied der freien Energie vor und nach[1]) Abtrennung der betrachteten Molekeln (bzw. ihrer Bausteine) aus dem festen Körper ergibt sich durch Zusammensetzung dieser Terme mit richtigen Vorzeichen in folgender Weise:

$$\Delta F = F' - n y - F'' + n r \varepsilon (\varphi^0 - \varphi). \tag{2}$$

Ehe wir hier weiter gehen, wollen wir nun noch einen Punkt nachholen, der den Gedankengang, der zur Gleichung (2) führte, unterbrochen hätte, nämlich die Definition des inneren Energiezustandes der herausgenommenen Bestandteile, also die Definition der Größe y. Vom chemischen Standpunkte ist eine Molekel in unserem Sinne vollständig definiert, wenn ihre Bausteine (positive Kerne, Elektronen) gegeben sind und die Art, wie diese Bausteine zusammengesetzt sind. Es ist dann zwar noch denkbar, daß bei verschiedenen Temperaturen der innere Zustand eines solchen Systems verschieden ist; wählen wir jedoch den absoluten Nullpunkt als Bezugszustand, so ist die Gruppierung und demnach auch die innere Energie y für jeden derartigen Bestandteil eindeutig festgelegt. (Wie wir aus der Quantentheorie wissen, brauchen dabei die verschiedenen Bausteine des Bestandteiles durchaus nicht gegeneinander in Ruhe zu sein, sondern können gewisse Quantenbahnen durchlaufen: kinetische Nullpunktsenergie.)

Einfacher werden jedoch die Gleichungen und weitergehend die Resultate, wenn man an Stelle der chemischen Definition einer Molekel (gemäß welcher bei höheren Temperaturen noch verschiedene Quantenzustände möglich sind) gleich die quantenmäßige Definition setzt, d. h. als eine Molekel der herausgegriffenen Art nur eine solche betrachtet, die sich in einem ganz bestimmten quantenmäßig definierten Energiezustand befindet.[2]) Wir stellen uns dann mit Einstein[3]) vor, daß jeder Bestandteil nur eine gewisse Anzahl piskreter Zustände $Z_1, Z_2 \ldots . Z_n$ annehmen könne, die durch

1) D. h. die freie Energie soll im Anfangszustand um ΔF größer sein als im Endzustand.

2) Die Möglichkeit dieser Betrachtungsweise ist übrigens nicht an die Voraussetzungen der Quantentheorie gebunden; nur werden alle Rechnungen und Definitionen bei der Annahme kontinuierlicher Übergänge etwas komplizierter.

3) Verh. d. D. Phys. Ges. 18. S. 320. 1916.

die Energien $y_1\ y_2 \ldots . y_n$ gekennzeichnet sind. Die Energie y_1 des Quantenzustandes Z_1 kleinster Energie muß sich hierbei mit der Energie der betreffenden chemisch definierten Molekel beim absoluten Nullpunkt decken; die chemische und die entsprechende niedrigst-quantige Molekel besitzen also auch denselben Wert von ΔF. (Unterschiede treten erst auf, wenn die freie Energie dieser Bestandteile in der Gasphase untersucht wird, vgl. § 4 und 5.) Andere Werte von y und von ΔF treten jedoch auf, wenn der Bestandteil durch den Zustand Z_2 usw. definiert wird; als Differenzen $y_m - y_n$ zwischen den verschiedenen Energiezuständen treten dann die Größen auf, die aus der Theorie der Serienspektren wohl bekannt sind. Die größtmögliche Energiedifferenz, die vorkommen kann, ist die Ionisierungsarbeit (oder eine andere Dissoziationsarbeit); in diesem Falle wird man aber im Endzustand Z_e die Molekel nicht mehr als einheitlich ansehen, sondern durch die Eigenschaften der einzelnen Bestandteile charakterisieren, die nunmehr als neue Molekeln auftreten.[1])

1) *Anm. bei der Korrektur.* In diesen Betrachtungen ist, wie man bemerken wird, vorausgesetzt, daß die innere *freie* Null- bzw. Quantenenergie der betreffenden Molekeln gleich deren innerer *Total*energie (gegenüber dem Dissipationszustande) ist. Ob diese Annahme zutrifft oder nicht, kann nicht durch thermodynamische, sondern nur durch quantentheoretisch-statistische Betrachtungen analysiert werden. Wie wir später (§ 6) sehen werden, hängt diese Frage mit der Bestimmung der „Gewichtskonstanten" von Quantenzuständen zusammen. Nun können ganzzahlige Gewichtskonstanten auch unter Beibehaltung der obigen Hypothese dadurch eingeführt werden, daß man verschiedene (etwa durch einen Umlaufssinn voneinander unterscheidbare) Zustände Z_m, Z_m', Z_m'' usw. mit derselben Energie y_m annimmt. Sollen noch andere Arten von ganzzahligen, oder gebrochene Gewichtskonstanten eingeführt werden, so wird man jedoch nicht mehr die innere freie Energie eines Quantenzustandes mit seiner inneren Totalenergie identifizieren dürfen, und es sind dann statt der Größen y, y_m die inneren freien Energien pro Molekel

$$\eta = y - kT \ln p\,, \quad \eta_m = y_m - kT \ln p_m$$

oben einzusetzen, wobei die p die Gewichtskonstanten, k die elementare Gaskonstante bedeutet.

Entsprechendes gilt für die molaren Größen [in Gl. (3) bis (5)]. Dort ist statt der inneren molaren Totalenergie des Nullzustandes oder eines Quantenzustandes Z_m die entsprechende innere freie Energie

$$H = Y - RT \ln p\,, \quad H_m = Y_m - RT \ln p_m$$

einzuführen.

Nach dieser Abschweifung kehren wir nunmehr zu unserer Gleichung (2) zurück, indem wir versuchen, diese Gleichung nicht auf eine willkürliche kleine Zahl n von Bestandteilen, sondern auf eine Grammolekel zu beziehen.

Bei den mit n multiplizierten Gliedern ist dieser Übergang sehr einfach, indem statt n die Zahl N der Molekeln im Mol gesetzt wird. Die Größen F^t und F^r sind dagegen nicht der Zahl der abgetrennten Teilchen proportional; wohl aber kann dies bezüglich der Differenz $F^t - F^r$ angenommen werden, solange die Zahl der abgetrennten Teilchen klein ist gegenüber der in dem betreffenden Stück des festen Körpers enthaltenen Materie. Wie man leicht einsieht, spielt dann auch die Größe des betrachteten Stückes des festen Körpers keine Rolle mehr. Es kann also $F^t - F^r = n \times$ einer Größe ∂F^r gesetzt werden, welche die Zunahme der freien Energie des Reststückes bei Hinzufügung der Bausteine einer der betrachteten Molekeln zu diesem Reststück bedeutet; ∂F^r wird, wie F^t und F^r selbst, im allgemeinen eine negative Größe sein. Für ein Mol kann dann auf den Ausdruck $N\,\partial F^r$ extrapoliert werden. Bezeichnen wir die auf ein Mol der abgetrennten Molekeln bezogene freie Energie dieser Molekeln in bezug auf den festen Körper mit μ, so erhalten wir also aus (2):

$$\mu = N\,\partial F^r - N\,y + N\,\nu\,\varepsilon\,(\varphi^0 - \varphi). \tag{3}$$

Hier beziehen sich die beiden ersten Glieder der rechten Seite auf Nahewirkungen, das letzte ist durch elektrostatische Fernwirkungen (zu denen z. B. noch Gravitationswirkungen hinzukommen könnten) verursacht. Dementsprechend wollen wir die Terme $N\,\partial F^r$ und $N\,y$ unter der Bezeichnung μ^0 (durch Nahewirkungen verursachte oder auch „natürliche freie Energie") zusammenfassen; für die Nullpunktsenergie $N\,y$ pro

Setzen wir definitionsweise fest, daß der Index m des Quantenzustandes nur dann fortrücken soll, wenn die Energie sich ändert (so daß also die oben betrachteten Zustände Z_m, Z_m', Z_m'' alle zu demselben Zustand Z_m gerechnet werden), so bleibt übrigens die obige Beziehung ΔF (chemisch) $= \Delta F_1$ (1. Quanten-Energiezustand) bestehen, da dann nicht nur $Y = Y_1$, sondern auch $p = p_1$ gesetzt werden muß. Bei der chemischen Definition der Molekel ist dann nämlich der Nullpunktszustand durch die Summe aller Quantenzustände 1 kleinster Energie gegeben, also gleich dem Zustand Z_1. — Ich darf bemerken, daß ich auf die hier notwendige Berücksichtigung von Gewichtskonstanten durch ein Gespräch mit Einstein aufmerksam geworden bin.

Mol, die in bezug auf den gewählten Dissipationszustand im allgemeinen eine negative Größe sein wird, führen wir noch die Bezeichnung Y ein. Es wird dann:

$$\mu^0 = N\,\partial F' - Y. \tag{4}$$

Bezeichnen wir endlich noch die Ladung $N\varepsilon$ eines Mols einwertiger positiver Ionen mit E, so wird:

$$\mu = N\,\partial F' - Y + \nu E(\varphi^0 - \varphi) \tag{5}$$

oder

$$\mu = \mu^0 + \nu E(\varphi^0 - \varphi). \tag{6}$$

Es setzt sich also die freie Energie einer elektrisch geladenen Molekel in bezug auf den festen Körper aus zwei recht ungleichen Bestandteilen zusammen. Die natürliche freie Energie μ^0 ist eine thermodynamische Größe im gewöhnlichen Sinne; sie ist durch die inneren Eigenschaften des festen Körpers und der betrachteten Molekel vollkommen gegeben, und ist insbesondere bei solchen festen Körpern, deren innere Eigenschaften in einiger Entfernung von der Oberfläche vom Zustand in den benachbarten Phasen unabhängig sind, eine reine Funktion von Temperatur und Volumen. Anders dagegen das zweite Glied $\nu E(\varphi^0 - \varphi)$ der freien Energie, das, wie wir sahen, von „Fernwirkungen" herrührt. Für dieses ist, etwas schroff ausgedrückt, die Verteilung der elektrischen Ladungen in der ganzen Welt maßgebend, und es sind vorwiegend die in den Grenzschichten auftretenden Ladungen, ferner aber auch äußere angelegte Felder und Raumladungen im Dampfraum zu berücksichtigen, um den Potentialunterschied $\varphi^0 - \varphi$ zwischen zwei Punkten im Inneren des festen Körpers und im Außenraume bestimmen zu können. Charakteristisch ist dabei, daß in unserer Formel (4) und demnach auch in unseren Dampfdruckformeln die Wirkung von in den Grenzschichten angesammelten Ladungen durchaus keine andere Rolle spielt als von im Dampfraum vorhandenen Raumladungen; unsere Formel hat also den Vorzug gegenüber allen früheren, von der Einführung einer scharfen Grenze zwischen festem Körper und Dampfraum überhaupt unabhängig zu sein.

Zu einer anderen Frage, die einem bei der Diskussion der Bedeutung von μ immer wieder entgegentritt, ist noch eine

Bemerkung notwendig. Der von uns in der beschriebenen Weise vorgenommene Prozeß, der zur Entfernung einer Anzahl geladener oder ungeladener Teilchen aus dem Inneren des festen Körpers und zu ihrer Fortführung nach einem Ort mit dem Potential φ geführt hat, läßt sich auch auf dem in der Natur wirklich durchlaufenen Wege verfolgen, auf welchem die Teilchen einfach durch die Grenzschicht des festen Körpers hindurch in den Außenraum dringen. Wir fragen, wie und wo sich die beiden Teile der durch Gleichung (4) ausgedrückten Änderung der freien Energie des Systems bei diesem Prozeß geltend machen.

Die wesentlichen Züge des Vorganges treten schon beim absoluten Nullpunkt hervor, wo der Energiezustand einer Molekel im Innern und außerhalb des festen Körpers als eindeutig betrachtet werden kann. Am interessantesten ist es nun, die Energieänderung zu verfolgen, wenn ein *Elektron* aus dem Innern des festen Körpers nach außen gebracht wird. Um ein solches Teilchen im Inneren des festen Körpers fortzubewegen, bedarf es keines Energieaufwandes; man könnte das Teilchen z. B. einfach mit einem in gleicher Lage in der Nähe der Oberfläche gelegenen seinen Platz tauschen lassen. Eine Änderung der Gesamtenergie findet erst statt, wenn das Teilchen beim Durchgang durch die Grenzschicht Lagen einnimmt, die vorher nicht von einem Elektron eingenommen werden konnten. Jetzt tritt gleichzeitig dreierlei ein: Erstens hat das Elektron seine potentielle Energie in bezug auf seine unmittelbare Umgebung geändert, zweitens haben sich in der unmittelbaren Umgebung der Durchtrittsstelle die verschiebbaren elektrischen Teilchen des festen Körpers (Polarisations- oder Leitungselektronen) in einen neuen Gleichgewichtszustand eingestellt, der von dem ursprünglichen abweicht und damit eine Änderung der Eigenenergie dieser Teilchen bedingt, und drittens gerät das Teilchen nunmehr in den Bereich der elektrostatischen Fernkräfte, die von äußeren Körpern und von einer etwaigen an der Grenze vorhandenen Doppelschicht, die auch beim absoluten Nullpunkt nicht zu verschwinden braucht, herrühren.[1]) (Man überzeugt sich leicht, daß auch die elektro-

1) Diese Einteilung läßt sich in Parallele setzen mit einer 1891 von M. Planck eingeführten (Wied. Ann. 44. S. 383. 1891) in elektromolekulare, molekulare und elektrostatische Energie. Es bestehen

statischen Kräfte der Doppelschicht, durch die das Elektron hindurchpassiert, als Fernkräfte gedeutet werden können, insofern als die gesamte Energiebilanz beim Austritt nicht dadurch beeinflußt wird, wenn in der unmittelbaren Umgebung der Austrittsstelle die Doppelschicht entfernt wird.)

Da in dieser Einteilung der 3. Bestandteil durch $\nu E(\varphi^0 - \varphi)$ dargestellt wird, so folgt, daß die Bestandteile 1 und 2 der Energieänderung in dem Glied μ^0 der Gleichung (6) enthalten sein müssen. In 1 und 2 ist also auch die Bildkraftwirkung enthalten, d. h. die Bildkraft liefert einen bestimmten Beitrag zur natürlichen freien Energie. (Denn es ist klar, daß eine besondere Bildkraftwirkung neben den Termen, die sich aus unserer Berechnung von μ^0 nach dem ersten Schema ergeben, nicht berücksichtigt zu werden brauchte.) Nur für die Untersuchung der Gleichgewichte und Ladungsdichten in den Grenzflächen (also auf diesem Umwege auch bei der Berechnung des Potentialunterschiedes $\varphi^0 - \varphi$) spielt die Bildkraft eine Rolle.

§ 2. Freie Energie und Ionisierungsarbeit.

Die Zerlegung der „freien Energie einer Molekel in bezug auf die feste Phase", wie sie durch die Gleichungen (2) bis (6) ausgedrückt ist, gibt bereits Anlaß zur Aufstellung verschiedener wichtiger Beziehungen.

Wir vergleichen die Änderung $-\partial F^r$ der freien Energie des Restkörpers, wenn eine neutrale Molekel (z. B. ein Atom) abgetrennt wird, mit den Änderungen der freien Energie des Restkörpers, wenn zwei einzelne Unterbestandteile dieser neutralen Molekel, die selbst wieder als Molekeln auftreten, nacheinander abgetrennt werden (z. B. Elektronen und positive Ionen; wir legen dabei vorläufig die chemische Definition der Molekeln zugrunde, vgl. S. 137). Sind im Endeffekt in beiden Fällen dieselben Bausteine aus dem Restkörper entfernt, so muß die Änderung der freien Energie des Restkörpers auch in beiden Fällen die gleiche sein.

---

jedoch bemerkenswerte Unterschiede; insbesondere kann bei uns beim Austritt eines geladenen Teilchens auch eine Änderung der „molekularen" Energie eintreten, während diese bei Planck als konstant angesehen wird. Schon 1915 habe ich übrigens in einem andern Falle gezeigt, daß die Nichtberücksichtigung einer veränderlichen Eigenenergie des Metalles zu Fehlschlüssen in der Literatur geführt hat (Richardson; vgl. Ber. d. D. Phys. Ges. 1915. S. 109—121).

Bezeichnen wir die neutrale Molekel durch ein (×), die aus dem positiven Unterbestandteil gebildete Molekel durch ein (+)-Zeichen, die aus dem negativen gebildete durch ein (−)-Zeichen, so gilt also, wenn noch überall das Vorzeichen umgekehrt wird, die Gleichung:

$$\partial F^{r\times} = (\partial F^{r+} + \partial F^{r-}). \tag{7}$$

Nun ist nach (5)

$$N\,\partial F_r = \mu + \Upsilon + \nu E\,(\varphi^0 - \varphi).$$

Wird diese Gleichung nacheinander auf die neutrale Molekel ($\nu = 0$), auf die positive Molekel ($\nu = +1$) und die negative ($\nu = -1$) angewandt, und werden diese Beziehungen in Gleichung (7) eingesetzt, so folgt:

$$\mu^\times + \Upsilon^\times = \mu^+ + \Upsilon^+ + E\,(\varphi^0 - \varphi) + \mu^- - \Upsilon^- - E\,(\varphi^0 - \varphi).$$

also:

$$\mu^+ + \mu^- = \mu^\times + \Upsilon^\times - (\Upsilon^+ + \Upsilon^-).$$

Nun bezeichnet $\Upsilon^\times - (\Upsilon^+ + \Upsilon^-)$ gemäß unserer chemischen Definition der Molekeln den Energieunterschied pro Mol, der beim absoluten Nullpunkt zwischen den (ruhenden und unendlich weit voneinander getrennten) neutralen Molekeln und ihren geladenen Komponenten vorhanden ist. Das ist aber, wenn es sich um die Zusammensetzung eines Elektrons und eines Ions zu einem neutralen Atom handelt, die negative Ionisierungsarbeit J:

$$J = \Upsilon^+ + \Upsilon^- - \Upsilon^\times;$$

handelt es sich um die Dissoziation eines Moleküls, z. B. NaCl, so ist es die Trennungsarbeit dieses Gebildes usw. Wir erhalten also immer eine Gleichung von der Form[1]):

$$\mu^+ + \mu^- = \mu^\times - J. \tag{8}$$

---

1) *Anm. bei der Korrektur.* Werden statt der Größen Y allgemeiner die Größen H eingeführt (Anm. S. 138, 139), in denen noch die Gewichtskonstanten der Nullpunkts-Quantenzustände berücksichtigt sind, so lautet Gleichung (8):

$$\mu^+ + \mu^- = \mu^\times - (J - RT \ln p^+ p^- / p^\times),$$

und die Gleichungen (8^1), (8^2), (8^3) und (9) erhalten entsprechende Zusatzglieder. Gleichung (11) bekommt die Form:

$$\mu_m - \mu_n = -(Y_m - Y_n) + RT \ln p_m / p_n.$$

desgleichen bei der Trennung in doppelt geladene Molekeln

$$\mu^{++} + \mu^{--} = \mu^{\times} - J, \tag{8^1}$$

wobei J die Trennungsarbeit der doppelt geladenen Bestandteile voneinander bedeutet; oder bei Trennung zweier gleicher einfach geladener Bestandteile von einem doppelt geladenen (z. B. Cu^{++} mit zwei Elektronen):

$$\mu^{++} + 2\mu^{-} = \mu^{\times} - J. \tag{8^2}$$

Hierbei wäre J die Arbeit, die bei Abtrennung zweier Elektronen vom neutralen freien Atom zu leisten ist.

Aber nicht nur bei der Zerlegung neutraler Molekeln in ihre geladenen Komponenten, sondern auch bei der weiteren Zerlegung bereits geladener Molekeln in anders geladene Bestandteile fallen die vom Potential abhängigen Glieder aus diesen Beziehungen heraus. So gilt z. B., wie man sich leicht überzeugt, für die Zerlegung eines positiv einwertigen Ions in einen doppelt positiv geladenen und einen einfach geladenen negativen Unterbestandteil:

$$\mu^{++} + \mu^{-} = \mu^{+} - J. \tag{8^3}$$

wobei diesmal J die Arbeit bedeutet, die bei Abtrennung eines negativen Bestandteiles (z. B. eines zweiten Elektrons) aus einer bereits einfachen positiv aufgeladenen Molekel (z. B. Cu^{+}-Ion) zu leisten ist.

Wir finden also: trotzdem die freie Energie geladener Molekeln in bezug auf eine feste Phase von dem elektrischen Potential abhängt, auf das man die betreffende freie Energie bezieht, so lassen sich doch gewisse algebraische Kombinationen dieser Größen (und zwar solche, für die die algebraische Summe der in Betracht kommenden Ladungen $= 0$ ist) durch eine nur von der inneren Energie der verschiedenen Teile beim absoluten Nullpunkt abhängige Größe J ausdrücken.

Ziehen wir in den Gleichungen (8) von den freien Energien μ überall die entsprechenden Glieder $\nu E(\varphi^0 - \varphi)$ ab, so bleibt dadurch, wegen $\Sigma \nu = 0$ die Richtigkeit dieser Gleichungen ungeändert. Nach (6) stehen dann aber überall statt der gesamten freien Energie die natürlichen freien Energien in den Gleichungen, also z. B.

$$\mu^{0+} + \mu^{0-} = \mu^{0\times} - J. \tag{9}$$

eine Gleichung, die sich wegen $\mu^{0\times} = \mu^{\times}$ auch direkt aus der Tatsache hätte ableiten lassen, daß wegen $\nu^{+} = -\nu^{-}$

$$\mu^{+} + \mu^{-} = \mu^{0+} + \mu^{0-} \tag{10}$$

ist. Alle diese Beziehungen spielen bei den späteren Dampfdruckbetrachtungen eine wichtige Rolle.

Noch einfachere Gleichungen gelten zwischen den freien Energien μ_m, μ_n der verschiedenen Quantenzustände desselben chemischen Bestandteiles. Da für alle derartigen Quantenzustände Z_1, Z_2 usw. die Größe ∂F^{ν} denselben Wert hat und ebenso die Wertigkeit ν der Molekel ungeändert bleibt, so gilt nach Gleichung (5):

$$\mu_m - \mu_n = -(Y_m - Y_n), \tag{11}$$

wobei Y_m und Y_n die Energieunterschiede pro Mol gegenüber dem in § 1 zugrunde gelegten Dissipationszustande bedeuten.[1]) Noch direkter findet man, daß Gleichung (11) auch für die natürlichen freien Energien μ^0 in den Zuständen Z_m und Z_n gilt.

§ 3. Galvanische und Voltasche Spannungsreihe.

Eine andere Überlegungsreihe, die sich hauptsächlich auf die Beziehungen (6) stützt, führt zur Aufdeckung des Zusammenhanges zwischen natürlicher freier Energie und den Kontaktpotentialen an der Berührungsfläche zweier Medien.

Wir nehmen an, an Stelle der einen festen Phase, die wir bisher betrachtet haben, seien zwei solche Phasen vorhanden; beiden Phasen sei ein Bestandteil (z. B. das Elektron) gemeinsam. Ferner wird angenommen, daß im Innern der festen Phasen der Zustand von den in den übrigen vorhandenen Phasen unabhängig sei, und endlich, daß in bezug auf den betrachteten Bestandteil, der mehreren Phasen gemeinsam ist, echtes Gleichgewicht herrscht, wie es z. B. bei den Elektronen in Metallen der Fall ist. Dann muß die freie Energie μ_1 des betreffenden (im Dampfraum als Molekel auftretenden) Bestandteiles in der festen Phase 1, bezogen auf einen beliebigen

1) Daß ich hier der Bequemlichkeit halber zur Charakterisierung der Art des Bestandteiles auch einmal den unteren Index benutze, der im übrigen (vgl. den folgenden §) zur Kennzeichnung der festen Phase, auf die sich die freie Energie der Molekel bezieht, vorbehalten bleiben soll, wird hoffentlich zu keinen Verwechslungen Anlaß geben.

Punkt P des Dampfraumes dieselbe sein wie die freie Energie μ_2 desselben Bestandteiles in bezug auf die feste Phase 2.

$$\mu_1 = \mu_2 . \tag{12}$$

Ist der betrachtete Bestandteil geladen und herrscht im Inneren der festen Phase 1 das konstante mittlere Potential φ_1^0, im Inneren der anderen festen Phase das Potential φ_2^0, so folgt aus (12) und (6)

$$\left\{ \begin{aligned} &\mu_1^0 + v E(\varphi_1^0 - \varphi) = \mu_2^0 + v E(\varphi_2^0 - \varphi), \\ &\varphi_2^0 - \varphi_1^0 = \frac{\mu_2^0 - \mu_1^0}{-vE} . \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Sind insbesondere die festen Phasen zwei verschiedene Metalle und die betrachteten Bestandteile Elektronen, so ist (wegen $v = -1$)

$$\varphi_2^0 - \varphi_1^0 = \frac{\mu_2^0 - \mu_1^0}{E} . \tag{14}$$

Die Gleichung (14) (wie auch schon 13) enthält nun keine Beziehung mehr auf den Punkt P des Außenraumes, sondern verknüpft nur die mittleren Potentiale im Innern verschiedener Metalle mit der natürlichen freien Energie der Elektronen in den beiden Metallen. Die Potentialdifferenz ist mit anderen Worten, wie es sein muß, unabhängig vom Zustand im Außenraum; sie muß ja auch im thermischen Gleichgewichtszustand unabhängig davon sein, ob sich die Metalle berühren oder nicht. Die Größe $\varphi_2^0 - \varphi_1^0$ gibt also auch direkt den Potentialsprung an der Berührungsfläche zweier Metalle, d. h. die galvanische Spannungsdifferenz zweier Metalle an. Wir erhalten mithin folgenden Satz:

„Die galvanische Spannungsdifferenz an der Berührungsfläche zweier Metalle ist durch die Unterschiede der natürlichen freien Energien der Elektronen in beiden Metallen bestimmt."

Durch diesen Satz ist, da die natürlichen freien Energien bei gewöhnlichen Temperaturen nicht allzusehr von den Energieunterschieden beim absoluten Nullpunkt abweichen werden, die Möglichkeit einer angenäherten Berechnung der galvanischen Kontaktpotentiale aus den Annahmen über die Struktur der Metalle beim absoluten Nullpunkt gegeben (z. B.

mit Hilfe der Born-Haberschen Gittertheorie[1]) oder ähnlicher Betrachtungen). Da nach allem, was wir wissen, durchaus kein Grund für die Annahme besteht, daß die Abweichungen der Größen μ^0- voneinander für die verschiedenen Metalle von kleinerer Größenordnung sein sollten als die Größen μ^0- selbst, und da die Größen μ^0-, wie wir aus Sättigungsstrommessungen folgern können (vgl. § 9), von der Größenordnung 3—5 Volt sind, so wäre nach Gleichung (14) anzunehmen, daß an der Berührungsstelle zweier Metalle Potentialsprünge von der Größenordnung von 1—2 Volt auftreten können. Diese Aussage gilt ebenso wie für alle endlichen Temperaturen auch für den absoluten Nullpunkt.

Wegen des theoretischen Interesses, das die Frage nach dem Kontaktpotential der Metalle von jeher gefunden hat, möchte ich hier auf eine frühere Beweisführung, die anscheinend zu dem entgegengesetzten Resultat führte, kurz eingehen. Man hat sich durch die Betrachtungsweise O. W. Richardsons daran gewöhnt, das Innere des Metalles sich ebenso von Elektronendampf erfüllt zu denken wie den Außenraum, und nur an der Grenzschicht zwischen Metall und Vakuum eine „Austrittsarbeit" anzunehmen. Es liegt sehr nahe, diese Austrittsarbeit durch den Unterschied einer gewissen potentiellen Energie χ im Innern des Metalles (χ^0) und an der Grenze des Außenraumes (χ^a) zu erklären, also den Potentialunterschied $\chi^a - \chi^0$ gleich der Austrittsarbeit w zu setzen. Die Differenz für zwei Metalle würde dann den Unterschied der potentiellen Energie der Elektronen in beiden Metallen angeben, der beim absoluten Nullpunkt genau und bei gewöhnlichen Temperaturen nahezu verschwinden müßte, also:

$$\chi_2^0 - \chi_1^0 \sim 0.$$

Dieser Gedankengang, der in ähnlicher Weise zuerst von P. Debye[2]), später von mir in meinem Bericht über thermische Elektronenemission[3]) vertreten worden ist, bleibt tatsächlich zurecht bestehen. Es ist nur die Bedeutung der Potentiale χ^0 eine andere als die von φ^0 in der vorliegenden Betrach-

1) M. Born, Verh. d. Deutschen Physik. Ges. **21**. S. 13. 1919; F. Haber, Berliner Ber. 1919. S. 494.

2) P. Debye, Ann. d. Phys. **33**. S. 473. 1910.

3) Jahrb. der Radioakt. u. Elektronik **12**. S. 173. 1915.

tung. Der Potentialsprung $\chi_2^0 - \chi_1^0$ in den früheren Betrachtungen ist eben keine reine Doppelschichtwirkung, sondern enthält noch Bestandteile, die auf „Strukturwirkungen" zurückzuführen sind. Die Gleichheit von χ_2^0 und χ_1^0 sagt in diesem Sinne nichts anderes aus, als daß die Verschiedenheiten der „Strukturpotentiale" in beiden Metallen durch die objektive elektrostatische Doppelschicht an der Berührungsfläche kompensiert werden. In der vorliegenden Arbeit wurde an Stelle des immerhin etwas speziellen Begriffes des Strukturpotentiales von vornherein der allgemeinere Begriff der „natürlichen freien Energie" eingeführt; dadurch ist die Gefahr der Verwechselung mit den mittleren elektrostatischen Potentialen vermindert. Als Doppelschicht wird demgemäß bei uns auch nur das aufgefaßt, was auch auf entfernte Punkte als solche wirkt. Würde man z. B. in einer galvanischen Kette, die durch einen Leiter von großem Widerstande geschlossen ist, den Potentialunterschied an den Enden dieses Leiters aus den an den Grenzen der verschiedenen Körper auftretenden elektrischen Doppelschichten berechnen, so würde man zu einem richtigen Resultat kommen, wenn man unsere Definition der elektrostatischen Potentiale φ^0 und unsere Potentialsprünge $\varphi_2^0 - \varphi_1^0$ einführt, dagegen zu einem falschen Resultat, wenn man statt dessen die Größen χ benutzt.[1]) Ein anderes Kriterium zur Unterscheidung der Potentiale φ und χ ist das, daß im Innern des festen Körpers φ für ganz beliebige geladene Bestandteile (positive, negative Ionen, Elektronen) dasselbe ist, während χ für jeden Bestandteil anders bestimmt wäre.

Vielleicht ist es auch für einige Leser nicht überflüssig, auf den Zusammenhang unseres Resultates [Gleichung (14)] mit den experimentellen Beobachtungen einzugehen. Die Peltierwärme Q_{12} gibt nach thermodynamischer Definition den

1) Die „χ-Definition" der Potentialunterschiede liegt offenbar auch einer Bemerkung von P. Debye (Ann. d. Phys. **33**. S. 473. 1910) über die Potentialdifferenz an der Berührungsstelle zweier Metalle zugrunde. Danach soll, wenn zwei Metalle miteinander verlötet sind, eine Austrittsarbeit nicht zu leisten sein und infolgedessen die Potentialdifferenz bis auf ein Korrekturglied verschwinden. Diese Bemerkung ist offenbar nur zutreffend, wenn man unter „Potentialen" die Summe von „Strukturpotentialen" und mittleren elektrostatischen Potentialen versteht.

Unterschied zwischen der Differenz der freien Energien $\mu_2^- - \mu_1^-$ — diese Differenz verschwindet im thermischen Gleichgewicht — und den wahren Energien $U_2 - U_1$ der Elektronen in beiden Metallen an. Beim absoluten Nullpunkt verschwindet der Unterschied zwischen freier und wahrer Energie. Die Differenz $U_2 - U_1$ wird ebenfalls $= 0$ und ebenso die Peltierwärme Q_{12}. Man erkennt aus der Betrachtung dieses Grenzfalles besonders deutlich, daß ein größenordnungsmäßiger Zusammenhang zwischen Peltierwärme und dem Potentialsprung an der Berührungsfläche nicht bestehen kann; denn die Gleichung $\mu_1^- = \mu_2^-$ (und für den absoluten Nullpunkt auch $U_1 = U_2$) ist ja zufolge den Gleichungen (12) bis (14) für ganz beliebige Werte der Differenzen $\mu_2^{0-} - \mu_1^{0-}$, also auch der Potentialsprünge $\varphi_2^0 - \varphi_1^0$ erfüllt.

Eine Abweichung von den Auffassungen von H. von Helmholtz und M. Planck (a. a. O., S. 141, 142, Anmerk.) besteht bei uns nur infolge des eingeführten Begriffes der natürlichen freien Energie, der etwas allgemeiner ist als die „spezifische Anziehung" bei Helmholtz und die „elektromolekulare Energie" (und Entropie) bei Planck.

Über die Kontaktsprünge, die an der Berührungsstelle eines Metalles mit einer wäßrigen Lösung seines Salzes auftreten, und die etwas außerhalb des Rahmens der hier verfolgten Betrachtungen fallen, sei nur so viel bemerkt, daß diese Potentialsprünge, wie schon K. Herzfeld[1]) hervorgehoben hat, nicht aus dem Gleichgewicht der Elektronen in beiden Phasen zu berechnen sind, da für Elektronen in Wirklichkeit kein Gleichgewicht herrscht (unechte Gleichgewichte). Es ist hier der Potentialunterschied zwischen beiden Phasen vielmehr durch die Unterschiede der natürlichen freien Energie der Metallionen $\mu^{0+}_{\text{Metall}} - \mu^{0+}_{\text{Lösung}}$ bestimmt. Nur dadurch, daß eine solche Gleichung an den verschiedenen Grenzflächen einer geschlossenen galvanischen Kette nicht durchweg für *denselben* Bestandteil gilt, wird überhaupt das Auftreten einer resultierenden elektromotorischen Kraft möglich.

Von der *galvanischen* Spannungsdifferenz $\varphi_2^0 - \varphi_1^0$ zweier Metalle wird gewöhnlich unterschieden die *Voltadifferenz* $\varphi_2^g - \varphi_1^g$, die zwischen 2 Grenzflächen G_1 und G_2 im Außen-

1) K. Herzfeld, Ann. d. Phys. **56**. S. 151. 1918.

tung. Der Potentialsprung $\chi_2^0 - \chi_1^0$ in den früheren Betrachtungen ist eben keine reine Doppelschichtwirkung, sondern enthält noch Bestandteile, die auf „Strukturwirkungen" zurückzuführen sind. Die Gleichheit von χ_2^0 und χ_1^0 sagt in diesem Sinne nichts anderes aus, als daß die Verschiedenheit der „Strukturpotentiale" in beiden Metallen durch die elektrostatische Doppelschicht an der Berührungsfläche kompensiert werden. In der vorliegenden Arbeit wurde anstatt des immerhin etwas speziellen Begriffes des Strukturpotentials von vornherein der allgemeinere Begriff der „[illegible] freien Energie" eingeführt; dadurch ist die Gefahr einer Verwechselung mit den mittleren elektrostatischen Potentialen vermindert. Als Doppelschicht wird demgemäß bei uns [illegible] das aufgefaßt, was auch auf entfernte Punkte als solche wirkt. Würde man z. B. in einer galvanischen Kette, die durch einen Leiter von großem Widerstande geschlossen ist, den Potentialunterschied an den Enden dieses Leiters aus den an den Grenzen der verschiedenen Körper auftretenden elektrischen Doppelschichten berechnen, so würde man zu einem falschen Resultat kommen, wenn man unsere Definition der elektrostatischen Potentiale φ^0 und unsere Potentialsprünge ψ einführt, dagegen zu einem falschen Resultat, wenn man an deren die Größen χ benutzt.[1]) Ein anderes Kriterium für die Unterscheidung der Potentiale φ und χ ist das, daß das Innere des festen Körpers φ für ganz beliebige geladene Teilchen (positive, negative Ionen, Elektronen) dasselbe ist, während es für jeden Bestandteil anders bestimmt wäre.

Vielleicht ist es auch für einige Leser nicht ganz überflüssig, auf den Zusammenhang unseres Resultates [Gl. (1)] mit den experimentellen Beobachtungen einmal einzugehen. Die Peltierwärme Q_{12} gibt nach thermodynamischer Überlegung

1) Die „χ-Definition" der Potentialunterschiede geht auf eine Bemerkung von P. Debye (Ann. d. Phys. [illegible]) über die Potentialdifferenz an der Berührungsstelle zweier Metalle zugrunde. Danach soll, wenn zwei Metalle miteinander im Gleichgewicht sind, eine Austrittsarbeit nicht zu leisten sein und infolgedessen die Potentialdifferenz bis auf ein Korrekturglied verschwinden. Diese Ansicht ist offenbar nur zutreffend, wenn man unter „Potentialunterschied" nur den von „Strukturpotentialen" und mittleren elektrostatischen Potentialen versteht.

ergie
ei der
leichge-
se freie
en Null-
der Nähe
Potential φ
len gegen-
einander
ersartigen
s Raumes
der freien
nlich ver-
d. Im fol-
re gemacht
inander und
zu werden
kel im Dampf-

raume herrscht, die den beiden Metalloberflächen 1 und 2 nahe benachbart sind. In der Definition einer Voltadifferenz liegt offenbar eine gewisse Unbestimmtheit, insofern, als die genaue Lage der Grenzflächen G_1 und G_2 nicht angegeben werden kann, was in den Fällen, wo das Potential in unmittelbarer Nähe der Grenzfläche stark variiert, zu ganz verschiedenen Bestimmungen von $\varphi_2'' - \varphi_1''$ je nach den gewählten Grenzflächen führen kann. Wie in solchen Fällen und infolge welcher Voraussetzungen dennoch ein einigermaßen definierter Wert von $\varphi_2'' - \varphi_1''$ festzustellen ist, soll später (III. Teil) erörtert werden. In diesem Paragraphen umgehen wir diese Frage dadurch, daß wir für die Flächen G_2 und G_1 jede beliebige Potentialfläche außerhalb der Strukturspähre der Metalle zulassen. Es drückt sich dann $\varphi_2'' - \varphi_1''$ durch die natürliche freie Energie der Elektronen und durch die „Potentialsprünge" $\varphi'' - \varphi^0$ zwischen der betrachteten Fläche G und dem Metallinnern folgendermaßen aus:

$$\varphi'' = (\varphi'' - \varphi^0) + \varphi^0$$

$$\varphi_2'' - \varphi_1'' = (\varphi_2'' - \varphi_2^0) + \varphi_2^0 - [(\varphi_1'' - \varphi_1^0) + \varphi_1^0],$$

oder wegen

$$\varphi_2^0 - \varphi_1^0 = \frac{\mu_2^0}{E} - \frac{\mu_1^0}{E} \quad \text{[Gleichung (13)!]},$$

$$(14^1)\quad \varphi_2'' - \varphi_1'' = \left[(\varphi_2'' - \varphi_2^0) + \frac{\mu_2^{0-}}{E}\right] - \left[(\varphi_1'' - \varphi_1^0) + \frac{\mu_1^{0-}}{E}\right].$$

Man sieht an dieser Gleichung, daß in allen Fällen echten Gleichgewichtes auch eine „Voltasche Spannungsreihe" existieren muß, die durch die Größen

$$\frac{\mu^{0-}}{E} + \varphi'' - \varphi^0$$

bestimmt ist. Diese Größen sind aber nichts anderes als die durch E dividierten und auf einen Punkt der Grenzfläche G bezogenen *totalen* freien Energien μ^{0-} der Elektronen. Wir erhalten also den Satz:

„Die Voltasche Spannungsdifferenz zwischen zwei äußeren Grenzflächen zweier leitender Körper ist durch die totale freie Energie der Elektronen in beiden Körpern in bezug auf die gewählten Grenzflächen bestimmt."

Fallen die Flächen G_2 und G_1 zusammen, so wird die Voltadifferenz $= 0$, wie es sein muß.

In den bereits erwähnten Fällen, wo sich die Größen $\varphi_2^g - \varphi_1^g$ bzw. die Größen $\varphi^g - \varphi^0$ einigermaßen eindeutig definieren lassen, werden wir für diese „Potentialsprünge" $\varphi^g - \varphi^0$ die Bezeichnung ψ einführen und auf die Bestimmung der Größen ψ etwas eingehen (III. Teil).

§ 4. Die freie Energie der Dampfphase.

Wir kehren nunmehr zu den Betrachtungen des § 1 zurück. Dort hatten wir „die freie Energie einer geladenen oder ungeladenen Molekel in bezug auf eine feste Phase und ein äußeres Potential φ" genau zu definieren versucht. Wir hatten dabei die Differenz zweier Zustände betrachten müssen, in deren erstem sich die Bausteine der betreffenden Molekel noch im Inneren des festen Körpers befanden, während sie sich im zweiten Zustand, zu der Molekel zusammengefügt, im Außenraume auf dem Potential φ befinden sollten. Die einzelnen Molekeln sollten hierbei noch in unendlich weiter Entfernung voneinander und in Ruhe sein; nur innerhalb der Molekeln konnten kinetische Nullpunkts- (oder sonstige eindeutige Quanten-)Energien auftreten.

Wenn wir nunmehr dazu übergehen wollen, die freie Energie zu bestimmen, die irgendeine Molekel im Dampfraum bei der Temperatur T und dem Potential φ im thermischen Gleichgewicht mit dem festen Körper besitzt, so müssen wir diese freie Energie offenbar auch auf den eben nochmals skizzierten Nullzustand beziehen. Die freie Energie einer Molekel in der Nähe eines Punktes P des Außenraumes, der sich auf dem Potential φ befindet, hängt dann im allgemeinsten Falle ab von den gegenseitigen Kräften, die die betrachteten Bestandteile aufeinander ausüben sowie von den Wechselkräften mit den andersartigen Bestandteilen, die sich noch an derselben Stelle des Raumes befinden. Um hier zu einer allgemeinen Definition der freien Energie zu gelangen, müßte man offenbar ganz ähnlich verfahren wie wir für den festen Körper verfahren sind. Im folgenden soll jedoch stets die vereinfachende Annahme gemacht werden, daß die Wechselenergie der Molekeln aufeinander und auf andersartige Molekeln nicht berücksichtigt zu werden braucht, daß wir also für jede betrachtete Molekel im Dampf-

raume den idealen Gaszustand[1]) voraussetzen können. Die freie Energie f pro Mol eines Bestandteiles hat dann folgende Form:[2])

$$f = RT \ln c - RT\left(\tfrac{3}{2} \ln T + C\right) + f_i \,. \tag{15}$$

Hierbei bedeutet c die Konzentration[3]) in Mol pro ccm, R die bekannte Gaskonstante, C ist eine Konstante, die von der Wahl der Konstante a (§ 1) für den festen Zustand abhängt; wird diese so festgelegt, wie wir es durch Gleichung (1) getan haben, so läßt sich, wie in den letzten Jahren von verschiedenen Seiten gezeigt worden ist[4]), die Konstante C mittels statistischer und quantentheoretischer Betrachtungen bestimmen und erhält den Wert:[5])

1) Für geladene Teilchen, insbesondere Elektronen, sind die Bedingungen hierfür von mir schon 1914 festgelegt (Physik. Zeitschr. **15**. S. 872—878. 1914) und in letzter Zeit anläßlich der Kontroverse mit Hrn. v. Laue über das Elektronengas (Physik. Zeitschr. **20**. S. 45, 46 u. S. 220—228. 1919) ausführlicher erörtert worden. Es ergibt sich hierbei eine gewisse Beziehung zwischen Konzentration und Temperatur, in die, wie ich zeigen konnte, auch eine neuerdings von Hrn. v. Laue auf Grund anderer Gedankengänge aufgestellte Formel (Ann. d. Physik. **58**. S. 695—711. 1919) übergeht, sofern man dort statt eines beliebigen Volums das mittlere „Atomvolum" eines Elektrons einsetzt. Ich möchte bei dieser Gelegenheit noch einmal ausdrücklich hervorheben, daß ein tatsächlicher Unterschied zwischen der so angewandten v. Laueschen Bedingung und der meinigen nicht besteht. Auch gebe ich gern zu, daß es nicht eigentlich eine Frage des physikalischen Taktes ist, ob man eine Ungleichheitsbedingung $a \ll b$ bereits durch $a < b$ oder erst durch $a < {}^1/_{100}\, b$ als erfüllt ansehen will, sondern daß die Entscheidung hierüber in jedem Fall sich nach der geforderten Genauigkeit bzw. den Versuchsbedingungen zu richten hat.

2) Vgl. z. B. M. Planck, Thermodynamik. 5. Aufl. S. 117.

3) In Plancks „Thermodynamik" bedeutet c das Verhältnis der molaren Menge eines Stoffes zur molaren Menge des gesamten Stoffes in der gleichen Phase. Ich hoffe, daß die Gleichartigkeit der Bezeichnung nicht zu Verwechslungen Anlaß geben wird.

4) Literatur vgl. bei M. v. Laue, Die Entropiekonstante der Glühelektronen. Jahrb. für Radiokt. u. Elektronik. **15**. S. 259. 1918.

5) An dieser Stelle tritt das Nernstsche Theorem in unsere Voraussetzungen ein. Indem nämlich angenommen wird, daß die Konstante C einer bestimmten Art von Molekeln für ganz beliebige feste Phasen, in denen die Konstante der freien Energie durch

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{T=0} = 0$$

$$C = \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi m k}{h^2} + 1 - \ln N. \quad [1]) \tag{16}$$

Hierbei bedeutet m die Masse einer einzigen Molekel der betrachteten Art, k ist die elementare Gaskonstante $= 1{,}34 \cdot 10^{-16}$ (cgs), h ist das elementare Wirkungsquantum $= 6{,}51 \cdot 10^{-27}$ (cgs) und N die Zahl der Moleküle im Mol $= 6{,}15 \cdot 10^{23}$. Durch Einsetzen dieser Werte erhält man

$$C = -7{,}1 + \frac{3}{2} \ln \frac{M}{M_H}. \tag{16^1}$$

Hierbei ist M die (träge) Masse pro Mol der betrachteten Molekeln, M_H ist das Atomgewicht des Wasserstoffes, das $= 1$ gesetzt wird.

Zur genaueren Festsetzung der Bedeutung von f in Gleichung (15) ist jedoch noch eine Bemerkung nötig. f ist so bestimmt, als wenn die betreffende Gasart allein im Raume vorhanden wäre, und es ist bekannt, daß beim Zusammenbringen verschiedener Arten von Gasmolekeln die freie Energie sich nicht additiv aus den Einzelenergien der Bestandteile

---

bestimmt ist, denselben durch Gleichung (16) gegebenen Wert besitzt, wird zugleich die Voraussetzung eingeführt, daß der Unterschied $\mu_2 - \mu_1$ der freien Energie pro Mol einer Molekel in den festen Phasen 1 und 2 beim absoluten Nullpunkt temperaturunabhängig ist. Das ist aber ein Spezialfall der Nernstschen Annahme

$$\left(\frac{\partial \Delta F}{\partial T}\right)_{T=0} = 0,$$

oder, wie Nernst schreibt,

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial T}\right)_{T=0} = 0.$$

1) Von den entsprechenden Konstantenbestimmungen von O. Stern, R. J. Herzfeld und M. v. Laue unterscheidet sich diese Gleichung durch den Summanden 1 auf der rechten Seite. [Bei Herzfeld I (Anm. S. 120 dieser Arbeit) ist die entsprechende Formel außerdem durch einen Druckfehler entstellt]. Der Unterschied beruht darauf, daß bei uns unter $f dx$ die Änderung der freien Energie des Gases bei Hinzufügung von dx Mol *unter Konstanthaltung des Volums* verstanden wird (Temperatur, Teilchenzahlen, Volumen sind die unabhängigen Variabeln!). Dementsprechend hat unsere Größe μ eine von dem Sternschen λ_0 (Z. f. Elektroch. 1919, S. 66—80) und dem v. Laueschen μ eine um das Glied RT verschiedene Bedeutung, die Größen μ/RT usw. unterscheiden sich also um den Betrag 1. Man überzeugt sich, daß die betreffenden Dampfdruckformeln unter Berücksichtigung dieses Umstandes identisch werden.

zusammensetzt. Wohl aber läßt sich, unter Benutzung der Formel für die freie Energie von Gasgemischen [die betr. Entropieformel siehe z. B. bei M. Planck, Thermodynamik, 5. Aufl., S. 222], der Satz ableiten, daß bei Hinzufügung von dx Molen der Gattung x (unter Konstanthaltung des Volums) die freie Energie des Gasgemisches sich um $f_x\,dx$ ändert, wobei f_x nach (15) zu berechnen ist. Und gerade auf diesen Faktor f_x von dx kommt es in unsern Gleichgewichtsbetrachtungen an.

Das Glied f_i auf der rechten Seite bedeutet die innere freie Energie pro Mol der betreffenden Molekel bei der Temperatur T, bezogen auf den in § 1 beschriebenen Nullzustand ($T = 0$ bei chemischer Definition, beliebiger Quantenzustand Z_n bei Quantendefinition der Molekel). Die Absonderung des Gliedes f_i von den beiden ersten Termen der rechten Seite von Gleichung (15) beruht darauf, daß sich für jeden Zustand der Molekel die Energie additiv aus der Translationsenergie der fortschreitenden Wärmebewegung und der inneren Energie (Rotation, periodische Bewegung usw.) zusammensetzen läßt. Diese Additivität gilt wegen der relativistischen Einflüsse der inneren Zustände auf die Translationsenergie nicht ganz genau, aber für alle hier betrachteten Fälle mit hinreichender Annäherung.

Der Wert von f_i ist selbstverständlich $= 0$, wenn es sich um Elektronen handelt, da hier keine inneren Energien auftreten können; ebenso bei positiven Ionen, die nur aus den Kernen bestehen, wie Wasserstoffionen oder zweiwertig positiven Heliumionen.[1]) Ebenso ist die innere freie Energie gleich Null bei allen komplizierteren Gebilden, die nicht „chemisch", sondern durch einen Quantenzustand definiert sind; denn dann ist definitionsgemäß die innere Energie bei allen Temperaturen dieselbe und Übergänge in andere Quantenzustände sind gewissermaßen als chemische Reaktionen aufzufassen. Wohl aber ist eine Änderung der inneren freien Energie im allgemeinen zu berücksichtigen bei den chemisch definierten Ionen und Atomen, die verschiedener Zustände Z_n fähig sind. Wenn man

1) Energievariationen innerhalb des Kerns brauchen, wie schon früher bemerkt, wenn sie überhaupt vorkommen, nicht berücksichtigt werden, da alle zugänglichen Temperaturen auf sie nur einen verschwindenden Einfluß haben können.

bisher bei „einatomigen Gasen" die innere freie Energie $= 0$ gesetzt hat, so ist das zwar annähernd, aber nicht genau richtig; da wir im folgenden Gleichgewichte zu betrachten haben, bei denen die thermischen Ionisation, also die völlige Abtrennung eines Elektrons von seinem Kern, eine Rolle spielt, so wäre es unlogisch, wenn wir die Quantenzustände, die zwischen dem Nullzustand und völliger Ionisierung liegen, ignorieren wollten; denn diese Zwischenzustände treten als Zustände geringerer Energie ja noch unverhältnismäßig viel häufiger auf als die Zustände völliger Trennung der Bestandteile. Endlich ist noch bei chemisch definierten mehrkernigen Bestandteilen die innere Energie einer Bewegung der Kerne gegeneinander sowie eine Rotation des ganzen Gebildes zu berücksichtigen, für die sich die entsprechende freie Energie berechnen läßt, wenn die Quantenbedingungen gegeben sind.

(Eingegangen 3. Dezember 1919.)

4. *Die Schwingungen biegungssteifer Saiten; von Otto Schaefer.*

Man kann eine schwingende Saite als recht empfindlichen Dehnungsmesser für technische Zwecke verwenden.[1]) Hierbei wird an dem zu untersuchenden Bauteil, der ein Träger, ein Fachwerkstab, ein Schwungradarm oder sonstiger Teil sein kann, eine Saite mit ihren Enden so befestigt, daß sie an einer elastischen Verlängerung oder Verkürzung dieses Bauteiles teilnehmen muß. Dabei wird ihr Ton erhöht oder vertieft und diese Tonhöhenänderung wird an einer Vergleichssaite bestimmt, deren Spannung unveränderlich, deren Länge aber mittels eines verschieblichen Steges einstellbar ist. Bei der Untersuchung der Fehlerquellen eines solchen Dehnungsmessers stellte es sich als notwendig heraus, den Einfluß der Biegungssteifigkeit auf die Schwingungen von Saiten näher zu untersuchen.

Bei der üblichen Betrachtung völlig biegsamer Saiten gilt die Differentialgleichung

$$S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

in der S die als unveränderlich angesehene Längskraft, μ die Masse der Längeneinheit bedeutet, während x und y die Koordinaten eines Punktes der — unendlich dünnen — Saite und t die Zeit ist. In der folgenden Rechnung soll J das Trägheitsmoment eines Querschnitts der Saite und E der Elastizitätsmodul ihres Materials sein.

Auf ein Saitenstück von der Länge ∂x wirken die in der Fig. 1 gezeichneten Kräfte ein: a) die Komponenten von S in der y-Richtung, nämlich $S \sin \alpha$ und $S \sin (\alpha + \partial \alpha)$, b) die Komponenten von S in der x-Richtung $S \cos \alpha$ und $S \cos (\alpha + \partial \alpha)$, c) die Scherkräfte V und $V + \partial V$, d) die Massenkraft

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial x$$

1) Die schwingende Saite als Dehnungsmesser, Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, 1919. S. 1008.

und e) die Momente M und $M + \partial M$. Die Gleichung der in der y-Richtung wirkenden Kräfte lautet:

$$V + \partial V - V + S \sin(\alpha + \partial \alpha) - S \sin \alpha - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial x = 0$$

oder

$$\partial V + S \cos \alpha \cdot \partial \alpha - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial x = 0.$$

Solange es sich um kleine Schwingungen handelt, kann $\cos \alpha = 1$ gesetzt werden und

$$\partial \alpha = \partial \frac{\partial y}{\partial x},$$

so daß entsteht

$$\partial V + S \partial \frac{\partial y}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial x = 0$$

und nach Division durch ∂x

$$\frac{\partial V}{\partial x} + S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

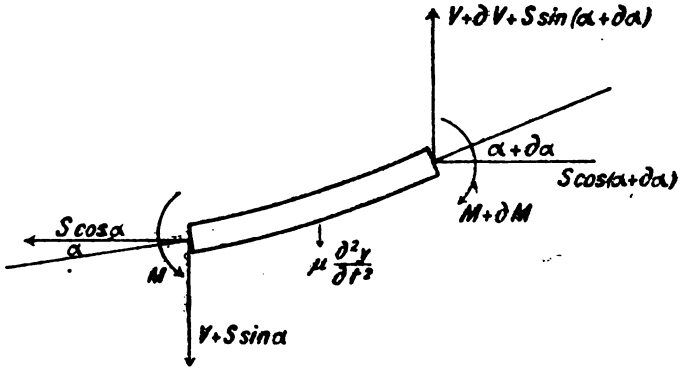


Fig. 1.

Weiter werde die aus der Biegungslehre bekannte Gleichung benutzt

$$EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M, \tag{2}$$

aus der durch Differenzieren folgt

$$EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\frac{\partial M}{\partial x}.$$

Die aus der Biegungslehre bekannte Beziehung

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V$$

gilt auch für einen Stab mit Längskraft, da diese nur eine Verschiebung der Nullinie nach der Druckseite hin bewirkt, aber an den sonstigen Verhältnissen nichts ändert. Man darf demnach setzen

$$EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = - V$$

und erhält durch nochmaliges Differenzieren

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - \frac{\partial V}{\partial x} .$$

Durch Einsetzen in Gleichung (1) findet man die Differentialgleichung des Problems

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} . \tag{3}$$

Sobald man in dieser Gleichung $J = 0$ setzt, also die Steifigkeit vernachlässigt, geht sie über in die bekannte Form

$$S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} .$$

Sie geht über für $S = 0$ in die Gleichung

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ,$$

die für einen Balken ohne Längskraft gilt. Der für diese Gleichung gemachte Ansatz

$$y = A \sin a x \sin b t$$

kann auch zur Lösung der Gleichung (3) benutzt werden. Um die Richtigkeit zu prüfen, bildet man die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - A a^2 \sin a x \sin b t ,$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = A a^4 \sin a x \sin b t ,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - A b^2 \sin a x \sin b t$$

und setzt sie in Gleichung (3) ein.

$$EJ A a^4 \sin a x \sin b t = - S A a^2 \sin a x \sin b t + \mu A b^2 \sin a x \sin b t .$$

Da diese Gleichung für alle Werte von x und t gelten soll, muß die folgende Beziehung bestehen

$$EJ\,a^4 = -S\,a^2 + \mu\,b^2. \tag{4}$$

Für a gilt noch eine weitere Bedingung: an den Enden der Saite, bei $x = 0$ und $x = l$ muß nämlich $y = 0$ werden für alle Werte von t. Dies ist nur möglich, wenn $\sin a\,l = 0$ ist, wenn also

$$a = \frac{\pi}{l}, \quad 2\frac{\pi}{l}, \quad 3\frac{\pi}{l} \quad \text{usw.}$$

ist. Zu jedem dieser Werte von a findet man aus Gleichung (4) den zugehörigen Wert von b. Diese Werte b_1, b_2 b_3 stehen aber nicht in einfacher Beziehung zueinander. Bei einer völlig biegsamen Saite ($J = 0$) ist bekanntlich

$$b_1' : b_2' : b_3' \ldots = 1 : 2 : 3 \ldots$$

und bei einem steifen ungespannten Balken ist

$$b_1'' : b_2'' : b_3'' \ldots = 1 : 4 : 9 \ldots$$

In beiden Fällen gibt der Körper außer dem Grundton eine Reihe von Obertönen, die zum Grundton harmonisch sind. Die Obertöne der vorliegenden steifen Saite sind jedoch nicht harmonisch. Man erhält aus Gleichung (4)

$$b = \sqrt{\frac{EJa^4 + Sa^2}{\mu}}$$

und mit der Beziehung

$$n = \frac{b}{2\pi}$$

für die Schwingungszahlen

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EJa^4 + Sa^2}{\mu}},$$

$$n_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 + S\left(\frac{\pi}{l}\right)^2}{\mu}},$$

$$n_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 + S\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2}{\mu}},$$

$$n_3 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ\left(\frac{3\pi}{l}\right)^4 + S\left(\frac{3\pi}{l}\right)^2}{\mu}}$$

. . . . . .

Für eine stählerne Klaviersaite von 40 cm Länge und 1 mm Dicke gestalten sich die Verhältnisse für einen Grundton von $n = 435$ Schwingungen so: mit der Beziehung

$$n = \frac{b}{2\pi}$$

ergibt sich für S aus Gleichung (4):

$$S = 4n^2 l^2 \mu - EJ\left(\frac{\pi}{l}\right)^2,$$

$$S = 75{,}9 - 0{,}07 = 75{,}83\,\text{kg}.$$

Die Saite braucht um den kleinen Betrag von 0,07 kg weniger gespannt zu werden als die völlig biegsame, die eine Zugkraft von 75,9 kg erfordert. Die Schwingungszahlen n ergeben sich zu $n_1 = 435$, $n_2 = 870{,}9$, $n_3 = 1309{,}5$, $n_4 = 1750{,}8$, während bei einer völlig biegsamen Saite sein würde $n_1' = 435$, $n_2' = 870$, $n_3' = 1305$, $n_4' = 1740$, wenn sie auf den Grundton 435 gestimmt ist. Für den Gebrauch des erwähnten Dehnungsmessers kommt es nicht darauf an, daß die steife Saite eine etwas geringere Kraft erfordert, sondern daß sie ein wenig länger sein muß. Die Klaviersaite müßte 39,82 cm lang sein, statt 40 cm.

Vielleicht kann die Erhöhung der Obertöne einer steifen Saite zur Erklärung der eigentümlichen Erscheinung herangezogen werden, daß einwandfrei gute Musiker die Oktav ein wenig zu groß nehmen, größer als dem Schwingungszahlenverhältnis 1 : 2 entspricht. Wird das Ohr von einem einfachen Ton von n-Schwingungen in der Sekunde getroffen, so wird eine bestimmte Faser der Basilarmembran bewegt, die ihrerseits den zugehörigen Nerv beeinflußt. Es kann aber auch, wir hier angenommen werden soll, eine Faser unter Bildung eines Knotens in der Mitte erregt werden und zwar müßte es, da die Fasern bei ihrer geringen Länge sicher eine merkliche Steifigkeit besitzen, eine Faser von etwas weniger als $n/2$-Schwingungen sein. Beruht nun der Konsonanzeindruck darauf, daß von zwei Tönen zum Teil die gleichen Fasern erregt werden, so ist es ersichtlich, daß ein Ton n und ein Ton etwas unter $n/2$ konsonant sein müssen.

Um die Amplitude der Obertöne zu ermitteln, muß ein gewisser Anfangszustand der Saite gegeben sein und zwar möge angenommen werden, daß die Saite durch eine Kraft in der Mitte belastet und dann losgelassen wird. Infolge der Steifig-

keit ist die Form der Saite nicht geradlinig, sondern sie verläuft nach einer über eine Gerade übergelagerten Hyperbelfunktion. Ehe die Form der Saite berechnet wird, sei eine allgemeinere Bemerkung über die Form elastischer Stäbe gestattet. Ein am einen Ende eingespannter Stab (Fig. 2) wird am anderen Ende in beliebiger Richtung von einer Kraft ergriffen, deren Komponenten S und Q sind. Die Biegung erfolge in der Ebene eines der Haupträgheitsmomente des Querschnitts. Dann lautet die Differentialgleichung der Biegungslinie

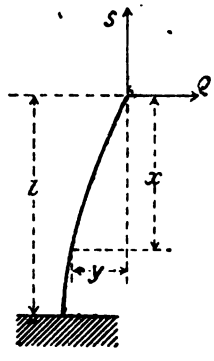


Fig. 2.

$$Qx - Sy = -EJ\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{5}$$

deren Lösung man schreiben kann

$$y = \frac{Q}{S}x - \frac{Q}{S}\sqrt{\frac{EJ}{S}}\,\frac{2}{e^{\sqrt{\frac{S}{EJ}}l} + e^{-\sqrt{\frac{S}{EJ}}l}} \cdot \frac{e^{\sqrt{\frac{S}{EJ}}x} - e^{-\sqrt{\frac{S}{EJ}}x}}{2}. \tag{6}$$

Durch zweimaliges Differenzieren und Einsetzen in Gleichung (5) kann man die Richtigkeit nachweisen; ferner sind die Bedingungen erfüllt, daß $y = 0$ wird für $x = 0$, und

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

für $x = l$, wie man sich leicht überzeugen kann.

Setzt man in Gleichung (6) die Komponente $Q = 0$, so bleibt der Stab gerade, y wird Null für jeden Wert von x. Haben Q und S positive Werte, so kann man kürzer schreiben

$$y = \frac{Q}{S}x - \frac{Q}{S}\sqrt{\frac{EJ}{S}}\,\frac{\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{S}{EJ}}x}{\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{S}{EJ}}l}. \tag{7}$$

Der Stab verhält sich wie ein Viertel der zu berechnenden Saite, deren Gleichung entsprechenden Bau haben wird. Läßt man S zu Null werden, so bekommt Gleichung (7) die Form $\infty - \infty$, die sich leicht auf die Form 0/0 bringen läßt

$$y = Q \frac{x\sqrt{S}\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,l - \sqrt{EJ}\cdot\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,x}{S\sqrt{S}\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,l}.$$

Da $\sqrt{S}$ gleichzeitig mit S verschwindet, so darf man $z = \sqrt{S}$ als neue Veränderliche einführen und Zähler und Nenner nach dieser differenzieren; gleichzeitig werde zur Vereinfachung geschrieben

$$\frac{1}{\sqrt{EJ}} = a.$$

Dann ist

$$y = Q \frac{x z\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l - \frac{1}{a}\,\mathfrak{Sin}\,a z\,x}{z^3\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l} = Q \frac{a x z\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l - \mathfrak{Sin}\,a z\,x}{a z^3\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l},$$

$$\lim_{z=0} y = Q \frac{a x\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l + a x z\,a l\,\mathfrak{Sin}\,a z\,l - a x\,\mathfrak{Cof}\,a z\,x}{a 3 z^2\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l + a z^3 a l\,\mathfrak{Sin}\,a z\,l} = \frac{0}{0}.$$

Man muß Zähler und Nenner noch einmal nach z differenzieren und erhält

$$\lim_{z=0} y = Q \frac{a x \cdot a l\,\mathfrak{Sin}\,a z\,l + a x \cdot a l\,\mathfrak{Sin}\,a z\,l + a x z\,a l\,a l\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l - a x\,a x\,\mathfrak{Sin}\,a z\,x}{a 3 \cdot 2 z\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l + 2 \cdot a 3 z^2 a l\,\mathfrak{Sin}\,a z\,l + a z^3 a l a l\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l} = \frac{0}{0}.$$

Wenn man zum dritten Male differenziert, findet man

$$\lim_{z=0} y = Q \frac{3 a x \cdot a l \cdot a l\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l + a x z\,a l \cdot a l a l\,\mathfrak{Sin}\,a z\,l - a x \cdot a x \cdot a x\,\mathfrak{Cof}\,a z\,x}{a \cdot 3 \cdot 2\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l + 3 a 3 \cdot 2 z\,a l\,\mathfrak{Sin}\,a z\,l + 3 a 3 z^2 a l a l\,\mathfrak{Cof}\,a z\,l + a z^3 \cdot a l a l a l\,\mathfrak{Sin}\,a z\,l},$$

$$\lim_{z=0} y = Q \frac{3 a x \cdot a^2 l^2 - a^3 x^3}{6} = \frac{Q a^2}{2}\left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3\right),$$

$$\lim_{z=0} y = \frac{Q}{2EJ}\left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3\right). \tag{8}$$

Dies ist aber die bekannte Biegungsgleichung eines Trägers.

Wird bei positivem Q der Wert von S negativ, so setze man

$$-S = S'$$

und erhält aus Gleichung (6)

$$y = -\frac{Q}{S} x + \frac{Q}{S}\sqrt{\frac{EJ}{S}}\,\frac{2}{e^{i\sqrt{\frac{S'}{EJ}}\,l} + e^{-i\sqrt{\frac{S'}{EJ}}\,l}}\,\frac{e^{i\sqrt{\frac{S'}{EJ}}\,x} - e^{-i\sqrt{\frac{S'}{EJ}}\,x}}{2i},$$

was man einfacher schreiben kann

$$y = -\frac{Q}{S}x + \frac{Q}{S}\sqrt{\frac{EJ}{S}} \cdot \frac{\sin\sqrt{\frac{S}{EJ}}x}{\cos\sqrt{\frac{S}{EJ}}l} \tag{9}$$

Setzt man in dieser Gleichung $Q = 0$, so wird y zu Null, wenn nicht etwa der Nenner des zweiten Gliedes auch Null ist. Der Wert von S', für den dies eintritt, ergibt sich aus

$$\sqrt{\frac{S}{EJ}}l = k\pi \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$$

und man kommt auf die Eulersche Knickformel.

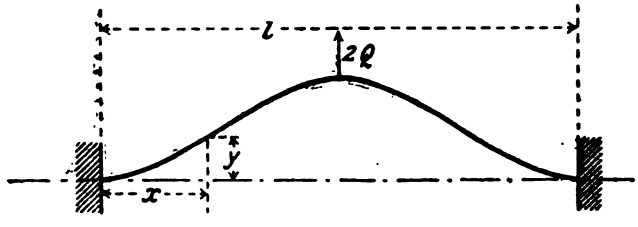


Fig. 3.

Für die in Fig. 3 gezeichnete Saite gilt folgendes: von 0 bis $l/2$ ist

$$\left\{\begin{aligned} y = \frac{Q}{S}x - \frac{Q}{S}\,&\frac{1}{\eta\left(1 + \mathfrak{Cof}\,\eta\,\frac{l}{2}\right)}\Big[\mathfrak{Sin}\,\eta\,x \\ &- \mathfrak{Sin}\,\eta\left(\frac{l}{2} - x\right) + \mathfrak{Sin}\,\eta\,\frac{l}{2}\Big], \end{aligned}\right. \tag{10}$$

von $l/2$ bis l

$$\left\{\begin{aligned} y' = \frac{Q}{S}x - \frac{Q}{S}\,&\frac{1}{\eta\left(1 + \mathfrak{Cof}\,\eta\,\frac{l}{2}\right)}\Big[\mathfrak{Sin}\,\eta\left(x - \frac{l}{2}\right) \\ &- \mathfrak{Sin}\,\eta\,(l - x) - \mathfrak{Sin}\,\eta\,\frac{l}{2}\Big], \end{aligned}\right. \tag{11}$$

wobei zur Abkürzung

$$\eta = \sqrt{\frac{S}{EJ}}$$

gesetzt ist. Die Beachtung des negativen Vorzeichens dieser Wurzel ergibt weder hier noch bei der vorigen Betrachtung eine Änderung. Das veränderte Aussehen der Gleichungen (10)

und (11) gegenüber der Gleichung (7) erklärt sich aus der Verschiebung des Koordinatensystems, die vorgenommen wurde, um die folgenden Integrationen zu erleichtern. Die Fouriersche Reihe, die den Verlauf der Saite wiedergibt, lautet

$$(12) \qquad r = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_3 \cos\frac{3\pi x}{l} + b_5 \cos\frac{7\pi x}{l} + \ldots,$$

wobei die Koeffizienten der Sinusglieder und der geraden Kosinusglieder nicht erst hingeschrieben sind, weil sie Null werden.

Es ist

$$(13) \qquad b_0 = \frac{1}{l/2}\int_0^{l/2} y\,dx + \frac{1}{l/2}\int_{l/2}^{0} y'\,dx = \frac{Q}{S}\,\frac{l}{2} - \frac{2\,\frac{Q}{S}\,\mathfrak{Sin}\,\eta\,\frac{l}{2}}{\eta\left(1 + \mathfrak{Cos}\,\eta\,\frac{l}{2}\right)}.$$

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} b_k &= \frac{1}{l/2}\int_0^{l/2} y \cos\frac{k\pi x}{l/2}\,dx + \frac{1}{l/2}\int_{l/2}^{l} y' \cos\frac{k\pi x}{l/2}\,dx \\ &= -\frac{Q}{S}\,l\left(\frac{1}{(k\pi)^2} - \frac{1}{(k\pi)^2 + \left(\eta\frac{l}{2}\right)^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Für die völlig biegsame Saite ist $\eta = \infty$ wegen $J = 0$ und der zweite Bruch in der Klammer fällt weg, die Koeffizienten verhalten sich dann bekanntlich

$$b_1' : b_3' : b_5' : b_7 - \ldots = 1 : \frac{1}{9} : \frac{1}{25} : \frac{1}{49} \ldots$$

Bei der steifen Saite werden sie kleiner; für die als Beispiel herangezogene Klaviersaite wird

$$b_1 : b_3 : b_5 : b_7 \ldots = 1 : \frac{1}{11{,}4} : \frac{1}{45{,}3} : \frac{1}{128{,}6} \ldots$$

(Eingegangen 6. November 1919.)

5. *Über Balloelektrizität, Molekularkräfte und elektrische Kräfte;* *von J. Traube.*

In diesen Annalen sind mehrere Abhandlungen von Christiansen[1]) erschienen über die Elektrizitätserregung beim Zerspritzen von Flüssigkeiten, welche eine Anzahl bemerkenswerter Einzelheiten über die bekannte Wasserfallelektrizität Lenards[2]) enthalten. Es handelt sich um die Elektrizitätsentwicklung, welche beim Zerstäuben von Flüssigkeiten und der Bildung von Tropfen eintritt.[3]) Auch die Versuche, betreffend den Durchtritt von Gasblasen durch Flüssigkeiten[4]) sind hier zu nennen, wenngleich hier anscheinend nicht, wie man annimmt, eine einfache Umkehrung der Versuche vorliegt, sondern noch irgendwelche andere Faktoren in Betracht kommen.

Christiansen wählt für die Wasserfallelektrizität die kürzere Bezeichnung *Balloelektrizität* und er untersucht insbesondere für eine große Anzahl von in Wasser löslichen Stoffen den Einfluß, welchen dieselben in Abhängigkeit von der Konzentration auf die Elektrizitätsladung ausüben, wenn die betreffende Lösung gegen eine Platinplatte zerstäubt wird, welche mit dem Elektrometer in Verbindung steht.

Christiansen stellt nun fest, in Fortsetzung der Versuche Lenards und J. J. Thomsens, daß verschiedene Gruppen gelöster Stoffe einen sehr verschiedenen Einfluß auf die Balloelektrizität ausüben.

1. Salze, viele Säuren und Basen üben einen sehr schwachen Einfluß auf die Balloelektrizität aus; solche Lösungen nennt Christiansen: *aballisch*.

---

1) W. Christiansen, diese Ann. **40.** S. 107 u. 233. 1913 und ebenda **51.** S. 530. 1916.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. **46.** S. 584. 1912.

3) J. J. Thomsen, Phil. Mag. (5) **37.** S. 341. 1894.

4) Lord Kelvin, Proc. Roy. Soc. **57.** S. 335. 1895; de Broglie, Journ. de Phys. **9.** S. 205. 1910; Coehn u. Mozer, Ann. d. Phys. **43.** S. 1048. 1914.

2. Wasser, wäßrige Lösungen von Ölen, Filterpapier, Ammoniak usw. geben verhältnismäßig viel Balloelektrizität, indem sie die Platinplatte positiv elektrisch laden; solche Lösungen werden als autokataballisch oder einfach *kataballisch* bezeichnet. Lösungen von Chinin, Anilin und viele andere organische Stoffe, wie Trichloressigsäure, welche der Platinplatte große negative Ladungen erteilen, werden autoanaballisch oder einfach *anaballisch* genannt.

3. Mischungen von Stoffen der ersten Gruppe und der zweiten Gruppe, beispielsweise Mischungen von Chlorkaliumlösungen und Alkoholen, geben vielfach eine weit größere Balloelektrizität als die Summe der Komponenten. Solche Mischungen bezeichnet Christiansen als *hyperballisch*.

Man kann nun die Versuchsergebnisse Christiansens unter einem *einheitlichen* Gesichtspunkte zusammenfassen, wenn man den Einfluß, welchen die gelösten Stoffe und deren Mischungen auf die Balloelektrizität des Wassers ausüben, in Beziehung setzt zu der Größe der *Oberflächenaktivität*, d. i. der Einfluß, welchen die Stoffe auf die Oberflächenspannung des Wassers ausüben.

Es ist sofort ersichtlich — und übrigens hat Lenard[1]) dies auch an einem etwas ungenügenden Material im wesentlichen erkannt —, daß die *aballischen* Stoffe mit den als *oberflächeninaktiv* bezeichneten Stoffen, die *kata- und anaballischen* Stoffe aber mit denjenigen Stoffen zusammenfallen, welche man als *oberflächenaktiv* bezeichnet. Da dieser Beziehung eine erhebliche theoretische Bedeutung zukommt, so mögen die folgenden Ausführungen zeigen, *in wie hohem Maße* die *balloelektrische Ladung der Oberflächenaktivität der Lösung parallel geht*.

Christiansen geht aus von Versuchen, in denen er zeigt, daß die Ladung des zerstäubten Wassers durch kleinste Unreinheiten, insbesondere minimalste Mengen gelöster Öle und Harze, ganz erheblich vergrößert wird. Es unterliegt keinem Zweifel, daß es sich hier um stark oberflächenaktive Stoffe handelt.

Die Untersuchung der verschiedensten Elektrolyte: Säuren, wie Salzsäure, Salpetersäure, Schwefelsäure, Phosphro-

1) P. Lenard, Sitzungsber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. A. 1914. 27., 28. u. 29. Abhandl., vgl. Ref.: Naturwissenschaften, Verlag Springer, 6. S. 82. 1918.

säure und Zitronensäure, Basen, wie Kali, Natron, Baryt, Alkalisalze und Schwermetallsalze führte zu dem Ergebnis, daß alle diese — oberflächeninaktiven — Stoffe sehr wenig Balloelektrizität ergeben. Das Vorzeichen der elektrischen Ladung ändert sich, wenn die Konzentration eine gewisse geringe Größe erreicht; die Ladung der Platte wird negativ, aber die Größe der Ladung ist fast immer geringer als diejenige des Wassers.

Ganz anders verhalten sich nun die Lösungen stark oberflächenaktiver Stoffe, wie Fettsäuren, primäre und sekundäre Alkohole, Äther, Ester, Aldehyde, Ketone, Amine usw. Diese Lösungen sind meist in hohem Grade *kataballisch*, in besonderen Fällen, beispielsweise die halogenierten Fettsäuren sowie sonstige Halogen- und Nitroverbindungen in hohem Maße *anaballisch*.

Die folgenden Tabellen mögen zeigen, in welchem Maße Balloelektrizität und Oberflächenspannung der Lösungen parallel gehen. Die balloelektrischen Ladungen sind den Arbeiten Christiansens, die Oberflächenspannungen γ in Milligrammmillimeter bei 15° früheren Arbeiten von mir und meinen Schülern[1]) entnommen. Zunächst sei die folgende Säuretabelle wiedergegeben. Sämtliche Werte beziehen sich auf 0,25-n. wäßrige Lösungen.

	Balloelektr. Ladung in Volt	Oberflächenspann. γ in mg/mm bei 15° C
Wasser	—	7,295
Salzsäure		7,28
Salpetersäure		7,27
Schwefelsäure	aballisch	7,30
Zitronensäure		7,26
Weinsäure	0,0	7,28
Glykolsäure	−0,05	7,24
Oxalsäure	−0,1	7,24
Äpfelsäure	−0,1	7,17
Ameisensäure	−0,1	7,14
Malonsäure	−0,2	7,07
Bernsteinsäure	0,25	6,89
Essigsäure	0,5	6,81
Propionsäure	1,65	6,13
Buttersäure	2,85	4,89

1) Vgl. J. Traube, Pflügers Arch. ges. Physiol. **123.** S. 419. 1908; Verh. d. D. Phys. Ges. **10.** S. 880. 1908; Liebigs Ann. d. Chem. **265.** S. 27; Somogyi, Intern. Zeitschr. phys.-chem. Biol. **3.** S. 60. 1916 und J. Traube, Biochem. Zeitschr. **16.** S. 182. 1909.

Die folgenden Werte beziehen sich auf 1-n. Lösungen.

	Balloelektr. Ladung in Volt	Oberflächenspann. γ in mg/mm bei 15°C
Essigsäure	+ 0,8	6,04
Monochloressigsäure	− 1,3	6,00
Dichloressigsäure	− 2,7	5,20
Trichloressigsäure	− 3,85	4,82

Wenn man von dem Vorzeichen der Ladung absieht und nur deren Größe in Betracht zieht, so ergibt sich eine völlige Parallelität der beiderseitigen Werte. Der Wechsel des Vorzeichens der elektrischen Ladungen beim Eintritt von Chlor an Stelle des Wasserstoffs in das Essigsäuremolekül ist beachtenswert.

Die folgende Tabelle bezieht sich auf eine Anzahl indifferenter bzw. basischer Stoffe. Die Werte beziehen sich sämtlich auf 0,25-n. wäßrige Lösungen.

	Balloelektr. Ladung in Volt	Oberflächenspann. γ in mg/mm bei 15°C
Acetamid	0	7,20
Acetonitril	0,4	7,00
Methylalkohol	1,1	7,05
Äthylalkohol	1,0?	6,72
Allylalkohol	0,85	6,44
Äthyläther	1,1	6,20
Propylalkohol	2,4	5,89
i-Butylalkohol	3,4	4,49
Diäthylamin	5,4	5,70

In homologen Reihen zeigt sich allgemein mit wachsendem Molekulargewicht eine Zunahme der balloelektrischen Ladung sowie eine Zunahme der Oberflächenaktivität.

In früheren Arbeiten[1]) wurde von mir gezeigt, daß in verdünnten wäßrigen Lösungen oberflächenaktiver Stoffe für gleiche Äquivalente die Oberflächenspannungserniedrigung der Lösung mit wachsendem Molekulargewicht annähernd zunimmt im Verhältnis $1 : 3 : 3^2 : 3^3 \ldots$ Nach den von Christiansen[2]) veröffentlichten Tabellen steht die balloelektrische

1) Vgl. J. Traube, Liebigs Ann. d. Chem. **265**. S. 27. 1891. und Verh. d. D. Phys. Ges. **10**. S. 880. 1908.

2) Vgl. a. a. O. **40**. S. 130 u. 132.

Ladung von Propylalkohol : Äthylalkohol auch im Verhältnis 3 : 1, von Isobutylalkohol : Propylalkohol ist das Verhältnis 2,75 : 1, von Amylalkohol : Isobutylalkohol allerdings kaum 2 : 1. Für Propionsäure : Essigsäure ist das Verhältnis 4 : 1, für Buttersäure : Propionsäure 3 : 1 und für Valeriansäure zu Buttersäure 2 : 1. Da die von Christiansen angewandte Methode zur Bestimmung der balloelektrischen Ladungen doch mit gewissen Fehlerquellen behaftet sein dürfte, so darf immerhin auf diese wenn auch grobe Annäherung des Zahlenverhältnisses hingewiesen werden.

Es liegen noch für eine sehr große Anzahl der verschiedenartigsten anorganischen und organisch-chemischen Verbindungen Bestimmungen der Oberflächenaktivität und balloelektrischen Ladungen vor, wenngleich nicht immer dieselben Konzentrationen gewählt wurden. Es ist auch nicht eine einzige Ausnahme zu nennen, welche der Regel widerspricht, daß balloelektrische Ladung und Oberflächenaktivität parallel gehen. *Oberflächenaktive* Stoffe sind *balloaktiv* und *oberflächeninaktive* Stoffe sind *balloinaktiv*.

Balloelektrische Stoffe, wie Pyridin, Piperidin, Phenol, die Kresole, Anilin, Benzoesäure, Chinin, Cinchonin, Chinolin, Nikotin, Chlorphenol, Nitrophenol, die Ester usw. sind oberflächenaktiv, während sehr schwache Ballolyte, wie die Trioxybenzole, Gallussäure usw. zu den oberflächeninaktiven Stoffen gehören.

Wenn durch Substitution von Halogenatomen an Stelle von Wasserstoff in Fettsäuren, ebenso in Phenol und Anilin, sowie der Nitrogruppe in Phenol die Balloelektrizität ihr Zeichen wechselt, so ist daran zu erinnern, daß es sich um den Eintritt stark negativer Gruppen in das Molekül handelt.

Besonders sei noch darauf hingewiesen, daß die Steigerung der balloelektrischen Wirkung, welche statthat, wenn Salzlösungen mit Lösungen kata- oder anaballischer Stoffe gemischt werden, ihr Analogon findet in einer Oberflächenaktivitätssteigerung, welche bei den gleichen Vorgängen der Mischung statthat.

Christiansen findet beispielsweise für 1-n. wäßrigen Äthylalkohol die balloelektrische Ladung 0,9, für 1-n. Chlorkaliumlösung die entsprechende Ladung 0,1. Die Mischung

gleicher Volumina der Lösungen führt zu der stark potenzierten Ladung 7,0 Volt.

In einer älteren Mitteilung[1]) wurde von mir festgestellt, daß 10-volumprozentiger Äthylalkohol bei 15° die Oberflächenspannung $\gamma = 5{,}14$ mg/mm hat, bei Zusatz von 5 bzw. 10 g Chlorkalium zu 100 g dieser Lösung erniedrigt sich die Oberflächenspannung γ auf 4,97 bzw. 4,89.

100 ccm Wasser + 6 Volumproz. Äthylalkohol führten in einem Stalagmometer, dessen Tropfenzahl für Wasser = 53,9 war, zu der Tropfenzahl 67,8, bei Zusatz von 2,8 Proz. Chlornatrium erhöhte sich die Tropfenzahl auf 69,85.[2])

Diese Feststellungen wurden von mir auf eine Haftdruckverminderung der oberflächenaktiven Stoffe durch die Salze zurückgeführt.[3])

Die hier festgestellten Beziehungen zwischen Oberflächenaktivität und balloelektrischer Wirkung stehen nun in bestem Einklang mit den von Lenard[4]) in seinen neueren Abhandlungen entwickelten Ansichten über die *elektrische* Natur der *Molekularkräfte*. Lenard nimmt nicht mehr wie früher an, daß es sich bei der Wasserfallelektrizität um eine Kontaktwirkung zwischen Gas und Flüssigkeit handelt, sondern daß die durch die Wasserfallwirkung angezeigte elektrische Doppelschicht *ganz* in der Flüssigkeit zu suchen ist. Es handelt sich bei deren Zerreißung um die Abtrennung kleinster Flüssigkeitspartikel aus der äußersten Oberflächenschicht.

In dieser äußersten Oberflächenschicht konzentrieren sich nun nach dem Prinzip von Gibbs-Thomsen[5]) die oberflächenaktiven Stoffe, und zwar um so mehr, je mehr dieselben die Oberflächenspannung des Wassers vermindern, während die oberflächeninaktiven Stoffe, welche die Oberflächenspannung des Wassers meist erhöhen, dementsprechend die äußerste Oberfläche fliehen, und zwar, wie Lenard in überzeugender Weise in Übereinstimmung mit früheren Arbeiten ausführt, deshalb, weil Salze und Salzionen usw. sich

1) J. Traube, Journ. f. prakt. Chem. N. F. **31**. S. 214. 1885.

2) J. Traube, Pflügers Arch. f. d. ges. Phys. **176**. S. 79. 1919; vgl. auch W. Bacyer, Biochem. Zeitschr. **18**. S. 238. 1908.

3) Vgl. Verh. d. D. Phys. Ges., a. a. O.

4) Vgl. Heidelb. Akad. Ber., a. a. O.

5) Vgl. auch W. Quincke, Ann. d. Phys. **19**. S. 139. 1870.

mit einer mehr oder weniger großen Wasserhülle zu kompakteren „Lösungsmolekülen" aggregieren, die infolge ihrer Verdichtung durch die Molekularkräfte nach dem Innern der Flüssigkeit hingezogen werden. Lenard weist auch darauf hin, daß die Moleküle eine gewisse Richtung zu der Oberfläche annehmen müssen.

Das große, von Christiansen beschaffte Material ist für Lenards Theorie insofern von erheblichem Werte, als die innige Beziehung von Oberflächenaktivität und balloelektrischer Wirkung bei Berücksichtigung von Gibbs-Thomsens Prinzip nur durch die Annahme verständlich wird, daß beim Losreißen der äußersten Oberflächenschicht flüchtiger oberflächenaktiver Stoffe (Alkohole, Fettsäuren, Äther, Ester usw.) von der äußersten *Wasser*schicht die elektrische Doppelschicht zerstört wird, derart, daß nun getrennte elektrische Ladungen feststellbar werden. *Die Molekularkräfte, und zwar nicht nur diejenigen, welche die Elektrolyte mit dem Wasser verbinden, sondern auch diejenigen, welche zwischen Nichtleitern und Wasser bestehen, sind somit elektrischer Natur.* Das ist ein Ergebnis, welches mit den sonstigen neueren Ansichten in bestem Einklang steht.

Es mag in Zusammenhang mit Lenards Arbeiten auch auf die sehr beachtenswerten Arbeiten von Longmuir[1]) hingewiesen werden, durch welche in überzeugender Weise gezeigt wird, daß u. a. physikalische Kräfte, wie Oberflächenspannung, Adsorptionskraft usw., auf Sekundärvalenzen zurückzuführen seien, die in letzter Linie elektrischen Ursprungs sein dürften. Longmuir wies auch darauf hin, daß bei Nichtleitern, wie Ölen, welche sich etwa in Form einer dünnen Haut auf einer Wasseroberfläche ausbreiten, die Moleküle als *teilweise* gelöst anzusehen sind, indem dieselben eine derartige Richtung einnehmen, daß die polaren Radikale sich der Wasseroberfläche zuwenden.

Auch frühere eigene Arbeiten von mir, die Herrn Lenard, wie er mir gelegentlich freundlichst mitteilte, nicht bekannt waren, decken sich durchaus mit Lenards theoretischen Ansichten.

---

1) W. Longmuir, Journ. Amer. Chem. Soc. **38**. S. 2221. 1916 und **39**. S. 1848. 1917.

So wurde auch von mir[1]) bereits die Bildung von Ionenhydraten herangezogen, um die bekannte Dampfdruckformel Raoult-van't Hoffs abzuleiten und in einer Mitteilung über Kohäsionskräfte und elektrische Kräfte[2]) wurde die *Kohäsionskraft* auf *elektrische Kräfte* zurückgeführt. Es wurde in jener Abhandlung gezeigt, daß bei der versuchsweisen Übertragung von van der Waals' Zustandsgleichung auf den festen Zustand[3]) sich gewisse Eigenschaften der Metalle, wie Elastizität, Härte, Kompressibilität und Verdampfungswärme zum Teil sogar mit quantitativer Annäherung darstellen ließen. Vor allem ergab sich eine völlige Parallelität der elektrischen Kontaktkräfte der Metalle mit den so berechneten Größen $a/v^{2/3} = \gamma v$, in welchem Ausdruck a und v die van der Waalssche Bedeutung haben und γ die Konstante der Oberflächenspannung bezeichnet. Aber auch sonst wurde in jener Mitteilung auf mannigfaltigste Beziehungen elektrischer Potentialdifferenzen sowie Kohäsionsgrößen hingewiesen, welche sämtlich dafür sprachen, daß die *Molekularkräfte* ebenso wie die eigentlichen *Affinitätskräfte elektrischen Ursprungs* sind.

Charlottenburg, Technische Hochschule.

1) Vgl. u. a. meinen Grundriß der physik. Chemie, Enke, Stuttgart 1904.

2) J. Traube, Ber. d. D. Chem. Ges. **42**. S. 594. 1909; vgl. auch die daselbst erwähnten Abhandlungen von Hesehus.

3) J. Traube, Verh. d. D. Phys. Ges. **11**. S. 231. 1909.

(Eingegangen 27. Oktober 1919.)

6. *Über die Polarisation in der Geißlerentladung*[1]; *von Erich Rumpf.*

1. Vor einiger Zeit ist mir der Nachweis gelungen, daß an Quersonden eines Geißlerrohres Erscheinungen auftreten, die eine große Ähnlichkeit mit elektrolytischer Polarisation aufweisen; bei ihrer Besprechung verwendete ich die Ausdrücke „Anfangsströme, Dauerströme, Rückgänge und Eigenströme". Ich habe meine damalige Veröffentlichung als einen vorläufigen Bericht bezeichnet und habe betont, daß noch verschiedene Fragen ungeklärt erschienen.

Nun habe ich die Versuche an der durch Fig. 1 (a. a. O.) wiedergegebenen Anordnung fortgesetzt und fand alle seinerzeit gemachten Erfahrungen bestätigt. Damit decken sich auch Versuche, die Ernst Reiche[2]) gelegentlich einer Arbeit „Über den Beginn der Glimmentladung in Luft" veröffentlicht hat, die mir bei Besprechung der Literatur entgangen war.

Ich habe damals vorgeschlagen, diese Polarisationserscheinungen durch kondensatorartige Oberflächenschichten zu erklären, vermied es aber, auf den Vorgang näher einzugehen. Nun will ich versuchen, nachzuweisen, daß die beschriebenen Polarisationserscheinungen tatsächlich durch Oberflächenschichten bedingt sind. Solche Oberflächenschichten werden ja in der physikalischen Praxis mehrfach beobachtet. Z. B. führt auch Reiche die von ihm beobachteten „störenden Nebenerscheinungen" auf „elektrische Doppelschichten durch Gasionen, die in der Gashaut der Elektroden stecken bleiben" zurück und Robert Pohl[3]) spricht von „elektrisch geladenen, polarisations-

1) Als Abschluß meiner gleichnamigen Arbeit: Ann. d. Phys. 59. S. 1. 1919.

2) E. Reiche, Ann. d. Phys. 52. S. 109. 1917.

3) R. Pohl, Die Physik der Röntgenstrahlen. Die Wissenschaft. Heft 45. Vieweg, Braunschweig 1912.

ähnlichen Oberflächenschichten" gelegentlich einer Besprechung von Versuchen von O. v. Bayer und A. Tool.[1])

2. Wenn die von mir beschriebenen Polarisationserscheinungen durch kondensatorartige Schichten, die die Elektroden umgeben, verursacht wurden, so mußte sich ein ballistisches Galvanometer ausgezeichnet zu ihrer Beobachtung eignen. Ich habe daher ein empfindliches Galvanometer G' von hoher Schwingungsdauer in meine Versuchsanordnung so eingefügt, daß es durch die Eigenströme der Sonden in Schwingungen versetzt werden konnte. Hierfür boten sich vornehmlich zwei Stellen, die beide gleich gute Wirkung hatten: entweder statt des Elster- und Geitelschen Elektrometers am Schalter H (Fig. 1, a. a. O.) oder hinter dem Taster T in der Weise, wie durch die beigegebene Fig. 1 ersichtlich ist, die die genannte Schaltungsskizze ergänzt; beim Niederdrücken des Tasters T waren in diesem Falle die Galvanometer G und G' hintereinandergeschaltet, während der Dauerstrom nur durch das Galvanometer G fließen konnte. Meist kam diese Schaltung in Verwendung.

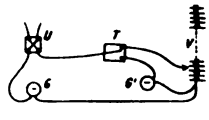


Fig. 1.

Als ballistisches Galvanometer stand mir ein Drehspuleninstrument von Hartmann und Braun zur Verfügung mit etwa 17 Sekunden (ganzer) Schwingungsdauer; der Widerstand ist mit 10000 Ohm angegeben, die zweite Systemspule von 5 Ohm war durch einen gleich großen Widerstand geschlossen, wodurch eine bequeme Dämpfung erreicht wurde.

3. Im folgenden will ich kurz über die Ergebnisse berichten, die mit dieser erweiterten Versuchsanordnung gefunden wurden; und zwar haben sich die Untersuchungen hauptsächlich auf die Abhängigkeit der ballistischen Ausschläge von der erregenden Spannung V (Fig. 1) und von dem Oberflächenzustande der Sonden erstreckt.

Wenn an die Sonden eine Spannung V angelegt wurde, so konnte im Galvanometer G Anfangsstromstoß und Dauerstrom abgelesen werden, wie dies a. a. O. durch die Figg. 2, 3,

1) O. v. Bayer und A. Tool, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Ges. 13. S. 569. 1911.

5 und 6 beschrieben ist. Wurde darauf durch Niederdrücken des Tasters T (Fig. 1) die Batterie abgeschaltet und gleichzeitig das Sondenpaar mit den beiden nunmehr hintereinandergeschalteten Galvanometern G und G' unmittelbar verbunden, so zeigten im allgemeinen beide Galvanometer Ausschläge, nach denen sie sofort in die Ruhelage zurückkehrten: G aperiodisch, G' nach wenigen Schwingungen. Die Ausschläge von G folgten den a. a. O. durch Fig. 4 und 7 dargestellten Regeln und waren dort als Eigenströme bezeichnet worden; die Ausschläge von G' zeigten einen Verlauf, der an der Hand der folgenden Fig. 2 beschrieben werden wird.

Vollkommen stellten sich allerdings die Ruhelagen nach diesen Ausschlägen meist nicht ein, da die Sonden meist ein verschiedenes Kontaktpotential haben und sich dann wohl auch lichtelektrisch so verschieden verhalten, daß sie infolge der heftigen lichtelektrischen Erregung durch die Geißlerentladung Ströme aussenden, die besonders die Stellung des empfindlicheren Galvanometers G' wesentlich beeinflussen.

Insbesondere sind diese Ruhelagestörungen sehr groß, wenn die Sonden in absichtlich verschiedenem Zustande untersucht wurden: z. B. die eine frisch geschmirgelt, die andere alt, d. h. im Entladungsrohr wiederholt mit Strom belastet. Dann sind die Ruhelagestörungen oft so groß, daß sie die Größenordnung der ballistischen Ausschläge erreichen, weshalb von einer Untersuchung solcher Sondenzusammenstellungen Abstand genommen werden mußte. Daher konnte ich mit dieser Anordnung auch nicht in Erfahrung bringen, welche von den Elektroden, die kathodische oder die anodische, den Hauptanteil an der kondensatorartigen Wirkung trägt, wie es a. a. O. geschehen war, denn die Ruhelagestörungen sind im unempfindlich geschalteten Galvanometer G viel weniger zu merken. Es müssen aber natürlich die a. a. O. geschlossenen Folgerungen aufrecht bleiben, wie ich besonders in Punkt 6 zeigen werde.

Die Erscheinungen waren auch diesmal an allen untersuchten Metallen (Kupfer, Zink und Platin-Iridium) ganz ähnlich.

4. Eingehend habe ich namentlich ein paar Zinksonden untersucht, die 1 mm dick waren und 6 cm aus der Glimmer-

scheibe (a. a. O., S. 6) herausragten. Der Entladungsstrom J im Rohr betrug bei diesen Versuchen im Mittel 1,3 Milliamperes, das Rohr war mit verdünnter Luft vom Drucke 0,3 mm Hg gefüllt; die Sonden waren 7 cm von der Kathode entfernt, befanden sich also im auslaufenden Teil des negativen Glimmlichtes. Diese Verhältnisse sind für die Beobachtung insofern sehr günstig, als hier eine starke Drehung der Sonden aus ihrer horizontalen Lage nötig ist, um infolge des Feldes im Geißlerrohr einen merklichen Ausschlag in den Galvanometern bzw. im Elektrometer zu erhalten.

In der beigegebenen Fig. 2 sind aus einer großen Anzahl von gesammelten Kurven drei herausgegriffene dargestellt, wobei die Mittel aus den Werten eingezeichnet sind, die man

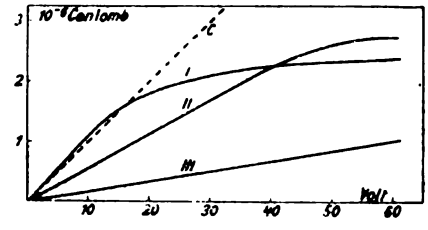


Fig. 2.

erhält, wenn man die Sonden einmal in der einen und dann in der anderen Richtung mit Strom von der Batterie V belastet. Dadurch sind störende Nebenerscheinungen, wie solche durch das immer etwas verschiedene Kontaktpotential der Sonden entstehen, unterdrückt worden. Die dazugehörigen Anfangs- bzw. Dauerströme zeigen im Vergleich mit den a. a. O., Figg. 2, 3, 5 und 6 abgebildeten nichts Neues und sollen daher hier nicht neu besprochen werden. Als Abszissen sind in der obenstehenden Fig. 2 die an die Sonden angelegten Spannungen V in Volt aufgetragen, als Ordinaten die in Mikrocoulomb umgerechneten ballistischen Ausschläge des Galvanometers G'. Zur Eichung wurden statt der Sonden an die Zuleitungsdrähte ein Glimmerkondensator von 0,1 Mikrofarad (Elliot, London) angelegt, wodurch die Gerade C erhalten wurde.

Die Kurve I wurde von Sonden gewonnen, die vor der Beobachtung geschmirgelt worden waren; die Kurve steigt an-

fänglich angenähert linear an, biegt dann um und nähert sich einem konstanten Wert, der trotz weiterer Erhöhung der Spannung nicht überschritten werden kann. Die Sondenkapazität kann in diesem Zustande der Sonden keine wesentlich höhere Elektrizitätsmasse fassen, als etwa $2^1/_2$ Mikrocoulomb; da diese Kurve in ihrem ansteigenden Teil der Geraden C nahe liegt, erkennt man, daß dieser Teil ungefähr einem Kondensator von $^1/_{10}$ Mikrofarad entspricht.

Die Kurve II ist das Ergebnis von Beobachtungen, die mit denselben Sonden angestellt wurden, nachdem sie durch etwa 4 Stunden, von den Leitungen abgeschaltet und untereinander kurz geschlossen, dem Entladungsstrom J ausgesetzt waren. Durch diese Behandlung ist der linear ansteigende Teil länger und deutlicher ausgeprägt geworden und entspricht, wie ein Vergleich mit der Geraden C ergibt, einer Sondenkapazität von etwa $^1/_{20}$ Mikrofarad; gleichzeitig ist jener Teil der Kurve, der sich der Horizontalen nähert, höher gerückt: die Sondenkapazität ist in diesem Zustande fähig, eine etwas höhere Elektrizitätsmenge zu fassen, als vor der vierstündigen Behandlung im Rohr.

Nachdem nunmehr die Sonden in gleicher Weise wie vorher durch etwa 20 Stunden der Geißlerentladung ausgesetzt worden waren, wurde die Kurve III gewonnen, bei der nur mehr der ansteigende Teil ausgebildet ist, der einer Sondenkapazität von $^1/_{60}$ Mikrofarad entspricht.

Eine weitere Erhöhung der Spannung ist nicht tunlich, weil dann leicht lichtbogenartige „Funkenstöße" zwischen den Sonden überspringen, die nicht nur das Galvanometer G gefährden, sondern auch die Oberflächenbeschaffenheit der Sonden sofort derart verändern, daß der Kurventypus ganz anders wird, z. B. von III nach I überspringt. Solche Funkenstöße treten bei neuen Sonden (I) schon bei viel geringeren Spannungen auf, als bei alten (III), wo oft die zur Verfügung stehende Spannung von 120 Volt nicht ausreichte, um Funkenstöße zu erzeugen, während sie bei ganz frischen Sonden auch schon unter 60 Volt auftraten.

5. Werden die Sonden, nachdem sie ihre Ladungen durch die Galvanometer ausgeglichen haben, durch Umlegen des

Schalters *H* (a. a. O., Fig. 1) an das Elektrometer angeschlossen, das nun so eingestellt war, daß 40 Skalenteile 2 Volt entsprachen, so zeigt dieses anfänglich keinen Ausschlag. Nach einigen Sekunden beginnt es aber eine Potentialdifferenz anzuzeigen, die der vorhergegangenen erregenden Spannung *V* entgegengerichtet ist; der Ausschlag wächst in weniger als einer Minute bis zu einem gewissen Wert an, um dann wieder langsam zu fallen. Der so erreichte größte Ausschlag ist abhängig von der vorhergegangenen Erregung der Sonden; er ist bei kleineren Erregungsspannungen geringer, bei stärkeren größer, nähert sich aber mit steigender Erregungsspannung einem Endwert, der meist kleiner ist als 2 Volt, oder diesen Wert nicht weit überschreitet.

Es ist, als ob sich an den Sondenkapazitäten schwache Restladungen ausbilden würden. Vielleicht hat man es hier auch mit einer nachhaltigen Variation des Kontaktpotentiales zu tun, mit einer Polarisation im engeren Sinne; in diesem Falle könnte diese Erscheinung mit der Erholung eines erschöpften Akkumulators verglichen werden.

Sie steht aber im Vergleich mit den übrigen hier auftretenden „Polarisationserscheinungen" an Stärke weit zurück und wurde nicht näher untersucht.

6. Es ist nun die Frage zu beantworten, wieso die beiden Galvanometer *G* und *G'* scheinbar ganz verschiedene Resultate geben: *G* zeigt die „Eigenströme" an, wie a. a. O. durch die Figg. 4 und 7 dargestellt wurde, während *G'* ballistische Ausschläge und damit Elektrizitätsmengen anzeigt, die der Fig. 2 entsprechen.

Da muß zunächst festgestellt werden, daß der Ausdruck „Eigenströme", der a. a. O. zur leichteren Beschreibung eingeführt worden war, nicht sehr glücklich gewählt scheint, denn es handelt sich hier um kurzdauernde Entladungen, die wesentlich unter der Schwingungsdauer der Galvanometer liegen, wie aus verschiedenen Versuchen gefolgert werden konnte. Es sind mithin die Bedingungen für Anwendung eines ballistischen Galvanometers gegeben.

Diese Entladungen erfolgen im Augenblick des Niederdrückens des Tasters *T* gleichzeitig mit dem Aussetzen des

Dauerstromes. Sie treiben also das Galvanometer G' aus der Ruhelage, während sie im aperiodisch geschalteten Galvanometer G eine Geschwindigkeit u_0 bewirken, die die Rückkehrgeschwindigkeit der Galvanometerspule nach dem Aussetzen des dem Dauerstrom entsprechenden Dauerausschlages in die Ruhelage vergrößert. Die Durchrechnung der Bewegung des aperiodischen Galvanometers ergibt nun, daß nur dann Ausschläge über die Ruhelage hinaus — die den Eigenströmen entsprechen würden — entstehen können, wenn u_0 größer ist als diejenige Geschwindigkeit U, mit der die Galvanometerspule ungedämpft aus dem Dauerausschlag durch die Ruhelage schwingen würde. U ist nun proportional dem Dauerausschlag (ähnlich Figg. 2, 3, 5 und 6, a. a. O.), u_0 proportional dem ballistischen Ausschlag (Fig. 2); aus dem Vergleich zweier solcher zusammengehöriger Kurvenbilder ergibt sich, daß die mit „Eigenstrom" bezeichneten Galvanometerausschläge mit steigender Spannung V einen Verlauf zeigen müssen, der ein Maximum hat, wie dies tatsächlich gefunden und a. a. O. an der Hand der Figg. 4 und 7 beschrieben wurde. Umgekehrt kann man aus den Eigenströmen mit ihren a. a. O. beschriebenen Gesetzmäßigkeiten ebenso wie aus den Rückgängen, für die natürlich die obige Überlegung auch gilt, ohne Schwierigkeit auf Entladungen schließen, die den durch die Fig. 2 wiedergegebenen Gesetzmäßigkeiten entsprechen.

Leider konnte ich keine erfolgversprechende Methode ausfindig machen, um die den Anfangsströmen, bzw. den Rückgängen entsprechenden Elektrizitätsmengen unmittelbar ballistisch aufzunehmen. Es dürften aber die hier gemachten Angaben genügen, um die kondensatorartige Wirkung der Sondenoberflächen zu erweisen und die Erscheinungen in befriedigender Weise zu deuten.

7. Sehr leicht gelingt der Nachweis, daß es sich tatsächlich um Vorgänge handeln muß, die an den Oberflächen der Sonden haften, also um oberflächliche Schichten und nicht etwa um räumliche Gebilde im Innern des Gases zwischen den Sonden, wenn man etwa folgenden Versuch anstellt: Durch das Entladungsrohr fließe der Strom J, der Schalter H sei in der Galvanometerstellung, der Taster T in seiner oberen Lage, von

der Batterie V sei eine beliebige Spannung angeschaltet; dann zeigt G den Dauerstrom und G' steht auf Null. Wenn nun J unterbrochen wird, verschwindet natürlich die Geißlerentladung und es kehrt G ohne Schwingung in die Nullage zurück. Drückt man hierauf T in seine untere Lage, so bleiben beide Galvanometer vollkommen ruhig (wenn sich keine Isolationsfehler eingeschlichen haben!). Wird nun J wieder geschlossen, so zeigen beide Galvanometer Ausschläge [1]), die in beiden Instrumenten sofort wieder verschwinden, in G aperiodisch, in G' nach wenigen Schwingungen. Es ist wohl nicht nötig, zu sagen, daß ich keine Ausschläge bekommen konnte, wenn die Spannung V gleich Null war.

Auffällig war bei solchen Versuchen, daß zwischen dem Unterbrechen und dem abermaligen Schließen des Entladungsstromes lange Zeiten verstreichen konnten — nach einer halben Stunde wurde noch keine sonderliche Verminderung der ballistischen Ausschläge beobachtet.[2]) Die kondensatorartigen Schichten halten also im stromlosen Rohr sehr gut ihre Ladungen, während bei geschlossenem J schon wenige Sekunden nach dem Abschalten von V ein merklicher Abfall in den Galvanometerausschlägen zu bemerken ist, weil sich dann die Ladungen durch das ionisierte Gas ausgleichen.

Aus solchen Versuchen scheint mir einwandfrei hervorzugehen, daß es sich hier nicht um räumliche Schichten im Entladungsrohr handelt, sondern tatsächlich um Vorgänge, die sich an den Oberflächen der Sonden abspielen. Übrigens führen sowohl die a. a. O. auf S. 11 beschriebenen Leuchterscheinungen, als auch der mehrfach erörterte Einfluß des Oberflächenzustandes zu diesem Schluß.

8. Unter Annahme von kondensatorartigen Gashäuten oder elektrischen Doppelschichten an den Sondenoberflächen gestatten die beschriebenen Beobachtungen folgende Deutung: Solche Schichten bilden sich — wieso, möge später besprochen werden — sehr rasch nach dem Schmirgeln oder Schaben der Sonden, haben aber dann nur eine geringe Widerstandsfestig-

1) Hierbei gehen beide Galvanometer parallel, d. h. G zeigt nun mit steigendem V keine Maxima, sondern einen Verlauf wie Fig. 2 mit entsprechend geringerer Empfindlichkeit.

2) O. v. Bayer und A. Tool (a. a. O.) fanden nach 8 Tagen deutliche Oberflächenladungen bei ihren Versuchen.

keit; sie sind nur imstande, eine geringe Elektrizitätsmenge zu tragen. Wird diese durch Erhöhung der Spannung über ein bestimmtes Maß erhöht, so dringen die Ionen oder Eelektronen durch die trennende Haut hindurch, wodurch ein stärkerer Ausgleich der Ladungen stattfindet, während bei geringerer Spannung die Leitfähigkeit der Schichten geringer ist.

Die Sondenkapazitäten sind zu vergleichen mit Kondensatoren mit parallel geschalteten Widerständen, deren Größe abhängig ist von der angelegten Spannung. Ist diese gering, so ist die Leitfähigkeit des Aggregates verhältnismäßig gering, wird die Spannung größer, so fällt der Widerstand. Im nichtionisierten Gas, bei Unterbrechung des Geißlerstromes ist auch die Leitfähigkeit auf Null gesunken, weshalb die Sondenkapazitäten ihre Ladungen in so ausgezeichneter Weise halten. Die Leitfähigkeit der Schichten ist also gebunden an die Ionisation im Rohr.

Daraus möchte ich schließen, daß die Leitfähigkeit der Schichten hervorgerufen wird durch Elektronen, die durch die Schichten hindurchdringen können, während die größeren Ionen in den Schichten bleiben. Diese Elektronen werden einesteils durch die Stoßionisation in der Gasentladung selbst geliefert und wandern zur anodischen Sonde, anderenteils durch lichtelektrische Erregung des Metalls der kathodischen Sonde innerhalb der Gashaut. Nach dieser Hypothese wäre noch das Durchdringungsvermögen abhängig von der Schichtdicke und von der treibenden Potentialdifferenz. Mit den Erscheinungen nicht unvereinbar wäre noch die weitere Annahme, daß bei höheren Potentialdifferenzen, im horizontalen Teil der Kurven, auch die Ionen ein gewisses Durchdringungsvermögen erlangen.

Die Geißlerentladung, der die Sonden vor der Aufnahme der Kurve II ausgesetzt waren, bewirkt ein Anwachsen der Hautdicke. Dadurch wird die Sondenkapazität geringer, weil der Abstand der Kondensatorbelege größer geworden ist; aber trotzdem vermag sie eine höhere Elektrizitätsmenge zu fassen, weil die Festigkeit der Gashaut gewachsen ist, d. h. die dickeren Schichten dem Hindurchdringen der Elektronen ein stärkeres Hindernis entgegensetzen. Hierdurch ist der (im Modell parallel geschaltete) Sondenwiderstand gestiegen, was auch den flacheren

Verlauf der Kennlinien von Anfangs- und Dauerströmen bewirkt, wie a. a. O. mehrfach beschrieben wurde.

In gleicher Weise ist die Kurve III zu deuten: Durch die 20stündige Geißlerentladung wurde die Haut an den Sondenoberflächen abermals verstärkt. Sie bietet also den hindurchdringenden Elektronen oder Ionen einen abermals größeren Widerstand, wodurch sich einesteils der abermals flachere Verlauf der Kennlinien erklärt (die hier nicht wiedergegeben sind) und anderenteils die Fähigkeit der Sonden, Elektrizität aufzustapeln, so vermehrt worden ist, daß der angenähert wagrechte Teil der Kurve aus dem Beobachtungsbereich herausgerückt ist, so daß die Kurve III nur den linearen Anstieg zeigt, der, wie erwähnt, einer Kapazität von $^1/_{60}$ Mikrofarad entspricht, was auch mit der größeren Hautdicke im Einklang steht.

Ebenso stimmen mit diesen Annahmen die Beobachtungen der Funkenstöße überein, die bei einer unvorsichtigen Erhöhung der Spannung eintreten. Ich möchte sie mit einem Durchschlagen der Oberflächenhäute vergleichen oder etwa dadurch erklären, daß durch Joulesche Wärme die schlechtleitenden Schichten an gewissen Stellen zerstört werden. An so behandelten Sonden sind immer Stellen mit beschädigtem Metall zu bemerken, oft schmelzen die Sonden auch bei einer solchen Gelegenheit plötzlich ab. Dies tritt natürlich bei kräftigeren Schichten erst bei höheren Potentialdifferenzen auf als bei schwächeren. Ist aber z. B. eine ältere Schicht (III) an einer Stelle zerstört worden, so liegt hier das blanke Metall frei oder ist nur mit einer dünnen neuen Haut bedeckt, so daß sich nun die ganze Sonde so verhält, wie eine frisch geschmirgelte (I).

9. Es ist verlockend, aus den ballistischen Ausschlägen auf die Dicke der Schichten, die die kondensatorartigen Wirkungen hervorrufen, zu schließen. Das würde ohne Schwierigkeit möglich sein, wenn die Dielektrizitätskonstante der Schichten bekannt wäre. Ich habe nun beobachtet, daß 14 Tage langes Liegen frisch geschmirgelter Sonden in der Zimmerluft den Typus der ballistischen Ausschläge nicht merklich beeinflußte und vermute daher, daß die wirksame Schicht nicht durch

eine Haut adsorbierter Luft gebildet wird; auch Oxydschichten können nicht die Ursache der Erscheinungen sein, weil die Versuche auch mit Platin-Iridiumsonden gelingen. Es scheint mir hingegen wahrscheinlich, daß Kohlenwasserstoffe, herrührend von den Schmiermitteln, die zum Dichten der Hähne verwendet wurden, die „Gashäute" verursachen. Diese Vermutung wird gestützt durch die Beobachtungen von A. Schuster, der besonders hohe „Polarisationsspannungen" in verschiedenen reinen Kohlenwasserstoffen fand, wie ich a. a. O. erwähnte. Danach müßten die Kondensatorwirkungen vermieden oder mindestens geschwächt werden können, wenn das Gas durch flüssige Luft und andere Vorsichtsmaßregeln sauber gehalten würde, Mittel, die mir hier nicht zur Verfügung stehen. Ich möchte also für die Schichten eine mittlere Dielektrizitätskonstante, wie sie für höhere Kohlenwasserstoffe gilt, annehmen: etwa 2,1.

Aus den Beobachtungen, die a. a. O. besprochen und dort durch die Figg. 2—7 wiedergegeben sind, ist zu folgern, daß insbesondere die kathodische Sonde für die verschiedenen Polarisationserscheinungen verantwortlich zu machen ist. (Es ist dort auch [S. 21] kurz eine Hypothese umrissen, die das Zustandekommen der Schichten erklären soll; sie wäre vielleicht noch dahin zu erweitern, daß von den verschiedenen Ionen des Entladungsrohres die schwereren Kohlenwasserstoffe am besten an den Sonden haften bleiben.) Demnach dürfte für die Berechnung der Sondenkapazität aus der geometrischen Form nur eine einzelne Sonde in Betracht zu ziehen sein.

Nun gilt für einen zylindrischen Kondensator, wie er einer einzelnen Sondenkapazität entspricht, die Formel:

$$c = \frac{D}{2} \cdot \frac{lr}{a},$$

worin l die Länge, r den Radius der Sonde, D die Dielektrizitätskonstante und a die Dicke der wirksamen Schicht bedeutet; setzt man hier die Werte $l = 6$ cm, $r = 0{,}5$ mm, $D = 2{,}1$ und für c, den Kurven I—III der Fig. 2 entsprechend, der Reihe nach $^1/_{10}$, $^1/_{20}$, $^1/_{60}$ Mikrofarad ein, so ergeben sich die Dicken der Schichten der Reihe nach zu

$$a = 35,\ 70,\ 210\ \mu\mu.$$

Diese Zahlen sind insofern recht befriedigend zu nennen, als man so in den Bereich der Größen von Schichten kommt, die Farben dünner Blättchen liefern; denn für die erste Ordnung der Newtonschen Farben wird eine Luftschichtdicke von 100 bis 245 $\mu\mu$ angegeben; dem entspricht (unter Annahme eines Brechungsverhältnisses 1,5) für höhere Kohlenwasserstoffe eine Schichtdicke von

67 bis 170 $\mu\mu$.

Damit stimmt die Beobachtung vortrefflich überein, denn an älteren Sonden, die einige Stunden der Geißlerentladung ausgesetzt waren, sind stets deutlich solche „Anlauffarben" zu bemerken.

10. Als Ergebnis dieser Arbeit ist zusammenzufassen: Die an Querelektroden in der Geißlerentladung auftretenden Polarisationserscheinungen werden im wesentlichen von Schichten verursacht, die sich an den Oberflächen dieser Elektroden ausbilden und eine kapazitative Wirkung haben.

Graz, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 10. Dezember 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

1920. № 11.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Galvanometrischer Nachweis der Thermospannung 1. Art beim flüssigen Quecksilber;*

von Carl Benedicks.

Inhalt. Einleitung. — I. Versuche mit flüssigem Amalgam. — 1. Einleitendes. — 2. Versuchsanordnung (Apparat 1). a) Drosselgefäß. b) Hitzanordnung. c) Temperaturbestimmung. d) Stromkreis. e) Galvanometer. f) Material. — 3. Beobachtungen und Schlußfolgerung. — II. Versuche mit Quecksilber in Griffelgefäß. — 1. Einleitendes. — 2. Versuchsanordnung. — 3. Beobachtungen und Schlußfolgerungen. a) Deutlicher Effekt (Apparat 2). b) Zeitliche Abhängigkeit. c) Konstante Ausschläge (Apparat 2'). d) Zeichenkontrolle. e) Abhängigkeit der Thermospannung 1. Art des Hg von der Temperaturdifferenz. — III. Versuche mit Quecksilber in Glasgefäß. — 1. Einleitendes. — 2. Herstellung des Apparates 3. — 3. Beobachtungen. a) Effekt deutlich merkbar. b) Ausschalten der Thermospannungen 2. Art. c) Zeichenkontrolle. d) Schlußfolgerung. — IV. Versuche mit Quecksilber in Asbestgefäß. — 1. Einleitendes. — 2. Herstellung von Drosselgefäßen aus Asbest. — 3. Übrige Versuchsanordnung (Apparat 4). — 4. Beobachtungen. a) Vorhandensein des Effekts. b) Temperaturabhängigkeit. c) Mögliche Fehlerquelle. — 5. Beobachtungen mit dem glimmerisolierten Apparat 5. — 6. Weitere Kontrolle. a) Eventueller Unterschied des Hg. b) Eventuelle Mitwirkung des Druckeffektes. c) Vorfindlichkeit der Spannungsursache in der Drosselstelle. d) Wasserkühlung. — V. Überblick der gewonnenen Resultate. — Zusammenfassung.

Einleitung.

In einer Arbeit[1]), welche beansprucht, die Existenz der durch Magnus' Satz in Abrede gestellten, nur von der Asymmetrie des Temperaturgefälles abhängigen Thermospannungen eines einmetallischen Kreises („1. Art") experimentell nachgewiesen zu haben, wurde auch das flüssige Quecksilber mit positivem Resultat untersucht, es gelang aber damals

1) C. Benedicks, Ann. d. Phys. (4) **55**. S. 1, 103. 1918; C. r. **163**. S. 751. 1916; **165**. S. 391, 426. 1917; Rev. de Métall. **15**. S. 329. 1918.

nicht, die betreffende Thermospannung mit dem Galvanometer sicher nachzuweisen.

Durch diese Arbeit wurde nun neuerdings H. Haga[1]) — welchem Forscher ja der Verdienst zukommt, als erster die Existenz des Thomsoneffektes in Quecksilber bewiesen zu haben — veranlaßt, nachzuprüfen, ob sich nicht durch die Anwendung zweier gekreuzter Quecksilberstrahlen eine Thermospannung 1. Art dieses Metalles nachweisen ließe; durch diesen Kunstgriff wurde der von mir betonte schädliche Einfluß der Glaswand vermieden. Das Resultat dieses, sowie eines anderen Versuches, wo ebenso strömendes Quecksilber zur Anwendung kam — der gleichfalls von H. Haga in Gemeinschaft mit F. Zernike ausgeführt wurde —, wurde indessen als rein negativ aufgefaßt.

Weiter ist neuerdings G. Borelius[2]) für die Gültigkeit des Magnusschen Satzes wieder eingetreten, indem er von gewissen Beobachtungen an kaltbearbeiteten Metallen zum Schluß geführt wurde, daß die von mir beschriebenen Thermoströme 1. Art von gewissen hypothetischen Oberflächenerscheinungen vorgetäuscht seien.

Unter diesen Umständen tritt das alte, von Emmet (1834), Matteucci (1837), Henrici (1850), Magnus (1851), Gaugain (1853), Braun (1885)[3]), und schließlich Haga und Zernike (1919) durchgehends mit negativem Resultat behandelte experimentelle Problem, ob sich im flüssigen Quecksilber am Galvanometer meßbare Thermoströme 1. Art nachweisen lassen, wieder im Vordergrund des Interesses auf dem Gebiet der Thermoelektrizität hervor.[4])

Sind Thermoströme 1. Art in Quecksilber wirklich nicht nachweisbar, dann müssen meine Ausführungen betreffend Thermoströme 1. Art überhaupt wohl als zweifelhaft er-

1) H. Haga u. F. Zernike, Sitzungsber. der Wiss. Akademie zu Amsterdam 29. März 1919; Proceedings 21. Nr. 10. S. 1262.

2) G. Borelius, Ann. d. Phys. 60. S. 381. 1919.

3) Vgl. C. Benedicks, Kritische Studien der Literatur, betreffend Thermospannungen im einmetallischen Kreise. Arkiv f. matem., astronomi och fysik. 14. Nr. 20. S. 1—61. Stockholm 1919.

4) Negatives Resultat wurde ebenfalls neuerdings von P. W. Bridgman für flüssiges Hg erhalten: Proc. Amer. Acad. 53. S. 267. 1918. Vgl. Physic. Rev. (2) 14. S. 313. 1919.

scheinen; sind sie aber tatsächlich nachweisbar, dann dürften die fraglichen Einwände in Wegfall kommen.

Aus diesem Grunde habe ich das Problem wieder aufgenommen, und werde im folgenden für die gewonnenen Ergebnisse Bericht erstatten.

I. Versuche mit flüssigem Amalgam.

1. Einleitendes.

Nach den früheren Arbeiten des Verf. mußten die Hauptschwierigkeiten in folgenden Umständen liegen:

1. Dem ausnutzbaren Temperaturintervall sind beim Hg (von Gefrier- und Kochpunkten) verhältnismäßig enge Grenzen gesetzt.

2. Es ist sehr schwierig, ein Glasgefäß herzustellen, wo nicht die Wärmeleitung des Glases bzw. Abweichung von theoretisch günstigster Form, nur ein ungenügend schroffes Temperaturgefälle herbeiführt.

Um die erste Schwierigkeit zu umgehen, wurden die Versuche zunächst mit *flüssigem Wismut-Amalgam* (1 Bi + 1 Pb + 8 Hg; Gewichtsteile) ausgeführt, wo eine erheblich größere Thermokraft zu erwarten ist als beim reinen Hg.

Um der zweiten Schwierigkeit gerecht zu werden, wurde als Material des Gefäßes eine Substanz von geringerer Wärmeleitfähigkeit und leichterer Formgebung als Glas, nämlich *Griffelmasse*, gewählt.

Es war mir von vornherein einleuchtend, daß die geeignetste Methode diejenige einer stark verjüngten, zylindrischen, ruhenden Quecksilbermasse sein muß; die Verwendung schnell bewegter Massen, wie sie H. Haga benutzte, gibt möglicherweise zu mehreren perturbierenden Faktoren Veranlassung.

2. Versuchsanordnung.

a) Drosselgefäß.

Das mit Einschnürung versehene Gefäß („Drosselgefäß"; „Apparat 1") wurde folgendermaßen hergestellt. Ein 85 mm langes Stück eines 5,0 mm dicken gewöhnlichen Griffels von A. W. Faber wird von beiden Seiten gut zentral und gleich tief ausgebohrt (gewöhnlicher Spiralbohrer, 3,0 mm), bis $a\,a'$ (Fig. 1). Das übrigbleibende Stück $a\,a'$ wird mit einem feinen Loch durchbohrt (feinster Spiralbohrer 0,8 mm, in einem 3 mm Stiel zentral angebracht). Es werden dann die inneren Enden der Bohrungen genau symmetrisch sphärisch ausgewölbt,

bis eine Mittelwand von nur etwa 0,3 mm dünnster Dicke $b\,b'$ entsteht (spezieller, leicht herzustellender Aufräumer mit An-

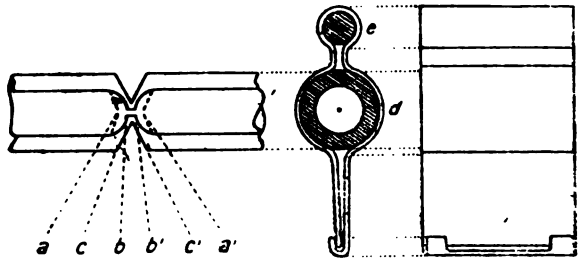


Fig. 1.

schlag). Schließlich wird genau in der Mitte eine scharfe Rinne $c\,c'$ am Drehstuhl angebracht. (Abstand $c\,c' = 2$ mm; Winkel etwa 54°.)

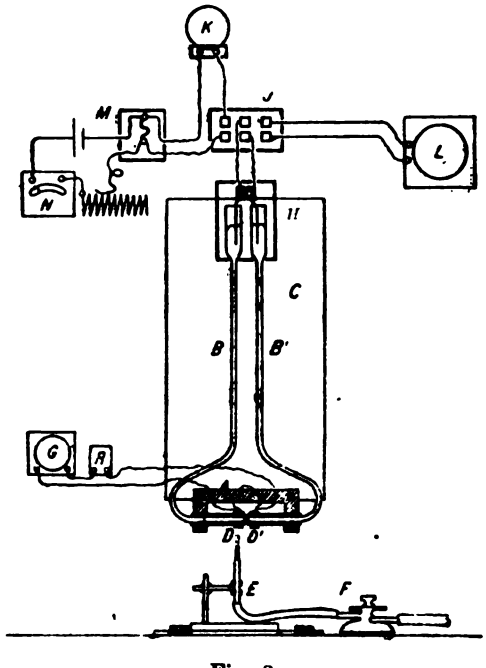


Fig. 2.

Das somit erhaltene, ziemlich zerbrechliche Drosselgefäß wird in einem ausgebohrten bügelgeformten Halter *A* (Fig. 2)

aus Topfstein oder dergleichen festgekittet. In die konisch erweiterten Enden des Drosselgefäßes passen zwei nach der Figur geformte Glasröhren $B\,B'$ (Länge 40 cm, äußere Dicke 4 mm); dieselben sind mit A an einem horizontalen Grundbrett C befestigt.

b) Hitzanordnung.

Das Drosselgefäß ist mit zwei gut anschmiegenden Hitzblechen $D\,D'$ (Fig. 2), d (Fig. 1) aus Kupfer versehen (Dicke 0,4 mm, Breite 10 mm; beiderseitig etwa 7 mm hinausragend).

Die Hitzung geschieht durch eine minimale Flamme (Mikroquarzbrenner) E mit Präzisionsregulierbahn F. E ist durch Anschläge leicht unter D bzw. D' zu bringen. Die Bleche sind gut schwarz oxydiert, damit das nicht gehitzte Blech durch Ausstrahlung gut gekühlt werde.

c) Temperaturbestimmung.

Zur Orientierung über die vorhandenen Temperaturdifferenzen dient ein Kupfer-Konstantanthermoelement. Die Lötstellen sind von Asbest umgeben, in den Aushöhlungen der Hitzbleche bei e Fig. 1 untergebracht. Als Ableseinstrument dient ein Zeigergalvanometer G (Fig. 2) von Hartmann und Braun (Nullpunkt in der Mitte) mit vorgeschaltetem Widerstand R.

Eine Eichung des Thermoelementes (Hg-Thermometer Zincke) ergab ausreichende Proportionalität der Ausschläge und der Temperaturdifferenzen. Es entspricht ein Skalenteil bei verschiedenen R folgenden Temperaturdifferenzen Δt:

R Ohm	Δt °C
700	3,22
1000	4,55
2000	8,87

Die (nach rechts verlaufenden) Ausschläge von G, welche einem Hitzen des rechten Bleches D' entsprechen, werden in den Tabellen mit + bezeichnet.

d) Stromkreis.

Im flüssigen Metall tauchen zwei kurze Eisendrähte H (die weiteren Enden von $B\,B'$ sind etwas nach oben gebogen);

die äußeren kupfernen Verbindungsdrähte werden durch eine glimmerisolierte Doppelklammer angeschlossen.

Ein thermokraftfreier Umschalter J verbindet das Drosselgefäß entweder mit dem Panzergalvanometer K oder mit der Wheatstoneschen Brücke L.

Der Galvanometerkreis enthält noch bei M einen Normalwiderstand von 0,001 Ohm, dem eine geringe bekannte, am Dezimilliamperemeter N abzulesende Potentialdifferenz e zugeführt werden kann. Die Einführung einer konstanten Potentialdifferenz dient (außer Empfindlichkeitsbestimmung) dem praktischen Zweck, bei einer Versuchsreihe, durch den Wiederkehr des Galvanometers zu seiner Nullage, sofort zu bemerken, ob der Stromkreis nicht mehr geschlossen ist. Bei der Erhitzung entstehende Kontaktfehler des flüssigen Metalles ist nämlich als die größte praktische Schwierigkeit des Experimentes zu bezeichnen. Denselben Kontrollzweck dient die eben angegebene Wheatstonesche Brücke; an und für sich kommt dem Widerstand des Kreises kaum Interesse zu.

H, J, K, M waren, wie in Fig. 2 angedeutet, durch dicke Metallgefäße gegen Temperaturstörungen geschützt.

e) Galvanometer.

Das Galvanometer war ein im Institut nach der Konstruktion des Verfassers gebautes hochempfindliches Panzergalvanometer vom inneren Widerstand 12,7 Ohm. Bei einem Skalenabstand von 1,5 m entsprach 1 mm $= 4{,}8 \cdot 10^{-9}$ Volt, wenn im äußeren Kreis der Widerstand 1,4 Ohm war.

Bei dieser Empfindlichkeit erfordert die Einstellung auf eine neue Gleichgewichtslage etwa 30 Sek.

Am Tage ergaben die magnetischen Störungen, bei dieser Empfindlichkeit, nicht selten Schwankungen von 1 mm.

Die Ablesung geschah objektiv (mm-Skale).

f) Material.

Das Amalgam wurde aus 20 g Bi + 20 g Pb + 60 g Hg guter Reinheit hergestellt und zuerst filtriert.

3. Beobachtungen.

Schon einige vorläufige Beobachtungen ließen kräftige Ausschläge hervortreten. Eine längere Beobachtungsreihe ergab folgende Zahlen (Tab. 1). Mit ϱ wird der Widerstand des Drosselgefäßes nebst Zuleitungen bezeichnet.

Tabelle 1. Flüssiges Bi-Amalgam.

$\varrho = 0{,}38$ Ohm.

$2\Delta t$ °C	u mm	$2\Delta t$ °C	u mm
87	36	171	82
91	33	185	84
135	64	215	140
154	70	216	127
165	80	219	139

Als $2\Delta t$ wird die doppelte Temperaturdifferenz der Hitzbleche in °C bezeichnet (algebraische Differenz der − und + Ausschläge, die einer Stellung links bzw. rechts des Mikrobrenners entsprechen), als u die Differenz der betreffenden Galvanometerausschläge nach 2,5 Minuten.

Es handelt sich also um recht erhebliche Ausschläge, welche, wie eine graphische Darstellung lehrt, beträchtlich schneller als mit der Temperaturdifferenz proportional steigen. Wegen Reißens des Amalgamfadens bei höherer Erhitzung wurde nur mit einer tatsächlichen Temperaturdifferenz von $^1/_2 \cdot 219^0 = 110^0$ beobachtet.

Indessen zeigte sich, daß die Größe der Ausschläge sehr beträchtlichen Schwankungen unterworfen war. Nach Verschieben des Flüssigkeitsfadens (Aufgießen von etwas Amalgam im einen Schenkel) wurden stark herabgesetzte Ausschläge erhalten. Nach Entlehren und Wiederfüllen des Apparates erhielt man zwar wieder Ausschläge der früheren Größenordnung; ich bekam aber den Eindruck, daß das Amalgam keineswegs ganz homogen war.

Tatsächlich zeigte sich im Binokularmikroskop, daß das Amalgam sich in der Luft sofort mit einer dünnen Haut überzieht. Dies ist der Grund der im allgemeinen unrunden, oft zugespitzten Form der Tropfen des Amalgames.

Unter diesen Umständen will ich die erhaltenen Ausschläge nicht mit Bestimmtheit als von Thermospannungen 1. Art herrührend behaupten. Es ist zwar nicht ausgeschlossen, daß die fragliche Legierung unter Innehalten besonderer Vorsichtsmaßregeln sicher homogen zu erhalten ist; es ist aber sicher, daß an einem solchen zusammengesetzten Körper beobachtete Thermospannungen nie als einwandfrei erscheinen werden.

Es wurde deshalb auf weitere Versuche mit dem Amalgam verzichtet.

Hinzugefügt sei nur, daß die hier am flüssigen Amalgam bei einer tatsächlichen Temperaturdifferenz von nur 110° beobachteten Thermospannungen etwa $140 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-9}$ Volt $= 0{,}7$ Mikrovolt betragen.

Von F. Braun[1]) wurde angegeben, daß mit dem fraglichen Amalgam überhaupt eine Potentialdifferenz über 0,5 Mikrovolt (was seine Beobachtungsgrenze war!) nicht zu erhalten ist.

Die von mir beobachteten Werte liegen also immer noch sehr nahe der Beobachtungsgrenze von Braun.

II. Versuche mit Quecksilber im Griffelgefäß.

1. Einleitendes.

Die beim vorigen Versuch erhaltenen Ausschläge, welche trotz der entdeckten ernsten Fehlerquelle (Inhomogenität), Thermospannungen 1. Art entsprechen konnten, waren so beträchtlich, daß dies für die Verwendbarkeit der Apparatur auch bei reinem Quecksilber zu sprechen schien, wo erheblich geringere Thermospannung zu erwarten ist. Es wurde deshalb im folgenden zu Quecksilber übergangen, wo jene Fehlerquelle nicht mehr zu befürchten ist.

Das benutzte Quecksilber war im Institut sorgfältig durch Destillation gereinigt.

2. Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung war unverändert; selbstverständlich wurde ein neues Drosselgefäß hergestellt („Apparat 2"), damit keine Verunreinigung sollte stattfinden können. Vor dem Füllen wurde unter Erhitzen trockene Luft durch den Apparat gesaugt.

3. Beobachtungen und Schlußfolgerungen.

a) Deutlicher Effekt (Apparat 2).

Die ersten mit Hg erhaltenen Beobachtungen sind in folgender Tabelle angegeben (die allerersten, bei ganz schwacher Erhitzung, sind fortgelassen).

---

1) F. Braun, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akad. I. S. 289. Berlin 1885; Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl. 4. I. S. 743. Leipzig 1905.

Tabelle 2. Hg im Griffelgefäß.

$R = 1000$ Ohm; $\varrho = 0{,}24$ Ohm.

(Ablesung s von G) Temperaturausschlag bei Erhitzung			$2\,\Delta t$ °C	(Ablesung u von K) Galvanometerausschlag bei Erhitzung		
links	rechts	Differenz $r - l$		links	rechts	Differenz $r - l$
− 19	+ 22	+ 41		249	252	+ 3
− 19	+ 20	+ 39		248	252	+ 4
− 19	+ 20	+ 39		251	256	+ 5
− 17	+ 19	+ 36		252	256,5	+ 4,5
		+ 39,0	180			+ 4,1
− 22	+ 22	+ 44		252	259,5	+ 7,5
− 18	+ 23	+ 41		252	260,5	+ 7,5
− 21	+ 21,5	+ 42,5		253	259	+ 6
− 22	+ 20	+ 42		251	259,5	+ 8,5
		+ 42,4	195			+ 7,4

Die Ausschläge wurden jedesmal 1 Minute nach erfolgter Verschiebung des Mikrobrenners abgelesen.

Obgleich die tatsächliche Temperaturdifferenz Δt der Hitzbleche 100° nicht übersteigt, ergeben sich *recht regelmäßige, gut meßbare Ausschläge des Galvanometers von 4 bis 8 Skalenteile.* Dieselben (vom 9. Juli 1919, wie Tab. 3) dürften den ersten sicheren galvanometrischen Nachweis der Thermospannung 1. Art des Hg darstellen.

b) Zeitliche Abhängigkeit.

Indessen wurde bemerkt, daß die Ausschläge nicht konstant waren, sondern mit der Zeit abnahmen. Es wurden deshalb folgende Beobachtungen angestellt. Zusammengehörige Ablesungen der Instrumente G und K (Fig. 2) werden mit s_1 u_1 usw. bezeichnet. Die Zahlen der 1. Kolonne geben die Einstellung des Mikrobrenners an. (Vgl. Tab. 3.)

Die Beobachtungen sind in Fig. 3 graphisch dargestellt.

Da, wie aus der Tabelle ersichtlich, der Quecksilberfaden schon bei einer Brennereinstellung 3,8 riß, konnten nun nur geringe Temperaturdifferenzen benutzt werden (bei s_1 bis s_4 etwa $2\,\Delta t = 135°$).

Der Gang der Galvanometerausschläge u ist aber recht regelmäßig: zuerst ein mit der Temperaturkurve s symbater Ausschlag, der in weniger als 1 Min. nach der Verschiebung

Tabelle 3. Hg im Griffelgefäß.

$R = 1000$ Ohm; $\varrho = 0{,}248$ Ohm.

Brenner-einstellung		Minuten: 0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
3,6	s_1	—	+ 10,0	+ 12,7	+ 13,8	+ 14,0	+ 14,5
	u_1	275	272,5	273,2	271,6	271,0	270,5
	s_2	− 1,0	− 9,0	− 12,0	− 13,5	− 14,0	− 14,5
	u_2	268,5	269,0	270,5	275,0	275,8	276,1
	s_3	+ 1,5	+ 9,5	+ 12,5	+ 13,6	+ 14,5	+ 14,7
	u_3	278,5	279,0	276,5	275,4	273,8	271,4
	s_4	− 1,0	− 8,8	− 12,0	− 13,3	− 14,0	− 14,5
	u_4	268,0	268,8	271,0	272,9	275,6	277,4
3,8	s_5	− 3,0	− 11,0	− 14,0	− 15	—	—
	u_5	274,5	272,0	276,0	277,0[1]	—	—

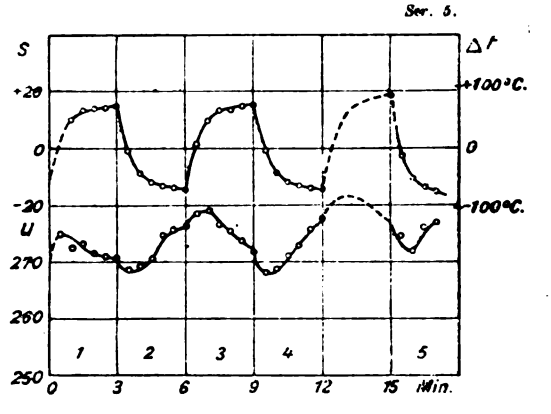


Fig. 3.

des Brenners ein Maximum ergibt; dann eine starke Abnahme dieser Ausschläge.

Die erste Periode entspricht den Ausschlägen der Tab. 2. Weiter liegt es nahe, zu vermuten, daß die nachfolgende Abnahme in erster Linie von Seebeckeffekt an den Zuleitungen herrührt.

c) Konstante Ausschläge (Apparat 2').

Da ein Auskochen des mit 40 cm langen Zuleitungen versehenen Apparates 2 außerordentlich schwierig war, wurde folgende Modifikation vorgenommen.

1) Strombruch erfolgte hier.

Die in den konischen Erweiterungen des Drosselgefäßes passenden Glasröhren wurden sehr kurz genommen (vgl. Fig. 4), wodurch ein effektiveres Auskochen erleichtert wurde. In

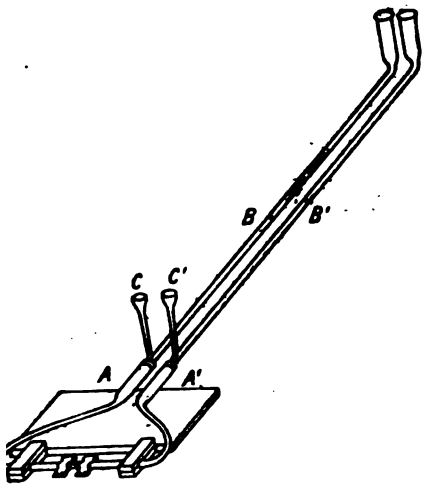


Fig. 4.

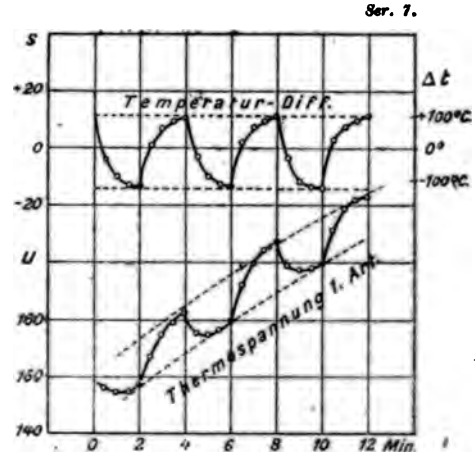


Fig. 5.

den Erweiterungen $A\,A'$ kamen nun etwa 60 cm lange, nur 8 mm dicke Zuleitungsrohre $B\,B'$; durch kleine Steigrohre $C\,C'$ waren dieselben leicht zu füllen.

Nach dieser Modifikation („Apparat 2'") wurde folgende, in Fig. 5 graphisch dargestellte Beobachtungsreihe gewonnen.

Tabelle 4. Hg im Griffelgefäß mit längeren Zuleitungen. $R = 2000$ Ohm; $\varrho = 0{,}592$ Ohm.

	Minuten:			
	0,5	1,0	1,5	2,0
s_1	− 4	− 10,0	− 13,0	− 13,9
u_1	148,0	147,1	147,1	148,6
s_2	+ 1	+ 7,0	+ 9,5	+ 10,6
u_2	153,8	157,2	159,4	161,0
s_3	− 3	− 10,0	− 12,5	− 13,5
u_3	157,5	157,2	158,0	159,9
s_4	+ 2	+ 7,0	+ 9,5	+ 10,8
u_4	166,0	170,0	172,3	173,5
s_5	− 4	− 12,0	− 13,4	− 41,0
u_5	169,2	168,8	169,0	169,8
s_6	+ 3	+ 7,5	+ 9,8	+ 11,0
u_6	175,6	179,5	181,0	181,2

Wie an Fig. 5 ersichtlich, verlaufen die Ausschläge sehr regelmäßig, sind ein wenig größer als vorher (8 mm) — die Temperaturdifferenz Δt war auf etwa 111° gesteigert — und zwar verlaufen sie in derselben Richtung wie in der 1. Periode der Fig. 3. Von einer Abnahme ist nunmehr, während der Beobachtungszeit von 2 Minuten, nicht die Rede.

d) Zeichenkontrolle.

Nachdem der Effekt also durch die verbesserte Anordnung in großer Reinheit hervorgetreten war, wurde zur wichtigen Zeichenkontrolle übergegangen.

Zu diesem Zweck wurde der Hg-Apparat mit einem Drosselkreuz aus Kupferdrähten ersetzt. Nach der früheren Erfahrung des Verfassers hat Kupferdraht immer eine positive Thermokraft erster Ordnung (der positive elektrische Strom geht in der Drosselstelle vom kalten zum warmen Kupfer). Es zeigte sich nun, daß diejenigen Ausschläge, die mit Kupfer erhalten werden, *die entgegengesetzten sind zu denjenigen, welche mit Quecksilber zum Vorschein kommen.*

Flüssiges Quecksilber ergibt demgemäß eine negative Thermokraft 1. Art, wie es nach den früheren, eingehenden Untersuchungen des Verfassers[1]) *sein soll.*

Es wurde weiter direkt festgestellt, daß eine Erhitzung des Quecksilbers in der Nähe der Elektroden Ausschläge ergibt, die in umgekehrter Richtung verlaufen zu denjenigen der Thermospannung 1. Art.

e) Abhängigkeit der Thermospannung 1. Art des Hg von der Temperaturdifferenz.

Um zu erfahren, wie die Thermospannung des Hg mit der Temperaturdifferenz zunimmt, wurde mit Apparat 2' noch eine Beobachtungsreihe ausgeführt, bei 7 verschiedenen Einstellungen des Mikrobrenners. An den erhaltenen, der Fig. 5 analogen Beobachtungskurven wurden Temperaturdifferenz und Galvanometerausschlag abgelesen. Die so erhaltenen Zahlen sind in Tab. 5 vereinigt. Es sei hinzugefügt, daß bei den größeren Temperaturdifferenzen immer noch eine gewisse Abnahme der Ausschläge merkbar war. Der letzte

1) a. a. O., S. 103.

u-Wert (13) ist ein Einzelwert; die meisten sind aus etwa vier Erhitzungsperioden erhalten.

Tabelle 5. Hg im Griffelgefäß.

Abhängigkeit der Thermospannung 1. Art von der Temperaturdifferenz.

Brenner-einstellung	$2\,\Delta t$ °C	u mm
6,0	179	2,8
6,1	195	2,7
6,2	213	3,8
6,3	230	3,8
6,5	275	5,5
6,6	285	9,0
6,7	310	13

Diese Daten sind in Fig. 6a graphisch dargestellt.

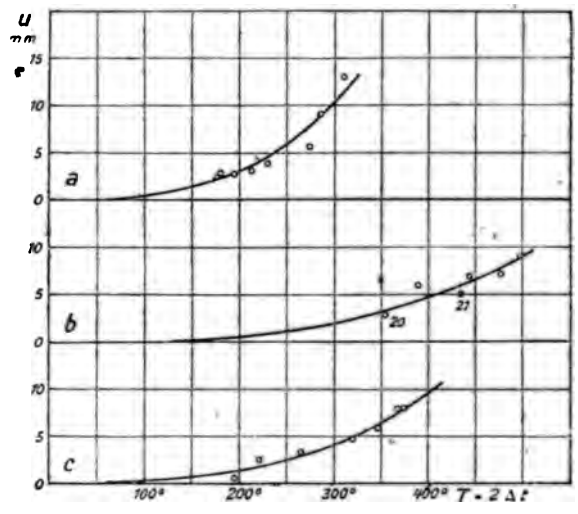


Fig. 6.

Es ergibt sich, daß ***die gefundenen Thermospannungen 1. Art des Hg viel schneller zunehmen als die beobachteten Temperaturdifferenzen.***

In der Figur ist eingezeichnet die Kurve

$$u = 0{,}39 \cdot 10^{-6} \cdot T^3,$$

wo T für $2\,\Delta t$ geschrieben wird.

Wie ersichtlich, gibt dieselbe die Beobachtungen innerhalb der Versuchsfehler recht gut wieder.

Wenigstens in erster Annäherung erscheinen also die Thermospannungen 1. Art des Hg als zu der 3. Dignität des Temperaturgefälles proportional.

Ist eine Temperaturdifferenz von 100° in 0,1 mm vorhanden, ist die resultierende Thermospannung 1000mal größer, als wenn sie in 1,0 mm vorhanden ist.

III. Versuche mit Quecksilber im Glasgefäß.

1. Einleitendes.

Bei den vorigen Versuchen mit Griffelgefäßen hatte es sich als unmöglich gezeigt, durch Auskochen fremde Gase zu entfernen; es konnten deshalb keine größeren Temperaturdifferenzen als etwa 155° zur Anwendung kommen.

Diese Schwierigkeit schien teilweise auf gasundichte Verbindung zwischen dem Griffelgefäß und den Glasröhren zurückzuführen sein, teilweise aber auf den durch besondere Versuche festgestellten Umstande, daß die Griffelsubstanz bei Erhitzung Wasser abgibt.

Aus diesem Grunde wurde nun zu einem ganz aus Glas bestehenden Apparat übergegangen — wo Gasfreiheit leichter zu bewirken ist — trotz den schon in der Einleitung hervorgehobenen praktischen Schwierigkeiten des Glases.

Da es tatsächlich gelang, mit dem Glasapparat sichere, wenn auch geringfügige Ausschläge zu erhalten, sei die Herstellungsweise in einigen Einzelheiten beschrieben.

2. Herstellung des Apparates 3.

Das eigentliche Drosselgefäß wurde folgendermaßen hergestellt.

Ein Stück Glasröhre von 10 mm äußerem Durchmesser wird in der Mitte etwas aufgeblasen und ausgezogen, so daß es daselbst dünnwandig wird (Fig. 7a). Indem das Rohr in der Gebläseflamme gedreht wird, erhält man leicht eine gleichnamige Verjüngung wie Fig. 7b. Es wird dann das Rohr, *ohne es zu drehen*, in eine kleine, scharfe Flamme vorübergehend hineingeführt: es verjüngt sich dabei an der von der scharfen Flamme getroffenen Seite etwa wie bei *C*, unten (dabei ist

nicht die Temperatur, sondern die Gebläsewirkung der Flamme ausschlaggebend; eine stille, spizte Flamme ist ungeeignet). Nachdem so ringsum stellenweise verjüngt worden ist, entsteht eine Form etwa wie bei *d*. Die Handhabung des Rohres bereitet bis jetzt keine Schwierigkeit. Um die Drosselstelle beim darauffolgenden Verschmelzen mit den Zuleitungsröhren mechanisch zu schützen, wird sie zunächst mit Siegellack umgeben, dann mit einem gegen Erwärmung des Siegellackes schützenden Gipspropfen (Fig. 7e).

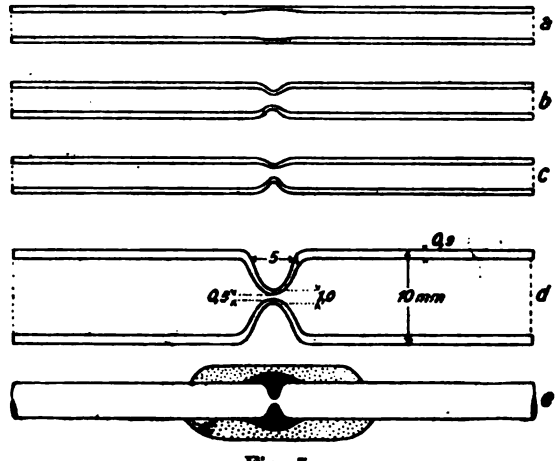


Fig. 7.

Nachdem die Zuleitungen zugeschmolzen und gebührend befestigt worden sind, wird der Gipspfropfen mit der Laubsäge zerlegt und entfernt (Anfeuchten!), wonach das Siegellack weggeschmolzen und mit Spiritus abgewischt wird.

Mit diesem Kunstgriffe bietet die Herstellung des Apparates jedem im Glasblasen Geübten keine besondere Schwierigkeit.

Die ungefähre Form der Drosselstelle ist an Fig. 7d zu sehen; die lichte Weite war 0,50—0,52 mm; es wäre leicht, dieselbe noch erheblich zu vermindern.

Der beträchtliche Durchmesser von 10 mm wurde gewählt, um eine verhältnismäßig kräftige Verjüngung leichter zu erhalten; außerdem damit eventuelle Luftausscheidung weniger Einfluß haben sollte.

Beiderseits der Drosselstelle wurden zwei spiralgewundene dünne Glasbänder eingeschoben, um diese empfindliche Stelle beim Auskochen gegen heftige herangeschleuderte Quecksilbermassen zu schützen.

Die 18 cm langen, 5,5 mm dicken Zuleitungsröhren waren nach Fig. 8 gebogen; die sie oben abschließenden Behälter *A A'* waren unten etwas verjüngt und mit eingeschliffenen, durch den Korkstopfen *B B'* hindurch zu hantierende Glasstöpfchen versehen, wie in der Figur ersichtlich; dies damit beim späteren Nachfüllen von Hg in *A A'* keine Luft ins eigentliche Drosselgefäß eindringen sollte.

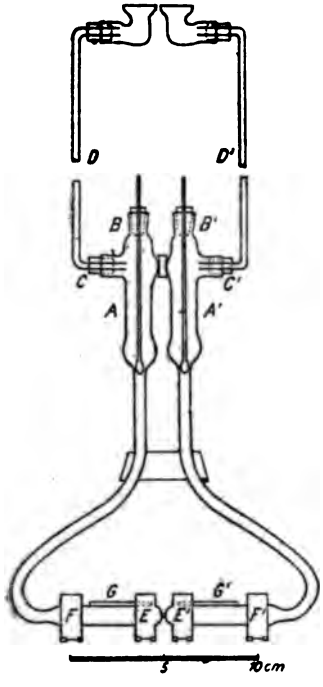


Fig. 8.

Der Apparat wurde aus Jenenser Durobaxglas angefertigt, um in jeder Hinsicht so widerstandsfähig zu sein wir nur möglich.

Zu den Elektroden führen 40 cm lange, 3 mm dicke Hg-gefüllte Röhren *D D'*. Behufs ihrer bequemen Füllung waren in *B B'* kleine in der Figur nicht angegebene Steigröhren vorgesehen.

Die die Drosselstelle umgebenden Hitzbleche *E E'* (Dicke 0,4 mm; ausragende Breite 11 mm) waren kuppelartig geformt, so daß sie bei der Drosselstelle nur 2 mm abstanden; um mit dem Rohr in thermisch guter Berührung zu stehen, war der Zwischenraum mit Graphitkitt ausgefüllt. Die beiden äußeren Hitzbleche *F F'* wurden für eine spätere Kontrolle angebracht (S. 201).

Für die Temperaturbestimmung waren Kapillare *G G'* mit Graphitkitt am Glasrohr befestigt.

3. Beobachtungen.

a) Effekt deutlich merkbar.

Das Aussehen der mit dem Glasapparat (ohne äußere Hitzbleche *F F'*!) gewonnenen Bestimmungen geht aus Fig. 9

hervor ($R = 2000$ Ohm, wie bei allen nachfolgenden Versuchen; $\varrho = 0{,}49$ Ohm). Der allgemeine Charakter entspricht recht genau den mit dem Griffelapparat zuerst erhaltenen (Fig. 3), nur sind die Ausschläge jetzt geringer.

Es liegt demgemäß nahe zu vermuten, daß die nach Hitzumkehr zunächst erfolgenden Ausschläge der Thermospannung 1. Art, die nachfolgenden, langsamer erscheinenden Ausschläge in entgegengesetzter Richtung aber fremden Thermospannungen 2. Art entstammen.

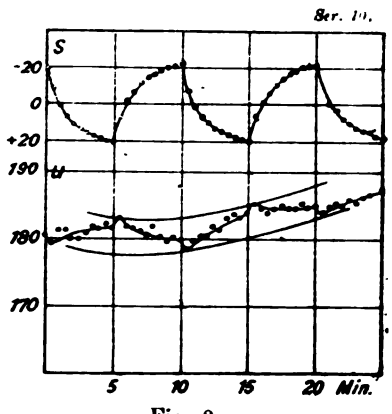


Fig. 9.

b) Ausschalten der Thermospannungen 2. Art.

Um dies sicher entscheiden zu können, wurden die äußeren Hitz- bzw. Abkühlungsbleche FF' (Fig. 8) angebracht.

Beim Hitzen der inneren Bleche wurden jetzt die Beobachtungen der Fig. 10 gewonnen; beim mit genau derselben Mikroflamme erfolgenden Erhitzen der äußeren Bleche gingen diejenigen von Fig. 11 hervor.

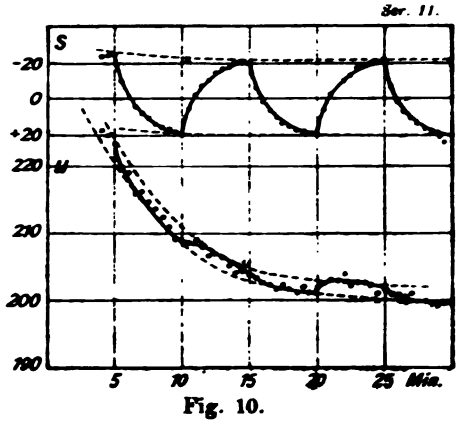


Fig. 10.

Es ist aus Fig. 10 ersichtlich, daß schon durch die Anbringung der äußeren Bleche die langsamer erfolgenden Ausschläge — in geradezu überraschender Weise — eliminiert worden sind, indem die äußeren Bleche durch Ausstrahlung gegen die Verbreitung der Wärme zu den Zuleitungen eine recht effektive Schutzwirkung ausüben.

Fig. 11 zeigt, daß beim Erhitzen der äußeren Bleche, wenn an der Drosselstelle nur ein geringfügiges Temperatur-

gefälle entstehen kann, umgekehrt die auf den Thermospannungen 1. Art zurückgeführten Ausschläge eliminiert worden sind; die entgegengesetzten, als Thermospannungen 2. Art gedeuteten, kommen nun allein, und in verstärkter Weise, zum Vorschein.

Einige späteren, unter etwas abgeänderten Druckverhältnissen gewonnene Beobachtungsreihen, wo die inneren Bleche geheizt wurden, stimmen mit Fig. 10 recht genau überein, brauchen hier aber nicht angeführt zu werden.

c) Zeichenkontrolle.

Es wurde festgestellt, daß diejenigen Ausschläge, welche in Fig. 10 allein zum Vorschein kommen, entgegengesetzt

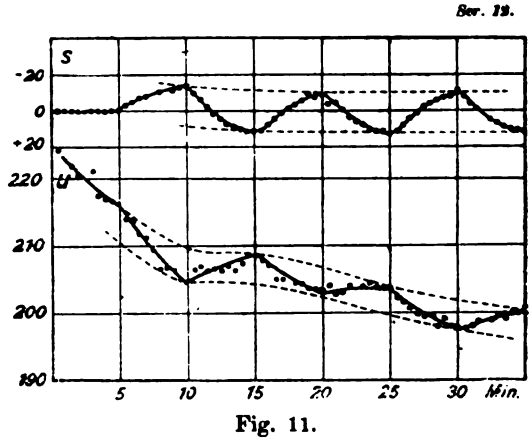


Fig. 11.

waren zu denjenigen, die mit Kupfer zu erhalten sind, d. h. die auf Thermospannungen 1. Art zurückgeführten Ausschläge haben auch bei der Verwendung eines Glasapparates den richtigen, dem negativen Hg zukommenden Sinn.

Des weiteren wurde festgestellt — wie ja ohne weiteres einzusehen war —, daß die Ausschläge der Fig. 11 in derselben Richtung gehen wie eine noch direktere Erhitzung der Zuleitungen.

d) Schlußfolgerung.

Es geht aus dem Angeführten hervor, daß auch mit dem Glasapparat ganz unzweideutige, wenn auch nur geringfügige (2 mm) Ausschläge beobachtet wurden, die von dem Tempe-

raturgefälle an der Drosselstelle, also von Thermospannungen 1. Art, herrühren.

Mit dem Glasapparat waren wegen dem dabei ermöglichten besseren Auskochen größere Temperaturdifferenzen erhalten (um 2×175^0) als früher möglich war anzuwenden; es wurde aber wegen der größeren Schwierigkeit, eine gut geformte Drosselstelle herzustellen, zu einer modifizierten Apparatenart übergegangen.

Wichtig bleibt jedenfalls die Feststellung, daß auch in einem Glasapparat, mit nicht besonders günstig geformter Drosselstelle, eindeutige Ausschläge der Thermokräfte 1. Art zu erhalten sind.

IV. Versuche mit Quecksilber im Asbestgefäß.

1. Einleitendes.

Da kein Material von leichterer Formgebung als Glas zu Gebote stand, wo Gase gut zu entfernen sind, wurde zur Vermeidung des sonst bei höherer Erhitzung immer eintretenden Reißens des Quecksilberfadens folgende Veränderung vorgenommen: zu wählen ist ein Material, das bei leichter Formgebung und geringer Wärmeleitfähigkeit für Quecksilber dicht, *für Gase aber durchlässig* ist; dadurch wird den bei der Erhitzung abgeschiedenen Gasen die Gelegenheit geboten, durch die Gefäßwand abzugehen. Ein solches Material ist *Asbest*. Es wurde deshalb — und zwar mit entschiedenem Vorteil — die im folgenden benutzten Drosselgefäße aus Asbest hergestellt. Durchzuführen bleibt weiter eine vergrößerte Sicherheit der Zuleitungen, darauf hinzielend, Seebeckeffekt und eventuellen Druckeffekt auszuschließen.

2. Herstellung von Drosselgefäßen aus Asbest.

Aus (0,5 mm) dünnem Asbestpapier werden 50 mm lange Röhrchen vom Lumen 3 mm hergestellt (etwa 17×50 mm zu schneiden; jede Längskante 5 mm breit mit einer Feile zu verschwindender Dicke zu spitzen; mit Wasser anfeuchten; unter Zuhilfenahme einer geeigneten Rinne um einen Stahldorn von 3 mm festwickeln; über eine Flamme trocknen lassen).

Ein Asbeströhrchen wird, auf dem Dorn sitzend, am einen Ende mit der Feile ringsum zugespitzt, wird dann über den Stahldorn, der am Drehstuhl bis auf eine kurze, sehr feine

Spitze abgerundet worden ist, so gehalten, wie es Fig. 12a angibt. Das freie Ende wird dann angefeuchtet (am besten mit Saliv) und unter Umdrehen zwischen den Fingern oder mit einer halbkugeligen Vertiefung eines Holzstückes gegen den Dorn allmählich angedrückt (wie die gestrichelte Linie es angibt). Es entsteht dadurch ein einseitig, bis auf einem sehr feinen zentralen Loch geschlossenes Asbeströhrchen; es sind deren zwei herzustellen.

Das eine wird in einem gut anpassenden, runden Loch eines bügelgeformten Halters festgekittet (Fig. 12b, links); als Material für den Halter ist massiver Talk recht geeignet (wie dies zum Aufzeichnen auf Eisenblech käuflich ist!), ebenso Topfstein oder dergl.; Kitt aus Talkpulver und mit Wasser

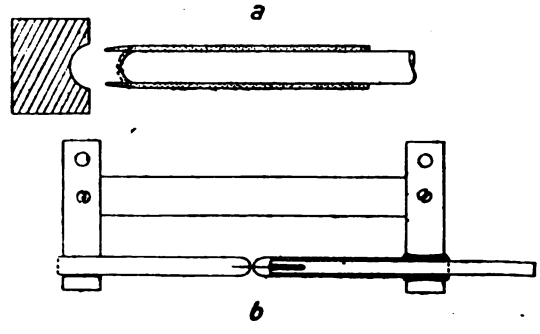


Fig. 12.

verdünntem Wasserglas. Das zweite Asbestrohr, dem eine sehr feine, an einem 3 mm dicken Stiel befestigte Nadel eingeschoben ist, wird dann rechts festgekittet, nachdem die Nadel auch im linken Rohr eingeführt worden ist (das rechte Loch des Halters ist gröber als der Rohrdurchmesser, und also Bewegungsfreiheit vorhanden). In der Mitte bleibt noch 0,1 bis 0,2 mm der Nadel frei sichtbar. Um diese künftige Drosselstelle wird nun mit einem sehr feinen Pinsel ganz wenig angefeuchtetes Asbestpulver aufgetragen; es wird mit einer Schlinge feinsten Seidendrahtes ringsum zusammengepreßt. Es kann die Nadel nach kurzwierigem Trocknen entfernt werden, und man ist im Besitz eines ganz brauchbaren Drosselgefäßes.

Vorläufig wurden nicht feinere Nadeln als 0,25 mm benutzt; die Methode gestattet aber eine weitgehende Verfeinerung.

3. Übrige Versuchsanordnung.

In die schwach konisch erweiterten Enden *A A'* passen 55 cm lange, 3,5 mm dicke Glasröhren, die schnell nach Fig. 13 zusammenlaufen; die aneinander liegenden Strecken *B C* tauchen behufs Temperaturausgleiches in eine mit Quecksilber gefüllte Holzrinne. Um jeden Druckeffekt wenn möglich auszuschließen, liegt dieser Teil des Kreises, wo die Temperaturänderungen stattfinden, bis auf einige Millimeter horizontal; das hölzerne Grundbrett, an dem Drosselgefäß und Glasröhre befestigt sind, ruht auf einem Nivellierstativ (vgl. Fig. 13). Erst bei *C C'* sind die Glasröhren vertikal umgebogen; sie enden in weiteren Behältern *D*. Die Niveaudifferenz zwischen

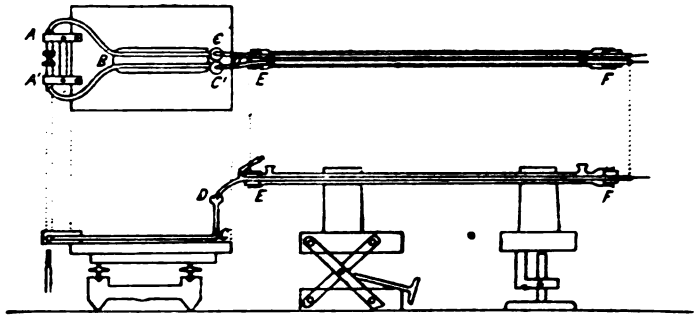


Fig. 13.

dem Quecksilber in *D* und der Grundebene durch *A A'* betrug 65 mm; diese Niveaudifferenz genügt, um das Quecksilber durch die Drosselstelle leicht hindurchzupressen.

Wie aus dieser Anordnung zu ersehen ist, muß eine Temperaturdifferenz, um eine von Druckunterschied herrührende Thermospannung 2. Art verursachen zu können, sich von den Hitzblechen bis *C C'* fortpflanzen (vgl. weiter unten, S. 210).

Um jedes Erhitzen der Elektroden soweit möglich zu vermeiden, geschah die Stromabnahme durch zwei 1 m lange, 3 mm dicke mit Quecksilber gefüllte Glasröhren; dieselben sind bei *E* etwas nach unten gebogen; bei *F* sind die Elektroden (in Berührung mit Hg 1 cm Fe-Draht, in Cu-Draht fortsetzend) mit Picein dicht eingeführt. Bei *E* enden die Röhren für das bequeme Füllen der freien Rohrenden T-förmig, mit abschließenden Gummischläuchen.

Beinahe die ganzen Strecken EF laufen in einem äußeren, quecksilbergefüllten Glasrohre.

Um gutes Wärmeübertragen zu ergeben, waren die beiden Hitzbleche mit Graphit (+Wasserglas) angekittet („Apparat 4").

Vor dem Füllen war das Drosselgefäß gut gehitzt und dabei trockene Luft durchgesaugt. Das Füllen des Apparates geschah in einfachster Weise; irgendwelches nachheriges Auskochen kam wegen der Luftdurchlässigkeit des Asbestrohres gänzlich in Wegfall

4. Beobachtungen.

a) Vorhandensein des Effektes.

Es ergab sich, daß mit diesem Apparat 4 tatsächlich die höchsten Temperaturen bis zum beginnenden Kochen des

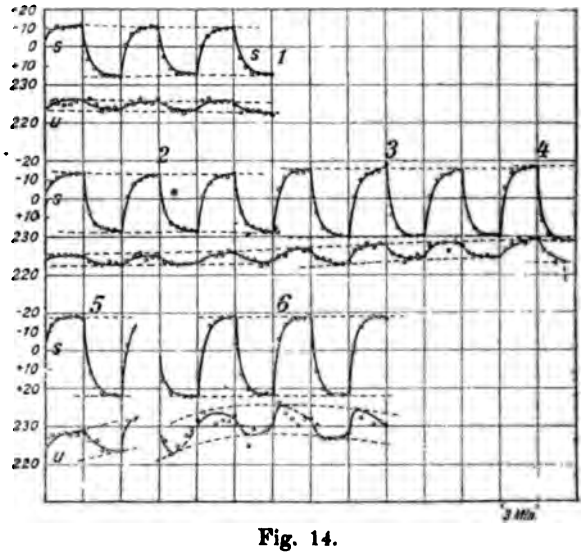


Fig. 14.

Quecksilbers erreicht werden konnten, ohne daß ein Reißen des Quecksilberfadens stattfand.

Die erhaltenen Beobachtungen sind in Fig. 14 graphisch wiedergegeben. Es sind ganz unzweideutige Ausschläge vorhanden; sie bestätigen durchaus das frühere Resultat.[1])

1) Daß das Galvanometer in dieser und in der folgenden Beobachtungsreihe (Figg. 14 u. 15) fast gar keinen allmählichen Gang aufweist, beruht darauf, daß die Anordnung in Fig. 13 vollständig sym-

Die sorgfältigst ausgeführte Zeichenkontrolle stimmte ebenfalls: auch in Apparat 4 verhält sich das Quecksilber thermoelektrisch negativ.

b) Temperaturabhängigkeit.

Die an Fig. 14 abgelesenen Temperaturdifferenzen $2\,\Delta t$ und Galvanometerausschläge u sind in Tab. 6 zusammengestellt.

Tabelle 6. Hg im Asbestgefäß.

Abhängigkeit der Thermospannung 1. Art von der Temperaturdifferenz. $\varrho = 1{,}36$ Ohm.

Brenner-einstellung	$2\,\Delta t$ °C	u mm
(6,4	195	0,5)
6,9	222	2,5
7,1	266	3,1
7,4	320	4,6
8,0	346	5,8
8,5	368	8,0
8,5	370	8,0

(Die erste Zeile gehört einer vorläufigen Reihe mit einer Hitzperiode von nur 2 Minuten).

Bei graphischer Darstellung (Fig. 6c, S. 197) zeigt sich, daß u viel rascher zunimmt als $2\,\Delta t$. In der Figur ist eingezeichnet die Kurve

$$u = 0{,}15 \cdot 10^{-6} \cdot T^3,$$

wo T für $2\,\Delta t$ geschrieben wird.

Wie im früheren Falle (S. 197) *schließen sich die Beobachtungen dieser Kurve gut an.*

c) Mögliche Fehlerquelle.

Bei dieser Beobachtungsreihe liegt es nahe, eine besondere Fehlerquelle zu befürchten: der Asbest ist ja kein besonders guter Isolator, und es erscheint nicht als ausgeschlossen, daß in diesem Falle die Beobachtungen von einer Überleitung zwischen dem Quecksilber und den kupfernen Hitzblechen bzw. dem vorhandenen Graphit abhängig sein könnten.

metrisch ist. In der früheren Anordnung Fig. 8 war eine gewisse Einseitigkeit des (nicht gezeichneten) Stativs noch vorhanden, und für den Gang des Galvanometers in Figg. 9—11 verantwortlich.

Bei vorgenommener Isolationsprüfung zeigte sich tatsächlich, daß eine Überleitung vorhanden war, die keineswegs ohne weiteres vernachlässigt werden konnte; es ergab sich, daß die Kombination Quecksilber-Asbest-Graphit eine effektive galvanische Spannung von einigen Centivolt ergibt, deren Temperaturveränderung für die beobachteten Ausschläge möglicherweise verantwortlich sein könnte.

Um diese Möglichkeit sicher beurteilen zu können, wurde ein neues Drosselgefäß aus Asbest hergestellt, wo zwischen den kupfernen Hitzblechen und Asbeströhren ein Glimmerblatt eingeschaltet wurde; Graphit wurde ganz vermieden („Apparat 5").

Bei vorgenommener Isolationsprüfung ergab sich, daß eine Spannung von 0,10 Volt, das durch Galvanometer, Hg. Asbest und Glimmer, Graphit und Kupferblech kurz geschlossen wurde, nunmehr nicht zum geringsten merkbaren Ausschlag Veranlassung gab, dies sowohl in der Kälte, als wenn stark gehitzt wurde.

5. Beobachtungen mit dem glimmerisolierten Apparat 5.

Die mit Apparat 5 gewonnene Beobachtungsreihe ist in Fig. 15 dargestellt.

Daß die Galvanometerausschläge merkbar geringer sind als mit Apparat 4, hängt teilweise von der weniger guten Wärmeübertragung, teilweise wohl auch von einer ein wenig gestreckteren Form der Drosselstelle ab.

Im ganzen bestätigt diese neue Beobachtungsreihe die frühere aufs beste — auch betreffend der Ausschlagsrichtung. Nur kommt es wahrscheinlich vor, daß das auffallend unregelmäßige Verhalten bei der stärksten Erhitzung in Fig. 14 wirklich auf die besprochene Überleitung zurückführbar ist, denn in Fig. 15 sind diese Unregelmäßigkeiten nicht mehr zu ersehen.

Ein Ausmessen ergab folgende Zahlen.

Tabelle 7. Hg im Asbestgefäß mit Glimmerisolation.

$\varrho = 1{,}37$ Ohm.

Brenner-einstellung	$2\,\Delta t$ °C	u mm
7,3	390	6,0
8,0	444	6,8
8,6	477	7,0
9,0	498	9,0

Bei diesen Beobachtungen, die eigentlich nur als Kontrolle des Einflusses der befürchteten Fehlerquelle gedacht waren, ist die Temperatur nur wenig variiert worden; die in Fig. 6b, S. 197 gegebene graphische Darstellung (Kreise) läßt indessen hervorgehen, daß sie mit einer T^3-Kurve, wie sie auch hier eingezeichnet wurde, ebenfalls genügend gut übereinstimmen.

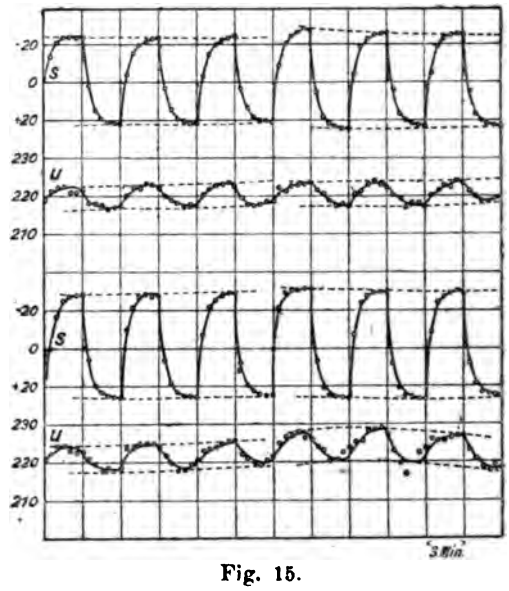


Fig. 15.

6. Weitere Kontrolle.

Die nun erhaltenen Bestimmungen dürften als recht sicher zu bezeichnen sein. Es schien aber der Mühe wert, noch einige Punkte zu kontrollieren.

a) Eventueller Unterschied des Hg.

So erschien es nicht ganz ausgeschlossen, daß zwischen demjenigen Quecksilber, das im Drosselgefäß mit dem Asbest in Berührung steht, und demjenigen der langen Zuleitungen irgendwelcher, Thermospannungen 2. Art ergebender Unterschied vorhanden wäre, trotz ursprünglicher Identität.

Es wurde deshalb das Quecksilber, das im Drosselgefäß gedient hatte, in ein unverjüngtes U-förmiges Glasrohr ge-

gossen, das mit den langen Zuleitungsröhren verbunden wurde. Gehitzt wurde umwechselnd bei den Berührungsstellen, und zwar mit direkter Flamme.

Es wurde durch zwei Beobachtungsreihen (jede von 6 × 3 Min.) festgestellt, daß bei einer Erhitzung, welche schon diejenige der wirklichen Versuche erheblich übertraf, nicht die geringste Einwirkung zu spüren war; bei einer noch stärkeren Erhitzung zeigte sich zwar eine schwache Einwirkung in derselben Richtung wie diejenige der Thermospannung 1. Art, sie betrug aber nicht mehr als etwa 1 mm.

Es kann demgemäß geschlossen werden, daß bei den zur Anwendung gekommenen Hitzungen das Quecksilber als durchaus homogen betrachtet werden darf.

b) Eventuelle Mitwirkung des Druckeffektes.

Wenigstens die beiden letzten Apparate waren so angeordnet, daß die Thermospannung 2. Art zwischen Hg unter Druck und Hg ohne Druck nicht sollte einwirken können (kein Druckunterschied in den gehitzten Teilen!).

Es erschien jedenfalls von einigem Interesse, dies einer direkten Prüfung zu unterziehen. Zu diesem Zwecke wurde umwechselnd gerade bei den Umbiegungen C bzw. C' (Fig. 13) mit der Mikroflamme direkt gehitzt.

Eine Beobachtungsreihe von 6 × 3 Minuten ließ hervorgehen, daß keine Einwirkung zu verspüren war.

Tatsächlich ergibt sich nach dem von Des Coudres u. a. bestimmten Wert der diesbezüglichen Druckkonstante[1]), daß bei der vorhandenen Druckdifferenz von 6,5 cm = 0,086 Atm. erst eine Temperaturdifferenz von 250° C zu einer Spannungsdifferenz wegen Druckunterschieden um

$$4{,}7 \cdot 10^{-9} \text{ Volt},$$

d. h. etwa 1 mm Galvanometerausschlag Veranlassung gibt.

Bei den eigentlichen Versuchen dürfte deshalb der Druckeffekt kaum brauchen berücksichtigt zu werden.

Zu bemerken ist aber noch, daß die *Richtung* der von Druckdifferenz herrührenden Thermospannung *entgegengesetzt* ist zu derjenigen Richtung, die sich für die Thermospannung

1) Vgl. z. B. K. Baedeker, Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern. Braunschweig 1911. S. 69.

1. Art des Hg ergeben hat: es dürfte demgemäß wohl eine allmählich eintretende ***Abnahme*** der erhaltenen Ausschläge auf den Druckeffekt zurückgeführt werden können, sicher aber nicht die Ausschläge selbst.

c) Vorfindlichkeit der Spannungsursache in der Drosselstelle.

Schließlich wurde folgende Konsequenz geprüft: da die erhaltene Thermospannung 1. Art praktisch genommen nur von dem Temperaturgefälle in der Drosselstelle abhängen soll, läßt sich schließen, daß wenigstens in erster Linie eine Überbrückung der Drosselstelle mit einer leitenden Substanz in derselben Weise wirken soll, wie eine Verminderung der benutzten Mikroflamme. Um dies zu prüfen, wurde rings um die Mitte des Drosselgefäßes, zwischen den Hitzblechen, ein schmaler **U**-gebogener Streifen von Asbestpapier angebracht; daran wurde ein Quecksilbertropfen aufgetan, der also eine Herabsetzung des sonst vorhandenen Temperaturgefälles verursachen mußte. Auf diese Weise wurde eine Beobachtungsreihe gewonnen („Reihe 20"). Es wurden dann Quecksilber und Asbeststreifen entfernt, und mit unveränderter Flamme eine weitere Beobachtungsreihe angestellt („Reihe 21"). An der graphischen Darstellung dieser Beobachtungen wurden, wie im vorigen, Temperaturdifferenzen $2\,\Delta\,t$ und Ausschläge u ermittelt. Gefunden wurde:

Tabelle 8. Hg im Asbestgefäß mit Glimmerisolation; Temperaturdifferenz durch Überbrückung variiert.

Reihe	Brenner-einstellung	$2\,\Delta\,t$ °C	u mm
„20"	7,9	355	2,8
„21"	7,9	435	5,0

Es übt also die Überbrückung der Drosselstelle einen erheblich herabsetzenden Einfluß auf die auftretende Thermospannung aus.

Die somit gewonnenen Beobachtungen sind in Fig. 6b, S. 197 eingetragen (numerierte Vollkreise). Wie ersichtlich, stimmen diese Beobachtungen mit den früheren recht gut überein.

Da der überbrückende Quecksilbertropfen doch auf die

Zuleitungen usw. recht wenig einwirken kann, ist mit diesem Resultat eine Konsequenz bestätigt worden der Grundauffassung, daß die Thermospannung in der Drosselstelle zustande kommt.

d) Wasserkühlung.

Um unter so einfachen und reinen Verhältnissen wie nur möglich zu arbeiten, ist im vorigen ausschließlich die natürliche Luftkühlung des nicht gehitzten Bleches verwendet worden.

Verifiziert wurde aber noch in besonderen Versuchen, daß die Galvanometerausschläge merkbar zunehmen, und schneller erfolgen, wenn das Temperaturgefälle durch Wasserkühlung des augenblicklich nicht gehitzten Bleches vergrößert wird. Dabei wurde einfach das nicht gehitzte Blech mit nasser Baumwolle in Berührung gebracht.

Zu Demonstrationszwecken ist diese Wasserkühlung zu empfehlen.

Zu Demonstrationszwecken würden sich übrigens voraussichtlich kleine, durch andauerndes Auskochen mit Hg gefällte, einseitig abgerundete Zylinder aus Bimsstein eignen können, welche Hg-gefüllte Glasröhren abschließen; es würde sich möglicherweise damit recht scharfe Drosselwirkung erzielen lassen.

Hinzugefügt sei noch, daß außer den angeführten Beobachtungsreihen zur größeren Sicherheit noch mehrere andere ausgeführt wurden; sie ergaben durchwegs Bestätigung der angeführten Resultate.

V. Überblick der gewonnenen Resultate.

Sämtlichen vorangehenden Untersuchungen ist gemeinsam, daß zur Lösung des vorliegenden experimentellen Problems, außer einem hochempfindlichen Galvanometer, ein durch ein geeignetes *Drosselgefäß* (aus Griffel, Durobaxglas, Asbest) gewonnenes, größtmögliches Temperaturgefälle, unter stationären Verhältnissen, ausgenutzt wird. Die Arbeit wird aber nach zwei verschiedenen Linien geführt. Nach der ersteren wird versucht, die Hauptschwierigkeit, die Kleinheit der Ausschläge auch bei verhältnismäßig großen Temperaturdifferenzen, dadurch zu umgehen, daß ein flüssiges Metall benutzt wird, wo die Thermokraft 1. Art erheblich höher zu erwarten ist als bei Hg. Es wurde tatsächlich (I) bei dem bei Zimmertempe-

ratur flüssigen Wismut-Bleiamalgam, das früher von Braun mit negativem Resultat untersucht wurde, kräftige Ausschläge erhalten (140 mm = 0,7 Mikrovolt). Gleichzeitig wurde aber festgestellt, daß das Amalgam keineswegs als sicher homogen zu betrachten ist; die erhaltenen Ausschläge sind demnach für Thermospannungen 1. Art nicht beweisend.

Das Weiterfolgen dieser Linie würde, um immer noch erhebliche Ausschläge zu gewinnen, dazu geführt haben, Metalle wie Kalium oder Wismut bei Temperaturen oberhalb der Schmelzpunkte zu benutzen. Abgesehen von der größeren Komplikation von Versuchen bei höherer Temperatur, was sie leicht weniger beweiskräftig macht, würde das Problem doch nie als erledigt betrachtet werden, bevor es gerade mit Quecksilber durchgeführt worden wäre.

Es wurde deshalb zu Quecksilber übergegangen. Benutzt wurde ein Apparat mit Drosselgefäß aus Griffelmasse genau derselben Konstruktion wie diejenige, die sich anscheinend bei dem Amalgam bewährt hatte (II).

Schon die ersten Versuche ergaben auch mit Quecksilber positives Resultat. Es wurden z. B. regelmäßige Ausschläge von etwa 7,4 mm = $3{,}5 \cdot 10^{-8}$ Volt erhalten schon bei einer Temperaturdifferenz der Hitzbleche von nur $\Delta t = {}^1/_2 \cdot 195^\circ = 97{,}5^\circ$. Eine über 1 Minute fortgesetzte Erhitzung ergab allerdings eine auffallende Abnahme der unmittelbar nach Verschieben der Hitzquelle (in 1 Min.) stattfindenden Ausschläge (Fig. 3), dieselbe verschwand aber so gut wie vollständig, wenn längere Zuleitungen vorgesehen wurden (Fig. 5: 8 mm bei $\Delta t = 110^\circ$).

Nur verhältnismäßig geringe Temperaturdifferenzen konnten bisher benutzt werden, weil das Drosselgefäß aus Griffelmasse nicht gasfrei zu erhalten war, und der Hg-Faden deshalb bei höherem Erhitzen nicht mehr zusammenhängend blieb.

Es wurde deshalb ein Glasapparat hergestellt. *Auch dieser ergab deutliche, regelmäßige Ausschläge*, wenn auch, wie erwartet, recht klein: 1,5 mm bei $\Delta t = 185^\circ$ (Fig. 9). Dabei hatte allerdings die Erhitzung der Zuleitungen — wie zuerst bei dem vorigen Apparat — einen erheblichen, negativen Einfluß; es wurde $a = 2{,}2$ mm bei $\Delta t = 182^\circ$ erhalten, wenn dieser Einfluß durch zwei hinzukommende Kühlbleche elimi-

niert wurde (Fig. 10). Dies glückliche Resultat dürfte großenteils der effektiven Form der Hitzbleche zuzuschreiben sein.

Wegen der Schwierigkeit, auch bei stärkerer Erhitzung den Zusammenhang des Metallfadens in einem gasdichten Drosselgefäß zu bewahren, wurde dann als Gefäßsubstanz Asbest benutzt, das für Hg dicht, für Gase aber durchlässig ist, und zwar mit gutem Resultate (Fig. 14).

Als Fehlerquelle konnte dabei mangelnde Isolation des Asbests gefürchtet werden. Auch wenn dieselbe durch Glimmerzwischenlage ausgeschaltet wurde, erhielt man ein wesentlich unverändertes Resultat (Fig. 15).

Bei jedem der benutzten Apparate wurde die wichtige *Zeichenkontrolle* der Ausschläge sorgfältig durchgeführt. Es ergab sich dabei in sämtlichen Fällen, daß die bei Quecksilber erhaltenen, auf Thermospannungen 1. Art zurückgeführten Ausschläge entgegengesetzt sind zu denjenigen, die bei dem positiven Kupfer entstehen. Quecksilber verhält sich also *thermoelektrisch negativ*, wie es nach einer früheren, ausführlichen Darlegung des Verfassers und nach dem Zeichen des Thomsoneffektes sein soll.

Kontrolliert wurde weiter, daß eine eventuelle Veränderung des Hg durch Berührung mit der Gefäßsubstanz zu dem erhaltenen Resultat nicht mitwirken konnte, ebensowenig wie eine vorhandene, geringfügige Druckvariation — deren Einfluß sogar in entgegengesetzter Richtung erfolgt.

Verifiziert wurden noch gewisse Konsequenzen des Umstandes, daß die wirksame Thermospannung gerade in der Drosselstelle vorhanden ist.

Da demgemäß meines Erachtens das gewonnene Resultat durch keine bis jetzt bekannte Fehlerquelle vorgetäuscht sein kann und sich insbesondere als unabhängig von der Gefäßsubstanz erwiesen hat, dürfte behauptet werden, daß nunmehr *das Vorhandensein von Thermospannungen 1. Art in einem flüssigen Metall galvanometrisch sicher nachgewiesen worden ist.*

Die bei den schließlichen Versuchen noch vorhandene, obgleich stark heruntergedrückte Abnahme der von Thermospannungen 1. Art verursachten Ausschläge, kann auf mehrere verschiedene Ursachen zurückgeführt werden, wie: 1. noch nicht vollständig ausgeschlossener Seebeckeffekt bei den Elektroden oder 2. Druckeffekt, welche beide sicher in einer zu

den Thermospannungen 1. Art entgegengesetzten Richtung verlaufen. Weiter könnte 3. eine schwache chemische Einwirkung und vielleicht — obgleich kaum wahrscheinlich — 4. eine im Drosselgefäß bei höherer Erhitzung entstehende Wirbelbewegung mitwirken; theoretisch müssen noch 5. vorhandene Durchschnittsveränderungen des Quecksilberfadens außerhalb der Drosselstelle mitwirken — jedoch nur mit einem praktisch wohl ganz zu vernachlässigenden Betrag.

Außerdem wurden einige quantitative Messungen vorgenommen der Beziehung zwischen Thermospannung 1. Art des Quecksilbers und dem Temperaturgefälle, wie dies durch die Temperaturdifferenz der Hitzbleche hervortritt.

Es wurde bei sämtlichen Versuchen (auch bei denen mit Amalgam) eine bedeutend schnellere Zunahme beobachtet als es einer Linearität entsprechen würde. Und zwar ergab sich bei den drei diesbezüglichen Beobachtungsreihen, daß die Thermospannung 1. Art u mit der Temperaturdifferenz T durch folgendes Gesetz verbunden ist:

$$u = k \cdot T^3.$$

Wenn u in Mikrovolt (10^{-6} Volt) und T in ^{0}C gerechnet wird, bekommt die Konstante k folgende numerischen Werte:

$k = 1{,}9 \cdot 10^{-9}$ für Apparat 2 aus Griffelmasse (Fig. 6a),
$k = 0{,}7 \cdot 10^{-9}$ „ „ 4 aus Asbest (Fig. 6c),
$k = 0{,}35 \cdot 10^{-9}$ „ „ 5 aus Asbest (Fig. 6b).

Je schärfer die Verjüngung bei der Drosselstelle, je niedriger die Wärmeleitfähigkeit, und je besser die Wärmeübertragung zwischen Hitzblech und Quecksilber, um so höher ist k.[1])

Die gefundene Abhängigkeit von der dritten Potenz des Temperaturgefälles dürfte besser als andere Umstände erklären, daß der Effekt verschwindend ist, sobald nicht ganz besonders schroffe Temperaturgefälle vorhanden sind.

Es bereitet demgemäß kaum eine Schwierigkeit, den negativen Erfolg der älteren Forscher einzusehen. Außer einem

1) Die Ursache, daß k bei Apparat 2 beträchtlich größer ist als bei Apparat 4 und 5, dürfte darin liegen, daß bei jenem die Zwischenwand erheblich dünner war als bei diesem. Die theoretisch günstigste Form hängt von der Wärmeleitfähigkeit der Substanzen ab. Diesbezügliche Versuche sind im Gange im hiesigen Laboratorium.

hochempfindlichen Galvanometer — wie ein solcher z. B. Magnus nicht zu Gebote stand, waren in vorliegender Arbeit besondere praktische Kunstgriffe nötig.

Betreffend die mit modernen Hilfsmitteln ausgeführte Untersuchung von H. Haga und F. Zernike (1919), dessen Resultat als negativ angegeben wurde, ist folgendes zu bemerken. Diese Forscher beobachteten tatsächlich einen Mehrausschlag von 1,5 mm $= 3{,}5 \cdot 10^{-8}$ Volt, bei einer Temperaturdifferenz von etwa $\Delta t = 300^0$ C, wenn die Berührung der Strahlen nur minimal war; der übrige Ausschlag (etwa 3 mm $= 7{,}10^{-8}$ Volt) stammte vom Druckeffekt her. Diese Autoren selbst heben hervor, daß der fragliche Mehrausschlag auf innere molekulare Veränderungen des Hg (Allotropie) zurückgeführt werden könnte; wegen der hohen Stromgeschwindigkeit würden solche Veränderungen eventuell keine Zeit finden, sich auszugleichen. Verfasser kann dieser Auffassung nicht beistimmen. Gerade Hg ist eins der wenigen Metalle, wo nichts auf allotrope Umwandlungen hindeutet; ihrer Annahme ist also gänzlich unbewiesen. Andererseits ist zu beachten, daß die benutzten Strahlen so dünn waren (0,10—0,13 mm), daß die Drosselwirkung nur als eine ganz schwache zu erwarten ist, außer möglicherweise bei ganz minimaler Berührung. Nun ist 1. die *Größenordnung* des von H. Haga und F. Zernike beobachteten, auf Thermospannung 1. Art des Hg zurückführbaren Ausschlags genau dieselbe wie diejenige der von mir festgestellten Spannungen; die an die Spitze gestellten Beobachtungen von mir ergaben z. B. Spannungen $1{,}9 \cdot 10^{-8}$ bis $3{,}8 \cdot 10^{-8}$ Volt, bei geringerer Temperaturdifferenz, aber wohl günstigerem Drosselverhältnis.

Weiter hat die von diesen Forschern beobachtete Spannung gerade die von mir gefundene 2. *korrekte Richtung*. Bei meinen Versuchen war die Anordnung nach dem Vorigen eine derartige (die Temperaturdifferenzen wurden im stärker gedruckten Hg hervorgerufen), daß von Druckeffekt herrührende Ausschläge in entgegengesetzter Richtung zu den Thermospannungen 1. Art verlaufen. Bei Haga und Lernikes Versuchen entstand dagegen die Temperaturdifferenz *umgekehrt in dem unter niedrigerem Druck stehenden Hg*; der Druckeffekt muß demnach in derselben Richtung wirken als die Thermospannung 1. Art. Da nun eben nach dem Befund dieser

Forscher beide Ausschläge in derselben Richtung verlaufen, ist auch die Richtung des Mehrausschlages diejenige, die bei ihrer Anordnung der Thermospannung 1. Art zukommen muß.

Aus diesen Gründen glaube ich annehmen zu dürfen, daß schon in dem fraglichen Versuche die langgesuchte Thermospannung 1. Art richtig hervortritt.

Im Lichte des nunmehr Bekannten erscheint es ebenfalls nicht ausgeschlossen, daß nicht die vom Verfasser früher in einem neu hergestellten Drosselapparat aus Glaskapillaren beobachtete Spannung von 2 mm $= 10 \cdot 10^{-8}$ Volt (1mm dabei $= 5 \cdot 10^{-8}$ Volt) der Wirklichkeit entsprechen könnte; die Erhitzung war dabei eine recht hohe.

Es ist demnach wohl in unzweideutiger Weise das Resultat gewonnen:

> Auch im flüssigen Metall existieren, entgegen Magnus' Satz, Thermospannungen 1. Art, welche bei geeigneten, aber recht verschiedenartigen Versuchsanordnungen an einem empfindlichen Galvanometer meßbar sind; ihre Größe scheint mit der 3. Potenz des Temperaturgefälles anzusteigen.[1])

Zusammenfassung.

1. Es ist festgestellt worden, daß in flüssigem Quecksilber bei starker Asymmetrie des Temperaturgefälles Thermospannungen 1. Art vorhanden und am Galvanometer meßbar sind — entgegen der bisherigen Meinung („Magnus' Satz").

Es werden dazu nötige Apparate („Drosselgefäße") eingehend beschrieben.

2. Die Thermospannungen 1. Art des Quecksilbers sind vom Temperaturgefälle außerordentlich stark abhängig. Bei drei verschiedenen Drosselapparaten wurde zwischen Thermospannung 1. Art u und Temperaturdifferenz der Hitzbleche T folgende Beziehung gewonnen: $u = k\,T^3$, wo k eine Apparatenkonstante darstellt.

Stockholm, Physik. Institut d. Universität, Aug. 1919.

1) Es ist mir ein Vergnügen bemerken zu können, daß H. Borelius a. a. O. (S. 401) richtig eingesehen hat, daß „ein eventueller Asymetrieeffekt", d. h. die Thermospannung 1. Art eines geschlossenen homogenen Leiters, in erster Annäherung mit der dritten Potenz des Temperaturgefälles ansteigen muß.

(Eingegangen 23. September 1919.)

2. *Zur Gittertheorie der Zinkblende;* *von Max Born und Elisabeth Bormann.*

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung[1]) soll einen Beitrag zu der Frage liefern, ob sich die Kohäsionskräfte der Kristalle heteropolarer Verbindungen als elektrische Anziehungen deuten lassen. Untersucht und bis zu einem gewissen Grade positiv beantwortet ist diese Frage in der Hauptsache nur bei den Alkali-Halogensalzen vom Typus des Steinsalzes NaCl, die das einfachste Ionengitter haben; und zwar sind nicht nur die wichtigsten physikalischen Eigenschaften dieser Kristalle theoretisch berechnet und an der Erfahrung geprüft worden[2]), sondern auch die chemischen Wärmetönungen bei Reaktionen zwischen solchen Salzen.[3]) Die Auswahl von Substanzen, die sich für solche Untersuchungen eignen, ist leider gering[4]); denn bei der Kompliziertheit der Rechnungen kommen nur einfache Strukturen in Betracht, deren die röntgenometrische Forschung bisher nur wenige sichergestellt hat. Unter diesen ist die Zinkblende ZnS aus mehreren Gründen ausgezeichnet (Fig. 1):

1. Die Substanz ist ebenso, wie die früher untersuchten binären Halogensalze vom Typus. NaCl, zweiatomig und

1) Eine vorläufige Mitteilung ist unter demselben Titel in den Verh. d. D. Phys. Ges. **21.** S. 733 1919 erschienen.

2) M. Born u. A. Landé, Verh. d. D. Phys. Ges. **20.** S. 210. 1918; M. Born, ebenda, **21.** S. 533. 1919; Ann. d. Phys. **61.** S. 87. 1920.

3) M. Born, Verh. d. D. Phys. Ges. **21.** S. 13, 679. 1919; K. Fajans, ebenda **21.** S. 539, 714. 1919.

4) In den hier zitierten Arbeiten werden auch Calciumsalze in den Kreis der Betrachtung gezogen; diese Rechnungen stützen sich auf das Selbstpotential des Flußspatgitters, das A. Landé nach der Methode von Madelung berechnet hat (Verh. d. D. Phys. Ges. **20.** S. 217. 1918). Leider ist die von Landé angegebene Zahl wegen eines Rechenfehlers falsch; daher sind alle darauf gebauten Schlüsse unbegründet. Eine neue Berechnung des Flußspatgitters wird demnächst mitgeteilt werden.

regulär kristallinisch, aber ihr Gitter ist von dem des NaCl verschieden[1]); daher lauten die Formeln für die physikalischen Konstanten ganz anders als dort.

2. Nach dem elektrolytischen Verhalten sind die Ionen Zn und S zweiwertig; diese Tatsache muß auf Grund der elektrischen Kohäsionstheorie auch aus den Werten der Kristallkonstanten erschlossen werden können.

3. Der Kristall besitzt eine polare Achse und ist piezoelektrisch; er ist daher besonders geeignet, um darüber Auskunft zu geben, ob bei einer Deformation die Atome wesentlich wie punktförmige Kraftzentra fungieren, oder ob sie selbst Drehungen und Deformationen erfahren.

4. Sämtliche, aus dem elementaren Potentialansatze berechenbaren Konstanten, nämlich die der Elastizität, der Piezoelektrizität und die langwellige, ultrarote Eigenfrequenz (Reststrahl) sind durch gute Messungen bekannt.

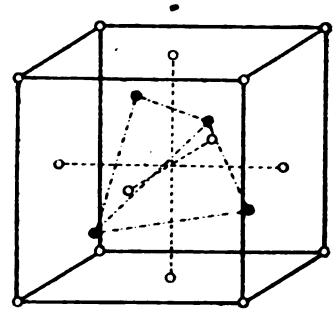


Fig. 1.

5. Wenn die elektrostatische Deutung des Abstoßungsexponenten n richtig ist[2]), so muß man bei Zinkblende nicht $n = 9$, wie bei den Salzen vom Typus NaCl, sondern einen kleineren Wert erwarten; denn während beim NaCl-Gitter die Symmetrie auf kubische Atome deutet, wird beim ZnS-Gitter jedes Atom von seinen Nachbarn in der Weise umgeben, wie das Zentrum eines regulären Tetraeders von den Ecken. Die Atome besitzen daher gewiß niedrigere Symmetrie, folglich wird auch der Abstoßungsexponent kleiner sein. Die Feststellung seines Wertes führt also zu einer Einsicht in die Symmetrieverhältnisse der Atome.

---

1) Das Gitter entsteht aus dem bekannten des Diamanten dadurch, daß man die C-Atome abwechselnd durch Zn- und S-Atome ersetzt. Vgl. etwa A. Johnsen, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 14. S. 52. 1917.

2) Vgl. M. Born, Verh. d. D. Phys. Ges. 20. S. 230. 1918.

Aus diesen Gründen schien uns die Theorie der Zinkblende von Interesse und die darauf zu wendende Rechenarbeit gerechtfertigt. Auch darf man hoffen, in ähnlicher Weise wie bei den Alkali-Halogensalzen thermochemische Daten aus der Gittertheorie zu gewinnen.

Allerdings hätte es keinen Sinn, die mühsamen Berechnungen der Gitterpotentiale zu beginnen, bevor nicht die der Theorie zugrunde liegende Annahme punktförmiger Kraftzentra auf Grund allgemeiner Sätze der Gittertheorie an dem Beobachtungsmaterial geprüft worden ist. Wir schicken die Diskussion dieser Frage im § 1 der eigentlichen elektrostatischen Gittertheorie voraus.

§ 1. Allgemeine Prüfung der Annahme punktförmiger Kraftzentra.

Nach der Gittertheorie[1]) hat für einen zweiatomigen, regulären Kristall, dessen Atome als punktförmige Kraftzentra fungieren, die Dichte der potentiellen Energie den Ausdruck:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi = {} & \tfrac{1}{2} A\,(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + \tfrac{1}{2} B\{2\,(y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) \\ & + y_z^2 + z_x^2 + x_y^2\} + C\{(u_1 - u_2)\, y_z + (v_1 - v_2)\, z_x \\ & + (w_1 - w_2)\, x_y\} + \tfrac{1}{2} D\{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 \\ & + (w_1 - w_2)^2\}. \end{aligned}\right.$$

Dabei bedeuten x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y die Verzerrungskomponenten, u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 die Verrückungskomponenten der beiden einfachen, von je einer Atomart gebildeten Gitter und A, B, C, D Konstante, die von den Atomkräften abhängen. Die Berechnung dieser Konstanten auf Grund der über die Atomkräfte gemachten Hypothesen wird später unsere Aufgabe sein; hier wollen wir zunächst nur angeben, wie sie mit den beobachtbaren Größen zusammenhängen.

Wir bezeichnen mit e die Ladung des Elektrons und mit z die Anzahl der Ladungen e eines Ions. Nach dem elektro-

1) Vgl. M. Born, Dynamik der Kristallgitter, Leipzig, B. G. Teubner, 1915. Wir zitieren dieses Buch im folgenden D.K. — M. Born, Phys. Ztschr. 19. S. 539. 1918. Die in dieser Abhandlung gebrauchte Bezeichnung behalten wir bei, obwohl die Konstanten A, B, C, D ihrer Entstehung nach in der umgekehrten Reihenfolge zu schreiben wären.

lytischen Verhalten der Zinkblende ist $z = 2$ anzunehmen. Die Massen der Ionen seien m_1, m_2. Ein elementares Parallelepiped, das ein Ion von jeder Art, also eine chemische Molekel, enthält, habe das Volumen Δ. Ein regulärer Kristall hat drei Elastizitätskonstanten, c_{11}, c_{12}, c_{44}, eine piezoelektrische Konstante e_{14} und eine ultrarote, langwellige Eigenfrequenz (Reststrahl) ω; ferner sei ε die Dielektrizitätskonstante und ε_0 ihr Wert, soweit er von den Elektronenschwingungen, aber nicht den (ultraroten) Ionenschwingungen beeinflußt wird.

Dann drücken sich diese Größen folgendermaßen durch die vier Konstanten A, B, C, D aus[1]):

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} c_{11} &= A, \quad c_{12} = B, \quad c_{44} = B - \frac{C^2}{D}, \\ e_{14} &= -\frac{z\,e\,C}{\Delta\,D}, \\ \varepsilon - \varepsilon_0 &= \frac{4\pi z^2 e^2}{\Delta^2\left(D - \frac{C^2}{B}\right)}, \\ \omega^2 &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\Delta\,D. \end{aligned}\right.$$

Zwischen den sechs Größen c_{11}, c_{12}, c_{44}, e_{14}, $\varepsilon - \varepsilon_0$, ω^2 bestehen also zwei von A, B, C, D unabhängige Relationen, allein als Folge des Ansatzes (1) für einen regulären, zweiatomigen Kristall mit punktförmigen Atomen. Die eine von diesen Relationen ist auch von der Ionenladung $z\,e$ und dem Volumen Δ unabhängig und lautet:

$$3)\qquad \frac{4\pi e_{14}^2}{\varepsilon - \varepsilon_0} = (c_{12} - c_{44})\frac{c_{44}}{c_{12}},$$

die andere läßt sich in folgenden Formen schreiben:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{4\pi z^2 e^2}{\Delta}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\cdot\frac{c_{12}}{c_{44}}\cdot\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0}, \\ \omega^2 &= \frac{z^2 e^2}{\Delta}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\cdot\frac{c_{12} - c_{44}}{e_{14}^2}. \end{aligned}\right.$$

1) Die in der zitierten Arbeit (Phys. Ztschr. 19. S. 539. 1918) angegebenen Formeln (18), (20), (21), (22) unterscheiden sich von diesen dadurch, daß dort die Ionenladung mit e, hier mit $z\,e$ bezeichnet ist. Ferner sind dort im Ausdruck für $\varepsilon - \varepsilon_0$ rationelle, hier elektrostatische Einheiten benutzt; leider ist die zweite Formel (25) der zitierten Arbeit um den Faktor $\sqrt{4\pi}$ falsch, der richtige Ausdruck ist der hier angegebene (5)

Führt man hier die Atomgewichte $\mu_1 = N m_1$, $\mu_2 = N m_2$, die Dichte $\varrho = \frac{m_1 + m_2}{\Delta}$, die Faradaysche Konstante $F = Ne$ und die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ ein, so erhält man folgende Darstellungen der Elektrovalenz z durch meßbare Größen:

$$(5)\quad \begin{cases} z = \frac{c\sqrt{\pi}}{\lambda F}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\varrho}\cdot\frac{c_{44}}{c_{12}}(\varepsilon - \varepsilon_0)} \\ z = \frac{2\pi c\,|e_{14}|}{\lambda F}\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\varrho}\cdot\frac{1}{c_{12}-c_{44}}}\,. \end{cases}$$

Wir werden hier nur die zweite Formel benützen; denn die darin vorkommenden Größen sind sämtlich durch genaue Messungen gut bekannt, während der Wert von $\varepsilon - \varepsilon_0$ unsicher ist.[1])

Wir setzen die numerischen Werte ein. Es ist in C.G.S.-Einheiten:

$$c = 3 \cdot 10^{10}, \quad F = 2{,}90 \cdot 10^{14}.$$

Die Atomgewichte sind:

$$\text{für Zn}\quad \mu_1 = 65{,}4, \quad \text{für S}\quad \mu_2 = 32{,}1\,.$$

Nach Landolt-Börnstein ist die Dichte:

$$\varrho = 4{,}00\,.$$

Die Elastizitätskonstanten sind von W. Voigt[2]) nach einer neuen, sinnreichen Methode gemessen worden. Seine Ergebnisse, in C.G.S.-Einheiten umgerechnet, lauten:

$$c_{11} = 9{,}43 \cdot 10^{11}, \quad c_{12} = 5{,}68 \cdot 10^{11}, \quad c_{44} = 4{,}84 \cdot 10^{11}.$$

Die piezoelektrische Konstante e_{14} läßt sich aus dem direkt beobachtbaren piezoelektrischen Modul d_{14} und der Elastizitätskonstante c_{44} berechnen nach der Formel:

$$e_{14} = c_{44}\, d_{14}\,.$$

1) Die erste Formel, in der $\varepsilon - \varepsilon_0$ vorkommt, ist zuerst von Dehlinger (Phys. Ztschr. 15. S. 276. 1914), später unter allgemeineren Voraussetzungen von M. Born (Phys. Ztschr. 19. S. 539. 1919) abgeleitet und geprüft worden. Sie trifft für einfache Salze wie NaCl, KCl, KBr, KJ einigermaßen zu, versagt aber bei Tl- und Ag-Salzen. Gründe hierfür sind von M. Born (in der soeben zitierten Arbeit und in den Ann. d. Phys. 61. S. 87. 1920) erörtert worden.

2) W. Voigt, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. in Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918.

d_{14} ist einmal von van der Veen[1]) gemessen worden; außerdem wurde uns durch Vermittlung von Hrn. P. P. Ewald eine noch unveröffentlichte Messung des Hrn. du Prel[2]) zugänglich gemacht. van der Veen hat d_{14} für Zinkblende relativ zu der piezoelektrischen Konstante d_{11} von Quarz gemessen, die er selbst in absolutem Maße zu $6{,}30 \cdot 10^{-8}$ bestimmt hat; dagegen hat Röntgen[3]) diese Konstante des Quarz zu $6{,}94 \cdot 10^{-8}$ angegeben. Da der Röntgensche Wert mit großer Wahrscheinlichkeit besser ist, haben wir die van der Veensche Messung damit umgerechnet und

$$d_{14} = -5{,}24 \cdot 10^{-8}$$

gefunden; dann wird

$$e_{14} = -2{,}28 \cdot 10^{4}.$$

Der du Prelsche Wert stimmt damit genau überein.

Die Wellenlänge der Reststrahlen von Zinkblende hat Hr. Rubens gemessen und uns brieflich mitgeteilt[4]); sie beträgt:

$$\lambda = 30{,}9\,\mu = 3{,}09 \cdot 10^{-3}\,\text{cm}.$$

Setzt man diese Werte in die zweite Formel (5) ein, so findet man:

$$z = 0{,}300$$

statt des zu erwartenden Wertes $z = 2$.

Dieser Widerspruch scheint jeden Versuch einer eingehenden Theorie von vornherein überflüssig zu machen. Doch haben wir uns von folgenden Erwägungen dazu bestimmen lassen, die recht mühsamen Rechnungen trotzdem durchzuführen.

Erstens nämlich ergibt sich die Elektrovalenz z zwar etwa siebenmal zu klein, aber sie fällt doch in die richtige

1) A. L. W. E. van der Veen, Physisch- en kristallografisch Onderzoek naar de Symmetrie van Diamant. Diss. Leiden 1911.

2) Die Arbeit ist in dem unter Röntgens Leitung stehenden Physikalischen Institute der Universität München ausgeführt worden. Wir schulden den genannten Herren für die Mitteilung großen Dank.

3) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 41. S. 449. 1913.

4) Wir sind Hrn. Rubens für die Überlassung dieses noch nicht publizierten Wertes zu großem Danke verpflichtet.

Größenordnung, und das lehrt, daß der Grundgedanke der Theorie nicht gänzlich falsch sein wird.

Sodann ist der Wert von z wesentlich bestimmt durch die Größe $c_{12} - c_{44}$, die als Differenz ähnlicher Größen nicht sehr sicher ist; vielleicht wird die Diskrepanz hierdurch zufällig vergrößert.

Endlich und vor allem aber gehen in die Bestimmung von z nur die drei Größen λ. e_{14}, $c_{12} - c_{44}$ ein, nicht aber c_{11} und c_{12}; es ist nun von vornherein klar, daß gerade diese drei Größen λ, e_{14}, $c_{12} - c_{44}$ von Drehungen und Deformationen der Atome viel stärker beeinflußt werden als c_{11} und c_{12}. Daher kann man erwarten, daß die Durchführung der Theorie zwar c_{11} und c_{12} einigermaßen richtig zu berechnen erlaubt, dagegen λ, e_{14}. $c_{12} - c_{44}$ nicht, und man kann hoffen, Hinweise zu finden, wo die Ursache des Fehlschlagens steckt.

§ 2. Formeln für die Kristallkonstanten.

Die vier Konstanten A, B, C, D, welche die beobachtbaren Eigenschaften des Kristalls nach (2) bestimmen, lassen sich bei bekannter Gitterstruktur aus den zwischen den Atomen wirkenden Kräften berechnen. Wir setzen voraus, daß diese reine Zentralkräfte seien und nennen $\varphi_{kk'}(r)$ die potentielle Energie der Kräfte, die zwei im Abstande r voneinander befindliche Partikel der Arten k und k' ($k, k' = 1, 2$) aufeinander ausüben. Man bilde nun:

$$(6)\quad \begin{cases} P_{kk'}^{(l)} = \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi_{kk'}^{(l)}}{dr}\right]_{r_{kk'}^{(l)}}, \\ Q_{kk'}^{(l)} = \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi_{kk'}^{(l)}}{dr}\right)\right]_{r_{kk'}^{(l)}}, \end{cases}$$

wobei der Index $r_{kk'}^{(l)}$ bedeutet, daß nach Ausführung der in der Klammer vorgeschriebenen Operationen für r der Gleichgewichtsabstand $r_{kk'}^{(l)}$ der Partikel $(k\, l_1\, l_2\, l_3)$ und $(k'\, 0\, 0\, 0)$ einzusetzen ist.[1]) Sind $x_{kk'}^{(l)}$, $y_{kk'}^{(l)}$, $z_{kk'}^{(l)}$ die Projektionen dieses

1) In der Bezeichnung weichen wir hier ein wenig von der in D.K. gebrauchten ab, indem wir die drei Indizes l_1, l_2, l_3, die die Punkte eines einfachen Gitters unterscheiden, durch den einen, oben angesetzten Index l andeuten. Die Formeln (6) entsprechen D.K. (14), S. 21. Die Größe A heißt in D.K. a_{11} (wegen der regulären

Abstandes auf die Koordinatenachsen, dann wird für den regulären, zweiatomigen Kristall:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\Delta}\sum_l\left(Q_{11}^{(l)}\,x_{11}^{(l)4} + Q_{22}^{(l)}\,x_{22}^{(l)4} + 2Q_{12}^{(l)}\,x_{12}^{(l)4}\right),\\ B &= \frac{1}{2\Delta}\sum_l\left(Q_{11}^{(l)}\,x_{11}^{(l)2}\,y_{11}^{(l)2} + Q_{21}^{(l)}\,x_{22}^{(l)2}\,y_{22}^{(l)2} + 2Q_{12}^{(l)}\,x_{12}^{(l)2}\,y_{12}^{(l)2}\right),\\ C &= \frac{1}{\Delta}\sum_l Q_{12}^{(l)}\,x_{12}^{(l)}\,y_{12}^{(l)}\,z_{12}^{(l)},\\ D &= \frac{1}{\Delta}\sum_l\left(P_{12}^{(l)} + Q_{12}^{(l)}\,x_{12}^{(l)2}\right). \end{aligned}\right.$$

Anstatt die Konstante B direkt zu berechnen, ist es bequemer, sie aus A und der Kompressibilität $\varkappa$ abzuleiten, wobei $\varkappa$ sich aus der Gitterenergie bestimmt. Die Energie des Gitters pro Zelle Δ ist:

$$(8)\qquad \Phi(\Delta) = \frac{1}{2}\sum_l\left(\varphi_{11}^{(l)} + \varphi_{22}^{(l)} + 2\varphi_{12}^{(l)}\right),$$

eine Funktion von Δ allein; dann ist:

$$(9)\qquad \frac{1}{\varkappa} = \Delta\frac{d^2\Phi}{d\Delta^2} = \frac{A+2B}{3}.$$

Bei der Zinkblende bilden nun sowohl die Zn-, als auch die S-Ionen je ein flächenzentriertes kubisches Gitter mit der Würfelkante δ; diese beiden Gitter sind um $^1/_4$ der Würfeldiagonale gegeneinander verschoben. Der Würfel enthält vier Ionen von jeder Art, also vier chemische Molekeln ZnS; daher ist:

$$(10)\qquad \delta^3 = 4\Delta.$$

Wir setzen nun, wie bei den Alkalihalogeniden[1]), voraus, daß die Kräfte zwischen den Ionen aus 1. den Coulombschen Anziehungen ihrer Ladungen, 2. gewissen, einer höheren Potenz der Entfernung umgekehrt proportionalen Wirkungen bestehen, und machen demgemäß den Ansatz:

$$(11)\qquad \varphi_{kk'} = \pm(2e)^2 r^{-1} + b_{kk'} r^{-n}\quad (k, k' = 1, 2);$$

Symmetrie ist $a_{11} = b_{22} = c_{33}$), definiert durch (42), S. 28; B ist identisch mit a_{22} $(= a_{33} = b_{11} = b_{33} = c_{11} = c_{22} = e_{23} = f_{31} = g_{12})$; C ist $e_1^{(k)}$ $(= f_2^{(k)} = g_3^{(k)})$ D.K. (36), endlich ist D $a_0^{(12)}$ $(= b_0^{(12)} = c_0^{(12)})$, D.K. (33).

1) M. Born, Verh. d. D. Phys. Ges. 21. S. 533. 1919.

dabei ist die Elektrovalenz $z = 2$ angenommen und es gilt das positive oder negative Vorzeichen im ersten Gliede, je nachdem $k = k'$ oder $k \neq k'$ ist. Wir müssen ferner voraussetzen, daß:

$$b_{12} = b_{21} > 0$$

ist, während die Vorzeichen von b_{11} und b_{22} offen bleiben.

Man kann nun die relativen Koordinaten eines Gitterpunktes $(k\, l_1\, l_2\, l_3)$ gegen eine Partikel der Basiszelle $(k'\, 0\, 0\, 0)$ so darstellen:

$$(12)\quad \begin{cases} x_{11}^{(l)} = x_{22}^{(l)} = \frac{\delta}{2} l_1 \\ y_{11}^{(l)} = y_{22}^{(l)} = \frac{\delta}{2} l_2 \\ z_{11}^{(l)} = z_{22}^{(l)} = \frac{\delta}{2} l_3 \end{cases} \Big\} \; l_1 + l_2 + l_3 \equiv 0 \text{ mod. } 2, \\ \begin{cases} x_{12}^{(l)} = \frac{\delta}{4} l_1 \\ y_{12}^{(l)} = \frac{\delta}{4} l_2 \\ z_{12}^{(l)} = \frac{\delta}{4} l_3 \end{cases} \Big\} \; \begin{matrix} l_1,\ l_2,\ l_3 \equiv 1 \text{ mod. } 2, \\ l_1 + l_2 + l_3 \equiv 3 \text{ mod. } 4. \end{matrix}$$

Daher ergibt sich nach (8):

$$(13)\quad \begin{cases} \Phi = -\frac{a}{4}\delta^{-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} (b_{11} S_2(n) + b_{22} S_2(n) + 2 b_{12} S_1(n)) \\ \quad = -\frac{\alpha e^2}{4}\delta^{-1} + b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} (S_1(n) + \beta S_2(n)), \end{cases}$$

wenn:

$$(14)\qquad b_{12} = b, \quad \frac{b_{11} + b_{22}}{2 b_{12}} = \beta$$

gesetzt ist. Dabei ist, in Übereinstimmung mit früherem Gebrauche, mit $a = \alpha e^2$ die negative elektrostatische potentielle Energie des Gitters mit der Würfelkante $\delta = 1$ pro Würfel bezeichnet, und es ist gesetzt:

$$(15)\quad \begin{cases} S_1(n) = 2^n \sum_{\substack{l_1,\ l_2,\ l_3 \equiv 1 \text{ mod. } 2 \\ l_1 + l_2 + l_3 \equiv 3 \text{ mod. } 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}}, \\ S_2(n) = \sum_{l_1 + l_2 + l_3 \equiv 0 \text{ mod. } 2} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}}. \end{cases}$$

Wir eliminieren nun in bekannter Weise die Größe b mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{d\Phi}{d\delta} = 0,$$

woraus folgt:

$$b = \frac{\alpha e^2}{8n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{S_1(n)+\beta S_2(n)}. \tag{16}$$

Dann ergibt sich aus (9), (13) der bekannte Ausdruck:

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{\alpha(n-1)e^2}{9\delta^4}. \tag{17}$$

Jetzt berechnen wir die Konstanten A, C, D nach (7); dabei trennen wir immer den elektrostatischen Anteil ab und schreiben ihn so, daß der numerische Faktor sich auf ein Gitter mit der Ladung 2 und der Würfelkante 1 bezieht. Dann wird:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{e^2}{\delta^4}\alpha_1 + \frac{1}{2A}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} n(n+2)\{(b_{11}+b_{22})C_2(n+4) \\ &\qquad + 2b_{12}C_1(n+4)\} \\ &= \frac{e^2}{\delta^4}\alpha_1 + \frac{4}{\delta^5}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} n(n+2)b\{C_1(n+4)+\beta C_2(n+4)\}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

wo:

$$\left.\begin{aligned} C_1(n) &= 2^{n-4}\sum_{\substack{l_1,\ l_2,\ l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1+l_2+l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2+l_2^2+l_3^2)^{-\frac{n}{2}} l_1^4, \\ C_2(n) &= \sum_{l_1+l_2+l_3 \equiv 0 \bmod 2} (l_1^2+l_2^2+l_3^2)^{-\frac{n}{2}} l_1^4 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

gesetzt ist. Führt man hier den Wert (16) von b ein, so erhält man:

$$A = \frac{e^2}{\delta^4} f_1(n,\beta), \tag{20}$$

$$f_1(n,\beta) = \alpha(n+2)\frac{C_1(n+4)+\beta C_2(n+4)}{S_1(n)+\beta S_2(n)} + \alpha_1. \tag{21}$$

In derselben Weise folgt aus (7):

$$A \cdot C = -\frac{e^2}{\delta^3}\alpha_2 + n(n+2)b\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-1} S_2(n+4), \tag{22}$$

wo

$$S_2(n) = 2^{n-3}\sum_{\substack{l_1,\ l_2,\ l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1+l_2+l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2+l_2^2+l_3^2)\, l_1 l_2 l_3 \tag{23}$$

gesetzt ist. Nach (16) erhält man:

$$\Delta \cdot C = \frac{e^2}{\delta^3} f_2(n, \beta), \tag{24}$$

$$f_2(n, \beta) = \alpha \frac{n+2}{2} \cdot \frac{S_2(n+4)}{S_1(n) + \beta S_2(n)} - \alpha_2 . \tag{25}$$

Bei der Berechnung von D ist zu beachten, daß dabei die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Kräfte berücksichtigt werden muß; man findet für den elektrischen Anteil von $D\Delta$ (vgl. Anhang 2, Formel (k)):

$$-\frac{4\pi}{3}\frac{(2e)^2}{\Delta} = -\frac{64}{3}\pi \cdot \frac{e^2}{\delta^3} .$$

Daher wird nach (7):

$$\Delta \cdot D = -\frac{64}{3}\pi \cdot \frac{e^2}{\delta^3} - n b \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-2} \sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1 + l_2 + l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+2}{2}}$$

$$+ n(n+2) b \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-4} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \sum_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1 + l_2 + l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n+4}{2}} l_1^2 .$$

Nun ist hier offenbar die zweite Summe gleich dem dritten Teil der ersten und diese nach (15) gleich $S_1(n+2)$; daher wird:

$$\Delta \cdot D = -\frac{64}{3}\pi \cdot \frac{e^2}{\delta^3} + \frac{n(n-1)}{3}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n-2} b S_1(n+2),$$

und nach (16):

$$\Delta \cdot D = \frac{e^2}{\delta^3} f(n, \beta), \tag{26}$$

$$f(n, \beta) = \frac{1}{3}\left(\alpha \frac{(n-1) S_1(n+2)}{S_1(n) + \beta S_2(n)} - 64\pi\right) . \tag{27}$$

Wir bilden nun nach (2) folgende Kombinationen der gemessenen Konstanten:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\varkappa} &= \frac{c_{11} + 2c_{12}}{3} = \frac{e^2}{\delta^4} \cdot \frac{\alpha(n-1)}{9}, \\
c_{11} &= \frac{e^2}{\delta^4} \cdot f_1(n, \beta), \\
c_{12} - c_{44} &= \frac{e^2}{\delta^4} \cdot \frac{4 f_2^2(n, \beta)}{f(n, \beta)}, \\
c_{14} &= -\frac{e}{\delta^2} \frac{8 f_2(n, \beta)}{f(n, \beta)}, \\
\lambda &= \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{4\pi c}{F} \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2}{\varrho f(n, \beta)}} .
\end{aligned}\right. \tag{28}$$

Damit sind diese auf die zwei Parameter n und β zurückgeführt.

§ 3. Numerische Diskussion der Formeln.

Die Gitterkonstante δ kommt nur in der Verbindung:

$$\frac{e}{\delta^2} = e\left(\frac{4(\mu_1+\mu_2)}{N\varrho}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{\sqrt{e}F\varrho}{4(\mu_1+\mu_2)}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{29}$$

vor, die mit den in § 1 benutzten Werten und $e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$ den Zahlenwert:

$$\frac{e}{\delta^2} = 1{,}615 \cdot 10^5 \tag{29'}$$

hat.

Wir bestimmen nun zunächst den Exponenten n aus der Kompressibilität:

$$n = 1 + \frac{9\delta^4}{\alpha \varkappa e^2}. \tag{30}$$

Die elektrostatische Konstante α hat den Wert (vgl. Anhang 2a, Formel (g)):

$$\alpha = 61{,}2. \tag{31}$$

Ferner wird mit den in § 1 angegebenen Zahlen für c_{11} und c_{12}:

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{c_{11}+2c_{12}}{3} = 6{,}93 \cdot 10^{11}.$$

Damit ergibt sich:

$$n = 1 + \frac{9 \cdot 6{,}93 \cdot 10^{11}}{61{,}2 \cdot 2{,}61 \cdot 10^{10}} = 4{,}92, \tag{30'}$$

sehr nahe dem ganzzahligen Werte $n = 5$.

Demnach besteht ein wesentlicher Unterschied in dem Abstoßungsgesetz der Atome bei den Alkalihalogeniden und bei Zinkblende; bei ersteren ist $n = 9$, bei der letzteren $n = 5$. Dieses Ergebnis bietet der Deutung einige Schwierigkeit. Faßt man nämlich die abstoßende Kraft als elektrostatische Wirkung der den Kern umgebenden Elektronen auf, so läßt sich der Exponent $n = 9$ deuten, indem man die beiden wirkenden Atome (Ionen) als nahezu gleich große Elektronenwürfel annimmt. Das entspricht der kubischen Natur des

Gitters der Alkalihalogenide. Bei sehr verschieden großen Elektronenwürfeln würde allerdings in der potentiellen Energie der Abstoßung neben dem Term mit $n = 9$ ein Term mit $n = 5$ auftreten. Bei Zinkblende weist die Struktur des Gitters auf tetraedrische Atome hin, weil jedes Atom von seinen vier Nachbarn der anderen Art umgeben wird wie das Zentrum eines regulären Tetraeders von den vier Ecken. Aber zwei nahezu gleiche Elektronentetraeder geben als Hauptglied der Abstoßung $n = 7$, und, wenn sie verschieden groß sind, daneben einen Term mit $n = 4$. Der Exponent $n = 5$ tritt im Hauptgliede der Abstoßung bei rotationssymmetrischen Elektronenanordnungen (Elektronenringen nach Bohr) auf; aber solche Ringsysteme erscheinen aus manchen Gründen unwahrscheinlich. Die Frage nach der Deutung des Abstoßungsexponenten muß vorläufig wohl noch offen bleiben.

Im folgenden wollen wir mit dem Werte

$$n = 5$$

rechnen. Wir haben ihn in die drei Funktionen f, f_1, f_2 einzusetzen; die dazu nötigen Rechnungen finden sich im Anhang 1; sie ergeben (Formeln (a) bis (f)):

$$(32)\quad \begin{cases} S_1(5) = 9{,}97\,, & S_2(5) = 2{,}994\,, & C_1(9) = 1{,}283\,, \\ S_1(7) = 11{,}39\,, & S_3(9) = 1{,}787\,, & C_2(9) = 0{,}546\,. \end{cases}$$

Im Anhang 2 finden sich auch die elektrostatischen Konstanten a_1, a_2 berechnet und zwar mit dem Ergebnis (Formeln (h), (i)):

$$(33)\qquad a_1 = 3{,}885\,, \quad a_2 = 70{,}0\,.$$

Setzt man das in (21), (25), (27) ein, so kommt:

$$(34)\quad \begin{cases} f_1(\beta) = \dfrac{-22{,}9}{1 + 0{,}8003\,\beta} + 81{,}9\,, \\ f_2(\beta) = \dfrac{38{,}3}{1 + 0{,}8003\,\beta} - 70{,}0\,, \\ f(\beta) = \dfrac{93{,}1}{1 + 0{,}8003\,\beta} - 67{,}0\,. \end{cases}$$

Wir schreiben nun die noch nicht benutzten der Formeln (28) mit numerischen Faktoren an, wobei wir die Wellenlänge in $\mu = 10^{-4}$ cm ausdrücken:

$$(35)\quad \begin{cases} c_{11} = 2{,}61 \cdot 10^{10} f_1(\beta), \\ c_{12} - c_{44} = 10{,}44 \cdot 10^{10} \dfrac{f_2^2(\beta)}{f(\beta)}, \\ e_{14} = -\,12{,}92 \cdot 10^5 \dfrac{f_2(\beta)}{f(\beta)}, \\ \lambda = \dfrac{298}{\sqrt{f(\beta)}}. \end{cases}$$

Während der Wert von β bei den Alkalihalogeniden ziemlich gleichgültig ist, spielt er hier eine wesentliche Rolle, was mit dem kleineren Werte des Exponenten n zusammenhängt.

Zur ersten Übersicht geben wir eine Tabelle der Funktionen f_1, f_2, f von β, nebst den zugehörigen Werten von c_{11} und λ nach (35). Die gemessenen Werte sind (vgl. § 1):

$$c_{11} \cdot 10^{-11} = 9{,}43\,, \quad \lambda = 30{,}9;$$

sie deuten darauf hin, daß β in der Gegend von $-1{,}5$ liegen wird. Dieses höchst merkwürdige Resultat eines negativen β

Tabelle 1.

β	f_1	f_2	f	$c_{11} \cdot 10^{-11}$	λ
$-2{,}0$	24,60	25,98	166,0	6,42	23,1
$-1{,}5$	40,25	$-0{,}24$	102,3	10,50	29,5
$-1{,}0$	49,18	$-15{,}21$	65,99	12,84	36,7
$-0{,}5$	54,97	$-24{,}89$	42,50	14,85	45,7
0,0	59,00	$-31{,}66$	26,05	15,40	58,4
0,5	61,99	$-36{,}66$	13,92	16,18	79,8
1,0	64,28	$-40{,}51$	4,57	16,78	139,0
1,5	66,11	$-43{,}58$	$-2{,}88$	17,25	—
2,0	67,59	$-46{,}05$	$-8{,}82$	17,63	—

wird nun aber weiter gestützt durch den Umstand, daß dicht bei dem Werte $\beta = -1{,}5$ die Funktion f_2 durch Null geht und für größere β-Werte negativ wird; negative Werte von f_2 sind aber unmöglich, weil sonst e_{14} positiv würde im Widerspruch zu den Beobachtungen. Wir verfeinern nun unsere Tabelle im Intervalle von $\beta = -2{,}0$ bis $\beta = -1{,}45$ und ergänzen sie durch Hinzufügen der nach (35) berechneten Werte von $c_{12} - c_{44}$ und e_{14}.

Als letzte Spalte ist das Produkt $\varkappa c_{11}$ eingetragen, das nach (28) und (31) den Ausdruck:

$$\varkappa c_{11} = \frac{9 f_1(n, \beta)}{\alpha (n-1)} = 0{,}0369 \cdot f_1(\beta)$$

hat und von der Ionenladung und der Gitterkonstanten vollkommen unabhängig ist; aus den Messungen erhält man dafür den Betrag:

$$\varkappa c_{11} = 1{,}360 .$$

Dieser führt auf einen Wert von β zwischen $-1{,}60$ und $-1{,}65$. Dafür stimmt dann c_{11} gut, während λ ein wenig zu klein ist. Vergleicht man nun auch $c_{12} - c_{44}$ und e_{14} für dieses β mit den beobachteten Werten

$$(c_{12} - c_{44}) \cdot 10^{-11} = 1{,}34 , \quad - e_{14} \cdot 10^{-4} = 2{,}28 ,$$

so sieht man, daß $c_{12} - c_{44}$ zu klein, e_{14} zu groß wird. Eine etwas andere Wahl von β hat auf c_{11} und λ nur geringen Einfluß, dagegen einen sehr großen auf $c_{12} - c_{44}$ und e_{14}; man

Tabelle 2.

β	f_1	f_2	f	$\frac{c_{11}}{10^{-11}}$	λ	$\frac{(c_{12} - c_{44})}{10^{-11}}$	$- e_{14} \cdot 10^{-4}$	$\varkappa c_{11}$
$-2{,}00$	24,60	25,98	166,0	6,42	23,1	4,25	20,2	0,906
$-1{,}95$	26,67	22,50	157,6	6,96	23,8	3,35	18,4	0,982
$-1{,}90$	28,60	19,27	149,7	7,42	24,4	2,59	16,6	1,053
$-1{,}85$	30,40	16,26	142,4	7,93	25,0	1,94	14,8	1,120
$-1{,}80$	32,09	13,43	135,5	8,38	25,6	1,39	12,8	1,182
$-1{,}75$	33,66	10,79	129,1	8,79	26,2	0,942	10,8	1,240
$-1{,}70$	35,14	8,31	123,1	9,17	26,9	0,586	8,72	1,294
$-1{,}65$	36,53	5,99	117,5	9,53	27,5	0,319	6,59	1,345
$-1{,}60$	37,84	3,79	112,1	9,88	28,1	0,131	4,27	1,394
$-1{,}55$	39,08	1,72	107,1	10,20	28,8	0,028	2,03	1,440
$-1{,}50$	40,25	$-0{,}24$	102,3	10,51	29,5	—	—	1,483
$-1{,}45$	41,36	$-2{,}10$	97,8	10,79	30,1	—	—	1,523

kann z. B. e_{14} zur Übereinstimmung bringen, indem man β etwa gleich $-1{,}55$ wählt, dann bleibt der Fehler von c_{11} noch gering, λ wird sogar verbessert, aber $c_{12} - c_{44}$ wird vielmals zu klein.

Jetzt wird das Ergebnis des § 1, das Versagen der Formel (5), verständlich. Die Werte von $c_{12} - c_{44}$ und von e_{14} sind eben äußerst empfindlich gegen kleine Änderungen des Mechanismus. Drehungen und Deformationen der Atome, die hier vernachlässigt sind, werden in Wirklichkeit wesentlichen Einfluß auf $c_{12} - c_{44}$ und besonders auf e_{14} haben. Wenn sich z. B. der

Kern eines Atoms gegen die Elektronenhülle verschiebt, wird ein intraatomarer Beitrag zum piezoelektrischen Momente entstehen, der voraussichtlich den Betrag von e_{14} zu verkleinern strebt.

Die elastischen Eigenschaften werden jedenfalls durch die Theorie gerade so gut wiedergegeben wie bei den Salzen des Typus NaCl. Dabei ist die Annahme doppelt geladener Ionen ($z = 2$) wesentlich; würde man $z = 1$ wählen, müßte nach (30) $n - 1$ viermal so groß, also n etwa gleich 17 genommen werden, was ganz unwahrscheinlich ist. Dann würden aber auch alle anderen Übereinstimmungen verschwinden.

Endlich müssen einige Worte über das auffällige Resultat gesagt werden, daß β negativ herauskommt. Es bedeutet nach (14), daß die Ionen gleicher Art sich *anziehen* mit einem Potentiale $b r^{-5}$, während die Ionen ungleicher Art sich nach demselben Entfernungsgesetze abstoßen. Man könnte hieran allerlei Spekulationen knüpfen, etwa daß in dieser Anziehung die rätselhafte Kohäsionskraft gefunden sei, die homöopolare Verbindungen, einatomige Kristalle zusammenhält. Doch möchten wir eine solche Vermutung nur mit dem größten Vorbehalte aussprechen. Andererseits möchten wir darauf hinweisen, daß diese Erscheinung des negativen β vom Standpunkte der elektrostatischen Atommodelle keineswegs so unerklärlich ist, wie es den Anschein hat. Denn die Wirkung zweier Elektronensysteme aufeinander ist nicht bloß eine Funktion der Entfernung, sondern auch von der wechselseitigen Orientierung der Systeme abhängig, und zwar ist sie für gewisse Stellungen Anziehung, für andere Abstoßung. Es wäre nun möglich, daß infolge der Verteilung und Stellung der Ionen im Gitter bei den Ionen der gleichen Art die Anziehung, bei denen verschiedener Art die Abstoßung überwiegt. Doch ist ein ausführliches Eingehen auf diese Umstände vorläufig noch nicht geboten; denn diese elektrostatischen Wirkungen fallen gar nicht unter unser Schema von Zentralkräften und liefern überdies niemals stabile Gleichgewichte. Ohne quantentheoretische Ergänzungen haben also solche Betrachtungen keine Aussicht auf Erfolg.

Wir glauben durch unsere Ausführungen gezeigt zu haben, daß die Annahme der elektrostatischen Kohäsion zusammen mit einer Zentralkraft vom Exponenten $n = 5$ zwar nicht

alle Eigenschaften der Zinkblende erklärt, aber als eine richtig gewählte erste Näherung der exakten Theorie gelten darf:

Anhang.

1. Berechnung der Summen S und C.

Es handelt sich um Summen der Form:

$$S = \sum_{(K)} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} \, l_1^{\alpha} \, l_2^{\beta} \, l_3^{\gamma} \, ,$$

wo α, β, γ positive ganze Zahlen oder Null sind und die Summation über alle ganzen Zahlen l_1, l_2, l_3, die gewissen Kongruenzen (K) genügen, zu erstrecken ist.

Wir ordnen die Summe nach wachsenden Werten der Entfernung:

$$r_i = (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{1/2} \, ;$$

das geschieht in jedem Falle durch Anlegung einer Tabelle der zulässigen Werte von l_1, l_2, l_3. Dann nimmt die Summe S die Form an:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \, r_i^{-n} \, ,$$

wo die C_i ganzzahlige Koeffizienten sind, die man mit Hilfe der Tabelle leicht berechnen kann. Für die numerische Ausrechnung muß man die Reihe bei einem bestimmten Gliede abbrechen; wir setzen:

$$S = S^{(p)} + R^{(p)},$$

wo

$$S^{(p)} = \sum_{i=1}^{p} C_i \, r_i^{-n} .$$

Den Rest $R^{(p)}$ berechnen wir näherungsweise, indem wir die Summe S durch das entsprechende Integral ersetzen:

$$R^{(p)} = \eta \iiint_{r>r_p} r^{-n} \, x^{\alpha} \, y^{\beta} \, z^{\gamma} \, dx \, dy \, dz \, ;$$

dabei ist η ein echter Bruch, der angibt, welcher Bruchteil aller Gitterpunkte l_1, l_2, l_3 auf Grund der Kongruenzen (K) zugelassen ist. Um die Genauigkeit dieser Restberechnung abzuschätzen, vergleichen wir die Differenz:

$$R^{(p-1)} - R^{(p)}$$

mit dem letzten Reihengliede

$$C_p r_p^{-n};$$

unterscheiden sich diese Größen nun wesentlich weniger als die angestrebte Genauigkeit der Rechnung (1%), so begnügen wir uns mit dem erreichten Werte.

Auf diese Weise finden wir:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} 2^{-n} S_1(n) = \sum\limits_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1+l_2+l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} \\ \quad = \frac{4}{\sqrt{3^n}} + \frac{12}{\sqrt{11^n}} + \frac{12}{\sqrt{19^n}} + \frac{16}{\sqrt{27^n}} + \frac{24}{\sqrt{35^n}} + \frac{12}{\sqrt{43^n}} + \frac{24}{\sqrt{51^n}} \\ \quad + \frac{36}{\sqrt{59^n}} + \frac{12}{\sqrt{67^n}} + \frac{28}{\sqrt{75^n}} + \frac{36}{\sqrt{83^n}} + \frac{24}{\sqrt{91^n}} + \frac{36}{\sqrt{99^n}} + \frac{36}{\sqrt{107^n}} + \cdots, \\ 2^{-n} R^{(p)} = \frac{4\pi}{16} \int_{r_p}^{\infty} r^{-n} \cdot r^2 dr = \frac{\pi}{4(n-3) r_p^{n-3}}. \end{cases}$$

Für $n = 5$ brechen wir die Reihe bei dem Gliede mit:

$$r_p = \sqrt{99}$$

ab; die Summe der ersten Glieder ist:

$$2^{-5} S^{(p)} = 0{,}307461,$$

ferner:

$$2^{-5} R^{(p)} = \frac{\pi}{4 \cdot 2 \cdot 99} = 0{,}003967,$$

$$2^{-5} R^{(p-1)} = \frac{\pi}{4 \cdot 2 \cdot 91} = 0{,}004315,$$

also:

$$2^{-5} (R^{(p-1)} - R^{(p)}) = 0{,}000348,$$

während das letzte Glied mit $r_p = \sqrt{99}$ den Wert 0,000369 hat; der Unterschied ist also weniger als 1‰ des Betrages von $2^{-n} S^{(p)}$. Daher haben wir:

$$2^{-5} S_1(5) = 2^{-5} (S^{(p)} + R^{(p)}) = 0{,}307461 + 0{,}003967 = 0{,}311428,$$

$$\text{(a)} \qquad S_1(5) = 9{,}965.$$

Für $n = 7$ wird mit $r_p = \sqrt{99}$:

$$2^{-7} S^{(p)} = 0{,}089002\,,$$

$$2^{-7} R^{(p)} = \frac{\pi}{4 \cdot 4 \cdot 99^2} = 0{,}000020$$

$$2^{-7} R^{(p-1)} = \frac{\pi}{4 \cdot 4 \cdot 91^2} = 0{,}000024\,.$$

Die Differenz ist 0,000004, das letzte Glied ebenso groß Also wird:

$$2^{-7} S_1(7) = 0{,}089002 + 0{,}000020 = 0{,}089022\,.$$

(b) $$S_1(7) = 11{,}392\,.$$

(II)
$$\begin{cases} S_2(n) = \sum\limits_{l_1 + l_2 + l_3 = 0 \bmod 2.} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} \\ \quad = \frac{12}{\sqrt{2^n}} + \frac{6}{\sqrt{4^n}} + \frac{24}{\sqrt{6^n}} + \frac{12}{\sqrt{8^n}} + \frac{24}{\sqrt{10^n}} + \frac{8}{\sqrt{12^n}} + \frac{48}{\sqrt{14^n}} \\ \quad + \frac{6}{\sqrt{16^n}} + \frac{36}{\sqrt{18^n}} + \frac{24}{\sqrt{20^n}} + \frac{24}{\sqrt{22^n}} + \frac{24}{\sqrt{24^n}} + \frac{72}{\sqrt{26^n}} + \frac{48}{\sqrt{30^n}} \\ \quad + \frac{12}{\sqrt{32^n}} + \frac{48}{\sqrt{34^n}} + \frac{30}{\sqrt{36^n}} + \frac{72}{\sqrt{38^n}} + \frac{24}{\sqrt{40^n}} + \cdots \\ R^{(p)} = \frac{4\pi}{2} \int\limits_{r_p}^{\infty} r^{-n} r^2 dr = \frac{2\pi}{(n-3) r_p^{n-3}}\,. \end{cases}$$

Für $n = 5$ wird mit $r_p = \sqrt{40}$:

$$S^{(p)} = 2{,}9152\,,$$

$$R^{(p)} = \frac{2\pi}{2 \cdot 40} = 0{,}07856\,,$$

$$R^{(p-1)} = \frac{2\pi}{2 \cdot 38} = 0{,}08264\,.$$

Die Differenz ist 0,00408, das letzte Glied 0,00240; der Unterschied dieser Zahlen ist hinreichend klein gegen $S^{(p)}$. Daher wird:

$$S_2(5) = 2{,}9152 + 0{,}0786$$

(c) $$S_2(5) = 2{,}994$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} 2^{-n+3} S_3(n) = \sum\limits_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1+l_2+l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} l_1 l_2 l_3 \\ \quad = \frac{4}{\sqrt{3^n}} - \frac{36}{\sqrt{11^n}} + \frac{108}{\sqrt{19^n}} - \frac{48}{\sqrt{27^n}} - \frac{360}{\sqrt{35^n}} + \frac{540}{\sqrt{43^n}} \\ \quad + \frac{316}{\sqrt{51^n}} - \frac{396}{\sqrt{59^n}} + \cdots \end{cases}$$

Der Rest $R^{(p)}$ wird hier, als Integral berechnet, gleich Null. Die absolute Größe des letzten Gliedes liefert daher einen Anhalt für die erreichte Genauigkeit. Mit $r_p = \sqrt{59}$ wird:

$$2^{-6} S_3(9) = 0{,}027926$$

und das letzte Glied $-0{,}000004$; die Genauigkeit genügt also. Daher wird:

$$\text{(d)} \qquad S_3(9) = 1{,}787 .$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} 2^{-n+4} C_1(n) = \sum\limits_{\substack{l_1, l_2, l_3 \equiv 1 \bmod 2 \\ l_1+l_2+l_3 \equiv 3 \bmod 4}} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} l_1^4 \\ \quad = \frac{4}{\sqrt{3^n}} + \frac{332}{\sqrt{11^n}} + \frac{652}{\sqrt{19^n}} + \frac{2832}{\sqrt{27^n}} + \frac{5648}{\sqrt{35^n}} \\ \quad + \frac{3148}{\sqrt{43^n}} + \frac{14616}{\sqrt{51^n}} + \frac{25188}{\sqrt{59^n}} + \frac{10252}{\sqrt{67^n}} + \frac{26716}{\sqrt{75^n}} \\ \quad + \frac{51108}{\sqrt{83^n}} + \frac{58144}{\sqrt{91^n}} + \frac{41496}{\sqrt{99^n}} + \frac{77028}{\sqrt{107^n}} + \cdots, \\ R^{(p)} = \frac{2\pi}{16} \int_{r_p}^{\infty} \int_0^{\pi} r^{-n} \cdot r^4 \cos^4\vartheta \, r^3 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta = \frac{\pi}{20(n-7) r_p^{n-7}} . \end{cases}$$

Für $n = 9$ und $r_p = \sqrt{91}$ wird:

$$2^{-5} C^{(p)}(9) = 0{,}03923 ,$$

$$R^{(p)} = \frac{\pi}{40 \cdot 91} = 0{,}000863 ,$$

$$R^{(p-1)} = \frac{\pi}{40 \cdot 83} = 0{,}000946 .$$

Die Differenz der Reste 0,000083 unterscheidet sich vom letzten Gliede 0,000081 genügend wenig. Also wird:

$$2^{-5}\, C_1(9) = 0{,}03923 + 0{,}00086 = 0{,}04009$$

(e) $$C_1(9) = 1{,}283\,.$$

(V)
$$\begin{cases} C_2(n) = \sum\limits_{l_1+l_2+l_3 \equiv 0 \bmod 2.} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}}\, l_1^4 \\ \quad = \frac{8}{\sqrt{2^n}} + \frac{32}{\sqrt{4^n}} + \frac{144}{\sqrt{6^n}} + \frac{128}{\sqrt{8^n}} + \frac{656}{\sqrt{10^n}} \\ \quad + \frac{128}{\sqrt{12^n}} + \frac{1568}{\sqrt{14^n}} + \frac{512}{\sqrt{16^n}} + \frac{2712}{\sqrt{18^n}} \\ \quad + \frac{2176}{\sqrt{20^n}} + \frac{1424}{\sqrt{22^n}} + \frac{2304}{\sqrt{24^n}} + \frac{10422}{\sqrt{26^n}} \\ \quad + \frac{10272}{\sqrt{30^n}} + \frac{2048}{\sqrt{32^n}} + \frac{8992}{\sqrt{34^n}} + \frac{6816}{\sqrt{36^n}} + \cdots, \\ R^{(p)} = \frac{2\pi}{2} \int_{r_p}^{\infty} \int_0^{\pi} r^{-n} r^4 \cos^4\vartheta\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta = \frac{2\pi}{5\,(n-7)\, r_p^{n-7}}\,. \end{cases}$$

Für $n = 9$ und $r_p = \sqrt{36} = 6$ wird:

$$C^{(p)}(9) = 0{,}52872\,;$$
$$R^{(p)} = 0{,}01744\,,$$
$$R^{(p-1)} = 0{,}01848\,.$$

Die Differenz der Reste ist 0,00104, das letzte Glied 0,00068, der Unterschied beider genügend klein. Also wird:

$$C_2(9) = 0{,}5287 + 0{,}0174$$

(f) $$C_2(9) = 0{,}5461\,.$$

2. Berechnung der elektrostatischen Gitterkonstanten.

I. Die Konstante α ist die negative elektrostatische Energie des Gitters pro Elementarwürfel, wenn dessen Kante $\delta = 1$ und die Ionenladung $2e = 2$ gesetzt wird.

Wir bezeichnen den Abstand zweier auf der Würfeldiagonale benachbarter Ionen Zn^{++} und S^{--} mit h; dann ist:

$$\delta = \frac{4}{\sqrt{3}}\, h\,.$$

Wir betrachten nun ein Gitter, für das $h = 1$ und die Ionenladung $2e = 1$ ist, und bezeichnen das Potential aller Gitterpunkte auf einen mit φ; dieses hat den gleichen Wert für alle Gitterpunkte. Dann ist das Potential aller Gitter-

punkte auf die 4 Zn^{++}- und die 4 S^{--}-Ionen eines Elementarwürfels:

$$8\,\frac{(2e)^2}{h}\,\varphi = \frac{128\,e^2}{\sqrt{3}\,\delta}\,\varphi\,;$$

die potentielle Energie pro Elementarwürfel erhält man durch Division mit 2, und daraus entsteht dann α für $e = 1$, $\delta = 1$:

$$\alpha = -\frac{64}{\sqrt{3}}\,\varphi = -36{,}95\,\varphi\,.$$

Die Größe φ berechnen wir nach der Methode von Madelung[1]) in folgender Weise.

Wir zerlegen φ in ein Punkt-, Linien- und Ebenenpotential:

$$\varphi = \varphi_P + \varphi_L + \varphi_E\,.$$

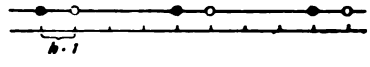


Fig. 2.

1. *Punktpotential.* φ_P sei das Potential aller Punkte einer Würfeldiagonalen D auf einen von ihnen (Fig. 2). Offenbar ist:

$$\begin{aligned}
\varphi_P = &-\frac{1}{1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{12}-+\cdots\\
&-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-+\cdots\\
=&-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\cdots\\
&\quad -\frac{1}{2}\quad +\frac{1}{4}\quad -\frac{1}{6}\quad +\frac{1}{8}\quad -\frac{1}{10}\quad +\cdots\\
=&-\log 2-\frac{1}{2}\log 2=-\frac{3}{2}\log 2\\
=&-1{,}0397\,.
\end{aligned}$$

2. *Linienpotential.* Wir legen durch die Würfeldiagonale D und eine Würfelkante die Ebene E; diese enthält eine Schar zur Würfeldiagonale D paralleler Punktreihen. Das Potential aller dieser auf einen Punkt der Diagonale D sei φ_L (Fig. 3). Nach Madelung ist das Potential einer periodischen Ladungs-

1) E. Madelung, Phys. Ztschr. **19**. 8. 524. 1918.

verteilung auf der Achse der Zylinderkoordinaten r, z durch die Summe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n K(\nu_n r) \cos(\nu_n z)$$

dargestellt[1]): dabei drücken sich die Koeffizienten durch die Periode Z und die lineare Dichte σ so aus:

$$c_0 = \frac{1}{Z}\int_Z \sigma \, dz, \quad c_n = \frac{1}{Z}\int_Z \sigma \cos(\nu_n z) \, dz,$$

und es ist:

$$\nu_n = \frac{2\pi n}{Z}.$$

Im Falle unserer Punktreihen wird $Z = 4$ und:

$$c_n = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0 \text{ für } n = 0, 4, 8, \ldots \\ \frac{1}{2} \;\; „ \;\; n = 1, 3, 5, \ldots \\ 1 \;\; „ \;\; n = 2, 6, 10, \ldots \end{cases}$$

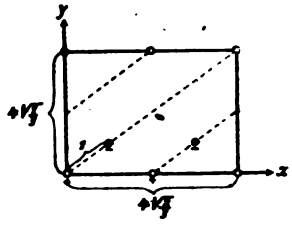


Fig. 8.

Um das Potential der parallelen Punktreihen auf einen Punkt der Diagonale D zu finden, hat man in der Summe als Aufpunkt der Reihe nach die folgenden Punkte zu nehmen:

1. Parallele: $r = 1 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $z = 1 \cdot \frac{4}{3}$,
2. „ $r = 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $z = 2 \cdot \frac{4}{3}$.
3. „ $r = 3 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $z = 3 \cdot \frac{4}{3} - 4 = 0$,
4. „ $r = 4 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $z = 1 \cdot \frac{4}{3}$.

. . . . . .

1) Es ist $K(x) = \frac{i\pi}{2} H_0^1(ix)$, wo H_0^1 die bekannte Hankelsche Zylinderfunktion darstellt.

Dabei haben die z-Werte offenbar die Periode 3. Setzt man diese Werte ein und summiert, so findet man nach längerer Rechnung:

$$\varphi_L = -K\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\right) - 3K\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}\right) + K\left(\frac{3\pi\sqrt{2}}{3}\right) + K\left(\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\right)$$
$$- 2K\left(\frac{5\pi\sqrt{2}}{3}\right) + 3K\left(\frac{6\pi\sqrt{2}}{3}\right) - 2K\left(\frac{7\pi\sqrt{2}}{4}\right) - 3K\left(\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}\right)$$
$$+ 2K\left(\frac{9\pi\sqrt{2}}{3}\right) - 6K\left(\frac{10\pi\sqrt{2}}{3}\right) + \ldots$$
$$= -0{,}3208\,.$$

3. *Ebenenpotential.* Die Summe der Potentiale aller zu E parallelen Netzebenen auf einen Punkt von E sei φ_E

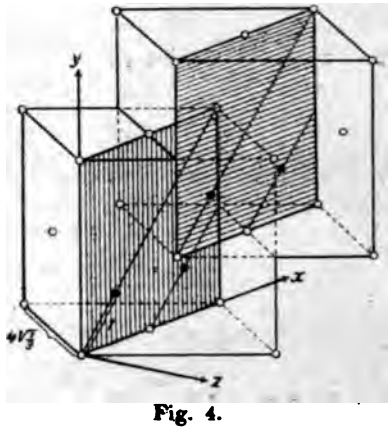


Fig. 4.

(Fig. 4). Nun ist nach Madelung das Potential einer Belegung σ der $x\,y$-Ebene, die nach x und y periodisch ist, in einem Aufpunkte $x\,y\,z$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2c_{mn}\pi\,\frac{e^{-\sqrt{\mu_m^2+\nu_n^2}\cdot|z|}}{\sqrt{\mu_m^2+\nu_n^2}}\cos(\mu_m x)\cos(\nu_n y),$$

wo die Koeffizienten durch die Perioden X, Y und die Ladungsdichte σ sich so ausdrücken:

$$c_{00} = \frac{1}{XY}\int_X\int_Y \sigma\, dx\, dy,$$

$$c_{m0} = \frac{2}{XY}\int_X\int_Y \sigma \cos(\mu_m x)\, dx\, dy,$$

$$c_{0n} = \frac{2}{XY}\int_X\int_Y \sigma \cos(\nu_n y)\, dx\, dy,$$

$$c_{mn} = \frac{4}{XY}\int_X\int_Y \sigma \cos(\mu_m x)\cos(\nu_n y)\, dx\, dy,$$

und wo:

$$\mu_m = \frac{2\pi m}{X}, \qquad \nu_n = \frac{2\pi n}{Y}$$

gesetzt ist.

Im Falle unserer Netzebenen ist $X = 4\sqrt{\frac{1}{3}}$, $Y = 4\sqrt{\frac{1}{2}}$ und:

$$c_{00} = 0,$$

$$c_{0n} = \frac{3}{8\sqrt{2}}\left(2 - 2\cos\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots \\ \frac{3}{4\sqrt{2}} & \text{„ } n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} & \text{„ } n = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots \end{cases}$$

$$c_{m0} = \frac{3}{8\sqrt{2}}\left(1 + \cos\pi m - \cos\frac{\pi m}{2} - \cos\frac{3\pi m}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } m = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots \\ 0 & \text{„ } m = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} & \text{„ } m = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots \end{cases}$$

$$c_{mn} = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(1 + \cos\pi m - \cos\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi m}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}\cos\frac{3\pi m}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ für } \begin{cases} m = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots \\ n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots \end{cases} \\ \qquad\quad \begin{cases} m = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots \\ n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots \end{cases} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ für } \begin{cases} m = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots \\ n = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots \end{cases} \\ \qquad\quad \begin{cases} m = 2,\ 6,\ 10,\ \ldots \\ n = 4,\ 8,\ 12,\ \ldots \end{cases} \end{cases}$$

Um das Potential der parallelen Netzebenen auf einen Punkt der Ebene E zu finden, hat man als Aufpunkte der Reihe nach folgende Punkte zu wählen:

1. Nachbarebene: $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{8}}$, $z = \sqrt{\frac{2}{8}}$,
2. „ $x = 0$, $y = 0$, $z = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$,
3. „ $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $z = 3\sqrt{\frac{2}{3}}$

. . . . . .

Die $x\,y$-Werte haben offenbar die Periode 2.

Setzt man das in die Reihe ein und summiert über alle Parallelebenen, so findet man nach längerer Rechnung:

$$\varphi_E = -\sqrt{6}\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}} + \sqrt{2}\,e^{-\pi} + 2\,e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{8}}} + \frac{4}{3\sqrt{2}}e^{-3\pi}\right.$$

$$\left. - 2\,e^{-\pi\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\pi\sqrt{\frac{4}{3}}} - \frac{4}{\sqrt{8}}e^{-\pi\sqrt{6}} - \sqrt{2}\,e^{-2\pi} - 2e^{-2\pi\sqrt{2}} + \ldots\right)$$

$$= -0{,}2960\,.$$

Aus den Werten von φ_P, φ_L, φ_E erhält man nun:

$$\varphi = \varphi_P + \varphi_L + \varphi_E = -1{,}0397 - 0{,}3208 - 0{,}2960 = -1{,}6565\,,$$

und daraus:

(g) $$a = -36{,}95\,\varphi = 61{,}21\,.$$

II. Für den elektrischen Anteil der Konstante A benützen wir den Ausdruck[1]):

$$\frac{e^2}{\delta^4}\,\alpha_1 = \frac{1}{2\,\Delta}\sum_k \sum_{k'} \mathop{\S}_{l} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\pm 4e^2}{r}\right)\right]_{r^{(l)}_{kk'}} \cdot z^{(l)\,2}_{kk'}\,,$$

wo das $+$-Zeichen für $k = k'$, das $-$-Zeichen für $k \neq k'$ gilt. Wir beziehen jetzt die Summe auf ein Hilfsgitter, bei dem die Länge $\delta/4$ als Einheit gewählt ist; dann wird:

$$\frac{e^2}{\delta^4}\,\alpha_1 = 2 \cdot \frac{4e^2}{\delta/4} \cdot \frac{1}{2\,\Delta}\sum_{k'} \mathop{\S}_{l} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\pm 1}{r}\right)\right]_{r^{(l)}_{kk'}} \cdot z^{(l)\,2}_{kk'}\,,$$

weil die hier auftretende Summe offenbar vom Index k unabhängig ist. Wegen (10) folgt:

1) D.K. (8), (26), (42).

$$a_1 = 64 \cdot \sum_k \sum_l \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\pm 1}{r}\right)\right]_{r_{kk'}^{(l)}} \cdot z_{kk'}^{(l)2} .$$

Diese Summe setzen wir aus den Beiträgen zusammen, die die Netzebenen $z =$ konst. liefern; ist φ das Potential einer solchen Netzebene, so wird:

$$a_1 = 64 \cdot 2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} z^2\right)_p .$$

Nach der oben mitgeteilten Madelungschen Formel für das Potential einer Netzebene wird:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2 c_{mn} \pi \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2}\, e^{-\sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2}\, z} \cos(\mu_m x) \cos(\nu_n y);$$

dabei sind hier die Perioden $X = 4$, $Y = 4$, also:

$$\mu_m = \frac{\pi m}{2}, \qquad \nu_n = \frac{\pi n}{2}$$

und:

$$c_{0n} = \tfrac{1}{8}(1 + \cos n\pi) = \begin{cases} \tfrac{1}{4} \text{ für gerade } n, \\ 0 \text{ „ ungerade } n; \end{cases}$$

$$c_{m0} = \tfrac{1}{8}(1 + \cos m\pi) = \begin{cases} \tfrac{1}{4} \text{ für gerade } m, \\ 0 \text{ „ ungerade } m; \end{cases}$$

$$c_{mn} = \tfrac{1}{4}(1 + \cos \pi m \cos \pi n) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}, \text{ wenn } m, n \text{ beide gerade oder} \\ \quad \text{beide ungerade}, \\ 0 \text{ in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Für die aufeinander folgenden Nachbarebenen sind in der Summe folgende Aufpunkte einzusetzen:

1. Nachbarebene:	$x = 1$,	$y = 1$,	$z = 1$;	Ladung	-1,
2.	„	$x = 2$,	$y = 0$,	$z = 2$;	„	$+1$,
3.	„	$x = 3$,	$y = 1$,	$z = 3$;	„	-1,
4.	„	$x = 0$,	$y = 0$,	$z = 4$;	„	$+1$,
5.	„	$x = 1$,	$y = 1$,	$z = 5$;	„	-1.

. . . . . .

(Periode 4)

Nach längerer Rechnung findet man schließlich folgende Reihe:

$$\begin{aligned} a_1 = 128\pi^2 (&e^{-\pi} - 3\sqrt{2}\, e^{-\pi\sqrt{2}} + 2e^{-2\pi} + 2\sqrt{5}\, e^{-\pi\sqrt{5}} \\ &+ 10\sqrt{2}\, e^{-2\pi\sqrt{2}} + 12e^{-3\pi} - 6\sqrt{10}\, e^{-\pi\sqrt{10}} + 2\sqrt{13}\, e^{-\pi\sqrt{13}} \\ &+ 4e^{-4\pi} + 2\sqrt{17}\, e^{-\pi\sqrt{17}} - 36\sqrt{2} e^{-3\pi\sqrt{2}} + (8\sqrt{5} - 20) e^{-\pi\sqrt{20}} \\ &- 4\sqrt{26}\, e^{-\pi\sqrt{26}} + \ldots) \end{aligned}$$

(h) $$a_1 = 3{,}885 .$$

III. Für den elektrischen Anteil der Konstanten C gilt die Formel[1]):

$$-\frac{e^2}{\delta^3}\alpha_2 = \sum_{(1)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\pm 4e^2}{r}\right)\right]_{r_{12}^{(0)}} \cdot z_{12}^{(0)} .$$

Beziehen wir die Summe wieder auf ein Hilfsgitter mit $\delta/4$ als Einheit, so wird:

$$-\frac{e^2}{\delta^3}\alpha_2 = \frac{4e^2}{(\delta/4)^3}\sum_{(1)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\pm 1}{4r}\right)\right]_{r_{12}^{(0)}} \cdot z_{12}^{(0)} .$$

Die Summe setzen wir aus den Beiträgen der Netzebenen $z =$ konst. zusammen; dann folgt:

$$\alpha_2 = -64 \cdot 2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} z\right)_p ,$$

wo φ das Potential einer Netzebene ist. Dabei ist φ dieselbe unter II. benützte Reihe. Man findet leicht:

$$\alpha_2 = 64\pi^2 \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+1}(2p+1)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{mn\,e^{-\frac{\pi}{2}(2p+1)\sqrt{m^2+n^2}}}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$= 64\pi^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}} + \sqrt{2}\,e^{-\pi\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{10}}e^{-\pi\sqrt{\frac{5}{2}}} + \frac{8}{\sqrt{5}}e^{-\pi\sqrt{5}}\right.$$

$$+ \frac{10}{\sqrt{26}}e^{-\pi\sqrt{\frac{13}{2}}} + 2\sqrt{2}\,e^{-2\pi\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{2}}}$$

$$\left. - 3\sqrt{2}\,e^{-3\pi\sqrt{2}} - \frac{18}{\sqrt{10}}e^{-3\pi\sqrt{\frac{5}{2}}} + \ldots\right),$$

(i) $$\alpha_2 = 70{,}0.$$

IV. Der elektrische Anteil der Konstanten D ist die Kraft, die von den Ionen der einen Art auf die der anderen ausgeübt wird, wenn die beiden einfachen Gitter gegeneinander schwingen. Die auf ein negatives Ion wirkende Kraft in der x-Richtung ist gleich dem Werte von $-2e\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ an der Stelle des Ions, wobei φ die von den positiven Ionen herrührende Wirkung darstellt; φ genügt der Wellengleichung und wird an allen positiven Gitterpunkten unendlich wie $2e\,r^{-1}$. Wie

1) D.K. (8), (25), (36).

a. a. O.[1]) gezeigt worden ist, muß der Grenzwert von φ für unendlich lange Wellen so berechnet werden, daß der Mittelwert des Feldes über eine Zelle nicht verschwindet. Dann erhält man in erster Näherung für φ die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{4\pi(2e)}{\Delta}.$$

Da nun aus Symmetriegründen in jedem negativen Gitterpunkte:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

ist, so folgt für die Kraft auf ein Ion:

$$(k) \qquad -2e\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} = \frac{4\pi(2e)^2}{8\Delta} = \frac{64\pi e^2}{3\delta^3};$$

das ist der Anteil der elektrischen Kräfte zu der quasielastischen Kraft $D\Delta$.

1) D.K. 2. Teil (238), S. 91; vgl. auch § 31, S. 98. Vgl. auch M. Born, Ann. d. Phys. **61**. S. 87. 1920. Anhang.

(Eingegangen 3. November 1919.)

3. *Die Zungenpfeife als gekoppeltes System;* *von Hans Vogel.*

(Auszug aus einer Jenaer Dissertation.)

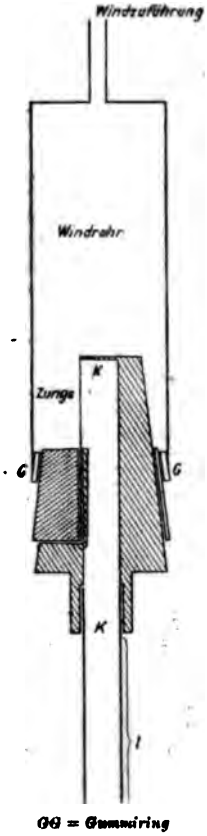
Die eigentümlichen Erscheinungen beim Abstimmen der Zungenpfeife, das Umspringen und Aussetzen des Tones bei gewissen Längen der Ansatzröhre, haben schon seit langer Zeit das Interesse der Physiker auf sich gezogen. Vor allem hat sich W. Weber[1]) in seiner Habilitationsschrift und einer Reihe weiterer Arbeiten experimentell und theoretisch sehr eingehend mit dem Gegenstand beschäftigt, nach ihm vor allem Willis[2]) und später Helmholtz.[3]) Trotzdem sich so hervorragende Physiker mit dem Problem befaßt haben, ist noch keine Klarheit hineingebracht, so daß der berühmte Organist I. G. Töpfer 1888 in seinem Lehrbuch über den Orgelbau zusammenfassend zu dem Urteil kommt: Es lassen sich für Zungenpfeifen mit durchschlagenden Zungen allgemein gültige Maße nicht angeben. „Der Orgelbauer ist bei Zungenpfeifen auf Probieren angewiesen. Die Theorie ist ebenso ratlos wie die Praxis.“ In seiner Arbeit „Über die Rückwirkung eines resonierenden Systems“ hat M. Wien darauf hingewiesen, daß man die Erscheinungen bei der Zungenpfeife als gekoppelte Schwingungen auffassen muß, jedoch sind es keine freien Schwingungen, sondern „erzwungene Schwingungen durch eine Kraft, deren Periode durch die Periode der Schwingung gegeben ist. Letztere wird jedoch wieder durch die Kraft beeinflußt und verändert, so daß hier wesentlich kompliziertere Verhältnisse vorliegen“. Wien ist jedoch nicht näher darauf eingegangen. Es sollen nun im folgenden die älteren Versuchsergebnisse, insbesondere die von Weber auf Grund der Theorie der gekoppelten Schwingungen gedeutet und ferner

1) W. Webers Werke, 1. S. 207, 257, 266, 276, 292.
2) O. Willis, Pogg. Ann. 24. S. 397. 1832.
3) H. v. Helmholtz, Tonempfindungen, S. 159, 619, 622, 1862.

die physikalischen Vorgänge in der Zungenpfeife durch weitere Versuche erläutert werden, bei denen besonders die Koppelung zwischen Zunge und Ansatzrohr verändert wurde.

I. Ältere Versuche.

Weber benutzte zu seinen Versuchen fast stets den von ihm erfundenen Pfeifenkopf. Der von mir benutzte Pfeifenkopf ist dem seinigen genau nachgebildet und ist in Fig. 1 dargestellt, die wohl ohne nähere Erläuterung verständlich ist. Die von Weber benutzte Zunge bestand aus Messing und war 28,4 mm lang, 5,6 mm breit und 0,50 mm dick. Beim Anzupfen in einem Schraubstock machte sie 388 Schwingungen. Die Änderung der Ansatzröhren, die aus Holz oder Glas waren, bewirkte Weber durch Abschneiden. Mit dieser Apparatur stellte er 5 größere Versuchsreihen an.[1]) Die Erregung der Pfeife erfolgte bei den ersten 4 durch Anblasen, bei der 5. durch Ansaugen. Die Röhrenweite betrug bei den ersten 12,4 mm, bei den übrigen 10,6 mm. Außerdem findet sich noch eine 6. Beobachtungsreihe, bei der eine Zunge aus Eisen von ähnlichen Dimensionen und 570 Schwingungen benutzt wurde.[2]) Weber teilt die Ergebnisse dieser Versuche in seinen Arbeiten mehrmals mit, sowohl in Noten als in Zahlen. Da er einfache Schwingungen zählt und als Längeneinheit 1 Linie (Pariser Maß) = 2,257 mm benutzt, habe ich seine Beobachtungen in Doppelschwingungen und Zentimeter umgerechnet. Von diesen ist Reihe 4 in Fig. 2 (ausgezogene Kurve) wiedergegeben.



GG = Gummiring
KK = Kanäle
l = Ansatzrohr
Fig. 1.

Weber beschreibt seine Versuche zusammenfassend etwa in folgender Art: Fügt man an eine Zungenpfeife ein kurzes Ansatzrohr und erregt sie durch Anblasen, so wird der

1) Beobachtungsreihe 1, 1. S. 233, 235, 286; 2, 1. S. 237f.; 3, 1. S. 241f., 256, 274; 4, 1. S. 247, 287; 5, 1. S. 275.
2) Beobachtungsreihe 6, 1. S. 318.

Ton fast nicht verändert. Er wird kaum merklich tiefer. Verlängert man das Ansatzrohr, so tritt eine merkliche Vertiefung ein, die mit zunehmender Röhrenlänge immer rascher wächst, bis sie eine Oktave beträgt. In diesem Augenblick schlägt der Ton plötzlich in den um, den die Pfeife ohne Ansatzrohr gab. Die Länge a, bei der dieser Tonsprung erfolgt, ist die Länge derjenigen offenen Pfeife, die den Eigenton der Zunge als Grundton gibt ($a = \lambda/2$). Bei weiterer Verlängerung der Röhren über a hinaus wird der Ton von neuem tiefer, erst wenig, dann schneller. Bei der Länge $2a$ beträgt die Vertiefung eine Quarte, und es erfolgt wieder ein Sprung zum Anfangstone. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch bei Zunahme der Ansatzröhren um die Länge a. Dabei verhalten sich die Schwingungszahlen der tiefsten Töne vor dem Tonsprung zum Eigenton der Zunge wie 1 : 2, 3 : 4, 5 : 6 usw. Dieses Gesetz stellt Webers Experimente gut dar. Die Tonsprünge erfolgen etwa bei Vielfachen von a, allerdings sind die tiefsten Töne etwas tiefer als das Gesetz angibt. Wird die Zungenpfeife durch Ansaugen erregt, so tritt statt der Vertiefung des ursprünglichen Tones eine periodisch wiederkehrende Erhöhung ein. Weber drückt das Gesetz durch eine Formel aus, die gestattet, bei bekanntem Eigenton der Zunge für jede Länge des Ansatzrohres die Schwingungszahl der Zungenpfeife angenähert zu berechnen:

$$N = \frac{2l + \left[\left(\frac{a}{2} - r\right) \pm \left(\frac{a}{2} - r\right)\right]}{4al} \cdot c.$$

Hierin bedeuten:

N die Schwingungszahl der Zungenpfeife,
l die Länge der Luftsäule,
a die halbe Wellenlänge des Eigentones,
c die Schallgeschwindigkeit,
r den Rest, der sich bei Division von l durch a ergibt.

Für $r > a/2$ ist „+“, für $r < a/2$ ist „—“ in die Formel einzusetzen. Eine nach dieser Formel berechnete Kurve zeigt Fig. 2 a. f. S. (gestrichelte Kurve). Sie stimmt bei hohen und tiefen Tönen gut mit dem Experiment überein, dagegen ergibt sie für die mittleren Töne, wo l = einem ungeraden Vielfachen

von $a/2$, viel zu hohe Werte. Dabei ist $c = 344$ m pro Sekunde, der Eigenton der Zunge = 388, wie bei Versuchsreihe 4 von Weber. Wird die Zungenpfeife durch Ansaugen erregt, so lautet die Formel:

$$N = \frac{2l - \left[\left(\frac{a}{2} - r\right) \pm \left(\frac{a}{2} - r\right)\right]}{4al} \cdot c.$$

Diese Formel entspricht jedoch noch weniger den Versuchsergebnissen Webers als die obige Formel für die angeblasene Zungenpfeife.

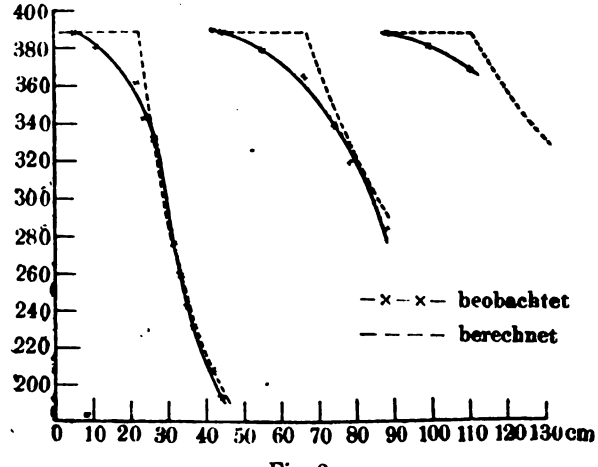


Fig. 2.

Auf Grund seiner Versuche stellte Weber folgende Sätze auf: Die Ursache des Tönens ist der periodisch unterbrochene Luftstrom. Die Schwingungszahl des Tones ist die unmittelbare Folge der Schwingungen der Zunge, deren Zahl wieder bestimmt wird einerseits durch die Dimensionen und die Elastizität der Zunge, andererseits durch die Einwirkung der im Ansatzrohr schwingenden Luft. Die Zunge und das Ansatzrohr beeinflussen sich in ihren Schwingungen so, daß sie synchron schwingen, wobei bald die Zunge bald die Luftsäule mehr nachgibt. Die Schwingungszahl der Zunge ist insofern von besonderem Einflusse, als sie die Zahl der Knoten bestimmt, die sich in der schwingenden Luft des Ansatzrohres ausbilden; denn sie begünstigt die Entstehung des Grund- oder

eines bestimmten Obertones von denen, die im Ansatzrohr möglich sind. *An den Stellen, wo die Zungenpfeife zwei Töne gibt, verhält sie sich bei Entstehung des tiefen wie eine gedeckte, bei Entstehung des hohen wie eine offene Pfeife.* Im ersteren Falle befindet sich an der Zunge ein Schwingungsknoten, im letzteren ein Schwingungsbauch. Hiernach bestimmte Weber das Intervall, um das sich der Ton ändert.

Über die Erscheinung, daß in gewissen Fällen eine Zungenpfeife überhaupt nicht anspricht, finden sich nur zwei Bemerkungen: Die eine bei Beobachtungsreihe 2, die andere in Band 5, S. 391. Dort sagt Weber, daß mit sehr engen Röhren kein Ton erzeugt werden kann.

Wenige Jahre nach Weber machte der Engländer Willis bei Versuchen zur künstlichen Hervorbringung von Vokalen Beobachtungen über die Tonhöhe von Zungenpfeifen beim Ansetzen zylindrischer Röhren. Er findet: Wird die Ansatzröhre einer angeblasenen Zungenpfeife verlängert, so wird der Ton allmählich tiefer, bis die Luftsäule die Länge $\lambda/4$ erreicht hat, wobei λ die Wellenlänge des Eigentones der Zunge ist. Dort springt der Ton plötzlich in einen höheren um, der noch höher ist als der Eigenton der Zunge. Er vertieft sich dann wieder, wird bei $\lambda/2$ dem Eigentone der Zunge gleich und dann tiefer, bis die Luftsäule gleich ist $3\lambda/4$, wo er wieder umspringt. Das Intervall zwischen dem höchsten und tiefsten Tone beträgt dabei nicht mehr als 1 Ton. Die Zungenpfeife spricht am besten an und der Ton ist am lautesten in der Mitte zwischen den Tonsprüngen; an diesen ist er schwächer und läßt sich dort oft überhaupt nicht hervorbringen.

Die benutzten Röhren waren so weit, daß sich der ganze Pfeifenkopf wie ein Stempel im Ansatzrohr verschieben ließ ($d = 33$ mm). Daher konnte Willis die Röhrenlänge stetig verändern. Zur Bestimmung der Tonhöhe wurde eine gedeckte Pfeife mit verschiebbarem Stempel benutzt. Aus dem Beobachtungsmaterial sei eine für seine Experimente charakteristische Figur (3) a. f. S. mitgeteilt. Die Ordinate darin ist die Länge z (in Zoll) des verschiebbaren Stempels der Vergleichspfeife.

Die Resultate von Willis weichen wesentlich von denen Webers ab.

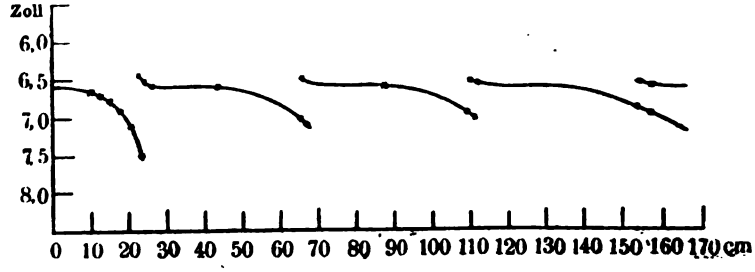


Fig. 3.

a) Weber findet die Tonsprünge bei Vielfachen von $\lambda/2$, Willis bei ungeraden Vielfachen von $\lambda/4$, also um eine Viertelwellenlänge verschoben.

b) Bei Willis beträgt das Intervall zwischen den höchsten und tiefsten Tönen nicht mehr als 1 Ganzton, bei Weber bis zu einer Oktave.

c) Bei derselben Erregung durch Anblasen findet Weber nur gleiche und tiefere Töne, Willis jedoch auch höhere Töne als den, den die Pfeife ohne Ansatzrohr gibt.

Da bei sonst gleicher Versuchsanordnung nur die Röhrenweite wesentlich verschieden war, so wird es Aufgabe der folgenden Experimente sein, auch den Einfluß von Ansatzröhren verschiedener Weite zu untersuchen.

II. Theoretische Betrachtungen.

Charakteristik der Koppelungserscheinung.

Die Zungenpfeife besteht im wesentlichen aus 3 Teilen: Dem Windrohr, der Zunge und dem Ansatzrohr. Alle 3 sind schwingungsfähige Systeme, die aber nicht unabhängig voneinander sind, sondern, wie die früheren Experimente zeigen, einander in Tonhöhe und Tonstärke, d. h. Schwingungszahl und Amplitude beeinflussen oder: sie sind miteinander gekoppelt. Man müßte die Zungenpfeife als ein gekoppeltes System von 3 Teilsystemen behandeln. Doch genügt es für die hier gestellte Aufgabe, wenn wir den einfachsten Fall, den zweier Teilsysteme, zugrunde legen und an ihm das Auftreten

der Koppelungserscheinungen nachweisen. Wir wollen daher vom Windrohr absehen und nur den Einfluß des Ansatzrohres (Resonator) auf die Zunge untersuchen. Das bedingt natürlich, daß wir später bei den Experimenten stets dasselbe Windrohr benutzen. Dabei bleibt die Zunge unverändert, hat also stets dieselbe Eigenperiode, während das Ansatzrohr so beschaffen ist, daß man seine Eigenschwingungen in weiten Grenzen ändern kann.

Für die freien Schwingungen zweier gekoppelter Systeme mit den Dämpfungen h_1 und h_2, wovon das System 2 — in unserem Falle die Luftsäule — stark gedämpft ist, stellt M. Wien[1]) folgende Gesetze auf:

I. Ist die *Dämpfung vorherrschend*, so tritt eine schwach gedämpfte Schwingung A und eine stark gedämpfte B in beiden Systemen auf. Vorherrschend und charakteristisch für den ganzen Vorgang ist daher die Schwingung A. Ihre Schwingungszahl liegt in der Nähe der Schwingungszahl des weniger gedämpften Systems 1. Wenn der Ton von System 2 höher ist als der von 1, so ist der Ton von A tiefer als der von System 1 und zwar um so mehr, je geringer die Differenz ε der Eigenperioden der beiden Systeme ist. Für $\varepsilon = h_2 - h_1$ besteht ein Minimum. Dann verschwindet jedoch diese Vertiefung von A schnell und geht durch Null hindurch. Wenn dann System 2 etwas tiefer ist als 1, tritt eine fast gleich große Erhöhung von A auf, die mit wachsender Differenz der Eigentöne wieder kleiner wird. Die Schwingung A ist stets schwach gedämpft, nur in der Nähe der Resonanz wächst die Dämpfung etwas. Die Schwingung B dagegen ist stets stark gedämpft, nur in der Nähe der Resonanz wird die Dämpfung etwas kleiner.

II. Ist die *Koppelung gleich der Dämpfung*, so ist der Verlauf der Erscheinung ganz ähnlich. Doch werden im Resonanzfall sowohl die Schwingungszahlen als auch die Dämpfungen beider Schwingungen A und B gleich.

III. Ist die *Koppelung vorherrschend*, so haben die beiden Schwingungsarten A und B niemals gleiche Schwingungszahlen. Ihre Differenz ist im Resonanzfall ein Minimum. Dabei werden die Dämpfungen gleich, so daß Schwebungen oder zwei

---

1) M. Wien, Wied. Ann. 61. S. 151. 1897.

getrennte Töne entstehen. Sind die beiden Systeme verstimmt, so wird die Differenz der Schwingungszahlen von *A* und *B* größer, und eine der beiden Schwingungsarten ist stärker gedämpft als die andere. Es entstehen daher nur bei Beginn der Bewegung schnelle, aber bald verschwindende Schwebungen. Die weniger gedämpfte Schwingung *A* ist wieder maßgebend für den Charakter der ganzen Erscheinung. Ihre Abweichung von der Schwingung des Systems 1 ist größer als in den beiden früheren Fällen, in der Nähe der Resonanz erfolgt ein Sprung der Schwingungszahl. Vgl. Fig. 4.

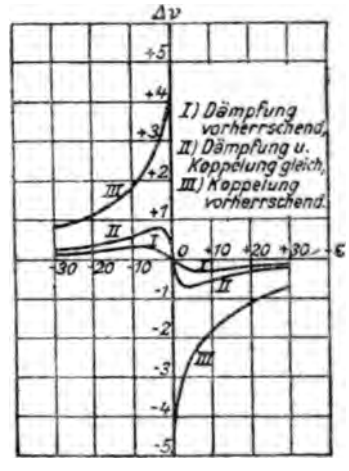


Fig. 4.

Diese Grundsätze müssen jetzt auf die Zungenpfeife angewandt werden. Wir haben es dabei, wie oben erwähnt, eigentlich nicht mit den freien Schwingungen der beiden gekoppelten Systeme zu tun, sondern mit erzwungenen Schwingungen, wobei die Kraft — der Luftstrom — infolge einer Art „Rückkoppelung" durch die Schwingungen der Zunge reguliert wird. Die Klangerzeugung beginnt jedoch damit, daß zunächst die freien Schwingungen der beiden gekoppelten Systeme durch den ersten Luftstoß angeregt werden; von den beiden gekoppelten Schwingungen bleibt schließlich die weniger gedämpfte übrig, und in dieser Periode schwingend reguliert dann die Zunge den Luftstrom, wobei die Amplitude zu einem Maximum ansteigt.

Im allgemeinen wird also die Zungenpfeife denjenigen Ton geben, welcher der weniger gedämpften der beiden Koppelungsschwingungen von Zunge und Ansatzrohr entspricht. In der Umgebung der Resonanz wird die Erscheinung der Verlauf der Fig. 4 zeigen. Das Ansatzrohr sei zunächst höher gestimmt als die Zunge $\varepsilon > 0$, also zu kurz, dann ist der Ton etwas tiefer als der Eigenton der Zunge, bei Verlängerung des Ansatzrohres wird diese Vertiefung immer größer, bis beim Überschreiten der Resonanzlage des Eigentones der Zunge ein mehr oder weniger schneller Übergang zu einem gegen die Eigenschwingung der Zunge erhöhten Ton erfolgt. Diese Erhöhung nimmt bei weiterer Verlängerung des Rohres dann allmählich wieder ab. Je enger die Koppelung, um so größer sind die Tondifferenzen und um so schneller ist der Übergang, so daß schließlich ein Umspringen des Tones in der Resonanzlage erfolgen muß. Bei weiterem Verlängern des Rohres wiederholt sich diese Erscheinung jedesmal, wenn ein Oberton der Röhre mit dem Ton der Zunge in Resonanz ist.

Eigenschwingungen der beiden Einzelsysteme.

Um die Erscheinung nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ zu verfolgen, müssen wir die Eigenschwingungen der beiden Systeme näher betrachten. Die Zunge könnte man als einseitig eingeklemmten Stab ansehen und die Eigenschwingungen theoretisch berechnen, jedoch ist der Einfluß der Befestigungsart, das Mitschwingen des Rahmens und vor allem der Luft so groß, daß sich die Schwingungszahl nur höchst ungenau berechnen lassen würde. Z. B. änderte sich die Eigenschwingung meiner Zunge Nr. 10 beim Anblasen im Pfeifenkopf ohne Ansatzrohr in folgender Weise mit dem Druck der zugeführten Luft:

Tabelle 1.

P =	30 mm	Wasser	303	Schwingungen
	50 „	„	317	„
	100 „	„	335	„
	140 „	„	341	„
	160 „	„	343	„

Beim Anzupfen im Schraubstock gab sie 405 Schwingungen. Auch der Einfluß des Durchmessers d der Kanüle (KK in Fig. 1 u. 6) war sehr merklich. Für $d = 11{,}5$ mm erhielt ich bei

140 mm Druck 341 Schwingungen, für $d = 9$ mm 336, für $d =$ 7 mm 313, für $d = 6$ mm entstand kein Ton mehr. Die Öffnung der Kanüle darf ein gewisses Mindestmaß nicht unterschreiten.

Der Eigenton der Zunge muß daher für die gerade vorhandenen Verhältnisse jedesmal experimentell bestimmt werden. Wie das möglich ist, soll unten besprochen werden.

Die Eigenschwingungen von Röhren sind bekannt. Die absolute Tonhöhe einer beiderseits offenen Röhre ist

$$r_m = \frac{m}{2L} \cdot c,$$

einer auf einer Seite gedeckten Röhre

$$r_m = \frac{2m-1}{4L} \cdot c.$$

Hierin bedeutet c die Schallgeschwindigkeit in Luft, m charakterisiert den Oberton und L ist die reduzierte Pfeifenlänge $= l + \alpha + \beta$. α ist die Korrektion für das von der Zunge abgewandte offene Ende der Ansatzröhre, nach Helmholtz $= \frac{\pi}{8} \cdot d$. β ist die Korrektion für das der Zunge zugewandte Ende der Ansatzröhre und läßt sich nicht voraus berechnen, da sie von den Dimensionen des Pfeifenkopfes und der Ansatzröhre in unbekannter Weise abhängig ist. Also bleibt zur genauen Bestimmung des Eigentones der Ansatzröhre auch wieder nur das Experiment übrig.

Koppelung der beiden Systeme.

Ist $\lambda = \frac{c}{p}$ die Wellenlänge des Eigentones p der Zunge in Luft, so muß bei offenem Ansatzrohr Resonanz eintreten für $L = m \cdot \lambda/2$, wenn also die reduzierte Länge des Ansatzrohres gleich ist einem Vielfachen der halben Wellenlänge des Zungentones. Bei einem gedeckten Ansatzrohr muß Resonanz eintreten für

$$L = (2m - 1)\frac{\lambda}{4},$$

wenn die reduzierte Länge des Ansatzrohres gleich ist einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge des Zungentones. Die Resonanzstellen des gedeckten Ansatzrohres sind um eine Viertelwellenlänge gegen die des offenen Ansatzrohres verschoben. Man erkennt hieraus, daß sowohl bei offenen als

auch bei gedeckten Ansatzröhren im Abstande von genau einer halben Wellenlänge eine regelmäßige Wiederkehr der Resonanz stattfinden muß. Ist dabei die Koppelung groß genug, so daß eine Rückwirkung des resonierenden Systems stattfindet, so muß die entstehende Tonkurve der Zungenpfeife — Verlauf der Tonhöhe mit Änderung der Röhrenlänge — einen Verlauf zeigen, der sich bei Verlängerung der Anatzröhren um eine halbe Wellenlänge wiederholt.

Dieses Ergebnis läßt sich auch in umgekehrtem Sinne verwerten. Die experimentell gefundene Tonkurve sei so beschaffen, daß man aus ihr die genaue Lage der Resonanzstellen entnehmen kann. Dann kann man aus den Abständen derselben die halbe Wellenlänge des Eigentones der Zunge ermitteln. Wir wollen also den Eigenton der Zungenpfeife durch die Formel $p = c/\lambda$ definieren, wobei $\lambda/2$ der wahrscheinlichste Wert des Abstandes der Resonanzstellen ist. Ebenso kann man, wenn z. B. ein offenes Rohr die erste Resonanzstelle bei l_1 aufweist, während sie doch bei $L = \lambda/2$ liegen soll, daraus die Korrektion für die Pfeifenlänge finden. Da $L = l_1 + \alpha + \beta$, so ergibt sich $\lambda/2 = l_1 + \alpha + \beta$ oder $\alpha + \beta = \lambda/2 - l_1$. ***Man kann somit lediglich aus der Lage der Resonanzstellen den Eigenton der Zunge und*** die Korrektionsglieder $\alpha + \beta$, mit deren Hilfe dann auch ***die Eigentöne des Ansatzrohres ermitteln.*** Dabei ist auf die richtige Wahl der Zahl m, die den resonierenden Oberton bzw. die Resonanzstelle angibt, zu achten.

Es ist so gezeigt worden, daß die Eigenschwingungen der beiden Systeme, die in der Zungenpfeife gekoppelt sind, sich nicht aus den Dimensionen voraus berechnen lassen, sondern nur rückwärts aus dem Experiment ermittelt werden können. Dies gilt natürlich erst recht von den Koppelungskoeffizienten der beiden Systeme. Sie hängen von der Art und Weise ab, wie die Zunge und das Resonanzrohr miteinander verbunden werden, weiter auch von der Form und den Dimensionen des Resonators. Zur Berechnung aus beobachteten Werten dient die Formel

$$\tau = 1 - \frac{n_1^2}{p^2} \quad \text{bzw.} \quad \tau = \frac{n_2^2}{p^2} - 1.$$

Um schließlich ein Bild der zu erwartenden Koppelungsschwingung zu erhalten, soll ein Beispiel theoretisch berechnet werden. Eine Zunge mit dem Eigenton $p = 312$ (halbe Wellenlänge in Luft = 55 cm) werde mit einem offenen zylindrischen

Rohre gekoppelt, dessen Korrektionsglied $\alpha + \beta = 6$ cm. Die ersten Resonanzstellen liegen dann bei 49 und bei 104 cm. Der Koppelungskoeffizient sei $\tau = 0{,}18$; die Schallgeschwindigkeit $c = 342$ m pro Sekunde. Wir berechnen zunächst für das Ansatzrohr die korrigierte Länge $L = l + \alpha + \beta$, dann die Eigentöne desselben nach der Formel

$$q_m = \frac{m \cdot c}{2L},$$

wobei wir $m = 1$ setzen für die Längen bis zu 75 cm, $m = 2$ für größere Längen. Hierauf werden n_1 und n_2 nach der Formel

$$n_1^2 \text{ bzw. } n_2^2 = \tfrac{1}{2}\left[(p^2 + q^2) \mp \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4\tau^2 p^2 q^2}\right]$$

berechnet, wobei die Dämpfungen nicht berücksichtigt sind. In Fig. 5 zeigt die stark gestrichelte Kurve den zu erwartenden

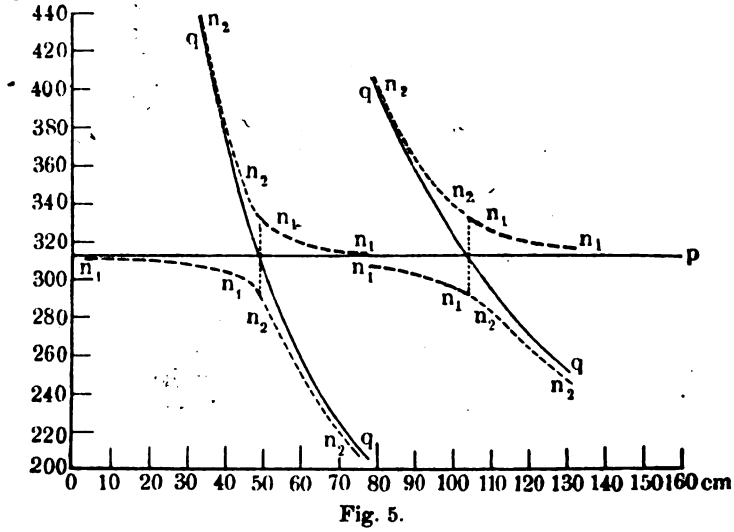


Fig. 5.

Verlauf der Tonhöhe. Bei größerer Verstimmung der beiden Systeme weicht sie nur wenig von der Tonhöhe der Zunge ab, in der Nähe der Resonanzstelle jedoch stark und zwar so, daß bei höher gestimmtem Resonator der Ton der Zungenpfeife vertieft wird, bei tiefer gestimmtem Resonator erhöht. An der Resonanzstelle selbst erfolgt das charakteristische Umschlagen des Tones.

III. Experimentelle Untersuchungen.

Die Apparate.

Für die Versuche wurde aus Messing ein möglichst genaues Modell (Fig. 1) des schon von Weber benutzten und in seinen Werken beschriebenen Pfeifenkopfes hergestellt.[1]) Seine ganze Länge beträgt 9 cm, die Weite der Kanüle 11,5 mm. In den Pfeifenkopf können Zungen aus verschiedenem Material eingeklemmt werden, die 0,5 mm dick, 5,6 mm breit und 60 mm lang sind. Die Länge ihres schwingenden Teiles beträgt 28,5 mm. Die für die folgenden Versuche benutzten Zungen sind aus Stahlfederband. Ihre Herstellung verursachte Schwierigkeiten, da sie einerseits die Öffnung im Rahmen des Pfeifenkopfes möglichst genau verschließen sollen, ohne dabei an den Rändern eine merkliche Reibung oder gar Nebengeräusche zu verursachen, andererseits auch durch die Bearbeitung keine Verbiegung erleiden dürfen. Die Zunge 10 erfüllte diese Bedingungen am besten. Da der Pfeifenkopf von konischer Form ist, läßt er sich mit einem darüber geschobenen Gummiring luftdicht in das Windrohr einsetzen, das aus Glas — später aus Messing — hergestellt wurde. Es ist 12 cm lang und 44 mm weit. Die Zuführungsöffnung für den Luftstrom ist klein ($d = 5$ mm), um ein Mitschwingen der Luft in den Zuleitungsröhren und der übrigen Anblasevorrichtung möglichst zu vermeiden. Als *Resonanzröhren*, deren Länge veränderlich sein soll, werden Messingpräzisionsröhren benutzt, die so abgeschliffen sind, daß sie sich ineinander verschieben lassen. Bei einer Wandstärke von 0,75 mm betragen die inneren Durchmesser 13,0 und 11,5 mm. Das ist auch der Durchmesser der Kanüle. Die Röhren wurden in solchen Längen hergestellt, daß man daraus jede Länge von 7—340 cm zusammensetzen kann. Außerdem wurden für Längen bis 120 cm weite Röhren vorbereitet. Bei einer Wandstärke von 0,5 mm betragen ihre inneren Durchmesser 30 und 29 mm. Zur Verbindung mit dem Pfeifenkopf — bei den Vorversuchen wurden nur enge Röhren benutzt — wurde das Ende der Kanüle durch Ausdrehen um 1,5 mm erweitert, so daß die Resonanzröhren dicht schließend eingesetzt werden können. Ihre Längen sind vom Ende des Pfeifenkopfes an gemessen.

---

1) W. Webers Werke 1. S. 263.

Beim *Anblasen* der Zungenpfeife zeigte sich nun, daß verhältnismäßig großer Luftdruck nötig war. Vorversuche darüber ergaben, daß Drucke bis 300 mm Wassersäule in Betracht kommen. Ist damit kein Ton entstanden, so scheint eine weitere Steigerung des Druckes zwecklos zu sein. Die Zunge wird dann in den Rahmen hineingedrückt und kommt nicht zum Schwingen. Gleichzeitig wurde beobachtet, daß der Luftdruck möglichst konstant sein muß, da die Tonhöhe stark vom Druck abhängig ist. Demgemäß wurde die Anblasevorrichtung aus den folgenden Teilen zusammengestellt.

Ein kräftiger *Blasebalg* mit Fußbetrieb, wie er für Schmiedefeuer im Gebrauch ist, liefert die Druckluft, die in einen *Windkessel* von etwa 300 Liter geleitet wird, wo die starken Stöße, in denen die Luft aus dem Blasebalg kommt, geschwächt werden. Von da gelangt sie in einen *Glockengasometer*. Er besteht aus 2 Zylindern von Zinkblech, die je 60 cm hoch und 44 bzw. 40 cm weit sind. Die Belastung des eintauchenden Zylinders erfolgt durch einen Bleiring und beträgt für gewöhnlich 30 g pro qcm. Durch das veränderliche Volumen des Gasometers werden die Druckschwankungen weiter vermindert. Enge Zuführungsröhren und ein Hahn mit enger Bohrung tragen außerdem zum Ausgleich der Druckschwankungen bei, so daß beim Eintritt der Luft in das Windrohr — gleichmäßiges Treten des Blasebalges vorausgesetzt — die Schwankungen nur etwa 1 mm betragen. Zur Messung des Luftdruckes dient ein Wassermanometer unmittelbar vor dem Windrohr.

Die *Bestimmung der Tonhöhen* der Zungenpfeife sollte wie bei Weber mit dem Monochord erfolgen. Wegen der großen Unterschiede von Pfeife und Monochord in Tonstärke und Klangfarbe erwies sich dies nicht günstig. Deshalb wurden zu offenen Lippenpfeifen Stempel angefertigt, durch deren Verschiebung eine stetige Folge von Vergleichstönen erhalten werden kann. Ein Zeiger an dem Stempel gab auf einer Skala die Länge der gedeckten Pfeife an. Diese Pfeifen wurden mit konstantem Druck von 10 mm Wasser betrieben und mittels Stimmgabeln geeicht.

Die Vorversuche.

In den Pfeifenkopf wurden beiderseits offene Röhren verschiedener Länge eingesetzt und die Pfeife mit dem konstanten Druck von 140 mm angeblasen. Es zeigte sich, daß sie für

gewisse Längen des Ansatzrohres überhaupt nicht ansprach. Wenn sie aber zum Tönen kam, so gab sie nur *einen* Ton. Schwebungen oder zwei Töne konnten nicht einwandfrei beobachtet werden. Zur Messung der Tonhöhe wurde der Stempel der Vergleichspfeife so gestellt, daß sie einmal einen etwas höheren, dann einen etwas tieferen Ton als die Zungenpfeife gab. Durch Zählen der sehr deutlichen Schwebungen, die die Töne der beiden Pfeifen verursachten, ließ sich die Tonhöhe auf eine Schwingung genau bestimmen.

Stellt man das Ergebnis graphisch dar (Fig. 14), so sieht man periodisch wiederkehrende Vertiefungen des Tones bei zunehmender Länge des Ansatzrohres ähnlich wie bei Weber. Doch erhält man keine zusammenhängende Kurve, sondern nur Tonbereiche, zwischen denen kein Ton entstand. Die höchsten Töne der einzelnen Kurven sind dabei nicht gleich, sondern werden mit zunehmender Länge des Ansatzrohres tiefer: auf der anderen Seite sind die tiefsten Töne ungefähr dieselben. Infolgedessen ist die Vertiefung bei der ersten Tonkurve geringer, bei den folgenden größer als sie nach dem Weberschen Gesetz zu erwarten ist. Über die Lage der Resonanzstellen läßt sich aus dieser Beobachtungsreihe eine genaue Angabe nicht machen, da der Ton aussetzt. Um den Einfluß des Anblasedruckes zu beobachten, wurde die Pfeife dann mit $P = 100$ mm angeblasen. Dabei sprach sie bei Längen, bei denen vorher noch ein Ton entstand, nicht mehr an: Die Tonbereiche wurden kleiner. Ein Vergleich mit den früheren Messungen zeigt, daß die Töne in größeren Abständen von den Resonanzstellen am leichtesten entstehen und daß ebenso wie bei der Pfeife ohne Ansatzrohr einem geringeren Anblasedruck tiefere Töne entsprechen.

Derselbe Versuch wurde mit Zunge 8 angestellt. Auch sie gab für bestimmte Längen, z. B. von 54—57 cm, keinen Ton. Doch gelang es, durch Steigerung des Anblasedruckes, sie mit allen Ansatzröhren zum Ansprechen zu bringen. Von den größten Längen bei 300 cm beginnend, wurden die Töne mit abnehmender Röhrenlänge höher, bis bei $l = 238$ cm der Ton plötzlich in einen tieferen umschlug. Hierauf trat wieder eine Erhöhung ein. Es folgten noch Tonsprünge bei 170 cm, 113 cm und 52 cm. Für den Koppelungskoeffizienten ergibt sich der sehr hohe Wert von $\varkappa = 0{,}7$.

Änderung der Koppelung.

Um die charakteristischen Erscheinungen gekoppelter Systeme an der Zungenpfeife beobachten zu können, mußte versucht werden, die Koppelung der Zunge und des Resonators zu ändern und zwar loser zu machen. Es galt also, die Erregung der Luftschwingung im Ansatzrohr abzuschwächen. Dazu wurde auf den Ansatz des Pfeifenkopfes ein 3 cm langes Rohr (Verteilungsrohr) luftdicht aufgesetzt. An der gegenüberliegenden Seite war es durch einen Kork mit 2 Öffnungen verschlossen, von denen in die eine das Ansatzrohr eingefügt werden konnte. Die andere — als Seitenloch bezeichnet — blieb frei. Dadurch konnte ein Teil der Luft, nachdem sie die Zungenpfeife erregt und die Kanüle passiert hatte, das Instrument verlassen, ohne durch das Ansatzrohr strömen zu müssen, vgl. Fig. 6. Durch Korkringe mit verschiedenen Bohrungen ließ sich sowohl die Größe des Seitenloches als auch die Öffnung des Ansatzrohres verkleinern. Dadurch wurde es möglich, die Verteilung des Luftstromes und damit die Koppelung weitgehend zu ändern. Bei den Experimenten wurde Zunge 10 benutzt und stets mit dem Druck von 140 mm angeblasen.

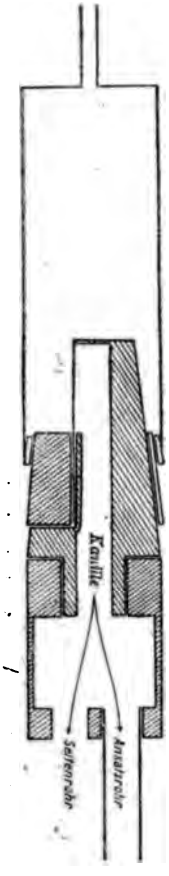


Fig. 6.

Versuche mit engen Röhren.

a) Offene Röhren.

Bei der ersten Versuchsreihe war das Seitenloch vollkommen geöffnet. Sein Durchmesser betrug 11,5 mm, war also dem des Ansatzrohres gleich, so daß der Luftstrom zu ungefähr gleichen Teilen durch das Ansatzrohr und das Seitenloch strömen konnte. In der Tabelle 2 bedeutet l die Länge des Resonanzrohres vom Verteilungsrohr an gemessen, σ_4 die Tonhöhe. Die hinter „Tonsprung" angegebenen Zahlen sind die unmittelbar nach dem Umschlagen des Tones gemessenen Schwingungszahlen. Zwei Töne oder Schwebungen wurden

Tabelle 2.

l	e_4	l	e_4
340	308	160	320
330	311	158	Tonsprung 296
323	Tonsprung 299	150	301
320	301	140	306
310	303	130	310
300	305	120	314
290	308	110	319
280	310	104	Tonsprung 295
270	314	100	299
268	Tonsprung 298	90	303
260	305	80	309
250	309	70	312
240	311	60	317
230	314	50	322
220	317	49	Tonsprung 291
212	Tonsprung 297	40	303
210	299	30	308
200	304	20	312
190	308	10	316
180	312	4	321
170	316	0	326

auch hier nicht beobachtet. Die Diskussion der Beobachtungsreihe soll an die graphische Darstellung durch Fig. 10 angeknüpft werden. Sie zeigt eine zusammenhängende Kurve mit unstetigen Übergängen von den höchsten zu den tiefsten Tönen. Da diese ganz plötzlich und sehr deutlich erfolgen, so läßt sich daraus die Lage der Resonanzstellen genau entnehmen. Ihre Abstände betragen 55, 56, 54, 54 und 55 cm, sind also ziemlich gleich. Der nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete wahrscheinlichste Wert ist 54,7 cm. Es ergibt sich daraus als Eigenton der Zungenpfeife $p = 312$. Aus der absoluten Lage der ersten Resonanzstelle bei 49 cm kann man einen Schluß auf den Einfluß der Kanüle und des Verteilungsrohres ziehen und das Korrektionsglied der Röhrenlänge berechnen. Es ergibt sich zu 5,7 cm. Die Differenz zwischen den höchsten und tiefsten Tönen beträgt etwa einen Ton, ist also bedeutend kleiner als bei den Vorversuchen, wo sie eine Quarte bzw. eine Oktave betrug. Sie wird außerdem von einer Resonanzstelle zur andern kleiner, indem die höchsten Töne tiefer werden und die tiefsten höher. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied zu den Beobachtungen Webers. Dort zeigten die tiefsten Töne ein anfangs sogar sehr schnelles Ansteigen,

während die höchsten Töne dieselben blieben. Ein weiterer Unterschied ist im Verlaufe der einzelnen Tonkurven zu bemerken. Während sie bei Weber anfangs nur wenig, dann aber schnell abnahmen, zeigen die neuen Kurven die stärkste Abnahme am Anfang und am Ende, während die Mitte die kleinste Änderung aufweist. Man kann meist einen deutlichen Wendepunkt der Kurve erkennen.

Wir wollen nun die Abweichungen der höchsten und tiefsten Töne von dem zu 312 berechneten Eigentone betrachten. Sie betragen für die höchsten Töne 11, 10, 9, 7, 8; für die tiefsten Töne 21, 17, 16, 15, 14 Schwingungen. Sie sind demnach nach unten durchschnittlich um 8 Schwingungen größer. Es scheint, als ob die obere Hälfte der Koppelungsschwingung nicht vollkommen ausgebildet ist. Deshalb soll zur *Berechnung des Koppelungskoeffizienten* stets die Schwingungszahl des tiefsten Tones benutzt werden, die übrigens auch genauer bestimmt werden konnte. Es ergeben sich für die Resonanzstellen der vorliegenden Versuchsreihe folgende Werte von τ.

Tabelle 3.

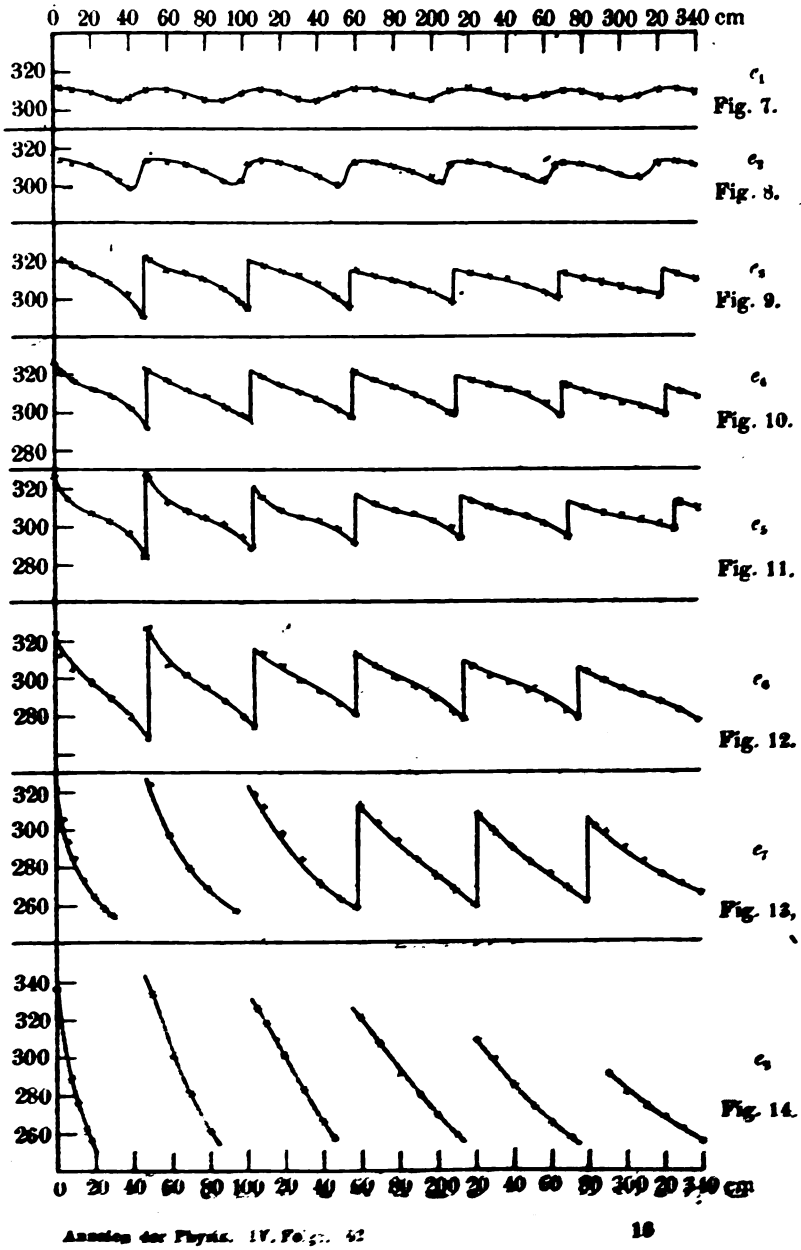
Resonanzstelle . . .	1	2	3	4	5	6
Koppelungskoeffizient	0,130	0,106	0,100	0,094	0,088	0,082

Der Koppelungskoeffizient nimmt also mit länger werdenden Resonanzröhren ab; er ist für die Obertöne der Röhre kleiner als für den Grundton.

Die Versuchsreihe war bei Verkürzung der Röhren gemacht worden. Eine Wiederholung bei Verlängerung ergab fast dasselbe Resultat, jedoch erfolgten die Tonsprünge bei etwas größeren Längen der Röhren als vorher. Sie lagen bei 56, 112, 170, 222, 278 und 336 cm, also durchschnittlich um 10 cm nach außen verschoben, Diese bei enger Koppelung auftretende Verschiebung der Tonsprünge soll als „Ziehen" des Tones bezeichnet und unten näher besprochen werden.

Zur Durchführung desselben Versuches bei anderer Verbindung der Resonanzröhren mit dem Pfeifenkopf, also anderer Koppelung, wurden hierauf am Anfang des Ansatzrohres Korkringe eingesetzt, so daß nun noch weniger Luft hindurchströmen konnte. Es wurden unter sonst gleichen Bedingungen bei Verkürzung der Röhren 3 Versuchsreihen e_1, e_2 und e_3 angestellt, wobei sich bei e_1 der Kork mit der kleinsten Bohrung

im Ansatzrohr befand, die Koppelung also am losesten war; vgl. die Figg. 7—9.



Die Beobachtungsreihe e_3 zeigt fast dasselbe Bild wie e_4. Die Abstände der Resonanzstellen sind im Mittel dieselben, nur liegen sie alle ein wenig, etwa 1 cm, nach dem Anfang der Röhre verschoben. Die Differenzen zwischen den höchsten und tiefsten Tönen sind etwas kleiner geworden. Die Beobachtungsreihen e_1 und e_2 zeigen anstatt der Tonsprünge stetige Übergänge von den höchsten zu den tiefsten Tönen. Bei e_2 erfolgen sie verhältnismäßig schnell. Ihre Abstände sind etwa dieselben wie bei e_3, doch liegen sie noch etwas nach dem Anfang der Röhre zu verschoben. Bei e_1 erfolgen sie so allmählich, daß ihre Lage nicht genau anzugeben ist. Die Differenz zwischen den höchsten und tiefsten Tönen nimmt von Reihe zu Reihe ab. Sie beträgt für die erste Resonanzstelle bei e_3 31, bei e_2 16 und bei e_1 nur 7 Schwingungen. Diese 4 Beobachtungsreihen zeigen eine systematische Abhängigkeit der Tonhöhe von der Bohrung der Korkringe im Ansatzrohr. Von dem Grenzfall ausgehend, wo das Rohr ganz verschlossen ist, also eine Wirkung nicht stattfinden kann, erhält man mit größer werdender Bohrung der Korke einen wachsenden Einfluß des Resonanzrohres auf die Tonhöhe der Pfeife. Außerdem erfolgt der im Anfang ganz allmähliche Übergang von den höchsten zu den tiefsten Tönen immer schneller, schließlich als Sprung der Tonhöhe. *Die Kurven zeigen dasselbe Verhalten wie die weniger gedämpfte Koppelungsschwingung in den Zeichnungen von M. Wien*; vgl. Fig. 4. Bei den mit kleiner Öffnung des Korkringes angestellten Versuchsreihen, wo wenig Luft durch die Resonanzröhren fließen kann, die Koppelung also lose ist, herrscht im Augenblick der Entstehung der Schwingung die Dämpfung vor (I). Bei den anderen, wo mehr Luft durch die Resonanzröhren strömt, die Koppelung also enger ist, überwiegt die Koppelung (III).

Bei der ersten Versuchsreihe dieser Art waren Ansatzrohr und Seitenloch vollkommen geöffnet. Hierauf wurde durch Schließen des Ansatzrohres die Koppelung loser gemacht. Es sollte nun, indem bei vollständig geöffnetem Ansatzrohr das Seitenloch nach und nach geschlossen wurde, die Koppelung enger gemacht werden, um so den Grenzfall zu erreichen, der einer gewöhnlichen Zungenpfeife entspricht, wo der ganze Luftstrom durch das Ansatzrohr fließen muß. Unter sonst gleichen Bedingungen wurden 3 Versuchsreihen angestellt,

wobei das Seitenloch bei e_7 am kleinsten, die Koppelung also am engsten war. Vgl. Figg. 11—18.

Bei Verlängerung der Ansatzröhren ließen sich die Töne wieder ziehen. An Stellen, wo keine Tonsprünge stattfanden, sondern der Ton aussetzte, erfolgte entsprechend das Verlöschen und Wiedereinsetzen des Tones erst bei größeren Längen der Ansatzröhren als vorher.

Die Darstellung der Beobachtungsreihen ergibt für e_5 und e_6 ähnliche Kurven wie bei e_4. Doch ist die Einwirkung des Resonanzrohres auf die Tonhöhe der Zungenpfeife stärker geworden. Bei e_4 beträgt die Differenz der Schwingungszahlen an der ersten Resonanzstelle 33, bei e_5 beträgt sie 45 und bei e_6 sogar 60. Bei e_7 schließlich treten Absorptionserscheinungen auf, so daß an den beiden ersten Resonanzstellen überhaupt kein Ton entsteht. Wird die seitliche Öffnung nun völlig verschlossen (e_8), so erhält man den Fall, der bereits als Vorversuch ausgeführt wurde.[1]) Hierbei ist die Rückwirkung der Luftsäule so groß, daß an allen Resonanzstellen der Ton aussetzt. Die ersten Resonanzstellen weisen dabei besonders große Lücken auf.

Gleichzeitig sei darauf hingewiesen, daß in allen Versuchsreihen die Rückwirkung des resonierenden Systems mit länger werdenden Ansatzröhren abnimmt. Besonders zeigt sich dies durch die kleiner werdenden Tonsprünge. Hierin liegt auch der Grund, weshalb bei e_7 die beiden ersten Resonanzstellen ein Verlöschen des Tones bewirken, während bei den folgenden noch ein Ton entsteht, und weshalb bei e_8 die ersten Resonanzstellen besonders große Lücken aufweisen. Bei e_4 ist die Abnahme der Koppelung mit länger werdenden Röhren zahlenmäßig nachgewiesen worden.

Die *Lage der Resonanzstellen*, soweit sie sich genau angeben läßt, ist in Tab. 4 zusammengestellt.

Tabelle 4.

Resonanzstelle	1	2	3	4	5	6
e_2	45	100	156	212	264	
e_3	48	103	157	211	267	322
e_4	49	104	158	215	269	323
e_5	49	105	159	215	272	328
e_6	49	105	159	220	276	

1) Die absolute Tonhöhe dieser Versuchsreihe darf nicht mit der der übrigen verglichen werden, da bei diesem Versuch das Verteilungsrohr noch nicht angebracht war.

Daraus ergibt sich, daß alle Resonanzstellen von e_2 bei kleineren Längen liegen, als die von e_3, diese wieder alle bei kleineren als die von e_4. Von den Resonanzstellen der Beobachtungsreihen e_5 und e_6 haben die ersten keine, die folgenden eine beträchtliche Verschiebung nach außen, ihre Abstände werden also größer. Tab. 5 enthält die Abstände der Resonanzstellen und deren wahrscheinlichsten Wert $\lambda/2$.

Tabelle 5.

Abstand	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	$\lambda/2$	p
e_2	55	55	54	55	—	54,7	312
e_3	55	54	54	56	55	54,7	312
e_4	56	54	54	56	55	54,7	312
e_5	56	54	56	57	56	55,8	306
e_6	56	54	56	61	—	56,4	303

Der Mittelwert der Abstände ist demnach bei den Reihen e_2 bis e_4 derselbe, während er bei den späteren größer wird. Dadurch wird der daraus ermittelte Eigenton p der Zungenpfeife bei diesen Versuchen etwas tiefer. Es sind dies die Beobachtungsreihen, bei denen wegen des teilweise geschlossenen Seitenloches weniger Luft durch die Pfeife strömen konnte. Bei geringerer Luftzufuhr wird aber, wie oben gezeigt wurde, der Ton der Zunge tiefer.

Auch hier zeigen die tiefsten Töne meist eine stärkere Abweichung vom Eigentone als die höchsten. Hierauf ist später noch zurückzukommen. Zur Berechnung der Koppelungskoeffizienten sollen daher wieder die tiefsten Töne benutzt werden. Wir finden für die ersten Resonanzstellen der Reihen e_1 bis e_6 0,04; 0,09; 0,13; 0,13; 0,15; 0,22.

Für e_1 lassen sich wegen des allmählichen Überganges in der Tonhöhe die Abstände nur ungefähr angeben. Bei Beobachtungen mit sehr enger Koppelung, wie e_7 und e_8, scheitert die Bestimmung von τ daran, daß der Ton an den Resonanzstellen aussetzt. Doch erkennt man schon aus den für e_1 bis e_6 berechneten Werten, daß die Rückwirkung der Resonanzröhren auf die Zunge abhängig ist von der Art ihrer Verbindung. *Es ist also durch die beschriebene Anordnung der Versuche gelungen, die Koppelung von Zunge und Resonator willkürlich zu ändern.*

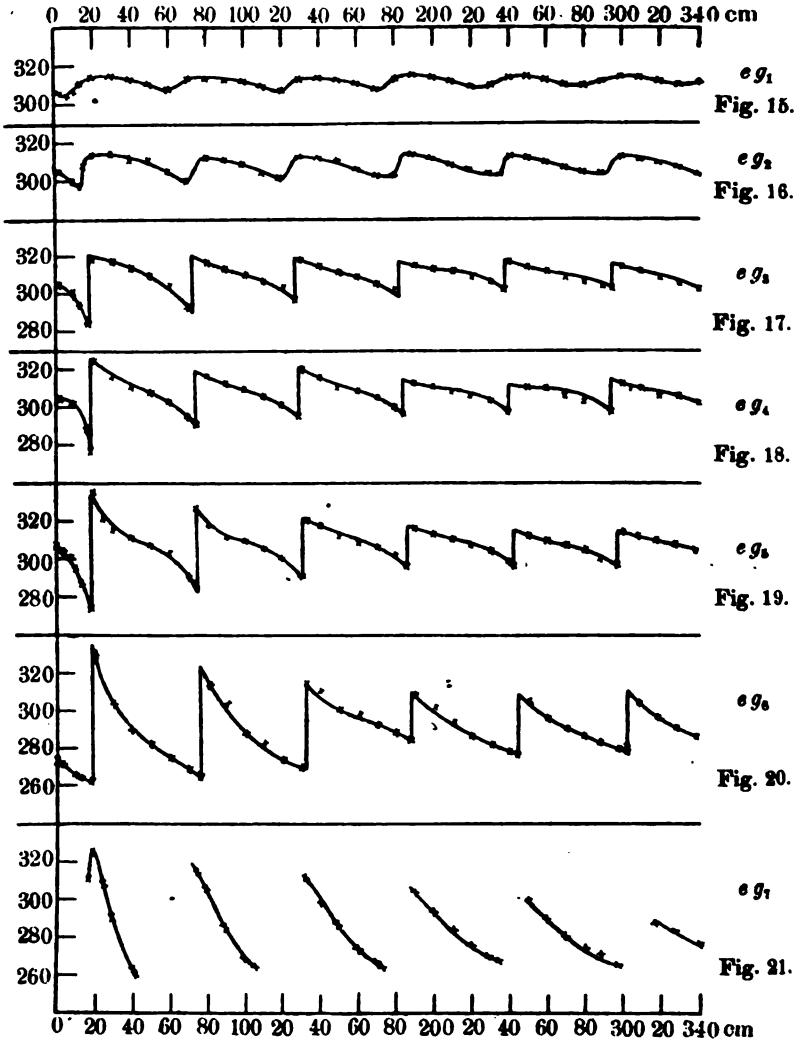
b) Gedeckte Röhren.

Wurden für die bisherigen Versuche als Resonatoren beiderseits offene Röhren benutzt, so sollten nun Röhren, die an dem der Pfeife abgekehrten Ende geschlossen sind, untersucht werden. Da hierbei durch die Ansatzröhren überhaupt keine Luft strömen konnte, so mußte das Seitenloch stets geöffnet sein. Bei den folgenden 3 Versuchsreihen $e\,g_1$ bis $e\,g_3$ war es ganz offen, während am Anfang des Ansatzrohres Korkringe eingesetzt wurden und zwar bei $e\,g_1$ der mit der kleinsten Bohrung. Die Versuchsanordnung war also, abgesehen von dem einen verschlossenen Ende der Röhren völlig die gleiche, wie bei den Versuchen e_1 bis e_3. Bei der nächsten Versuchsreihe eg_4 war sowohl das Seitenloch als auch die Mündung des Ansatzrohres ganz geöffnet. Bei $e\,g_5$ wurde dann das Seitenloch ein wenig, bei $e\,g_6$ stark verkleinert. Bei der letzten Versuchsreihe $e\,g_7$ war das Seitenloch noch kleiner, so daß die Pfeife nur für bestimmte Längen des Resonanzrohres ansprach. Man näherte sich dem Grenzfall, wo bei ganz geschlossener seitlicher Öffnung kein Ton entstehen kann.

Stellt man die Beobachtungsreihen graphisch dar Figg. 15 bis 21, so ergeben sich ähnliche Kurven, wie für die Versuche, die mit offenen Ansatzröhren ausgeführt wurden: Zuerst sind die Änderungen der Tonhöhe gering und erfolgen in allmählichen Übergängen. Dann treten Tonsprünge auf, die von Reihe zu Reihe größer werden, und schließlich setzt der Ton an den Resonanzstellen aus. Innerhalb der einzelnen Reihen nimmt dabei die Rückwirkung des Resonators mit länger werdenden Röhren ab. Doch zeigt sich bei allen Versuchen ein wesentlicher Unterschied gegen früher: die Resonanzstellen liegen anders. Tab. 6 gibt ihre Lage an.

Tabelle 6.

Resonanzstelle	1	2	3	4	5	6
eg_2	17	72	127	182	238	294
eg_3	18	72	127	182	238	295
eg_4	19	74	129	184	240	295
eg_5	19	74	131	186	242	298
eg_6	19	76	132	188	245	303



Bei den Versuchen eg_2 und eg_3 liegen sie fast gleich, während bei den folgenden, vor allem bei größeren Längen eine Verschiebung nach außen stattfindet. Wir wollen deshalb für die Versuche, bei denen sich die Resonanzstellen genau feststellen lassen (eg_2 bis eg_6) wieder eine Tabelle aufstellen, die die Abstände, ihren wahrscheinlichsten Wert und den Eigenton p enthält.

Tabelle 7.

Abstand	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	$\lambda/2$	p
eg_2	55	55	55	56	56	55,4	309
eg_3	54	55	55	56	57	55,4	309
eg_4	55	55	55	56	55	55,2	310
eg_5	55	57	55	56	56	55,8	306
eg_6	55	56	56	57	58	56,4	303

Der Mittelwert der Abstände ist also bei den letzten Reihen, wo die seitliche Öffnung des Verteilungsrohres teilweise geschlossen war und weniger Luft die Pfeife erregen konnte, größer und damit der Eigenton etwas tiefer.

Die Berechnung der Koppelungskoeffizienten ergibt für die erste Resonanzstelle der Versuche $eg_2 - eg_6$ folgende Werte:

0,08; 0,15; 0,20; 0,21; 0,25.

Für eg_1 ergibt sich der Näherungswert 0,08.

Auch hier hat der Koppelungskoeffizient infolge der Versuchsanordnung von Reihe zu Reihe zugenommen.

Wie schon oben erwähnt, liegen die Resonanzstellen bei gedeckten Röhren anders, sie sind gegen die bei offenen Röhren nach dem Pfeifenkopf zu verschoben. Entnimmt man aus den Tab. 4 und 6 die Größe dieser Verschiebung d, so ergeben sich als Mittelwerte der einzelnen Versuchsreihen folgende Zahlen:

Tabelle 8.

	d	d'	$\lambda/4$
eg_2	27,4	26,9	27,7
eg_3	29,0	28,5	27,7
eg_4	28,8	28,3	27,6
eg_5	29,3	28,8	27,9
eg_6	28,8	28,3	28,2

Von dieser Größe d ist die Korrektion für das eine offene Ende — gleich 0,5 cm — in Abzug zu bringen, da bei den letzten Versuchen die Röhren auf einer Seite gedeckt waren. Die korrigierten Werte d' stehen in Spalte 3. Vergleicht man sie mit den aus Tab. 7 entnommenen Angaben für $\lambda/4$, so findet man eine gute Übereinstimmung. *Die Resonanzstellen gedeckter Röhren liegen also gegen die offener Röhren um eine Viertelwellenlänge des Eigentones der Zungenpfeife verschoben, genau so wie es der Theorie entspricht.*

Alle 7 Versuche wurden auch bei Verlängerung der Ansatzröhren ausgeführt. Bei $e\,g_1$ und $e\,g_2$ ergab sich kein Unterschied, dagegen trat bei den übrigen wieder das Ziehen des Tones auf. Die Erscheinung war vollkommen dieselbe wie bei offenen Resonanzröhren.

c) Vergleich mit der Theorie.

Wir wollen nun noch die Tonhöhe der Koppelungsschwingung betrachten. Auf S. 258 ist ein Beispiel für $p = 312$, $\tau = 0{,}13$ und die Korrektion für die offenen Enden $\alpha + \beta = 6$ cm berechnet worden. Dies entspricht den Verhältnissen der ersten Versuchsreihe e_4, aber nur an der ersten Resonanzstelle, da der Koppelungskoeffizient für die folgenden abnimmt. Wir wollen den ersten Teil der berechneten Kurve mit dem entsprechenden Teil der Reihe e_4 vergleichen; vgl. Tab. 9.

Tabelle 9.

l	n_1	e_4	l	n_1	e_4
20	310	312	55	322	319
25	309	310	60	319	317
30	308	308	65	316	314
35	306	306	70	315	312
40	304	303	75	314	311
45	300	299			
49	291	291			
	332	323			

Dabei ergibt sich eine hinreichende *Übereinstimmung der berechneten und der beobachteten Schwingungszahlen* mit Ausnahme der höchsten Töne, für die die beobachteten Werte merklich kleiner sind als die berechneten. Es scheint, wie schon oben erwähnt, als ob der obere Teil der Koppelungskurve nicht voll ausgebildet ist, zumal da auch eine genauere Berechnung mit Benutzung quadratischer Glieder nicht genügt, die Differenz zu erklären. Eine Untersuchung aller Beobachtungen ergibt, daß im allgemeinen die Vertiefung an der Resonanzstelle größer ist als die Erhöhung. Eine Gesetzmäßigkeit läßt sich aber weder zwischen noch in den Reihen erkennen. Es finden sich sogar Stellen mit größerer Erhöhung. Vermutlich spielt dabei die Phase zwischen der Schwingung der Zunge und der Schwingung der Luft eine Rolle. Doch sind

für eine solche Untersuchung die Beobachtungen nicht genau genug, zumal an der Resonanzstelle die Schwingungszahl sich leicht ändert und schwer zu bestimmen ist.

Es bleibt nun noch eine Betrachtung der Tonhöhe für kleine Längen des Ansatzrohres, etwa von 0 bis $\lambda/4$. Nach der Theorie muß sich die Koppelungsschwingung bei Entfernung von der Resonanzstelle dem Eigenton des Systems 1 nähern. In Wirklichkeit trifft dies nur bei gedecktem Ansatzrohr zu. Bei offenem dagegen geht der Ton bei abnehmender Röhrenlänge durch den Eigenton der Zunge hindurch und gibt bei kurzem Ansatzrohr höhere Töne und zwar um so höher je größer die Bohrung des Korkes im Ansatzrohr wird. Ist kein Korkring mehr darin und das Seitenloch ganz offen, so gibt die Pfeife den höchsten Ton. Dieser wird wieder tiefer, wenn die seitliche Öffnung geschlossen wird. Hieraus und aus der Tatsache, daß bei gedecktem Rohr die Erscheinung überhaupt nicht auftritt, ersieht man, daß sie vermutlich auf die größere durch die Pfeife strömende Luftmenge zurückzuführen ist.

Schließlich ist noch einiges über das *Aussetzen des Tones* zu sagen, das trotz konstanten Anblasedruckes und gleicher Öffnung hinter der Kanüle bei bestimmten Längen des Ansatzrohres auftritt. Überblicken wir nochmals die Versuchsreihen. Bei e_6 entsteht der Ton für jedes beliebige Resonanzrohr, bei e_7 verlischt er an den beiden ersten, bei e_8 an allen Resonanzstellen. Da sich die Versuche nur durch den Grad der Koppelung unterscheiden, so ergibt sich, daß eine engere Koppelung das Verlöschen des Tones begünstigt. Der Anblasedruck ist dabei insofern von Einfluß, als er, worauf schon bei den Vorversuchen hingewiesen wurde, die Tonbereiche vergrößert. Z. B. entstand bei dem Versuch mit Zunge 8 zwischen 54 und 57 cm kein Ton. Steigerte man aber den Druck, so tönte die Pfeife und es fand ein Tonsprung statt. Viel mehr als durch Drucksteigerung kann man die Tonbereiche durch Ziehen des Tones vergrößern; doch hierüber erst später.

Die Erklärung ist etwa folgende: Bei dieser Art der Erzeugung ungedämpfter Schwingungen mit Rückkoppelung ist es notwendig, daß das System wenig gedämpft ist, da die Möglichkeit des Entstehens einer Schwingung von der Dämpfung

abhängig ist. Nun wird durch die Koppelung der wenig gedämpften Zunge mit der stark gedämpften Luftsäule die freie Koppelungsschwingung so stark gedämpft, daß unter Umständen keine Anregung der Schwingung erfolgt. Dies gilt besonders für die Umgebung der Resonanzstelle. Denn während die Dämpfung der Zunge durch die Koppelung bei stärkerer Verstimmung gering ist, nimmt sie im Resonanzfalle plötzlich stark zu. Die Zungenpfeife spricht daher nicht an. Je enger die Koppelung, desto breiter wird die Stelle, wo die Pfeife nicht tönt. Durch Steigerung des Anblasedruckes wird das Entstehen der Schwingung begünstigt.

Einfluß der Röhrenweite.

Um den Einfluß der Röhrenweite zu untersuchen, wurden auch Versuche mit sehr engen Röhren ($d = 6$ mm) und sehr weiten ($d = 44$ mm) angestellt. Bei sehr engen Röhren ergibt die graphische Darstellung (Fig. 22) dieselbe Art der Rückwirkung des Resonanzrohres auf die Zunge, wie sie die früheren

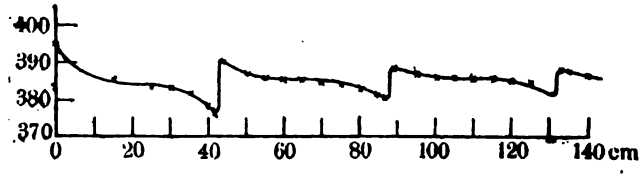


Fig. 22.

Beobachtungsreihen mit loser Koppelung zeigten. Die stärksten Änderungen der Tonhöhe, die schnell, aber noch stetig erfolgen, liegen bei 132, 88 und 43 cm. Daraus folgt als Eigenton der Pfeife 385,5. Es ergeben sich für die Koppelungskoeffizienten die Werte: 0,05; 0,03; 0,02. Es sei noch darauf hingewiesen, daß auch hier bei sehr kurzem Ansatzrohr der Ton sehr hoch ist.

Versuche mit weiten Röhren ergaben ebenfalls genau die gleichen Erscheinungen wie die mit engen Röhren. Nur in einer Beziehung weichen sie von den Beobachtungen mit offenen engen Röhren ab: das ist *die absolute Lage der Resonanzstellen.* Früher lagen die Resonanzstellen aller Beobachtungsreihen etwa bei geraden Vielfachen der Viertelwellenlänge. Bei weiten Röhren liegen sie ganz anders. Wir wollen ihre Lagen für die erste Stelle jeder Versuchsreihe vergleichen; Tab. 10.

Tabelle 10.

Reihe	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
l	26	37	44	39	32

Die Resonanzstellen verschieben sich mit *loser* werdender Koppelung erst nach außen, dann nach innen. Da sich die Koppelung stets in demselben Sinne ändert, so muß ein anderer Grund für die Verschiebung der Resonanzstellen vorhanden sein. Vergleicht man ihre Lage mit den Wellenlängen des zugehörigen Eigentones, so liegt der Tonsprung in w_1 etwa bei ein Viertel der Wellenlänge ($\lambda/2 = 54$ cm), nähert sich aber bei w_3 schon der halben Wellenlänge. Tonsprünge, die bei ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge erfolgen, fanden wir schon bei gedeckten Ansatzröhren. Daß hier dieselbe Ursache vorliegt, zeigt folgende Überlegung. Der Querschnitt des Ansatzrohres beträgt 660 qmm, der der Kanüle 104 qmm. Nur an dieser kleinen Fläche hat also die Luft des Ansatzrohres Kommunikation mit der äußeren Luft. Wir müssen das Resonanzrohr bzw. Verteilungsrohr an der Stelle, wo es an die Kanüle angesetzt ist, als *teilweise gedeckt* ansehen. Wird aber das Seitenloch geöffnet, so findet auch durch dieses eine Kommunikation der Luft des Ansatzrohres mit der äußeren statt. Das Rohr nähert sich einem an beiden Enden offenen Rohr um so mehr, je größer die seitliche Öffnung wird. Dadurch verschiebt sich die Resonanzstelle nach außen in die Nähe der halben Wellenlänge. Sie wandert von 26 nach 37 und 44 cm. Warum rückt sie aber bei w_4 und w_5 wieder nach innen? Erinnern wir uns, daß bei diesen Versuchen, um eine losere Koppelung herzustellen, Korkringe am Anfang des Rohres eingesetzt waren, wodurch sich dieses wieder einem gedeckten Rohre näherte. Die Resonanzstelle muß also nach innen wandern, um so mehr, je kleiner die Bohrung im Korkring wird. Durch weitere Versuche wurde diese Erklärung bestätigt.

Durch diese Experimente klärt sich der auffallende Widerspruch in den Beobachtungen von Weber und Willis: Weber findet die Tonsprünge bei Vielfachen der halben, Willis bei ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge. Ein eingehender Vergleich der Versuchsanordnung ergibt, daß bei beiden die Windzuführung, Befestigung und Lage der Zunge einander vollkommen entsprachen und nur die Röhrenweite verschieden

war. Sie betrug bei Weber 9,8—12,4 mm, bei Willis 33 mm. Die von mir benutzten engen Röhren waren 11,5 mm weit und zeigten Tonsprünge bei Vielfachen der halben Wellenlänge wie bei Weber. Die weiten Röhren waren 29 mm weit und zeigten im Falle der engsten Koppelung Tonsprünge bei ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge wie bei Willis. Die engste Koppelung kommt allein zum Vergleich mit Versuchen früherer Autoren in Betracht, da diese seitliche Öffnungen hinter der Kanüle nicht benutzten.

Versuche mit Resonatoren.

a) Resonator mit veränderlicher Öffnung.

Statt der bisher benutzten zylindrischen Röhren sollten nun kubische Resonatoren mit der Zungenpfeife gekoppelt werden. Dazu wurde eine Kugel aus Zinkblech ($R = 40{,}6$ mm) benutzt mit einer Öffnung, die durch eine Irisblende beliebig verändert werden konnte, so daß der Eigenton des Resonators in ziemlich weiten Grenzen variabel war. Dieser Resonator wurde mit seiner Öffnung der Kanüle des Pfeifenkopfes in 1 mm Abstand gegenüber gestellt. Die Zungenpfeife wurde wieder mit dem konstanten Druck von 140 mm angeblasen und ihre Tonhöhe für verschiedene Öffnungen der Irisblende (Durchmesser d in mm) bestimmt.

Bei der graphischen Darstellung hatten wir bisher auf der Abszissenachse die zunehmenden Längen der Ansatzröhren aufgetragen, was einer Vertiefung des Tones entspricht. Analog müssen wir nun die abnehmenden Durchmesser der Irisblende auftragen. Wir erhalten (r_1 in Fig. 23) bei tiefer werdendem Resonator ein Sinken der Tonhöhe bis zu einem Minimum, dann einen raschen Anstieg bis über den Anfangswert hinaus und schließlich wieder eine langsame Abnahme der Tonhöhe. Die Kurve ist etwa dieselbe wie bei zylindrischen Röhren im Falle loser Koppelung. Bei Vergrößerung des Abstandes zwischen Resonator und Pfeifenkopf wurde die Änderung der Tonhöhe noch geringer. Wurden dagegen Resonator und Pfeifenkopf einander mehr genähert, so wurde der Austritt der Luft aus

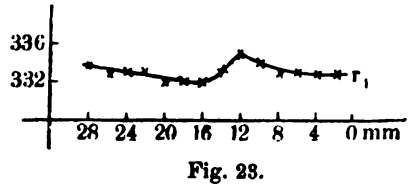


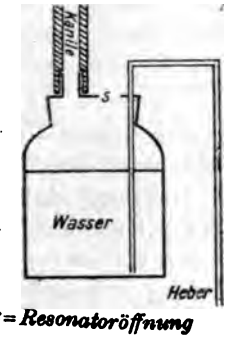
Fig. 23.

der Kanüle gehindert. Daher war es mit dieser Anordnung nicht möglich, den Fall enger Koppelung zu untersuchen.

b) Resonator mit veränderlichem Volumen.

Deshalb wurden für die weiteren Versuche Resonatoren mit konstanter Öffnung benutzt, wobei die Tonhöhe durch Änderung des Volumens geändert wurde. Dabei mußte natürlich auf die Kugelform des Resonators verzichtet werden. Die Form des Hohlraumes ist aber, wie Sondhauss nachgewiesen hat, nicht wesentlich für die Tonhöhe.

Eine Chemikalienflasche, die etwa 90 mm innere Weite hatte, wurde durch eine dicke Metallplatte luftdicht verschlossen. Im Deckel befanden sich 2 runde Öffnungen: die eine war 160 qmm, die andere 113 qmm groß. Auf den Rand der letzten wurde ein kurzes Messingrohr gelötet, um damit den Resonator an den Pfeifenkopf fügen zu können. Zur Änderung des Volumens wurde durch den Deckel luftdicht ein Heberrohr mit Hahn geführt, durch das Wasser ein- und ausfließen konnte; Fig. 24.



s = Resonatoröffnung

Fig. 24.

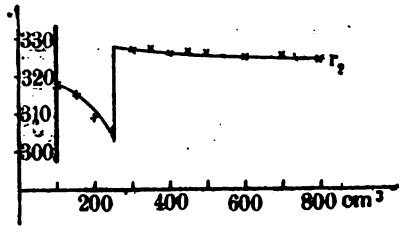


Fig. 25.

Zur Darstellung des Ergebnisses (Fig. 25) müssen auf der Abszissenachse zunehmende Volumina des Resonators aufgetragen werden. Der Verlauf der Erscheinung ist wieder der gleiche: Mit tiefer werdendem Eigenton des Resonators wird der Ton rasch tiefer, um an der Resonanzstelle plötzlich in einen hohen Ton umzuschlagen, der dann seinerseits allmählich tiefer wird. Eine genaue Durchrechnung ist hier nicht möglich, weil man die Eigentöne der Einzelsysteme nicht bestimmen kann. Eine angenäherte Berechnung ergibt, als Koppelungskoeffizienten 0,13.

Die Versuche r_1 (mit loser Koppelung) Fig. 23 und r_2 (mit fester Koppelung) Fig. 25 zeigen, daß *bei Verwendung kubischer Resonatoren dieselben Erscheinungen auftreten, wie sie bei zylindrischen Röhren beobachtet wurden.*

Da bei den kubischen Resonatoren die von **Weber** vermutete Ursache des Tonumschlagens — hoher Ton: offene Pfeife, tiefer Ton: gedeckte Pfeife — fortfällt, so beweist dies am besten die Unrichtigkeit der Weberschen Theorie und die Richtigkeit der Koppelungstheorie.

Das Ziehen des Tones.

Schon mehrfach wurde in den vorhergehenden Kapiteln darauf hingewiesen, daß bei Verlängerung der Ansatzröhren das Umschlagen des Tones nicht an derselben Stelle wie bei Verkürzung erfolgt, sondern später. Auf diese merkwürdige Erscheinung, die als „Ziehen des Tones" bezeichnet worden war, soll wegen ihrer Analogie zu elektrischen Erscheinungen kurz eingegangen werden.

Es sei bei Verkürzung der Ansatzröhren ein Sprung vom hohen zum tiefen Tone bei der Länge l beobachtet worden. Verlängerte man nun die Röhre allmählich und hielt dabei den Druck des erregenden Luftstromes möglichst konstant, so schlug der tiefe Ton nicht bei der Länge l in den vorher beobachteten Ton um, sondern er blieb über l hinaus bestehen und wurde dabei noch tiefer. Erst dann erfolgte das Umschlagen nach oben auf die Tonhöhe, die vorher bei dieser Röhrenlänge beobachtet worden war. Die so erzeugten Töne waren leise und schwankten in der Tonstärke. Sie schienen sogar auszusetzen. Auch erfolgte der Tonsprung nicht immer an genau derselben Stelle. Seine Lage war stark abhängig vom Luftdruck und von der Schnelligkeit, mit der man die Röhren verlängerte. Bei den Versuchsreihen mit loser Koppelung, wo der Übergang zwischen den höchsten und tiefsten Tönen allmählich erfolgte, war ein Ziehen des Tones nicht zu beobachten. An Resonanzstellen, wo der Ton aussetzte, äußerte sich die Erscheinung darin, daß der Ton, der bei Verkürzung der Röhren bei der Länge l eingesetzt hatte, bei Verlängerung erst bei einer größeren Länge verstummte.

Wir wollen in Tab. 11 die Beträge zusammenstellen, um die sich der Ton in den Versuchsreihen e_3 bis e_6 ziehen ließ.

Tabelle 11.

	e_3	e_4	e_5	e_6
1. Resonanzstelle	3	7	12	8
2. „	4	8	12	18
3. „	3	12	11	29
4. „	4	10	15	29
5. „	6	10	15	23
6. „	6	13	13	—
Mittelwert z	4,3	10	12,8	21,4 cm

Da der Tonsprung nicht immer an derselben Stelle erfolgte, so zeigen die Beträge des Ziehens ein unregelmäßiges Bild. An den Mittelwerten der einzelnen Versuchsreihen erkennt man aber deutlich, daß das Ziehen von e_3 bis e_6, d. h. mit enger werdender Koppelung zunimmt, vgl. die Figg. 26—29.

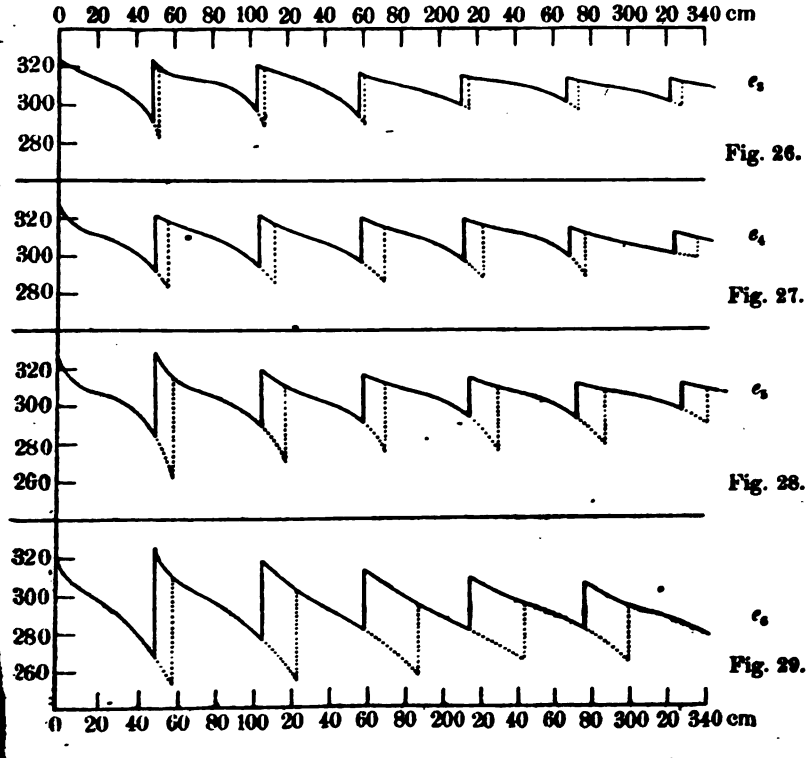


Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

Fig. 29.

Dieselbe Berechnung ergibt für die Beobachtungen mit engen gedeckten Röhren:

Tabelle 12.

Reihe	eg_3	eg_4	eg_5	eg_6
x	5,3	9,8	9,2	19,8

mit weiten Röhren:

Tabelle 13.

Reihe	w_5	w_4	w_3	w_2
x	0,5	1,5	4,5	14

Auch hier *nimmt das Ziehen mit enger werdender Koppelung zu.* Die Erklärung des Vorganges ist etwa folgende: Die wirklich vorhandene Schwingung unterdrückt völlig die andere. Sie ist stabil und dauert auch noch an, wenn eigentlich die andere — beim Einsetzen als freie Schwingung — vorherrschend wäre. Dieser Zustand ist natürlich labil. Wenn die Änderung der Röhrenlänge nicht sehr langsam erfolgt oder wenn Schwankungen des Luftdruckes auftreten, schlägt der Ton sofort um. Es ist auch leicht einzusehen, daß das Ziehen mit enger werdender Koppelung zunimmt. Bei enger Koppelung sind die Tonsprünge sehr groß, die Dämpfungen in der Nähe der Resonanz annähernd gleich. Es bedarf starker Verstimmung, bis ein hinreichender Unterschied der Dämpfungen der beiden Koppelungsschwingungen vorhanden ist, so daß ein Tonsprung erfolgen kann.

Zusammenfassung.

W. Weber erklärt das Verhalten einer Zungenpfeife beim Ansetzen zylindrischer Röhren, insbesondere das Umspringen des Tones bei bestimmten Röhrenlängen durch die Annahme, daß die Zungenpfeife sich bei dem hohen Ton wie eine offene, bei dem tiefen Ton wie eine gedeckte Pfeife verhalten soll. Diese Theorie genügt nicht zur Erklärung aller von Weber selbst beobachteten Erscheinungen und steht in Widerspruch zu den eingehenden Untersuchungen von Willis.

In der vorstehenden Arbeit ist der Versuch gemacht worden, die Zungenpfeife als gekoppeltes System von Zunge einerseits und Röhre andererseits aufzufassen und die Gesetze der Koppelungsschwingungen darauf anzuwenden unter der Annahme, daß von den beiden freien Koppelungsschwingungen in der

Regel die weniger gedämpfte die „tonangebende" ist. Indem der die Schwingungen unterhaltende Luftstrom durch die Zunge reguliert wird, entsteht so eine erzwungene Schwingung in der Periode der weniger gedämpften der beiden Koppelungsschwingungen. In der Umgebung der Resonanz von Zunge und Röhre, wo die Dämpfungen der beiden Koppelungsschwingungen merklich gleich sind, müssen bei enger Koppelung labile Zustände bezüglich der Tonhöhe auftreten. Die Theorie fordert daher folgenden Verlauf der Erscheinung: Ist die Röhre etwas zu hoch gestimmt, so wird der Ton der Zunge und damit der der Pfeife vertieft. Beim Überschreiten der Resonanz erfolgt eine mehr oder weniger plötzliche Erhöhung des Tones, der sich bei weiterer Verlängerung des Rohres dann wieder vertieft. Die Größe der Tonänderung und die Plötzlichkeit des Tonsprunges hängen von der mehr oder weniger engen Koppelung zwischen Zunge und Rohr ab. Bei noch weiterer Verlängerung der Röhren muß eine entsprechende Änderung der Tonhöhe an der Resonanzstelle zwischen Zunge und erstem Oberton der Röhre auftreten, und die Erscheinung sich dann für jeden weiteren Oberton im Abstande von $\lambda/2$ wiederholen.

Eingehende Versuche ergaben, daß die Tonhöhenänderung der Zungenpfeife genau der Theorie entspricht. Es gelang, durch einen Kunstgriff die Koppelung zwischen Rohr und Zunge willkürlich zu ändern, indem an dem Pfeifenkopf neben der Öffnung zu der Röhre noch eine zweite frei in die Luft mündende Öffnung angebracht wurde. Je größer diese Öffnung im Verhältnis zu der Röhrenöffnung gemacht wurde, um so loser war die Koppelung und um so kleiner und weniger steil der Tonsprung.

Außer mit offenen Röhren wurden auch Versuche mit gedeckten Röhren angestellt: Die Erscheinungen waren die gleichen, nur waren, wie zu erwarten, die Resonanzstellen um $\lambda/4$ verschoben. Durch Versuche mit sehr weiten und sehr engen Röhren wurden auch die scheinbaren Widersprüche zwischen den Ergebnissen von Weber und Willis aufgeklärt. Schließlich wurden auch an Kugelresonatoren die gleichen Tonhöhenänderungen beobachtet.

Das häufig auftretende völlige Aussetzen des Tones an der Resonanzstelle erklärt sich daraus, daß bei Resonanz die Dämpfung der Koppelungsschwingung so hoch wird, daß die Entstehung des Tones an der Resonanzstelle verhindert wird.

Bei loserer Koppelung spricht die Pfeife unter sonst gleichen Umständen wieder an. Die einmal vorhandene Schwingung hat eine gewisse Stabilität; dadurch gelingt es bei langsamer Verlängerung des Rohres, den vorhandenen tiefen Ton ein gewisses Stück über die Resonanzstelle hinaus zu „ziehen", bis dann plötzlich der Ton in den höheren umspringt. Ebenso umgekehrt bei Verkürzung des Rohres: Der hohe Ton läßt sich über die Resonanzstelle hinwegziehen. Dieses Ziehen ist um so mehr ausgebildet, je enger die Koppelung ist.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Physikalischen Institut der Univeristät Jena ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochgeschätzten Lehrer Hrn. Prof. Dr. M. Wien für die Anregung zu dieser Arbeit und das dauernde fördernde Interesse daran meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Jena, Physikalisches Institut der Universität, Oktober 1919.

(Eingegangen 28. Oktober 1919.)

4. *Beiträge zur Kenntnis von Farbe und Polarisation des Himmelslichtes;* *von A. Gockel.*

1. Die Polarisation in Farben.

Messungen der atmosphärischen Polarisation für einzelne Farben und besonders für eng begrenzte Spektralbezirke liegen bis jetzt nur in sehr beschränktem Maße vor. Die meisten sind mit dem Cornuschen Polarimeter unter Vorschaltung von farbigen Gläsern ausgeführt worden. Auch meine eigenen hier zu besprechenden Messungen sind in dieser Weise vorgenommen worden, jedoch unter Benutzung des dem Cornuschen ähnlichen Martenschen Polarimeters und Ersatz der farbigen Gläser durch Wratton-Gelatinfilter, die nur eng begrenzte Spektralbezirke durchlassen, nämlich

α = dunkelrot,	durchlassend	λ 695—682
β = rot	„	668—648
γ = orange,	„	633—610
δ = gelb,	„	607—582
ε = grün,	„	561—520
η = blau,	„	516—467
Θ = violett,	„	470—432

α und Θ sind recht dunkel und die unter Vorschaltung dieser Filter ausgeführten Messungen erreichen nicht die Genauigkeit der anderen. Die Filter wurden zwischen Okular und Auge angebracht. Es wäre vielleicht bequemer gewesen, die Filter vor die dem Himmel zugewandte Öffnung des Instrumentes zu setzen, es zeigte sich aber, daß einige der Filter trotz ihrer geringen Schichtdicke das Himmelslicht nicht unbeträchtlich depolarisierten.

Nach einem von dieser Messungsart abweichenden Verfahren arbeiteten Nichols[1]) und Dorno.[2]) Sie setzten vor

1) L. Nichols, Phys. Rev. **26** S. 497. 1908.

2) C. Dorno, Veröff. des Preuß. Meteor. Institut. Nr. 303. Auszug Meteor. Zt. **36**. S. 109. 1919.

Polarisationsebene desselben abhi
der 1 bis 2 Stunden in Anspruch
gesamten Spektrums beträchtlich
es mindestens zum Teil der Nich
zuschreiben zu dürfen, daß die
denen anderer Forscher so wesent

Das von Nichols und Dorno
trennten Messung der beiden senk
Schwingungskomponenten bietet ge
Cornuschen bzw. Martenschen F
durch die Kenntnis der Helligkeit
die Erklärung der Erscheinung erle
die schwache Polarisation in der
werden kann. Andererseits aber
stellen lassen, daß eine Größe im all
werden kann, wenn sie direkt ge
Quotient zweier anderer notwendi
trächtlichen Messungsfehlern behafte

Diese Erwägung schien mir aus
sung der farbigen Polarisation, weil
in den einzelnen Farben ankommt,
weil diese Unterschiede relativ klein
messen werden müssen. Ich suchte
fahren der beiden genannten Forsc
reichen, daß ich im

Möglichkeit übrigens schon Dember[1]) aufmerksam gemacht hat —, an der Schwierigkeit, das vorgesetzte Nicol so zu zentrieren, daß seine Drehachse streng mit der Achse des Spaltrohres zusammenfiel. Die beiden Schwingungskomponenten erschienen infolgedessen auch dann nicht gleich hell, wenn man unpolarisiertes Licht auf das Nicol fallen ließ. Aus den oben dargelegten Erwägungen verzichtete ich darauf, eine präzisere Vorrichtung anfertigen zu lassen. Da die Polarisation stets kleinen Schwankungen unterworfen ist, so wurde die Messung in der Weise ausgeführt, daß zwischen je zwei Messungen in Weiß 2 bis 3 Messungen in Farben ausgeführt wurden. Diese letzteren wurden dann mit dem arithmetischen Mittel der beiden Messungen in Weiß verglichen, wobei dieses = 100 gesetzt wurde. Natürlich wurde dafür gesorgt, daß während der ganzen Messungsreihe, die etwa eine halbe Stunde in Anspruch nahm, der anvisierte Punkt stets den gewünschten Abstand von der Sonne in Azimut und Höhe beibehielt. Am bequemsten war die Messung am Himmelspol, da der Abstand der Sonne von diesem Punkte als im Laufe eines Tages unveränderlich angesehen werden konnte, es brauchte dann während der Messungsreihe nur die Einstellung auf die mit dem Laufe der Sonne sich ändernde Polarisationsachse nach korrigiert zu werden. Außer an dem genannten Punkte wurde beobachtet im Sonnenvertikal und zwar in der Regel 90° von der Sonne, in dem zum Sonnenvertikal senkrechten Vertikal in verschiedenen Höhen und auf Parallelkreisen zur Sonne, also in derselben Höhe mit dieser, aber in wechselndem Abstand von ihr. Näher als 45° konnte nicht an die Sonne herangegangen werden, weil in größerer Nähe die Polarisationswerte schon so klein sind, daß die Unterschiede in den einzelnen Farben nicht mehr mit der genügenden Sicherheit festgestellt werden können.

Übereinstimmend mit Dember fand ich in den Abständen von der Sonne, in denen ich beobachtete, wenn überhaupt ein Unterschied in den einzelnen Farben zu erkennen war, die Polarisation überwiegend im Blau. Eine stärkere Polarisation im Rot wurde nur zweimal beobachtet, obwohl ich häufig bei trübem Wetter in der Nähe des Horizontes und

[1]) H. Dember, Über die Farbe des Himmels. Ann. der Physik 49, S. 849, 1916.

auch bei teilweise bewölktem Himmel maß. Die Anwesenheit von Teilchen, die zwar noch klein gegenüber dem langwelligen Licht, aber schon groß gegenüber der Wellenlänge der blauen Strahlen sind, scheint mir daher nicht die Ursache des von anderen beobachteten Überwiegens der Polarisation im Blau zu sein. Daß in der Nähe der Sonne, wie Dorno beobachtete, die Polarisation im Rot überwiegt, erklärt sich nach meiner Ansicht leicht durch den Umstand, daß die sonnennahen Teile des Himmels nach der Rayleighschen Theorie direkt nur wenig blaues Licht zurücksenden können, daß das aus der Sonnennähe kommende blaue Licht also vorwiegend solches ist, das von einer anderen Himmelstelle dahin reflektiert wurde und daher infolge der erfahrenen zweimaligen Reflexion negativ polarisiert ist, also die positive Polarisation des aus der Nähe der Sonne stammenden Lichtes herabsetzt.

Wenn in der Nähe der Sonne die positive Polarisation im Rot überwiegt, so müssen auch die neutralen Punkte im Rot der Sonne näher liegen als im Blau. Für den Aragoschen Punkt hat dieses Jensen sowohl als Dember auch gefunden; für den schwerer zu beobachtenden Babinetschen Punkt scheinen keine Beobachtungen vorzuliegen; für den unterhalb der Sonne liegenden Brewsterschen kam dagegen Dember auf Teneriffa zu dem entgegengesetzten Resultat.

Zur Erklärung dieser Erscheinung weist der genannte Forscher darauf hin, daß das sekundär zerstreute, also negativ polarisierte Licht in den unteren Atmosphärenschichten im Blau stärker ausgelöscht wird als im Rot. Die sekundäre Polarisation ist unterhalb der Sonne also in dem Gebiet der langwelligen Strahlen größer als in dem der kurzwelligen, und der neutrale Punkt wird damit im Rot weiter von der Sonne weggeschoben als im Blau. Es scheint mir noch ein anderer Umstand mitzuwirken. Weiter unterhalb der Sonne, im Gebiet der positiven Polarisation, enthielt, worauf schon der merkwürdige Umstand des Vorhandenseins zweier neutraler Punkte hinweist, das Himmelslicht offenbar sehr viel neutrales, vom Meer her reflektiertes Licht. In diesem vom Horizont herstammendem Lichte muß natürlich wegen der stärkeren Auslöschung der kurzwelligen Strahlen das Rot erst recht überwiegen. Es ist also im Gebiet der positiven Polarisation dem Rot mehr neutrales Licht beigemengt als dem kurzwelligen

Licht, und auch aus diesem Grunde muß der neutrale Punkt im Blau der Sonne näher liegen als im Rot.

Mit dem verschiedenen Verhalten der neutralen Punkte ober- und unterhalb der Sonne bzw. ihres Gegenpunktes stehen auch die Resultate meiner spektralphotometrischen Messungen in guter Übereinstimmung. Geht man von der Sonne bzw. ihrem Gegenpunkt nach dem Zenit zu, so nimmt die Helligkeit ständig ab und der relative Gehalt an blauem Licht zu. Geht man dagegen von der Sonne nach dem Horizont zu, so nimmt auch zunächst die Helligkeit ab und die Blaufärbung zu, aber nur bis zu einer von der Sonnenhöhe abhängigen Entfernung, dann nimmt, wenn man sich weiter dem Horizonte nähert, die Helligkeit wieder zu und die Blaufärbung ab.

Die von Dember gegebene Erklärung des Heranrückens der neutralen Punkte im Blau an die Sonne läßt sich daher auf die oberhalb der Sonne bzw. ihres Gegenpunktes liegenden neutralen Punkte nicht anwenden.

In einer Atmosphäre, in der alle Teilchen klein sind gegenüber der Wellenlänge des Lichtes, müßte die Polarisation auch in größerer Entfernung von der Sonne für alle Wellenlängen die gleiche sein. Tatsächlich habe ich dieses Verhalten auch z. B. in der reinen Atmosphäre der nur mit wenigen menschlichen Wohnungen bevölkerten Göscheneralp (1760 m) an dem dunkelblauen wolkenlosen Himmel in 84° Abstand von der Sonne an einem Septembertage beobachtet. Aber auch in Freiburg waren öfters die Unterschiede der Polarisationen in den einzelnen Farben geringer als die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, die bei hohen Polarisationswerten auf etwa 2 Proz. der beobachteten Größen, bei niederen aber relativ höher veranschlagt werden müssen. Auch Jensen fand bei den wenigen Messungen, die er unter Vorschaltung farbiger Gläser anstellte, keinen Unterschied zwischen der Einstellung im Rot und im Grün, und auch Hurion konnte nur geringe Differenzen feststellen, die in der Mehrzahl der Fälle, wie es auch bei meinen Beobachtungen der Fall war, dahin gingen, daß die Polarisation im Blau etwas größer war als die im Rot. Nun ist allerdings zu beachten, daß die von den beiden Forschern angewandten Gläser viel weniger monochromatisch waren als die von mir angewandten Wratton-Filter. Cornu

fand bei Vorschaltung eines kobaltblauen Glases höhere Werte der Polarisation als bei Vorschaltung eines roten Glases.

Bei Ausschaltung der Tage mit dunstigem Wetter oder beginnender Bewölkung fand ich in Freiburg folgende Mittelwerte:

Filter	0 (weiß)	α (rot)	β	γ	δ	ε	η	Θ (violett)
	100	96	96	97	98	98	101	102

Auf der Göscheneralp erhielt ich im Mittel der über drei vollkommen klare Tage sich erstreckenden Beobachtungen:

Filter	0 (weiß)	α (rot)	β	γ	δ	ε	η	Θ (violett)
	100	97	100	100	98	100	100	102

Abgesehen von einigen noch besonders zu besprechenden Fällen sank auch in Freiburg der Anteil der Polarisation im Rot nicht unter 95 Proz. und stieg der im Violett nicht über 105.

Pernter fand in Wien an dem von ihm als erträglich blau bezeichneten Himmel im Mittel, wobei ich eine Messung an einem 49° von der Sonne entfernten Punkt unberücksichtigt ließ,

Weiß	Rot	Grün	Blau
100	90	106	100

und bei stark weißlichem Himmel:

Weiß	Rot	Grün	Blau
100	111	99	90

Die Unterschiede in den einzelnen Farben sind also an dem offenbar immer stark schmutzigen Himmel der Großstadt im Mittel beträchtlich größer als in Freiburg.

Dorno in Davos, der unter Vorschaltung farbiger Gläser die Polarisation in Rot und Grün, und zeitweise auch in Blau maß, hat in größerer Entfernung von der Sonne ähnliche Werte erhalten wie ich.

Einen Einfluß der Himmelsstelle, abgesehen von dem bereits erwähnten der Sonnenentfernung oder der Jahres- und Tageszeiten auf die Unterschiede der Polarisation in den einzelnen Farben festzustellen, war mir bei der Kleinheit dieser Unterschiede nicht möglich, während es nach den von Dorno[1]) mitgeteilten Zahlen scheint, als ob diese Unterschiede in Hori-

1) C. Dorno, a. a. O., Tab. 35.

zontnähe in der Regel größer seien als in größeren Höhen. Deutlich ergibt sich dagegen, wie schon aus dem bis jetzt Gesagten hervorgeht, aus meinen Beobachtungen der Einfluß der Lufttrübung. Der größte Unterschied zwischen Polarisation in Violett und Rot wurde erhalten, wenn dichter Dunst die Gegend bedeckte, oder in der kalten Jahreszeit unmittelbar nach dem Auflösen des Vormittagsnebels.

So wurde z. B. am 22. XI. 1918 Nachmittags 3^{30} bei dichter Dunstschicht am Horizont beobachtet

Filter	α	β	γ	δ	ε	η	Θ
	87	91	89	97	115	116	134,

in einer leichten Dunstschicht und wie eben in einer Höhe von 10^0 und 90^0 vom Sonnenvertikal am 6. VIII. 1919

Filter	α	γ	ε	Θ
	90	92	94	113.

Daß eine Trübung in der Atmosphäre die Unterschiede in der farbigen Polarisation erhöht, steht in gutem Einklang mit den Ergebnissen der Laboratoriumsversuche.

v. Hauer[1]) fand, daß Zusatz von Stärkekörnchen (Korndurchmesser 8—40 μ) zu seiner Mastixlösung erstens die Polarisation herabsetzte und zweitens ihr Maximum in das Blau verschob. Ähnlich wirkten Kreidezusatz und ebenso durch einen kräftigen Luftstrom erzeugte Luftbläschen.[2])

In einer schwach getrübten Atmosphäre muß das Überwiegen der Polarisation in Blau gegenüber der in Rot noch schärfer ausgeprägt sein, als in einer mit einfarbigem Licht beleuchteten trüben Lösung; denn es kommt hinzu, daß das blaue Licht erst durch die notwendig mit Polarisation verbundene Zerstreuung an kleinsten Teilchen entsteht, während in dem an gröberen Teilchen diffus reflektierten und daher nicht polarisierten Licht Rot überwiegt. In diesem Punkte stimme ich mit Nichols überein, der auch darauf hinweist, daß die größten Teilchen unpolarisiertes (vielleicht besser gesagt schwach polarisiertes) Licht reflektieren, dessen Intensität gegenüber dem an sehr kleinen Teilchen reflektierten im Rot

1) F. v. Hauer, Ann. d. Phys. 57. S. 145. 1918.

2) Die das Maximum in das Blau und nicht, wie es a. a. O., S. 155, unterste Zeile infolge eines Druckfehlers heißt, in das Rot verschieben.

größer ist als im Blau. Das an weißlichem Himmel beobachtete Maximum der Polarisation im Rot erklärt Pernter — und Nichols schließt sich ihm an — durch die Anwesenheit von Teilchen, deren Durchmesser groß gegenüber der Wellenlänge des kurzwelligen aber nicht mehr gegenüber der des roten Lichtes ist. Diese Auffassung scheint mir aus verschiedenen Gründen unhaltbar. Erstens sind die Durchmesser der in der Atmosphäre in Betracht kommenden Teilchen, nämlich der ersten Kondensationsprodukte, groß auch gegenüber der Wellenlänge des roten Lichtes (vgl. die Zusammenstellung in dem Lehrbuch von v. Hann, wo als kleinste Durchmesser 6 μ, von den meisten Beobachtern weit größere angegeben sind), zweitens gilt das Rayleighsche Gesetz doch nur für Teilchen, die klein gegenüber der Wellenlänge des Lichtes und nicht für solche, deren Durchmesser schon von der Größenordnung dieser Wellenlänge sind; an solchen findet, wie Untersuchungen von H. Wyrsch in meinem Laboratorium beweisen, die Reflexion nach den gewöhnlichen Gesetzen statt. Nichols will die Perntersche Erklärung auch auf das von ihm gefundene Maximum der Polarisation im Grün anwenden, dagegen hat schon v. Hauer (a. a. O.) eingewendet, daß die Wellenlängen des grünen und blauen Lichtes gar nicht so sehr verschieden sind. Ich vermute, daß das von Nichols gefundene Maximum im Grün, von anderen möglichen Fehlerquellen abgesehen, ihm nur dadurch vorgetäuscht wurde, daß sich die Polarisation während der langen Dauer seiner Messung erheblich änderte. Pernter hat auch in 90° Entfernung von der Sonne im Sonnenvertikal wiederholt das Maximum der Polarisation im Rot beobachtet. Die Reihe, welche die extremsten Werte lieferte, ist folgende:

weiß	rot	grün	blau
[100	132	103	75

Ich selbst habe ein Maximum der Polarisation im Rot nur dreimal und zwar jedesmal bei stark dunstigem Wetter an einem schmutzig blauen, sich 1—2 Stunden nach der Beobachtung teilweise mit Cu oder Ci bedeckendem Himmel beobachtet. An einem solchen Himmel findet aber überhaupt keine Diffraktion nach Rayleigh statt. Was von blauem Licht hier reflektiert wird, stammt vorwiegend von anderen Himmelsstellen und ist daher durch sekundäre Zerstreuung depolarisiert.

Auch wird von diesem Licht, das auch von einer weit über der Dunstschicht liegenden Himmelsstelle herrühren kann, auf seinem Weg durch die Atmosphäre mehr blaues als rotes Licht absorbiert, so daß sich dem in der Dunstschicht reflektierten, schwach polarisierten Licht mehr polarisiertes rotes als blaues hinzuaddiert.

Ähnliche Verhältnisse wie hier in der Atmosphäre müssen auch bei den Versuchen Bocks[1]) im Dampfstrahl vorgelegen haben, weil das rote Licht polarisiert, das blaue aber unpolarisiert gefunden wurde. Teilchen von 0,9 μ Durchmesser müssen, wie Pernter schon hervorgehoben hat, nach den gewöhnlichen Gesetzen reflektieren. Die starke Polarisation hat offenbar nicht an den Wassertröpfchen, sondern an den Dampfmolekülen stattgefunden. Das polarisierte blaue Licht, das am stärksten zerstreut wird, wird offenbar, wie es auch in den von v. Hauer untersuchten stark konzentrierten Mastixlösungen der Fall war, durch die sekundäre Zerstreuung stärker depolarisiert als das rote. Immerhin scheinen mir einige der Bockschen Resultate noch einer Aufklärung durch weitere Versuche bedürftig, die eine reinlichere Scheidung der einzelnen hier im Spiele befindlichen Faktoren ermöglichen.

Recht gut mit meinen Resultaten stimmen die Piltschikoffs[2]) überein. Auch er fand bei Vorschaltung von Rubin- und Kobaltgläsern vor das Cornusche Polarimeter, an dem 90° von der Sonne im Sonnenvertikal gelegenen Punkte, den größeren Wert der Polarisation im Blau und zwar ist die gefundene Differenz um so größer, je kleiner die Polarisation, d. h. je trüber die Atmosphäre ist.

Ob bei der Mannigfaltigkeit der bei der Erklärung der Erscheinung in Betracht zu ziehenden Faktoren Untersuchungen über die Unterschiede der Polarisation in den einzelnen Werten zurzeit der hohe Wert zukommt, den Jensen ihnen beilegen will, scheint mir zweifelhaft. Auf jeden Fall sollten solche Untersuchungen mit Messungen der Helligkeit der einzelnen Farben verbunden sein. Über die Resultate meiner eigenen einschlägigen spektralphotometrischen Messungen gedenke ich in einem folgenden Aufsatz zu berichten.

---

1) A. Bock, Wied. Ann. 68. S. 674. 1899.
2) N. Piltschikoff, Compt. rend. 115. S. 555. 1892.

Zusammenfassung.

1. In einer reinen Atmosphäre sind die Unterschiede der Polarisation in den einzelnen Farben kleiner als die Beobachtungsfehler.

2. Mit zunehmender Trübung wächst die Polarisation in kurzwelligem Licht gegenüber der in langwelligem. Das Maximum liegt im Violett, das Minimum im Rot.

3. An Himmelsstellen, an denen durch Diffraktion kein oder wenig Blau entstehen kann, also in der Nähe der Sonne und in einer Dunstschicht, überwiegt die Polarisation im langwelligen Teil des Spektrums.

Freiburg, Schweiz. November 1919.

(Eingegangen 18. November 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 12.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Über die Dispersion von Wasser und Äthylalkohol zwischen 7 und 35 mm Wellenlänge und Vorversuche zur Verwendung noch kürzerer elektrischer Wellen;*

von Willy Möbius.

(Leipziger Habilitationsschrift.)

Inhaltsübersicht: 1. Einleitung. — 2. Versuchsanordnung. — 3. Sendereinrichtung. — 4. Empfängereinrichtung. — 5. Wellenlänge. — 6. Die übergelagerten kleinen Wellen. — 7. Absorption. — 8. Reflexion. — 9. Brechung. — 10. Ergebnisse der Dispersionsuntersuchung. — 11. Zusammenfassung.

1. *Einleitung.* Die vorliegenden Untersuchungen wurden noch vor dem Kriege durchgeführt, Ende 1914 aber infolge Eintritts ins Heer abgebrochen. Sie wurden begonnen in der Absicht, elektrische Schwingungen von sehr kleiner Wellenlänge, zwischen 4 mm und 0,3 mm, zu erzeugen und die Dispersion des Wassers und Äthylalkohols in diesem Gebiete zu untersuchen. 0,3 mm war die obere Grenze des von Rubens[1]) erforschten ultraroten Spektrums, 4 mm die untere Grenze der Lampaschen Messungen[2]), der kürzesten damals bekannten elektrischen Wellen. Auch Lebedew[3]) berichtet über Erzeugung kleiner Wellen von 6 mm Länge, hat aber Wasser und Alkohol nicht untersucht. Nach Angabe Liebreichs[4]) hat O. von Baeyer Wellen von 2 mm Länge hergestellt. Außer dieser Bemerkung war aber in der Literatur nichts hierüber zu finden.

Das Brechungsverhältnis des Wassers war im Rubensschen Gebiete noch nicht viel größer als im sichtbaren Spek-

1) H. Rubens und O. von Baeyer, Sitzungsber. d. preuß. Akademie. 1911. S. 339 u. 666.

2) Anton Lampa, Wiener Ber. 105. S. 587 u. 1049. 1896.

3) Peter Lebedew, Wied. Ann. 56. S. 1. 1895.

4) Erik Liebreich, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 12. S. 205. 1915.

trum. Lampa fand Werte in der Nähe der Wurzel aus der Dielektrizitätskonstante. Der gesuchte Absorptionsstreifen des Wassers im Gebiete kurzer elektrischer Wellen war also zunächst zwischen $\lambda = 4$ mm und $\lambda = 0{,}3$ mm zu erwarten. Später ist noch eine Arbeit von Eckert[1]) erschienen, der die Dispersion von Wasser und Alkoholen für die Wellenlängen 88, 57, 37 und 17,5 mm untersuchte. Er fand in der Richtung von großen nach kleinen Wellen für Wasser zunehmende Absorption und abnehmendes Brechungsverhältnis und nimmt an[2]), daß sich in der Nähe seiner kleinsten Welle ein Absorptionsstreifen befindet und jenseits davon das Brechungsverhältnis wieder ansteigt zu den hohen Lampaschen Werten.

Schon die ersten Versuche, unter Anlehnung an Lebedew[3]) und Lampa mit so kleinen Wellen zu arbeiten, zeigten, daß dies erhebliche Schwierigkeiten bietet. Mit abnehmender Größe der Sender nimmt die Stärke der erzeugten Schwingungen rasch ab. Ferner sind sehr kleine Sender schwer herzustellen und nutzen sich rasch ab. Auch die Notwendigkeit, sie zu einem großen Teile ihrer Länge in ein Dielektrikum als Träger einzubetten, ist der Erreichung kleiner Wellenlängen hinderlich. Wird dieses zu dünn gewählt, so wird es oft glatt durchschlagen. Dazu kam, daß die ersten, nach Lebedews Angaben hergestellten Sender nicht die von diesem gefundene kleine Wellenlänge ergaben, sondern eine erheblich größere, der berechneten (vgl. S. 301) Grundschwingung entsprechende.

Es wurde daher allmählich zu immer größeren Wellenlängen übergegangen, um so mehr, als das Erscheinen der erwähnten Eckertschen Arbeit auf die Wahrscheinlichkeit eines Absorptionsstreifens zwischen 4 und 37 mm Wellenlänge hindeutete. So ist das bisher vorliegende Ergebnis im wesentlichen eine Untersuchung der Dispersion von Wasser und Äthylalkohol für Wellen von 7 bis 35 mm Länge geworden. Zwischen diesen Grenzen wurden so viele Wellenlängen untersucht, daß ein vorhandener Absorptionsstreifen nicht mehr entgehen konnte. Bei dem allmählichen Übergang zu größeren

1) Fritz Eckert, Über anomale Dispersion im Gebiete kurzer elektrischer Wellen, Berliner Dissertation 1913. Die Arbeit enthält auch einschlägige Literaturangaben.

2) Fritz Eckert, a. a. O. S. 27.

3) Peter Lebedew, a. a. O.

Wellen wurde die optische Einrichtung, die für sehr kleine Wellenlängen gebaut war und daher auch nur kleine Spiegel und Gefäße für Absorption und Reflexion und kleine Entfernungen zwischen den einzelnen Apparaten vorgesehen hatte, beibehalten. Es ist daher beabsichtigt, die Versuche noch einmal mit einer, den größeren Wellen mehr angemessenen Anordnung zu wiederholen.

Da es wenig aussichtsvoll erschien, die Erzeugung noch kleinerer Wellen auf die Verwendung der Grundschwingung kleiner Sender aufzubauen, mußten andere Wege dafür gesucht werden. Eine Anzahl von Interferenzkurven, die zur Bestimmung der Wellenlänge dienten, zeigten übergelagerte Schwingungen bis herab zu einigen Zehntel Millimetern. In einigen Fällen konnten die größeren von ihnen auch schon isoliert werden. Aber die Energie war so gering, daß mit den vorhandenen Mitteln an zuverlässige Dispersionsmessungen nicht gedacht werden konnte.

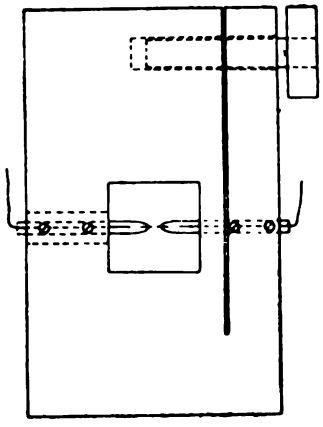
Daher wurde zwecks Herstellung eines empfindlicheren Meßgeräts ein Galvanometer Paschenscher Konstruktion von höchster Empfindlichkeit in Auftrag gegeben. Dieses ist infolge Ausbruchs des Krieges nicht fertig geworden und harrt auch heute noch der Vollendung. Deshalb sollen die bisher vorliegenden Ergebnisse trotz der ihnen noch anhaftenden Unvollkommenheiten veröffentlicht werden, unter Vorbehalt späterer Nachprüfung und weiterer Ausarbeitung.

2. *Versuchsanordnung.* Es wurde mit Luftwellen die Dispersion von destilliertem Wasser und wasserfreiem Äthylalkohol untersucht, und zwar einerseits aus der an den Flüssigkeitsoberflächen reflektierten Menge, andererseits aus der Ablenkung durch Prismen, unter Berücksichtigung der Absorption. Die Sender waren horizontal gelagert, die Sendereinrichtung wurde fest aufgestellt. Die übrigen Apparate (außer den Flüssigkeitsträgern) wurden auf einer aus einem hochkant gestellten Glasstreifen bestehenden optischen Bank angebracht, die an einem Teilkreis mit horizontaler Achse befestigt war. Daher war die Schwingungsrichtung der Wellen stets senkrecht zur Einfallsebene.

3. *Sendereinrichtung.* Die Sender bestanden aus je zwei Platinstäbchen, die, wie bei Lebedew[1]), in Glasröhrchen ein-

1) Peter Lebedew, a. a. O. S. 2.

geschmolzen waren. Das eine der beiden Röhrchen war zwecks genauerer Justierung mit Siegellack in zwei Hartgummibacken befestigt. Beide Stäbchen waren in einem Vulkanfiberblock festgeschraubt (Fig. 1, vgl. auch Fig. 6, S. 308). Dieser war in der Längsrichtung geschlitzt, und die beiden Hälften konnten zwecks Regulierung des wirksamen Funkens mikrometrisch gegeneinander verstellt werden. In einem Durchbruch des Blockes saß hinter den freien Enden der Glasröhrchen ein Parabelspiegel. Der Block wurde in einen Trog getaucht, der auf der Vorderseite durch eine Glimmermembran verschlossen und mit Petroleum gefüllt war. Außer der Länge und Dicke der Platinstäbchen wurde zwecks Berechnung der Wellenlänge auch die Dicke der Einschmelzstelle bestimmt. Die Stromzuführung geschah beiderseits durch Luftfunken von 1 bis 2 mm Länge. Als Stromerzeuger diente ein mit 6 Volt betriebenes Induktorium für 4 cm Funkenlänge unter Vorschaltung einer kleinen Leidener Flasche und eines Wasserwiderstandes.



Senderträger $^1/_8$ natürl. Gr.

Fig. 1.

Zur Fernhaltung der Induktoriumsschwingungen vom Empfänger wurde die ganze Sendereinrichtung samt den Akkumulatoren in einen Metallkasten eingeschlossen, dessen Deckel mit Quecksilber abgedichtet war. Es war nämlich festgestellt worden, daß die störenden Wellen selbst durch eine schmale Spalte am Deckel oder sogar entlang der Zuleitung des Gleichstromes bei Benutzung einer Institutsbatterie herausgelangen konnten. Eine Öffnung von 3×3 cm gestattete den Austritt der zu untersuchenden Wellen. Von den störenden großen Wellen ließ sie nur wenig durch und dieser Rest konnte noch durch ein Gitter aus Kupferdrähten von 4 mm Maschenweite abgeschirmt werden. Wellen von etwa 12 mm Wellenlänge wurden von dem Gitter nur wenig geschwächt. Ein Gitter von 2 mm Maschenweite hingegen ließ auch von

diesen nicht mehr viel durch. Es wurde daher bei den meisten Messungen das 4 mm-Gitter vorgeschaltet.

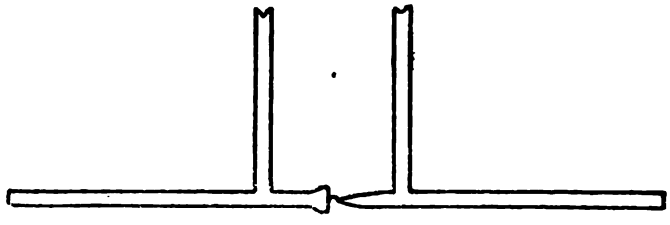
Die Platinstäbchen der Sender nutzten sich stark ab, bis zu einigen Zehntel Millimetern bei einer vollständigen Messungsreihe (Absorption, Reflexion, Brechung, Wellenlänge). Dadurch vergrößerte sich die Länge des Hauptfunkens von einer Messung zur anderen. Die gelieferte Energie nahm aber mit von Null an zunehmender Funkenlänge rasch zu bis auf einen Höchstwert, dann wieder ab, erst stärker, dann schwächer. Daher wurde jede Messungsreihe (z. B. eine Reflexion) mit einer Funkenlänge begonnen, die nach Überschreitung des Höchstwertes nur etwa drei Viertel der maximalen Energie lieferte. Sie betrug schätzungsweise 0,02 mm. Außerdem wurde immer nach einigen Messungen die Ausgangslage, z. B. Abstand Null der Boltzmannschen Spiegel bei der Wellenlängenmessung, wiederhergestellt, aus diesen Bezugspunkten eine Kurve gezeichnet und jede Messung auf diese Kurve bezogen. Die Anwendung der Bezugskurven ist aus S. 309ff. zu ersehen. Wenn gelegentlich die Platinstäbchen der Sender so weit abgenutzt waren, daß die Planflächen an den Enden ausgefressen waren und kein kleiner Funke mehr zustande kam, wurden die Flächen wieder plan geschliffen. Dadurch wurde natürlich die Wellenlänge im Verlaufe einer vollständigen Messungsreihe um einige Prozente kleiner.

4. *Empfängereinrichtung.* Um nicht für jede gewünschte Wellenlänge einen neuen Empfänger bauen zu müssen — was erheblich schwieriger war als der Bau neuer Sender — und doch die Wellenlänge wenigstens annäherungsweise vorausbestimmen zu können, wurde mit sehr langem und stark gedämpftem Empfänger gearbeitet, wie dies schon von anderer Seite mehrfach geschehen ist.[1]) Dadurch verringert sich allerdings die im Empfänger auftretende Energie. Aber für größere Wellen, wie sie hier verwendet wurden, reicht sie auch so noch aus und für kleinere würde der Bau resonierender Empfänger immer schwieriger werden. Außerdem hat man

1) Karl F. Lindman, Ann. d. Phys. **38.** S. 523. 1912. — W. L. Severinghaus und W. S. Nelms, Phys. Rev. (II) **1.** S. 411 u. **429.** 1913. — James E. Ives, Phys. Rev. **30.** S. 199. 1910 und **31.** S. 185. 1910 arbeiteten ebenfalls mit nicht resonierendem Empfänger.

noch den Vorteil, leicht Oberschwingungen des Senders zu bekommen, was für weitere Verkleinerung der Wellenlänge von großer Bedeutung werden dürfte (vgl. S. 305).

Bei den in Tab. 4 (S. 316) eingetragenen Messungen wurden zwei Empfänger verwendet, ein linearer von 14 mm Länge und 0,3 mm Dicke (Fig. 2) und ein kreisförmiger,



Linearer Empfänger, 6fache natürl. Gr.
Fig. 2.

hinten offener, von 170 mm Länge (Kreisdurchmesser 54 mm) und 0,5 mm Dicke, zu den Vorversuchen auch Empfänger von 4,6 und 9 mm Länge. In der angegebenen Länge ist der Raum für das Thermoelement, etwa 0,3 mm, mit einbegriffen. Bei dem linearen Sender bestand die eine Hälfte aus Platin mit Tellurkuppe, die andere aus einem ebenso dicken Wollastondraht, der vorn das Platindrähtchen von 0,0075 mm Dicke und etwa 0,5 mm Länge freiließ.[1]) Dieses war mittels Funkens am Tellur festgeschweißt. Bei dem kreisförmigen Empfänger waren Platin- und Wollastondrahtstück an Kupferdrähten festgelötet. Der lineare Empfänger befand sich in der Brennlinie eines Parabolspiegels von 1,4 mm Brennweite, 22 mm Länge und 14 mm Öffnung, der zum Schutze gegen Luftströmungen durch eine Glimmermembran verschlossen war. Ein ebensolcher Spiegel befand sich an dem kreisförmigen Empfänger in der Nähe des Thermoelementes. Im Vakuum zeigten die Empfänger keine erhöhte Empfindlichkeit. Ihre Widerstände lagen zwischen 250 und 400 Ω. Da die Platindrähtchen sich bei der geringsten Erschütterung lösten, mußten sie oft neu geschweißt werden.

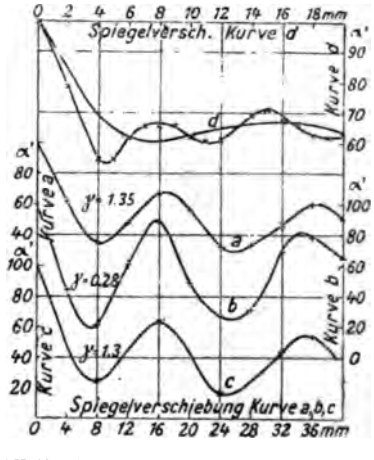
An Galvanometern wurden benutzt ein Drehspulinstrument von Siemens & Halske mit 40 Ω Spulenwiderstand von der

1) Ähnlich L. W. Austin, Physik. Zeitschr. 12. S. 1226. 1911.

Empfindlichkeit 1×10^{-9} Amp/mm bei 6 m Skalenabstand, ein Galvanometer nach Paschen[1]) mit 120 Ω Spulenwiderstand (hintereinander) von der Empfindlichkeit 2×10^{-10} Amp/mm bei 2 m Skalenabstand und 8 Sek. ganzer Schwingungsdauer und ein Panzergalvanometer nach du Bois und Rubens mit 1100 Ω Spulenwiderstand (parallel) von der Empfindlichkeit $0{,}2 \times 10^{-10}$ Amp/mm bei 3 m Skalenabstand und 10 Sek. ganzer Schwingungsdauer. Die in Tab. 4 (S. 316) enthaltenen Messungen sind fast sämtlich mit dem Paschengalvanometer ausgeführt. Bei dem Drehspulinstrument konnten bei sehr kleinen Ausschlägen noch halbe Zehntel Millimeter abgelesen werden.

Außer dem Thermoelement wurde auch der Kohärer eingehend geprüft. Er zeigte sich aber nicht zuverlässig genug.

5. *Wellenlänge.* Die Messung der Wellenlänge geschah teils mit Boltzmannschen Spiegeln[2]), zwei gegeneinander mikrometrisch verstellbaren polierten Messingplatten von je 43 × 55 mm Fläche, an denen die Wellen reflektiert wurden, teils mit einem Interferometer aus zwei gegeneinander mikrometrisch verschiebbaren Quarzplatten von 37 mm Durchmesser und 3,2 mm Dicke, ähnlich dem von Rubens und Hollnagel[3]) benutzten. Dieses war besonders für die kleineren Wellen gedacht.



Wellenlängenkurven *a*, *b* und *c* zu Sender Nr. 1 (vgl. S. 301 u. 302), *d* zu Sender Nr. 2 (vgl. S. 302), Tabelle 4 S. 316.
α' reduzierte Galvanometerausschläge.
Fig. 3.

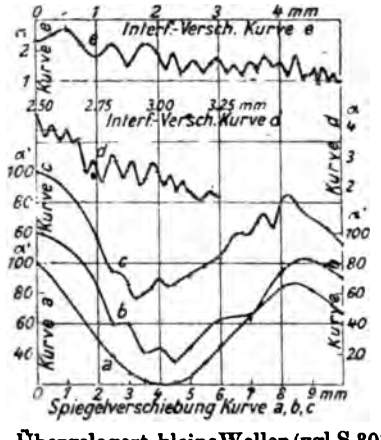
Die mit den Interferenzapparaten aufgenommenen Kurven zeigten zum Teil den glatten Verlauf einer gedämpften Schwingung (Fig. 3). Einzelne Kurven hatten Zacken, die auf das Vorhanden-

1) Dieses wurde mir vom Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Leipzig gütigst zur Mitbenutzung überlassen.

2) L. Boltzmann, Wied. Ann. 40. S. 399. 1890.

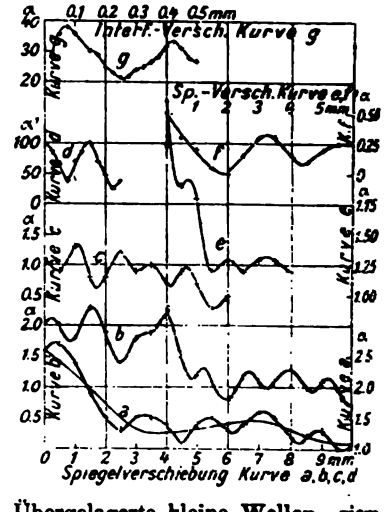
3) H. Rubens und H. Hollnagel, Berl. Ber. 1910. S. 26.

sein zweier Schwingungen von verschiedener Wellenlänge deuteten. Andere zeigten übergelagerte Wellenzüge von viel kleinerer Wellenlänge, als es der Grundschwingung des Senders entsprechen würde (Figg. 4 u. 5), und endlich gab es einige Kurven, bei denen eine solche kleine Welle nahezu rein entwickelt war (Fig. 5, Kurven *d* und *f*). Bei den längeren Sendern traten die kleinen Wellen weniger hervor, da ihr Energieanteil prozentisch sehr klein war. Daher wurden diese Wellenlängenkurven auch nicht mit so kleinen Intervallen aufgenommen wie bei den Sendern, bei welchen ausdrücklich auf die Feststellung der kleinen Wellen hingearbeitet wurde.



Übergelagert. kleine Wellen (vgl. S. 303, zu *a* und *b* auch S. 303, zu *c*, *d*, *e* auch S. 303, zu *e* auch S. 303).
α Galvanometerausschlag in mm, *α'* reduzierte Galvanometerausschläge.

Fig. 4.



Übergelagerte kleine Wellen, ziemlich rein (vgl. S. 308, zu Kurve *d* und *f* auch S. 310, zu *a* auch S. 305, zu *b* auch S. 305, zu *d* auch S. 307, zu *f* auch S. 307, zu *e* auch S. 307, zu *g* auch S. 319).
α Galvanometerausschlag in mm, *α'* reduzierte Galvanometerausschläge.

Fig. 5.

Aus allen Kurven, außer denen der letzten Art, konnte man die Länge derjenigen Welle wenigstens annäherungsweise bestimmen, welche der Grundschwingung des Senders entspricht, vorausgesetzt, daß sie klein gegen diejenige des Empfängers war. Zur Bestimmung der Wellenlänge wurde,

um alle Maxima und Minima auszunutzen, so verfahren, daß aus den beiden ersten Maxima, den beiden ersten Minima und dem ersten und dritten Maximum je ein Wert bestimmt und daraus das Mittel genommen wurde. Dieses Verfahren setzte voraus, daß nur vier Extremwerte gemessen waren, es wurde aber sinngemäß auf alle Wellenlängenbestimmungen angewendet. Aus der Kurve *a* (Fig. 3) z. B. ergab sich so $\lambda = 34{,}0,\ 34{,}8,\ 36{,}6$, im Mittel 35,2 mm, aus Kurve *b* 31,2, 36,0, 34,6, im Mittel 33,9 mm, aus Kurve *c* 32,0, 34,0, 35,2, im Mittel 33,7 mm. Daß λ nach Kurve *a* etwas größer ist als nach Kurve *b* und *c*, dürfte darauf zurückzuführen sein, daß zwischen Kurve *a* und *b* eine Anzahl anderer Messungen liegt, die Platinstäbchen sich also abgenutzt hatten. Die Kurven *b* und *c* dagegen sind unmittelbar nacheinander aufgenommen. Die Absorption ist erst nach Aufnahme der Kurve *c* bestimmt, daher ist der kleinste Wert, $\lambda = 33{,}7$ mm, zur Berechnung des Absorptionskoeffizienten k verwendet worden. In Tab. 4, S. 316 (Sender Nr. 1) dagegen ist der mittlere Wert aus Kurve *a* und *b*, $\lambda = 34{,}6$ mm, eingetragen. Zur Bestimmung von n und $\varkappa$ wurde das gefundene k in Anbetracht des nur kleinen Unterschieds der Wellenlängen ohne weiteres verwendet.

Die Wellenlängen konnten nicht alle mit gleicher Genauigkeit bestimmt werden, da die Messungen meist nur einmal und meist nur bis zum zweiten Maximum oder Minimum durchgeführt wurden, um zu starke Abnutzung der Platinstäbchen der Sender zu vermeiden. Daher ist auch bei den besten Messungen ein Fehler von einigen Prozenten möglich. Wo die Messung den Eindruck geringerer Genauigkeit machte, wurde λ in Tab. 4 nur auf ganze Millimeter angegeben.

Um die Grundschwingung des Senders aus seinen Ausmaßen zu berechnen, werde angenommen, er sei s mm lang. Davon seien g mm in Glas eingeschmolzen und $s - g$ mm in Petroleum gelagert. Die Dielektrizitätskonstante des Petroleums werde zu 2,06 angenommen. Dies ist das Mittel aus den in den Tafeln von Landolt-Börnstein angegebenen Werten. Für Glas wurde der Wert 6,73 eingesetzt, das Mittel aus den von Rubens[1]) für ein Glas photographischer Platten

1) H. Rubens, Berl. Ber. 1917. S. 556.

mit elektrischen Wellen von $\lambda = 57{,}2$ mm und für die langwellige Quecksilberdampfstrahlung von $\lambda = 0{,}3$ mm gefundenen Werten 6,86 und 6,60. Es wurde dann

$$\lambda = 2\left[\sqrt{2{,}06\,(s-g)} + \sqrt{6{,}73\,g}\right] \tag{1}$$

gesetzt. Der Wert 6,73 ist also ziemlich willkürlich gewählt. Aber seine Änderung um eine ganze Einheit macht für $\sqrt{6{,}73}$ noch keine 10 Proz. aus und für λ noch viel weniger.

Die nach Formel (1) erhaltenen Werte sind in Zeile 3 der Tab. 4 (S. 316) eingetragen, die gemessenen Werte in Zeile 2, die Gesamtlänge und Dicke beider Platinstäbchen in Zeile 5 und 6, die Dicke der Einschmelzstelle in Zeile 7, Länge und Dicke des zur Messung verwendeten Empfängers in Zeile 8 und 9. Wie man sieht, stimmen die meisten berechneten und gemessenen Werte befriedigend überein. Wo größere Abweichungen bestehen, läßt sich dafür als Grund die ungenügende Größe des Empfängers angeben. Der Sender Nr. 2 zeigt die Einwirkung des Empfängers besonders deutlich (Kurve *d*, Fig. 3). Die vorherrschende Schwingung hat eine Wellenlänge von 14,7 mm. Die Grundschwingung des Senders, berechnet zu 34,3 mm, ist schwach übergelagert. Der Sender Nr. 3 zeigt dieselbe Erscheinung wie Nr. 2, aber ohne übergelagerte Grundschwingung des Senders. Bei Nr. 4 hingegen, dessen berechnete Grundschwingung nahezu gleich derjenigen von Nr. 2 und 3 ist, wurde der kreisförmige Empfänger verwendet, und die Wellenlängenmessung zeigt rein die berechnete Grundschwingung des Senders.[1]) Bei sehr kleinen Sendern können die berechneten Werte von λ infolge Einflusses der Dicke etwas zu klein sein.

Die Dämpfung der Wellen änderte sich mit der Länge des Hauptfunkens. In Fig. 3, S. 299 sind drei Kurven gezeichnet, die mit Sender Nr. 1 (Tab. 4) und dem kreisförmigen Empfänger aufgenommen wurden. Kurve *a* entspricht sehr kleinem Funken und größter Energie. Bei Kurve *b* ist der Funke immer noch klein, aber soweit vergrößert, daß die Anfangsenergie die Hälfte derjenigen der Kurve *a* ist. Bei Kurve *c* endlich ist der Funke groß, die Energie ein Viertel derjenigen der Kurve *a*. An jeder Kurve ist der Wert für

1) Über diese Erscheinungen vgl. Karl F. Lindman, a. a. O.

das logarithmische Dekrement γ angeschrieben, berechnet nach der Formel[1])

$$\gamma = 2 \log \text{nat} \left[(\alpha_1 - \alpha_2) : (\alpha_3 - \alpha_2)\right], \tag{2}$$

wo α_1, α_3 und α_2 die Ausschläge des Galvanometers beim ersten und zweiten Maximum und ersten Minimum bedeuten. Kurve *b* zeigt erheblich geringere Dämpfung als *a* und *c*. Bei Berechnung von γ nach Formel (2) ist noch zu berücksichtigen, daß in dem so erhaltenen Werte noch ein Betrag steckt, der durch die Verschiebung der einen der beiden Spiegelhälften vorgetäuscht wird.

6. *Die übergelagerten kleinen Wellen.* Eine große Zahl der λ-Kurven zeigte außer der Grundschwingung des Senders oder der durch zu kleinen Empfänger bedingten ebenfalls großen Welle noch übergelagerte kleine Wellen von $\lambda = 5$ mm bis herab zu 0,10 mm. Es kamen vor die Größen $\lambda = 0{,}10$, 0,11, 0,17, 0,25, 0,30, 0,50, 0,70, 1,0, 1,1, 1,2, 1,7, 1,8, 2,0, 2,5, 3,0, 3,8, 4,0, 5,0 mm, am häufigsten 2,0, 2,5 und 3,0 mm. Ihr Anteil an der Gesamtenergie wechselte zwischen einigen und 100 Proz. Sie traten besonders bei großen Hauptfunken auf. Die Zuleitungsfunken waren ohne merklichen Einfluß. Besonders gern erschienen sie bei Sendern, die schon länger im Gebrauch, also abgenutzt waren. Bei diesen waren die Platinflächen, zwischen denen der Funke übersprang, unregelmäßig geformt. In Fig. 4 ist Kurve *a* mit kurzem, *b* mit langem Funken unmittelbar nacheinander aufgenommen. In Tab. 1 sind verschiedene Unterlagen für die Kurven der Fig. 4 zusammengestellt.

Charakteristisch war, daß die kleinen Wellen oft nur in einzelnen Abschnitten der λ-Kurven auftraten, und zwar kamen oft mehrere verschiedene Wellenlängen auf derselben Kurve unmittelbar hintereinander vor (Kurven *c*, *d*, *e* in Fig. 4), ohne daß die erste Schwingung abgedämpft war oder eine Schwebung auftrat. Fig. 5 zeigt Kurven, die ganz oder zum größten Teil aus kleinen Wellen bestehen. Tab. 2 gibt die nötigen Unterlagen dafür. Kurve *e* (Fig. 4) zerfällt dadurch in mehrere Teile, daß im ersten Abschnitt die Interferometerverschiebung von Punkt zu Punkt $^1/_4$ mm beträgt, im zweiten

1) Nach J. Klemenčič und P. Czermak, Wied. Ann. 50. S. 175. 1893.

Tabelle 1 (zu Fig. 4).

Kurve	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
Senderlänge mm	2,92	2,92	6,3	3,6	3,6
Einschmelzstellen zusammen mm	1,47	1,47	1,32	1,02	1,02
Empfängerlänge mm	14	14	14	14	14
Grundschwingung λ = mm					
gemessen	16,8	16,8	17	—	—
berechnet	11,8	11,8	21,1	12,7	12,7
Spiegel oder Interferometer	Sp.	Sp.	Sp.	Int.	Int.
Kleine Wellen λ = mm	—	2,0	1,7	0,10	1,1
	-	—	2,5	0,17	0,7
		-	—	—	0,5
	—	—	—	—	0,3
Funken kurz oder lang	kz.	lg.	kz.	lg.	lg.
Paschen- oder Drehspulgalvanom.	P.	P.	D.	D.	D.
Größter Ausschlag des Galvanometers in mm					
gemessen	392	25	98	4,4	2,7
reduziert	100	100	-	—	—

Tabelle 2 (zu Fig. 5).

Kurve	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
Senderlänge mm	3,44	3,68	3,6	5,5	3,3	3,3	5,5
Einschmelzstellen zusammen mm	1,93	1,93	1,02	1,32	1,93	1,93	1,32
Empfängerlänge mm	14	9	14	14	14	14	14
Grundschwingung λ = mm							
gemessen	14	-	12	—	—	—	—
berechnet	14,4	15,0	12,7	18,8	13,9	13,9	18,8
Spiegel oder Interferometer	Sp.	Sp.	Int.	Sp.	Sp.	Sp.	Int.
Kleine Wellen λ = mm	3,8	2,6	2,5	3,0	2,5	—	—
Funken lang oder kurz	lg.	lg.	lg.	lg.	lg.	lg.	lg.
Paschen- oder Drehspulgalv.	D.	D.	D.	D.	D.	D.	P.
Größter Ausschlag des Galvanometers in mm							
gemessen	2,7	2,3	1,3	1,1	2,6	0,5	38
reduziert		-	-	100	—	—	—

$^1/_8$ mm und im dritten $^1/_{16}$ mm. Es ist daher nicht ausgeschlossen, daß im ersten und zweiten Abschnitt die Welle trotz der vorhandenen Regelmäßigkeit der Kurve noch nicht völlig aufgelöst ist.

Es erheben sich nun die folgenden Fragen: Wie kommen die kleinen Wellen zustande? Sind sie reproduzierbar? Lassen sie sich im voraus berechnen? Lassen sie sich isolieren? Sind sie überhaupt real? Zur Beantwortung dieser Fragen ist folgendes zu sagen. Für die Erzeugung der kleinen Wellen könnten entweder Oberschwingungen des Senders oder

des Empfängers in Frage kommen oder der Hauptfunke. Daß Oberschwingungen des Senders einwandfrei gemessen werden können, hat Lindman[1]) gezeigt, indem er ebenfalls für Luftwellen mit einem stark gedämpften (etwa 30 Ω) Empfänger von 33,5 cm Länge die Schwingung eines Senders von $\lambda = 48{,}4$ cm Grundschwingung untersuchte. Die Interferenzkurve zeigte die schwach ausgeprägte Grundschwingung des Senders und darüber gelagert seine stark hervortretende zweite Oberschwingung $\lambda = 16{,}0$ cm von geringer Dämpfung. Ein ähnliches Bild gibt Kurve *a* (Fig. 5). Die berechnete Grundschwingung des Senders ist $\lambda = 14{,}4$ mm, durch die Linie ohne eingetragene Punkte angedeutet. Die übergelagerte Welle hat $\lambda = 3{,}8$ mm, der Empfänger ist 14 mm lang. Auch Kurve *b* (Fig. 5) gibt ähnliche kurze Wellen von $\lambda = 2{,}63$ mm bei einer Grundschwingung von $\lambda = 15{,}0$ mm und einer Empfängerlänge von 9 mm.

Wenn man so auch in der Lage wäre, einfach alle übergelagerten kleinen Wellen als Oberschwingungen des Senders anzusprechen, so ist doch noch die große Inkonstanz, das häufige Überspringen von einer zur anderen Wellenlänge auf derselben Interferenzkurve und die Wiederkehr bestimmter Wellenlängen bei den verschiedensten Kombinationen von Sendern und Empfängern aufzuklären. Da ein Einfluß der Länge des Hauptfunkens auf die Erzeugung der kleinen Wellen, wie erwähnt, festgestellt wurde, so erhebt sich die Frage, ob dieser Einfluß nur ein sekundärer ist oder ob vielleicht auch im Funken Erzeuger kleiner Wellen anzutreffen sind. Da während des Funkenüberganges Platinteilchen von den Senderhälften losgerissen werden, so könnte man sich denken, daß diese Teilchen auch Schwingungen ausführen und daß wenigstens die kleinsten der gemessenen Wellen mit ihrer Hilfe zustande kommen.

Rubens und von Baeyer[2]) haben für die von ihnen isolierte langwellige Quecksilberdampfstrahlung von etwa 0,3 mm Wellenlänge einen Weg angegeben, auf dem die zugehörigen Wellenlängen vielleicht annäherungsweise berechnet werden können. Sie nehmen an, daß „die positiven und

1) Karl F. Lindman, a. a. O.
2) H. Rubens und O. von Baeyer, a. a. O.

negativen Atomionen, soweit sie sich nach erfolgter Annäherung nicht wieder auf hyperbolischer Bahn entfernen oder beim Zusammenstoß sofort neutralisieren, wie Doppelsterne einander umkreisen in einem Abstande von annähernd derselben Größe wie die Moleküle des festen und flüssigen Quecksilbers" und setzen für einfach geladene Atomionen

$$(3) \qquad m v^2 : r = e^2 : (4 r^2),$$

wo m die Masse des Ions, v seine Geschwindigkeit, r der Halbmesser der Bahn und e das Elementarquantum in elektrostatischen Einheiten ist. Wird hier $v = 2\pi r \nu$, $\nu\lambda = 3 \times 10^{10}$ cm, $e = 4{,}8 \times 10^{-10}$ [1]) und die Anzahl $d : m$ der Teilchen im Kubikzentimeter, wo d die Dichte der festen oder flüssigen Substanz ist, unter Annahme tetraedrischen Aufbaues der Substanz gleich $\sqrt{2} : (2r)^3$ gesetzt und endlich m aus dem Atomgewicht a und der Anzahl der Teilchen im Kubikzentimeter eines Gases unter Normalbedingungen, $2 \,.\, 70 \times 10^{19}$ [2]), berechnet, so ergibt sich

$$(4) \qquad \lambda = 0{,}005472\, a : \sqrt{d} \text{ Millimeter.}$$

Hat ein Teil des Doppelsternes mehrere Ladungen, so muß die Formel (4) dementsprechend abgeändert werden.

Für Platin würde sich aus Formel (4) ergeben $\lambda = 0{,}232$ mm. Kleinere Wellen ergeben sich, wie bei Rubens und v. Baeyer, wenn mehrfache Ladungen zugelassen werden. Zur Erklärung der größeren Wellen müßte man dann annehmen, daß größere Platinteilchen losgerissen werden und Schwingungen nach einem ähnlichen Gesetz ausführen.

Wenn überhaupt der Funke für die Erzeugung der kleinen Wellen mit in Frage kommt, so wäre zu erwarten, daß dieselben Wellen auch durch den Funken eines sehr viel größeren Senders erzeugt würden. Auch müßten Sender aus verschiedenem Material verschiedene kleine Wellenlängen ergeben. Dies wurde bisher noch nicht untersucht.

Die genauere Untersuchung der Reproduzierbarkeit und Isolierung der kleinen Wellen wurde bis zur Fertigstellung einer empfindlicheren Meßanordnung zurückgestellt. Von Vorversuchen über Isolierung mögen zwei erwähnt werden.

1) Erich Regener, Berl. Ber. 1909. S. 948.
2) Erich Regener, a. a. O.

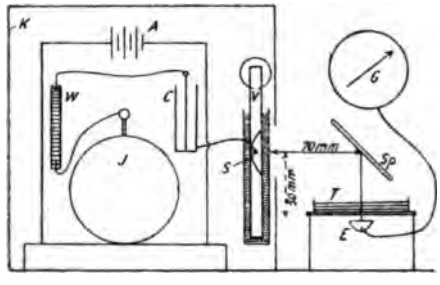
Bei einem Sender von der berechneten Grundschwingung $\lambda = 18{,}8$ mm, der schon längere Zeit benutzt war und Neigung zur Ausbildung kleiner Wellen zeigte, wurde der Parabelspiegel ersetzt durch ein ebenfalls parabolisch gekrümmtes Gitter aus 0,8 mm langen, 0,2 mm breiten Stanniolstreifchen[1]), die in Abständen von 0,2 mm in der Längs- und 0,8 mm in der Querrichtung auf Karton geklebt waren. Das Ergebnis der Wellenlängenmessung mit Boltzmannschen Spiegeln war Kurve *d* (Fig. 5) mit $\lambda = 3{,}0$ mm, welche eine ziemlich reine Welle darstellt. Auch Kurve *f* (Fig. 5) zeigt eine kleine Welle eines Senders von der berechneten Grundschwingung $\lambda = 13{,}9$ mm. Diese Schwingung dürfte allerdings aus zwei verschiedenen Wellenlängen zusammengesetzt sein. Für die reine Erzeugung dieser beiden Kurven *d* und *f* (Fig. 5) scheint das Gitter vor der Austrittsöffnung des Senderkastens (vgl. S. 296) von Wichtigkeit zu sein, denn ohne Gitter ergab sich z. B. statt Kurve *f* die Kurve *e*. Übrigens scheint es, daß die kleinen Wellen eine viel geringere Dämpfung haben als die Grundschwingungen der Sender, was bei Oberschwingungen selbstverständlich wäre. Durch Wiedergabe dieser Voruntersuchungen sollte nur gezeigt werden, daß die Möglichkeit besteht, die kleinen Wellen zu isolieren.

Für Abschnitt 10 ist noch zu berücksichtigen, daß Absorption, Reflexion und Brechung durch die übergelagerten kleinen Wellen ungenau werden können.

7. *Absorption.* Die Absorption wurde untersucht teils in dem auf S. 299 erwähnten Quarzinterferometer, teils (u. a. alle in Tab. 4, S. 316 enthaltenen Werte) in einem horizontalen Trog mit 1,5 mm dicker Glasplatte als Unterseite und aufgekittetem Metallring von 77 mm Durchmesser und 23 mm Höhe. Der Empfänger befand sich dicht unter der Glasplatte. Die Schichtdicke wurde so lange vergrößert, bis die durchgehende Intensität der Wellen sehr klein geworden war. Da dies möglich war, konnte man annehmen, daß keine merkliche Energie um den Trog herum zum Empfänger gelangte. Fig. 6 zeigt schematisch die Anordnung bei einer Absorptionsmessung

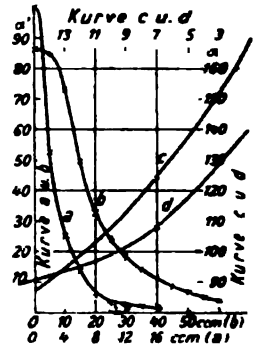
1) Auch A. Garbasso und E. Aschkinaß, Wied. Ann. 58. S. 534. 1894 und A. D. Cole, Wied. Ann. 57. S. 290. 1896 benutzten diese Einrichtung.

mit Trog. Die Schichtdicken wurden aus den eingefüllten Flüssigkeitsmengen bestimmt. Bei Wasser wurde zu Beginn ein Blatt Fließpapier eingelegt, um eine gleichmäßige Benetzung zu erzielen. Die erhaltene Kurve durchgehender Intensität als Funktion der Schichtdicke zeigte meist übergelagerte Wellen. Die „mittlere Kurve", zwischen den Maxima und Minima der Wellen liegend, wurde als „Absorptionskurve" angesehen. Die Schicht muß mindestens eine halbe



Schema der Absorptionsmessung mit Trog (vgl. S. 296 u. 307). *V* ist der Vulkanfiberblock, in Petroleumbad, welcher den Sender *S* trägt, mit Induktorium *J*, Wasserwiderstand *W*, Kapazität *C* und Akkumulatorenbatterie *A* im Kasten K eingeschlossen, *E* der Empfänger, *T* der Absorptionstrog, *Sp* der Metallspiegel, *G* das Galvanometer.

Fig. 6.



Absorptionskurven des Senders Nr. 8 (Tab. 4, S. 316), *a* für Wasser, *b* für Alkohol, *c* und *d* zugehörige Bezugskurven (vgl. S. 309). *a* Galvanometerausschläge in mm, *a'* reduzierte Galvanometerausschläge. 1 ccm Flüssigkeit entspricht 0,2155 mm Schichtdicke.

Fig. 7.

Wellenlänge (in Flüssigkeit gemessen) dick sein, sonst könnte unter Umständen die Absorption etwas zu groß bestimmt werden, da die „mittlere Kurve" nicht sicher gezeichnet werden kann.

Aus den Absorptionskurven wurde

$$k = n\varkappa = (\lambda : 4\pi d) \log \text{nat} (i : i') \tag{5}$$

bestimmt, wo k der Absorptionskoeffizient, n das Brechungsverhältnis, $\varkappa$ der Absorptionsindex, λ die Wellenlänge in Luft, $i : i'$ das Verhältnis der bei verschiedenen Schichtdicken durchgelassenen Intensitäten und d der Unterschied der zugehörigen Schichtdicken ist. In Fig. 7, Kurven *a* und *b*, sind Absorptionskurven für Wasser und Alkohol des Senders Nr. 8 (Tab. 4,

S. 817) als Beispiele wiedergegeben. Die Kurven *c* und *d* sind die zugehörigen Bezugskurven (vgl. S. 297). Für die Absorptionskurven sind die Abszissen Kubikzentimeter Wasser, wobei 1 ccm einer Schichtdicke von 0,2155 mm entspricht, für die Bezugskurven sind es Nummern der Messung. Die Ordinaten sind bei den Bezugskurven Galvanometerausschläge a in Millimetern, bei den Absorptionskurven reduzierte Galvanometerausschläge a'. Tab. 3 zeigt das Schema einer Absorptionsmessung für Wasser. Die 3. Zeile gibt die abgelesenen Galvanometerausschläge wieder, in Abhängigkeit von der Schichtdicke. Wo in der 2. Zeile keine Schichtdicke angegeben ist (—),

Tabelle 3.

Schema einer Absorptionsmessung für Sender Nr. 8, Tab. 4 und Wasser. 1 ccm entspricht 0,2155 mm Schichtdicke.

Nummer der Messung	1	2	3	4	5	6	7	8
Wasserschicht ccm	—	—	0	2	4	6	—	6
Galvanometerausschlag mm	171	160	280	136	58	26	124	50
Bezugsausschlag mm			152	144	137	130		118
Reduz. Ausschlag			100	52,7	25,3	13,8		13,8

Nummer der Messung	9	10	11	12	13	14	15
Wasserschicht ccm	8	10	12,2	14	16	18	
Galvanometerausschlag mm	17,5	6,2	2,0	0	−1,8	-	
Bezugsausschlag mm	113	108	103	98	94	—	-
Reduz. Ausschlag	6,4	3,8	2,8	2,4	1,9	--	--

wurde ohne Trog gemessen. So ergaben sich die vier Punkte, aus denen die Bezugskurve *c* (Fig. 7) gezeichnet ist. Für die zwischenliegenden Messungen mit Trog wurden die ihrer Ordnungszahl entsprechenden Werte aus der Bezugskurve entnommen und in Zeile 4 eingetragen. Da das Induktorium allein bei geöffnetem Galvanometerkreise einen Ausschlag von 8,5 mm nach der anderen Seite verursachte, waren alle Ausschläge in Zeile 3 und 4 um 8,5 mm zu vergrößern. Nunmehr wurde der Ausschlag für Messung Nr. 3 (0 ccm Wasser) gleich 100 gesetzt und alle übrigen darauf bezogen (Zeile 5). Dies ergab z. B. für Messung Nr. 4 die Umrechnung:

$$[(1360 + 85)\,(1515 + 85)] : [(2800 + 85)\,(1440 + 85)] = 52{,}7.$$

Bei den meisten Sendern wurde nur eine Absorptionskurve aufgenommen. Beim Sender Nr. 2 (Tab. 4) wurde mit kurzem Hauptfunken $k = 1.21$ erhalten, mit sehr langem

$k = 1{,}47$. Da alle Messungen der Tab. 5 mit kurzem Funken gemacht sind (vgl. S. 297), wurde $k = 1{,}21$ in Tab. 4 eingetragen, obwohl der Wert 1,47 besser zur Kurve k (Fig. 10) gepaßt hätte. Beim Sender Nr. 4 wurden vier Absorptionskurven aufgenommen, auch mit geringer Änderung der Funkenlänge, eine sogar mit einem anderen Sender von gleicher berechneter Grundschwingung, und diese zeigten Abweichungen von nur wenigen Prozenten voneinander. Dies dürfte daher die Genauigkeit der einzelnen Absorptionsmessung an sich sein und größere Abweichungen könnten durch wechselnde Zusammensetzung der Schwingung, z. B. Überlagerung kleiner Wellen, zustande kommen.

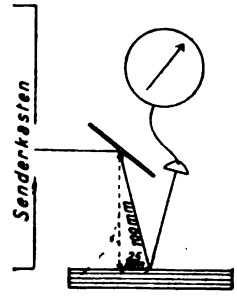
Für $d = 0{,}2155$ mm, entsprechend 1 ccm, folgen aus Kurve a (Fig. 7) der Reihe nach, wenn Anfang und Ende der Kurve als unsicher weggelassen werden, bei 4 und 5, 5 und 6 usw. ccm die Werte $i : i' = 1{,}38,\ 1{,}42,\ 1{,}42,\ 1{,}38,\ 1{,}34,\ 1{,}34,\ 1{,}34$, im Mittel 1,37. Nach Tab. 4 (S. 317), Spalte 8 ist $\lambda = 17{,}5$ mm. Diese Werte ergeben nach Formel (5) $k = 2{,}04$.

Tab. 4 (S. 316) enthält in den Zeilen 11, 12, 14, 16, 17, 19 für k, n und $\varkappa$ eingeklammerte und nicht eingeklammerte Werte. Die eingeklammerten Werte entstammen Vorversuchen, für welche $\varkappa$ nicht einwandfrei bestimmt wurde und welche daher erst in zweiter Linie zur Beurteilung der Dispersionsverhältnisse herangezogen werden sollen. Aus den nicht eingeklammerten Werten von k wurden die Kurven k in Fig. 10 und 11 gezeichnet. Aus ihr wurden die eingeklammerten k entnommen und zur Berechnung der eingeklammerten n und $\varkappa$ verwendet.

8. *Reflexion.* Zur Bestimmung des Verhältnisses R der an Flüssigkeit und Metall reflektierten Intensitäten wurde eine Kristallisationsschale von 133 mm Durchmesser im Lichten und eine 96×67 mm große Platte aus Spiegelmetall verwendet. In der Schale stand die Flüssigkeit mehrere Zentimeter hoch, so daß nach den Ergebnissen der Absorptionsmessung keine störende Reflexion am Boden mehr stattfinden konnte. Dies wurde auch durch eingelegte Metallplatten bestätigt. Fig. 8 zeigt die Anordnung der Apparate.

Für kleine Wellen war die Größe der Spiegelmetallplatte ausreichend, da sie gegenüber auf Wasser schwimmendem

Stanniol keine merklichen Abweichungen außerhalb der Versuchsfehler ergab. Für größere Wellen mußte man auf Abweichungen gefaßt sein, da die Platte nicht die Form der reflektierenden Flüssigkeitsoberflächen hatte. Am korrektesten wäre es gewesen, das Flüssigkeitsgefäß mindestens so groß zu machen, daß auf dem Wasser (in seiner ganzen Ausdehnung) schwimmendes Stanniol oder Quecksilber die gleiche Reflexion ergab wie eine genau gleichgroße und gleichgeformte Metallplatte. Denn dann ist eine Randwirkung ausgeschlossen. Dann kann man bei den Reflexionsmessungen entweder das Stanniol oder die Metallplatte verwenden. Bei den nachträglich angestellten Messungen Nr. 3 und 4 (Tab. 4) war diese Übereinstimmung bei einem Flüssigkeitsgefäß von 283 mm Durchmesser festgestellt worden. Bei diesen Sendern wurde das große Flüssigkeitsgefäß und Stanniol sowie gleichgroße Metallplatte benutzt, und daher sind auch bei ihnen die für das Reflexionsvermögen gefundenen Werte am zuverlässigsten.



Schema einer Reflexionsmessung.

Fig. 8.

Bei dem für die übrigen Messungen verwendeten kleineren Gefäß von 133 mm Durchmesser war eine Randwirkung vorhanden. Denn wenn das Reflexionsvermögen der Spiegelmetallplatte gleich 100 gesetzt wird, so gab Stanniol, im kleinen Gefäß auf Wasser schwimmend, bei Sender Nr. 4 ($\lambda = 33{,}0$ mm) statt 100 den Wert 107,1, Quecksilber im kleinen Gefäß 95,5, und beim Sender Nr. 3 ($\lambda = 14{,}0$ mm) gab Stanniol 103,0. Selbstverständlich waren alle reflektierenden Flächen gleich hoch und horizontal.

Es ist nun die Frage, ob durch diesen Fehler etwa sämtliche Messungen unbrauchbar werden, denn eine Änderung des Reflexionsvermögens um 3 Proz. macht bei Sender Nr. 3 das Brechungsverhältnis um 10 Proz. kleiner, eine Änderung um 7,1 Proz. beim Sender Nr. 4 um 17 Proz. Wenn nun die Abweichungen sich unregelmäßig mit der Wellenlänge änderten, so wäre zu erwarten, daß sich in den

Figg. 10 und 11 keine so regelmäßigen Kurven durch die Punkte legen ließen, wie es tatsächlich der Fall ist. Auch wäre es dann ein sonderbarer Zufall, daß die Sender 2 und 3, die nahezu gleiche Wellenlänge haben, so nahe gleiches $\varkappa$ für Wasser ergeben haben und sogar für Wasser wie Alkohol Abweichungen im richtigen Sinne zeigen. Ähnliches gilt von den Sendern Nr. 1 und 4. Und das wichtigste Ergebnis, das offenkundige Vorhandensein eines Absorptionsstreifens und seine Lage beim Wasser und keines Streifens beim Alkohol in dem untersuchten Gebiete, ist ja auch durch die von Reflexionsmessungen ganz unabhängigen Absorptionsmessungen bedingt. Man kann also annehmen, daß in Wirklichkeit die durch Verwendung der Spiegelmetallplatte bewirkten Fehler nicht so groß sind, wie es bei der erwähnten nachträglich ausgeführten Prüfung scheinen müßte, und daß sie zum mindesten sich nur langsam mit der Wellenlänge verändern. Man kann daher das Ergebnis der vorliegenden Messungen als vorläufiges Ergebnis mit gutem Gewissen vertreten.

Eine weitere wichtige Frage ist die, ob das Reflexionsvermögen und dann auch Absorption und Brechung von der Dämpfung der Wellen abhängig sind. Die Auffassung einer gedämpften Schwingung als Spektrum würde eine solche Abhängigkeit in der Nähe eines Absorptionsstreifens zulassen, da ein schmales Spektrum dort prozentisch stärker absorbiert werden müßte als ein breites. Es wurden einige Versuche zur Klärung dieser Frage angestellt — die auf S. 302 erwähnten Versuche über Abhängigkeit der Dämpfung von der Länge des Hauptfunkens sind ein Teil davon —, aber die Meßgenauigkeit war noch nicht groß genug, um von einem bestimmten Ergebnis sprechen zu können.

Auch ohne die erwähnten Fehlerquellen und die etwaige Überlagerung kleiner Wellen war die Genauigkeit einer einzelnen Reflexionsmessung gering. Nur durch Häufung der Beobachtungen konnten zuverlässigere Werte erhalten werden. Bei Sender Nr. 1 (Tab. 4, S. 316) z. B. ist der endgültige Wert 61,4 Proz., für die reflektierte Menge das Mittel aus 53,0, 58,7, 68,9, 64,7, 60,5, 62,8, 60,0, 62,2. Daß die Mittelwerte erheblich genauer sind, zeigt die Möglichkeit, die für $\varkappa$ gefundenen Werte zwanglos in Kurven zusammenzufassen in den Figg. 10 und 11.

Zur Berechnung von n und $\varkappa$ aus k und R wurden die Formeln[1])

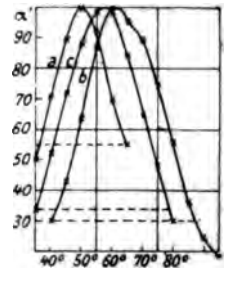
$$n = b\cos\varphi + \sqrt{(b^2 - 1)\cos^2\varphi + k^2}, \tag{6}$$

$$b = (1 + R) : (1 - R), \tag{7}$$

$$k = n\varkappa \tag{8}$$

verwendet, wo φ den Einfallswinkel bezeichnet. Bei den vorliegenden Messungen war $\varphi = 15^0$.

9. *Brechung.* Es wurden Hartgummi-Hohlprismen mit 2 mm dicken Hartgummideckeln verwendet. Der Prismenwinkel war für Wasser 2° 33′, für Äthylalkohol 7° 03′. Eine Prismenfläche war auf der Austrittsöffnung des Senderkastens befestigt, die einfallenden Wellen waren also nahezu senkrecht zu dieser Fläche. Fig. 9 gibt ein Beispiel für Prismenmessungen. Die Abszissen sind Ablesungen am Teilkreis, die Ordinaten reduzierte Ausschläge des Paschengalvanometers in Millimetern. Kurve *a* ist ohne Prisma, Kurve *b* mit Prisma aufgenommen für Wasser, Kurve *c* für Äthylalkohol. Kurve *a* gehört zum Sender Nr. 12 (Tab. 4, S. 317), *b* und *c* zu Nr. 8. Die „gerade Durchsicht" wurde nämlich nicht mit jedem Sender besonders aufgenommen, da sie nahezu konstante Lage hatte, und um die Abnutzung des Senders zu vermindern.



Prismenkurven, *b* und *c* des Senders Nr. 8 (Tab. 4, S. 317) für Wasser und Alkohol, *a* Kurve ohne Prisma („gerade Durchsicht") des Senders Nr. 12.

Fig. 9.

Als maßgebend für den Ablenkungswinkel wurde nicht die Lage der Spitze der Kurve angesehen, da bei einigen Kurven kleine Nebenmaxima oder unsymmetrischer Abfall auftraten, sondern die Lage des Schwerpunktes der durch die gezeichnete Kurve und die gestrichelte Linie umfaßten Fläche, der ja auch für Absorption und Reflexion maßgebend ist. So ergab sich für die Kurven *a*, *b* und *c* 50° 00′, 64° 00′ und 57° 00′. Es wurden nur halbe Grade noch abgelesen.

1) Abgeleitet aus der Formel für R in Winkelmanns Handbuch der Physik, 2. Aufl. Bd. VI, S. 1300, Formel (45), wenn $J_p'' : J_p' = R$ gesetzt wird.

Der Prismenwinkel w war für Wasser 2° 33′, für Alkohol 7° 03′. Die Normale zur Austrittsfläche des Prismas lag für Wasser bei 46° 28′, für Alkohol bei 42° 38′. Aus diesen Werten ergibt sich für Wasser (Alkohol) ein Einfallswinkel φ von $-0°\,59'$ $(-0°\,19')$ und ein Austrittswinkel ψ von $-17°\,32'$ $(14°\,22')$ und n nach der Formel[1])

$$(9) \qquad n = \frac{(\sin\varphi\cos w - \sin\psi)\cos\varphi}{\sin w}\left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{2(k^2+n^2)}\right),$$

die sich für kleine φ, wie sie hier vorliegen, auf

$$(10) \qquad n = \sin\varphi\,\mathrm{cotg}\,w - \sin\psi : \sin w$$

reduziert, zu $n = 6{,}4$ für Wasser, $n = 2{,}0$ für Alkohol.

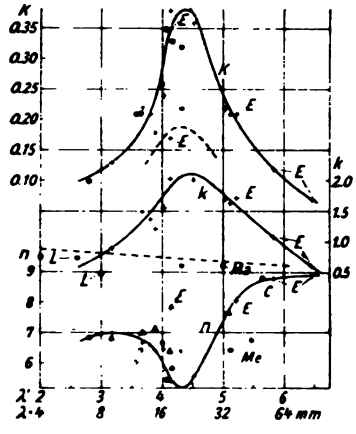
Jede Prismenkurve wurde nur einmal aufgenommen. Die Bestimmung der Winkel daraus läßt sich durchschnittlich bis auf etwa $^1/_2{}^0$ ausführen. Dies gibt für n eine Genauigkeit von etwa 3 Proz. Daher hatte es keinen Zweck, in Tab. 4 noch eine zweite Stelle nach dem Komma anzugeben.

10. *Ergebnisse der Dispersionsuntersuchung.* Sie sind in Tab. 4 eingetragen, zusammen mit denjenigen einiger anderen Beobachter. Cole[2]), Eckert[3]), Lampa[4]) und Merczyng[5]) arbeiteten mit Luftwellen, Marx[6]) mit Drahtwellen. Marx bestimmt demgemäß n aus dem Verhältnis der Wellenlängen in Luft und in Flüssigkeit, Lampa mit Prisma, Cole, Eckert und Merczyng nach der Reflexionsmethode, Cole und Merczyng ohne Berücksichtigung der Absorption. Ferner sind diese Ergebnisse dargestellt in Fig. 10 für Wasser, in Fig. 11 für Äthylalkohol, und zwar mit gleichabständigen Oktaven, so daß die Werte λ' (Tab. 4, Zeile 4) die Abszissen sind.

Zu diesem Zweck wurden zunächst aus den nicht eingeklammerten Werten, die eine zusammenhängende Beobachtungsreihe darstellen, unter Weglassung der mit Prisma

1) H. A. Lorentz, Wied. Ann. **46.** S. 253. 1892.
2) A. D. Cole, a. a. O.
3) Fr. Eckert, a. a. O.
4) Anton Lampa, a. a. O.
5) H. Merczyng, Ann. d. Phys. **34.** S. 1015. 1911.
6) Erich Marx, Wied. Ann. **66.** S. 411. 1898.

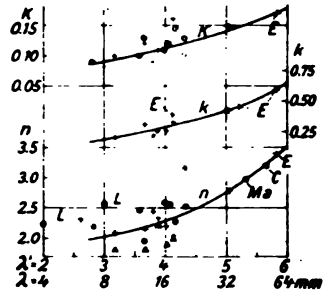
bestimmten und unter Hinzunahme der Eckertschen Beobachtungen Kurven für k, n und $\varkappa$ gezeichnet. Einige weiter abliegende Punkte wurden dabei mit geringerem Gewicht belastet. Nach Fertigstellung der Kurven wurden auch die mit Prisma bestimmten Werte und die der übrigen Beobachter eingetragen.



Ergebnisse der Dispersionsmessungen für Wasser (vgl. S. 314 ff.) nach Tab. 4 (S. 316), k Absorptionskoeffizient, $\varkappa$ Absorptionsindex, n Brechungsverhältnis, λ Wellenlänge, λ' auf gleichabständige Oktaven gebrachte Wellenlänge. C = Cole, E = Eckert, L = Lampa, Ma = Marx, Me = Merczyng. Die gestrichelten Linien grenzen die zur darunter liegenden Kurve gehörigen Punkte ab.

+ Punkte, aus denen die Kurven gezeichnet wurden,
△ Prismenwerte,
⊙ alle übrigen Punkte.

Fig. 10.



Ergebnisse der Dispersionsmessungen für Alkohol (vgl. S. 314 ff.) nach Tab. 4 (S. 316). k Absorptionskoeffizient, $\varkappa$ Absorptionsindex, n Brechungsverhältnis, λ Wellenlänge, λ' auf gleichabständige Oktaven gebrachte Wellenlänge, C = Cole, E = Eckert, L = Lampa, Ma = Marx.

+ Punkte, aus denen die Kurven gezeichnet wurden,
△ Prismenwerte,
⊙ alle übrigen Punkte.

Fig. 11.

Die Spalten mit eingeklammerten Werten in Tab. 4 stammen von Vorversuchen. Bei diesen war k nicht mit dem Trog, sondern nach anderen Methoden bestimmt worden, welche keine zuverlässigen Werte ergeben hatten. Daher wurden für diese Spalten Werte von k aus den bereits gezeichneten Kurven entnommen und damit n und $\varkappa$ berechnet. Diese wurden dann ebenfalls in die Zeichnungen eingetragen. Beim Alkohol sind die Eckertschen Werte von n und $\varkappa$ für $\lambda = 17.5$ und 37 mm weggelassen, da für sie n ohne Messung gleich dem für $\lambda = 57$ mm gefundenen Werte gesetzt ist.

Tabelle 4.

Zeile 1 Nummer des Senders oder Name des Beobachters (C = Cole, E = Eckert, L = Lampa, Ma = Marx, Me = Merczyng). Zeilen 2 bis 4 Wellenlänge λ gemessen, λ berechnet, $\lambda' = 3{,}322 \log \lambda$ (bei Nr. 13 nach λ ber., sonst nach λ gem.). Zeilen 5, 6, 8, 9 Länge l und Dicke d des Senders (S) und Empfängers (E). Zeile 7 Glasdicke beider Einschmelzstellen des Senders zusammen. Zeile 10 Apparat für λ-Messung, Boltzmannscher Spiegel (Sp) oder Quarzinterferometer (Int.). Zeilen 11 bis 15 Absorptionskoeffizient k, Absorptionsindex $\varkappa$, reflektierte Intensität R in Prozenten der Metallreflexion, für 15° Einfallswinkel, Brechungsverhältnis $n\,(R)$ aus dem Reflexionsvermögen und $n\,(Pr)$ mit dem Prisma bestimmt, alles für Wasser. Zeilen 16 bis 20 dasselbe für Äthylalkohol. Wegen der eingeklammerten Zahlen vgl. S. 315 und Fr. Eckert, a. a. O. S. 30. Alle Längen sind Millimeter. Temperatur bei Nr. 3 und 4 17°, bei anderen Nummern etwa 21°.

1	Nr. (Na.)	E	E	C	Me	Ma	E	Me	L	2	3	4	Ma	5	6	7
2	λ gem.	88	57	50	45	40	37	35	34,6	14,7	14,0	33,0	32	20	22,8	17
3	λ ber.	—	–			–	–	–	35,4	34,3	34,4	34,2	-	22,7	22,4	21,1
4	λ'	6,46	5,83	5,65	5,49	5,32	5,21	5,13	5,11	3,88	3,80	5,04	5,00	4,32	4,51	4,08
5	$l\,(S)$	36,0	27,0	-	-	-	17,6	-	11,00	10,66	10,65	10,51		6,78	6,63	6,3
6	$d\,(S)$	3	2				2	-	0,5	0,5	0,5	0,5		0,5	0,5	0,5
7	Glas	-	--			–	–	-	1,67	1,6	1,68	1,74	-	1,42	1,45	1,32
8	$l\,(E)$	34	22		-	--	12	--	170	14	14	170		14	170	14
9	$d\,(E)$	1	2	-	--	-	0,5		0,5	0,3	0,3	0,5		0,3	0,5	0,3
10	App.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Draht	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Draht	Sp.	Sp.	Int.
11	k	0,60	1,08	—	—	--	1,72	-	1,63	1,21	1,36	1,70	-	(2,07)	2,02	(1,85)
12	$\varkappa$	0,07	0,12	—	—	-	0,21	—	0,21	0,18	0,21	0,22	-	(0,32)	0,36	(0,35)
13	R	—	—	--	--	—	—	-	61,4	55,7	56,7	61,4	-	60	54	52,2
14	$n\,(R)$	8,89	8,79	8,80	6,79	--	8,10	6,44	7,63	6,41	6,59	7,64	9,22	(6,41)	5,57	(5,35)
15	$n\,(Pr)$	—	—	--	—	--	—	—	-	7,1	--	—	—	--	—	—
16	k	--	0,60	–	--	--	0,45			0,26	0,22	0,43	-	(0,32)	-	(0,30)
17	$\varkappa$	-	0,17	-	—	—	(0,13)	-	--	0,11	0,09	0,15		(0,10)	-	(0,12)
18	R	—	--	--	--	--	–			17,6	19,2	24,6		28,5	-	21
19	$n\,(R)$	—	3,4	3,2	2,25	2,97	(3,4)	-	-	2,33	2,45	2,80		(3,16)	--	(2,56)
20	$n\,(Pr)$	--	--	—	--	-	-		-	2,2				--	--	-

Tabelle 4 (Fortsetzung).

Die Dicken der „Einschmelzstellen" bei den Lampaschen Sendern wurden auf Grund der bei Lampa, a. a. O. gemachten Angaben angenommen. Die Wellenlängen sind bei Lampa mit Gitter (Gi.) bestimmt.

1	Nr. (Na.)	8	9	10	E	11	12	L	13	14	L	15	16	L	17
2	λ gem.	17,5	20	18	17,5	16	16,2	8	..	12,8	6,1	12	9,0	4	7
3	λ ber.	21,5	19,0	18,6	—	16,3	16,0	14,4	12,6	12,2	10,8	11,4	11,2	7,2	.
4	λ'	4,13	4,32	4,17	4,13	4,00	4,02	3,00	3,65	3,67	2,61	3,58	3,17	2,00	2,81
5	l (S)	5,82	5,42	5,3	7,6	4,62	4,5	4,0	3,21	3,00	3,00	2,58	2,5	2,0	1,98
6	d (S)	0,5	0,5	0,5	1,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
7	Glas	2,06	1,48	1,48	..	1,33	1,33	2	1,44	1,47	1,5	1,73	1,73	1	..
8	l (E)	14	14	14	4,0	14	14	..	14	14	..	14	14		14
9	d (E)	0,3	0,3	0,3	0,5	0,3	0,3	-	0,3	0,3	..	0,3	0,3	.	0,3
10	App.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Sp.	Gi.	—	Sp.	Gi.	Sp.	Sp.	Gi.	Sp.
11	k	2,04	(2,07)	(1,95)	2,7	(1,73)	1,56	.	(1,32)	1,49	.	(1,24)	0,90	..	(0,69)
12	$\varkappa$	0,38	(0,22)	(0,33)	0,35	(0,26)	0,24	.	(0,21)	0,22		(0,21)	0,13		(0,10)
13	R	53,3	67	55	—	58	56,8	..	56	57,4	.	54	61		57
14	n (R)	5,41	(9,23)	(5,86)	7,82	(6,67)	6,48	.	(6,43)	6,67		(6,05)	6,99	—	(6,85)
15	n (Pr)	6,4	—	—	..	—	—	8,972	—	7,0	9,450	..	6,8	9,499	..
16	k	0,33	(0,32)	(0,31)	0,39	(0,29)	0,26		(0,25)	0,31	—	(0,25)	0,20	.	(0,17)
17	$\varkappa$	0,16	(0,13)	(0,14)	(0,11)	(0,11)	0,12	.	(0,13)	0,12	.	(0,10)	0,10	..	(0,08)
18	R	13,9	20,6	16,8	—	21,3	15,8	.	12,2	15,0		19,3	22,0		15,6
19	n (R)	2,06	(2,53)	(2,26)	(3,4)	(2,59)	2,20		(1,95)	2,15	—	(2,45)	2,10	—	(2,20)
20	n (Pr)	2,0	...	...	..	—	1,9	2,568	—	1,8	2,292	—	1,8	2,24	—

Beim Sender Nr. 13 war keine Wellenlänge gemessen worden, da er vorher aufgebraucht war. Es wurde daher die berechnete Grundschwingung verwendet. Die Temperaturen der Flüssigkeiten bei Reflexion und Absorption betrugen bei Nr. 3 und 4 17°, bei den übrigen Sendern etwa 21°. Die Abhängigkeit der Werte von der Temperatur wurde bisher nicht untersucht.[1]) Bei den zur Zeichnung der Kurven verwendeten Sendern zeigten die Wellenlängenkurven keine übergelagerten kleinen Wellen, bei den Sendern mit eingeklammerten Werten hingegen war meist ein kleiner Prozentsatz davon vorhanden, bis etwa 10 Proz. des größten Ausschlages. Durch Nichtberücksichtigung dieser kleinen Wellen, für welche anscheinend ein kleineres n und k in Frage kommt, könnte n etwas zu klein ausgefallen sein. Bei den Sendern Nr. 3 und 4 waren die Reflexionsmessungen, bei Nr. 4 auch die Absorptionsmessungen besonders oft und sorgfältig wiederholt worden (vgl. S. 310 und 311), so daß diese Werte als besonders zuverlässig gelten können. Über die Genauigkeit der einzelnen Messungen vgl. S. 301, 310, 312, 314.

Wie man sieht, war die Zeichnung der Kurven ohne Schwierigkeit möglich. Die Eckertschen Messungen passen gut zu den übrigen bis auf n und k für $\lambda = 17{,}5$ mm, wo eine zurzeit noch nicht erklärbare Abweichung vorliegt. Auch die von Marx für Alkohol und die von Cole für Wasser und Alkohol gefundenen Werte fügen sich den Kurven ein. Die übrigen Werte anderer Beobachter liegen allerdings weiter ab, besonders diejenigen Lampas für Wasser wie für Alkohol. Für Sender Nr. 8, $\lambda' = 4{,}13$, ist n zu klein und $\varkappa$ zu groß ausgefallen. Auch die entsprechenden Punkte für Wasser würden eine Verschiebung im gleichen Sinne vertragen. Es scheint also bei diesem Sender aus einem jetzt nicht mehr sicher feststellbaren Grunde, vielleicht durch übergelagerte kleine Wellen, das Reflexionsvermögen etwas zu klein bestimmt zu sein. In der Tat ergibt das Beobachtungstagebuch, daß λ zuerst und R ganz am Schlusse bestimmt war, wo die Sender abgenutzt waren und erfahrungsgemäß Neigung zur Ausbildung kleiner Wellen zeigten. Von den Prismenwerten liegen beim Alkohol die meisten etwas tiefer als die Kurve,

1) Vgl. hierüber Fr. Eckert, a. a. O. S. 22.

beim Wasser passen sie besser. Die eingeklammerten Werte der Tab. 4 liegen meist auch nicht in allzu großer Entfernung von den Kurven. Nur die Werte für Wasser beim Sender Nr. 9 fallen ganz heraus. Die Kurve n (Fig. 10) hätte man auch durch Lampas Punkte legen können, aber es ist doch fraglich, ob n jenseits des Absorptionsstreifens noch einmal so hohe Werte annimmt. Daher ist es vorläufig unterlassen worden.

Auch aus den Absorptionskurven kann, wenn die Dämpfung nicht gar zu groß ist, n bestimmt werden. Die Genauigkeit ist allerdings keine große, da wegen des starken Abfalls die Lage der Maxima und Minima nur annäherungsweise bestimmt werden kann. Mitunter traten übergelagerte kleine Wellen auf, die bei der Aufnahme der Wellenlängenkurve in Luft nicht bemerkt worden waren und daher auch eine Bestimmung von n nicht zuließen. Bei systematischer Untersuchung müßte sich aber auch aus den Absorptionskurven mehr herausholen lassen, insbesondere für die übergelagerten kleinen Wellen, wenn die Grundschwingung des Senders in das Gebiet stärkster Absorption verlegt wird und damit eine gute Isolierung der weniger stark absorbierten kleinen Wellen erzielt wird. Für einige große Wellen wurden annehmbare Werte erzielt, z. B. bei Sender Nr. 4 $n = 7{,}5$ für Wasser und $n = 2{,}6$ für Alkohol, bei einem anderen Sender von derselben berechneten Grundschwingung $n = 7{,}0$ für Wasser. Weniger gut stimmen die Werte beim Sender Nr. 3, $n = 7{,}4$ für Wasser und 1,7 für Alkohol.

Noch eine andere Messung möge hier Platz finden. Der auf S. 307 erwähnte, mit Parabelgitter versehene Sender, der eine einigermaßen reine Welle von $\lambda = 3{,}0$ mm geliefert hatte, wurde mit einem der empfindlichen Galvanometer hinsichtlich der Brechung, Reflexion und Absorption untersucht. Die Absorptionskurve (g in Fig. 5), in dem mit Wasser beschickten Quarzinterferometer, ohne Bezugskurve, aber von rechts nach links aufgenommen, ergab $\lambda = 0{,}7$ mm in Wasser, also zusammen mit $\lambda = 3{,}0$ mm in Luft, $n = 4{,}3$, ein durchaus möglicher Wert.

Bei dieser Kurve g (Fig. 5) war vergessen worden, Bezugspunkte zu messen, so daß zwar λ, aber nicht k bestimmt werden konnte. Die Wiederholung der Absorptions-

messung nach zwei Tagen ergab $\lambda = 0.16$ mm in Wasser, für die Absorption aber einen solchen Wert, daß die Einsetzung der Grundschwingung des Senders, $\lambda = 18.8$ mm, in Formel (5) (S. 308) ein komplexes n ergeben hätte. Mit $\lambda = 3.0$ mm aber ergab sich $k = 1.98$ und ein reelles $n = 6.0$. Den gleichen Wert ergab das Prisma. Daß dieser Wert größer ist als der aus der ersten Absorptionskurve unmittelbar bestimmte $n = 4.3$, kann nicht überraschen, da die kleine Welle nicht ganz rein war. Der Wert $\lambda = 0.16$ mm im Wasser, der aus der Absorptionskurve g folgt, würde wieder mit $\lambda = 3.0$ mm in Luft ein viel zu großes n ergeben. Es waren aber mit demselben Sender auch λ-Kurven aufgenommen worden, die $\lambda = 1.2$ und $\lambda = 1.0$ mm in Luft ergaben, denn die kleinen Wellen ließen sich bisher nicht beliebig reproduzieren. Dies würde $n = 7.5$ und $n = 6.3$ ergeben. Wenn man übrigens $\lambda = 1.2$ oder 1.0 mm als die zur zweiten Absorptionskurve g gehörige Luftwelle ansieht (statt 3.0 mm, welche $k = 1.98$ ergab), so folgt auch für k ein Wert, der einigermaßen zu der Kurve k in Fig. 10 paßt, wenn man sie weiter nach kleinen Wellen verlängert denkt. Dazu kommt noch, daß auch das Reflexionsvermögen des Äthylalkohols kleiner gefunden wurde als bei allen anderen Sendern, nämlich 9.2 Proz. Berechnet man daraus n ohne Berücksichtigung der Absorption, die ja in diesem Gebiete schon fast ohne Einfluß ist, so ergibt sich $n = 1.8$, ein Wert, der ganz gut zur verlängerten n-Kurve in Fig. 10 paßt.

Durch Wiedergabe dieser Vorversuche, die als solche vorläufig noch nicht in die Kurven von Figg. 10 und 11 eingetragen werden mögen, sollte nur gezeigt werden, daß die Möglichkeit zu bestehen scheint, auch mit den gefundenen kleinen Wellen Dispersionsuntersuchungen anzustellen. Allerdings erfordert dies ein empfindlicheres Galvanometer, als es bisher zur Verfügung stand, wenn zuverlässige Ergebnisse erzielt werden sollen.

Lindman[1]) legt bei seinen auf S. 305 erwähnten Versuchen Wert darauf, objektiv im Luftraum vorkommende stehende elektrische Wellen nachgewiesen zu haben. Man kann hier eine ähnliche Frage stellen. Wenn ein Sender eine bestimmte Grundschwingung hat und die Interferenzkurve,

1) Karl F. Lindman, a. a. O. S. 551.

mit einem Empfänger von einer gleichen oder anderen Grundschwingung aufgenommen, eine von der Grundschwingung des Senders erheblich abweichende Wellenlänge ergibt, welche Wellenlänge ist dann für die mit demselben Sender und Empfänger bestimmte Absorption, Reflexion und Brechung maßgebend?

Die Messungen Nr. 3 und 4 (Tab. 4) geben hierauf eine Antwort. Sie sind mit Sendern von nahezu derselben Grundschwingung, aber verschiedenen Empfängern aufgenommen und zeigen ganz verschiedene Wellenlänge, Absorption und Reflexion, die aber alle gut zu den Kurven in Figg. 10 und 11 passen, wenn man die gemessene Wellenlänge auch für Absorption und Reflexion als maßgebend ansieht. Wollte man hingegen z. B. bei Nr. 3 die Wellenlänge der Grundschwingung des Senders zur Berechnung von k verwenden, so würden diese Werte, sowie diejenigen für n und $\varkappa$, nicht mehr zu den Kurven stimmen.

Wenn auch diese eine Beobachtung noch nicht quantitativ völlig entscheidend ist, so kann man doch schon daraus schließen, daß bei Absorption, Reflexion und Brechung im wesentlichen dieselbe Schwingung maßgebend ist, die bei der Wellenlängenbestimmung in der Interferenzkurve auftritt, gleichviel welche Grundschwingung Sender und Empfänger haben. Man kann daher die gedämpfte Grundschwingung des Senders nebst Oberschwingungen auch objektiv als Spektrum ansehen, dieses Spektrum in schmale Streifen zerlegt denken und annehmen, daß der Empfänger auf jeden dieser schmalen Streifen in einem seinem eigenen Spektrum entsprechenden Maße anspricht, und daß ferner jeder solcher schmale Streifen die seiner Wellenlänge zukommende Absorption und Reflexion besitzt. Das gleiche Ergebnis würde dann wohl auch ohne besondere Messungen für die Brechung auszusprechen sein. Die vorstehenden Ausführungen sind im Einklang mit der zuerst von Sarasin und de la Rive[1]) ausgesprochenen Erklärung der „multiplen Resonanz" und den Untersuchungen von Garbasso und Aschkinaß[2]) über Brechung elektrischer Wellen in einem prismatisch angeordneten Resonatorensystem.

---

1. Edouard Sarasin und Lucien de la Rive, Compt. rend. **110**, S. 72, 1890.

2. A. Garbasso und E. Aschkinass, a. a. O.

11. *Zusammenfassung.* Es wurde die Dispersion von Wasser und Äthylalkohol zwischen 7 und 35 mm Wellenlänge untersucht mit einer Versuchsanordnung, die für die größeren Wellen zwar optisch nicht mehr ganz einwandfrei war, aber noch befriedigende Ergebnisse gezeitigt hat. Die hauptsächlichste Beobachtungsreihe, zusammen mit den von Fr. Eckert angestellten Versuchen, ergab für Absorptionskoeffizient k, Absorptionsindex $\varkappa$ und Brechungsverhältnis n ziemlich glatte Kurven, und zwar für Wasser (Fig. 10, S. 315) einen Absorptionsstreifen bei $\lambda = 22$ mm, für Alkohol (Fig. 11, S. 315) allmählichen Abfall der Kurven nach kleineren Wellen hin. Die mit Prisma bestimmten sowie weniger zuverlässige, von Vorversuchen stammende Werte lagen meist auch noch in der Nähe der Kurven. Von den von anderen Beobachtern stammenden Werten stimmen einige sehr gut zu den Kurven, andere liegen weit ab.

Ferner wurden auf vielen zur Bestimmung der Wellenlänge aufgenommenen Interferenzkurven kleine Wellen von $\lambda = 5$ mm bis hinab zu 0,1 mm übergelagert gefunden, die, wenigstens teilweise, als Oberschwingungen des Senders anzusprechen sind. Es wurden einige Vorversuche angestellt, um solche kleine Wellen zu isolieren und zu Dispersionsuntersuchungen zu verwenden. Für die Isolierung erscheint neben den auf S. 305 besprochenen Versuchen aussichtsvoll die Verwendung von Oberschwingungen, deren Grundschwingung im Gebiete stärkster Absorption des Wassers liegt und durch eine dünne Wasserschicht völlig absorbiert werden kann, sowie die Verwendung von Resonatorengittern, ähnlich wie bei den Rubensschen Reststrahlenversuchen. Die Fortsetzung dieser Versuche erfordert eine empfindlichere Meßanordnung.

Zum Schlusse möchte ich mir erlauben, meinem hochverehrten Chef, Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. O. Wiener, auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen für das der Arbeit entgegengebrachte rege Interesse und die Bewilligung aller erforderlichen Hilfsmittel.

Leipzig, Phys. Inst. d. Universität, im Juni 1919.

(Eingegangen 4. Dezember 1919.)

2. *Die Trägheit der Elektrizität*[1]) *(eine Kritik)*; *von Richard Gans.*

De Heen[2]) gibt ein Experiment an, mittels dessen er die Trägheit der Elektrizität, welche in einem metallischen Drahte fließt, erwiesen zu haben glaubt.

Wegen der Wichtigkeit des Problems wollen wir die fragliche Erscheinung theoretisch etwas eingehender erörtern. Wir halten uns dabei an de Heens eigene Darstellung.

Nehmen wir an, daß in einem spiralförmigen Rohre (Fig. 1), welches in seiner eigenen Ebene um die Achse c drehbar ist, eine Flüssigkeit sich bewege. Dann wird eine

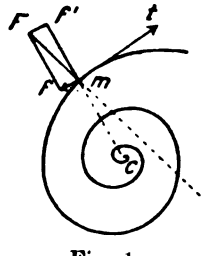


Fig. 1.

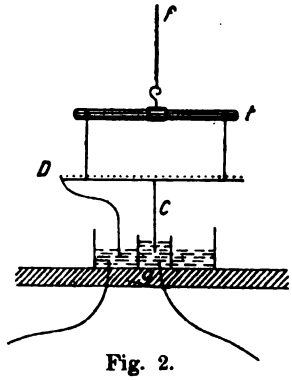


Fig. 2.

Zentrifugalkraft F entstehen, welche in zwei zueinander senkrechte Komponenten f und f' zerlegt werden kann, von denen letztere die Richtung cm hat, während erstere das als starr gedachte System zu drehen sucht. Diese Kraft ist von der Strömungsrichtung unabhängig.

Diese Überlegungen wendet de Heen auf die Elektrizität an, welche durch eine aus Kupferdraht gebildete Spirale D fließt (Fig. 2). Diese ist an einem Faden f aufgehängt und

1) Vgl. R. Gans, Contribucion al estudio de las ciencias. Serie matemático-fisica **2**. S. 223. 1918.

2) P. de Heen, La matière, sa naissance, sa vie, sa fin. Bruxelles 1905, S. 24; vgl. auch Mémoires de la Soc. royale des Sciences de Liège (3) **6**. 1905.

hat ihre Stromzuleitungen durch das zylindrische, mit Quecksilber gefüllte Gefäß G und die ringförmige, ebenfalls Quecksilber enthaltende Rinne, welche G umgibt.

Er beobachtet nun tatsächlich eine Ablenkung, und zwar mit einer ganz rohen und unempfindlichen Anordnung, die er in einer Photographie wiedergibt; doch muß es befremden, daß er dieselbe ohne weiteres als den erwarteten Effekt deutet, der doch vielfach vergeblich gesucht worden ist und doch höchstens mit sehr empfindlichen Apparaten entdeckt werden könnte.

Er hat den Versuch ganz oberflächlich und ohne irgendwelche Kritik angestellt; er hat sich nicht überlegt, welche Folgerungen man aus der quantitativ gemessenen Ablenkung ziehen könnte, welches die günstigste Form der Stromkurve wäre, und welche Fehlerquellen ihm die Erscheinung etwa vorgetäuscht haben könnten.

Alle diese Punkte sollen im folgenden diskutiert werden.

Ein Elektron der Masse m bewege sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kurve s, der wir aus Gründen der Allgemeinheit doppelte Krümmung zuschreiben wollen. Dadurch entsteht die Zentrifugalkraft $f = \frac{m v^2}{\varrho}$ in Richtung des Krümmungsradius ϱ.

Enthält die Volumeneinheit N Elektronen, habe der Draht den Querschnitt q, so daß auf der Länge ds des Drahtes sich $N q ds$ Elektronen befinden, so ergibt sich als Kraft auf das Längenelement ds der Wert $dF = N m v^2 q \frac{ds}{\varrho}$ in Richtung des Krümmungsradius, so daß die Komponenten die Werte haben:

$$dF_x = N m v^2 q \frac{\cos(\varrho, x)}{\varrho} ds \tag{1}$$

und zwei entsprechende Gleichungen.

Das Drehmoment um die z-Achse ist also:

$$C_z = \int (x\, dF_y - y\, dF_x) = N m v^2 q \int \frac{x \cos(\varrho, y) - y \cos(\varrho, x)}{\varrho} ds. \tag{2}$$

Um die Abhängigkeit dieses Ausdrucks von der Stromstärke i zu übersehen, führen wir die Ladung e des Elektrons ein und haben:

$$i = N e v q, \tag{3}$$

so daß

$$N m v^2 q = \frac{m i^2}{N e^2 q} \tag{4}$$

wird.

Definieren wir die Beweglichkeit u des Elektrons durch die Beziehung:

$$v = u\,e\,E\,, \tag{5}$$

wenn E die Feldstärke ist (vielfach wird auch v/E als Beweglichkeit bezeichnet), so folgt:

$$i = N\,e^2\,u\,q\,E\,, \tag{6}$$

d. h.

$$\lambda = N\,e^2\,u \tag{7}$$

ist die elektrische Leitfähigkeit. Mit dieser Beziehung nimmt (4) die Form an:

$$N\,m\,v^2\,q = m\,u\,\frac{i^2}{\lambda\,q}\,. \tag{8}$$

Mißt man also das Drehmoment, welches eine Folge des Strömens der Elektrizität durch eine Drahtkurve bekannter Form ist, so kann man nach (2) und (4) $m/N\,e^2$ oder nach (8) $m\,u$ berechnen.

Da man den Wert von e/m[1]) sowie den der Elementarladung e kennt, könnte man also durch eine derartige Messung die Anzahl Elektronen in der Volumeneinheit N und ihre Beweglichkeit u, zwei für unsere Kenntnis der Konstitution der Metalle wichtige Konstanten, ermitteln.

Alles das scheint de Heen völlig entgangen zu sein. Sonst müßte er zweifellos versucht haben, das von ihm beobachtete Drehmoment quantitativ zu messen.

Auch hat er sich nicht bestrebt, seinem Draht die günstigste Form zu geben, was durch folgende Überlegung leicht möglich ist.

Nach (2) und (8) gilt:

$$C_z = m\,u\,\frac{J}{e}\,W\,, \tag{9}$$

wo l die ganze Drahtlänge, $J = i^2\,l/\lambda\,q$ die Joulesche Wärme, W das nur von der Kurvenform abhängige Integral:

$$W = \int_{\varrho} \frac{x\cos(\varrho, y) - y\cos(\varrho, x)}{\varrho}\,ds \tag{10}$$

bedeutet.

1) R. C. Tolman und F. Dale Stewart, Phys. Rev. (2) **8**, S. 97. 1916 haben das umgekehrte Experiment des hier beschriebenen ausgeführt, indem sie den Strom beobachtet haben, der durch Beschleunigung des Leiters hervorgerufen wird, und haben auf diese Weise e/m bestimmt. Es ergab sich, daß die spezifische Ladung ungefähr gleich ist dem für langsam bewegte freie Elektronen geltenden Wert.

Fig. 3.

Wir erhalten also das üle
überhaupt nicht von der Kurve
Lage und Richtung seiner
demnach möglichst groß, w
und zwei kleine, zu seiner
horizontale Spitzen hat (vgl.
man in seinem Mittelpunkte
hätte W den Wert l.

Wir brauchen wohl n
praktisch kaum möglich se
Drahte der Form, wie sie F

Des weiteren sehen v
haupt keine Ablenkung hätt
seiner Versuchsanordnung (Fig. 2
vertikal waren

$$\left(\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} =\right.$$

Der ganze von ihm festgestellte E

Es fragt sich schließlich, welch
die de Heen die Trägheit der El
Sicherlich wohl die elektromagneti
festen und dem beweglichen Teil
Tendenz haben, die Selbstinduktio
und die auch von der Stromrichtu

Er hätte nachweisen müssen,
nicht ins Spiel kamen. Doch wo

3. *Ein Ultrafiltrierapparat; von Richard Gans.*

Bechhold[1]) hat ein Verfahren der Ultrafiltration mittels Kollodium- und Gelatinefilter beschrieben und vor allem den Einfluß der Gallertekonzentration auf die Durchlässigkeit der Filter entdeckt. Nach seinem Verfahren ist es möglich, ultramikroskopische Teilchen auf dem Filter zurückzuhalten, während Kristalloide ohne weiteres durchs Filter laufen, so daß man eine Methode hat, die unvergleichlich viel schneller arbeitet als die der Dialyse. Man kann aber auch, je nach der Gelatinekonzentration, kleine Ultrateilchen durchs Filter gehen lassen und größere zurückhalten, auf diese Weise also eine Trennung nach der Teilchengröße vollziehen.

Der Zweck der folgenden Zeilen ist die Beschreibung einer Anordnung und der Herstellungsart von Ultrafiltern, die im Prinzip dem Bechholdschen Verfahren ähnlich, aber wesentlich einfacher sind, um die Methode dem allgemeinen Laboratoriumsgebrauch zugänglicher zu machen.

Dieses Verfahren hat sich im hiesigen Institut erprobt bei der Ultrafiltration von kolloidalen Metallösungen zwecks Bestimmung ihrer geometrischen Form[2]) und Trennung derselben nach ihrer Größe. Es wurden auch von Frl. Villegas[3]) Hämoglobinlösungen, Suspensionen von Eiweiß, Seren, Milch usw. filtriert und auf diese Weise Flüssigkeiten ohne Teilchen erhalten. Ferner konnte sie in einigen Minuten quantitativ Kristalloide, wie Arsenverbindungen, Alkaloide usw. von organischen Substanzen, wie Serum, Milch, Eiweiß usw., trennen.

---

1) H. Bechhold, Zeitschr. f. Elektrochemie **12.** S. 777. 1906; Kolloid-Zeitschr. **1.** S. 107. 1906; **2.** S. 3. 1907; Zeitschr. f. phys. Chem. **60.** S. 257. 1907; **64.** S. 328. 1908.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **47.** S. 270. 1915; R. Gans und R. Calatroni. Ann. d. Phys. **61.** S. 465. 1920.

3) L. Sarlo Villegas, Doktordiss. d. Univ. La Plata 1919.

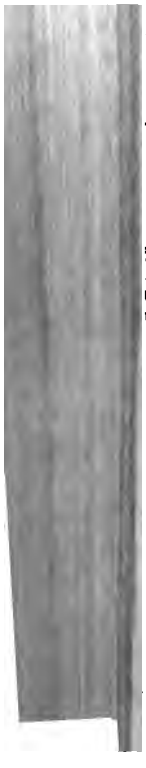


Fig. 1.

Figur sind nur zwei B_1 und B_2 sich
kantmutter, oben eine Flügelmutte

Die Scheibe D hat in der Mit
das durch die Scheibe E mittels
Flügelschrauben geschlossen ist. Di
zwecks Verbindung mit der Luftpun
Überdrucke von 1 2 A

das auf ein Blatt Filtrierpapier gelegte Ultrafilter zu tragen. Am besten ist dieses Blech aus Platin, doch kann, je nach den Zwecken, auch Nickel, Aluminium oder vergoldetes Messing in Betracht kommen. Es hat siebartig 1 mm große Löcher, um die ultrafiltrierte Flüssigkeit hindurchzulassen.

Ein äußerst einfaches Verfahren, um die Kollodiumfilter herzustellen, ist das folgende. 12,5 g Schießbaumwolle werden mit einer Menge absoluten Alkohol versetzt, die genügt, jene zu durchtränken und dann Äther hinzugegossen, bis das Ganze 500 ccm ausmacht.[1]) Von dieser Lösung gießt man ein wenig auf eine Glasplatte, läßt den Überschuß ablaufen, und taucht sie, wenn der Äther verdampft ist, zum Gelatinieren mitsamt der Glasplatte in ein Gefäß mit Wasser, in dem sich das Filter durch Hin- und Herbewegen der Glasplatte von ihr ablöst.

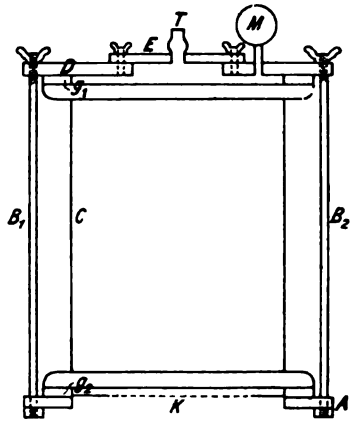


Fig. 2.

Solche Filter sind undurchlässig für Kolloide. Sollen kleine Teilchen hindurchgehen, so setzt man der Lösung Eisessig (z. B. $^1/_2$ Proz.) hinzu. Die Durchlässigkeit hängt von der Essigsäuremenge ab.

Die Filter müssen in fließendem Wasser gut gewaschen werden, und dann kann man sie in Wasser aufbewahren, dem man ein wenig Chloroform oder Formol zusetzt, um Pilzbildung zu vermeiden.

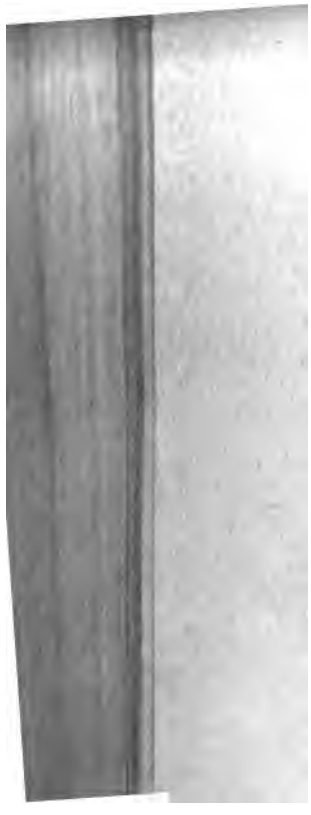
Anstatt der oben angegebenen Verhältnisse von Alkohol und Äther lassen sich auch nach Frl. Villegas gleiche Teile derselben benutzen, wodurch man erreicht, daß die Filtration rascher vor sich geht.

Es ist wichtig, daß die Schießbaumwolle rein und trocken ist.

Ich füge noch folgende Erfahrungen hinzu, die Herr Dr. Teófilo Isnardi am hiesigen Institut gemacht hat.

Die Durchlässigkeit der Kollodium-Essigsäurefilter hängt nicht nur von der Menge Eisessig ab, sondern auch vom Alter

1) G. E. Malfitano, Compt. rend. **139.** S 1221. 1904.



tatsächlich zu brauchen, inden
hindurchtreibt und das erste F
die durch Löcher hervorgerufene
Übereinanderlegen zweier Filter.

Auf diese Weise läßt sich fests
der man soeben Eisessig zugesetz
gibt, die durch ihre vollkommene
kenntlich sind.

Erst nach zwei Wochen ist
daß die Filterhäute leicht opaleszie
und mehr oder weniger durchlässi
Eisessig, welche man zugesetzt ha

La Plata, Instituto de Fisica

(Eingegangen 22. Nov

4. *Ultramikroskopische Studien. (Methoden zur Formbestimmung subultramikroskopischer Teilchen);*

von Richard Gans.

§ 1. Die elektromagnetischen Hauptachsen.

Wir nennen ein Teilchen subultramikroskopisch, wenn seine Dimensionen klein gegen die Wellenlänge des Lichts sind, und zwar genauer gesagt, klein gegen die Wellenlänge in dem Medium, welches das Teilchen umgibt.

Nehmen wir an, daß auf ein solches Teilchen eine ebene, linear polarisierte Lichtwelle fällt, so wird dasselbe das optische Feld stören. Im Innern der Partikel kann man das elektrische Feld als quasistatisch auffassen, und kennt man die Dielektrizitätskonstante des Teilchens und seines umgebenden Mediums, so läßt sich prinzipiell das neue Feld berechnen. Praktisch wird eine solche Berechnung nur in ganz speziellen Fällen einfacher Teilchenform (z. B. Ellipsoide) möglich sein.

Bei ganz beliebiger Form der Partikel können wir jedoch auch einige wichtige Schlüsse ziehen.

Das freie elektrische Moment $\mathfrak{p}$ des Teilchens, welches definiert ist durch die Formel:

$$\mathfrak{p} = \int \varrho\, \mathfrak{r}\, dS, \tag{1}$$

unter $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor von einem festen Punkt an, unter dS ein Volumelement des Teilchens, unter ϱ die Dichte seiner freien Ladungen verstanden, ist wegen der Linearität der elektromagnetischen Grundgleichungen eine lineare Vektorfunktion der ursprünglichen Feldstärke $\mathfrak{E}$, so daß

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_x &= g_{11}\mathfrak{E}_x + g_{12}\mathfrak{E}_y + g_{13}\mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{p}_y &= g_{21}\mathfrak{E}_x + g_{22}\mathfrak{E}_y + g_{23}\mathfrak{E}_z \\ \mathfrak{p}_z &= g_{31}\mathfrak{E}_x + g_{32}\mathfrak{E}_y + g_{33}\mathfrak{E}_z \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ist, wo die g von der Form des Teilchens und der Richtung der Koordinatenachsen abhängige Konstanten sind.

Im allgemeinen fallen also die Richtungen des Moments und der Feldstärke nicht zusammen.

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach den $\mathfrak{E}$ ergibt sich:

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = h_{11}\,\mathfrak{p}_x + h_{12}\,\mathfrak{p}_y + h_{13}\,\mathfrak{p}_z \\ \mathfrak{E}_y = h_{21}\,\mathfrak{p}_x + h_{22}\,\mathfrak{p}_y + h_{23}\,\mathfrak{p}_z \\ \mathfrak{E}_z = h_{31}\,\mathfrak{p}_x + h_{32}\,\mathfrak{p}_y + h_{33}\,\mathfrak{p}_z . \end{cases}$$

Die elektrische Energie, welche dem Vorhandensein dieses Moments entspricht, sei W. Dann gilt:

$$(4)\qquad d\,W = \mathfrak{E}_x\,d\,\mathfrak{p}_x + \mathfrak{E}_y\,d\,\mathfrak{p}_y + \mathfrak{E}_z\,d\,\mathfrak{p}_z .$$

Da W nur vom augenblicklichen Zustand abhängt, muß (4) ein vollständiges Differential sein, d. h. es bestehen die Beziehungen:

$$(5)\qquad \mathfrak{E}_x = \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{p}_x}; \qquad \mathfrak{E}_y = \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{p}_y}; \qquad \mathfrak{E}_z = \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{p}_z},$$

woraus:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \mathfrak{p}_y} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial \mathfrak{p}_x} \quad \text{usw.}$$

oder:

$$(5')\qquad h_{ik} = h_{ki}$$

und nach einem bekannten Satze der Algebra:

$$(6)\qquad g_{ik} = g_{ki}$$

folgt, so daß sich durch Integration von (4) ergibt:

$$(7)\qquad W = \tfrac{1}{2}\,(h_{11}\,\mathfrak{p}_x^2 + h_{22}\,\mathfrak{p}_y^2 + h_{33}\,\mathfrak{p}_z^2 + 2\,h_{23}\,\mathfrak{p}_y\,\mathfrak{p}_z + \ldots) .$$

Nach dem Hauptachsenproblem der Oberflächen zweiter Ordnung muß es also drei aufeinander senkrechte Richtungen ξ, η, ζ geben, für die

$$(8)\qquad W = \tfrac{1}{2}\,(h_1\,\mathfrak{p}_\xi^2 + h_2\,\mathfrak{p}_\eta^2 + h_3\,\mathfrak{p}_\zeta^2)$$

ist, d. h. für die nach (5):

$$(9)\qquad \mathfrak{E}_x = h_1\,\mathfrak{p}_x; \quad \mathfrak{E}_y = h_2\,\mathfrak{p}_y; \quad \mathfrak{E}_z = h_3\,\mathfrak{p}_z$$

oder, wenn wir $h_1 = 1/g_1$; $h_2 = 1/g_2$; $h_3 = 1/g_3$ setzen:

$$(10)\qquad \mathfrak{p}_\xi = g_1\,\mathfrak{E}_\xi; \quad \mathfrak{p}_\eta = g_2\,\mathfrak{E}_\eta; \quad \mathfrak{p}_\zeta = g_3\,\mathfrak{E}_\zeta$$

ist.

Diese drei Richtungen, die gekennzeichnet sind durch das Zusammenfallen der elektrischen Feldstärke mit dem

von ihr erregten Moment, mögen die elektromagnetischen Hauptachsen des Teilchens heißen.

Das ganze optische Verhalten eines subultramikroskopischen Teilchens ist durch die drei Koeffizienten g_1, g_2, g_3 bestimmt. Diese sind durch die Teilchenform vollständig gegeben, aber umgekehrt kann man aus ihnen nicht eindeutig auf die Form schließen. Deshalb kann man durch optische Untersuchungen zunächst nur diese Koeffizienten, und nicht die geometrische Form des Teilchens eindeutig ermitteln.

Der spezielle Fall $g_1 = g_2 = g_3$ z. B. gilt ebenso für die Kugel wie für den Würfel. Es ist deshalb unmöglich, in der subultramikroskopischen Optik zwischen diesen beiden Formen zu entscheiden.

Es gibt einen ähnlichen Fall in der Mechanik des starren Körpers. Alle Rotationsbewegungen um den Schwerpunkt hängen einzig und allein von dem Trägheitsellipsoid ab, welches auch nicht eindeutig die Form bestimmt.

Es ist aber zu berücksichtigen, daß die drei Koeffizienten g_1, g_2, g_3 auch die einzigen Größen sind, welche für uns bezüglich des optischen Verhaltens von Interesse sind.

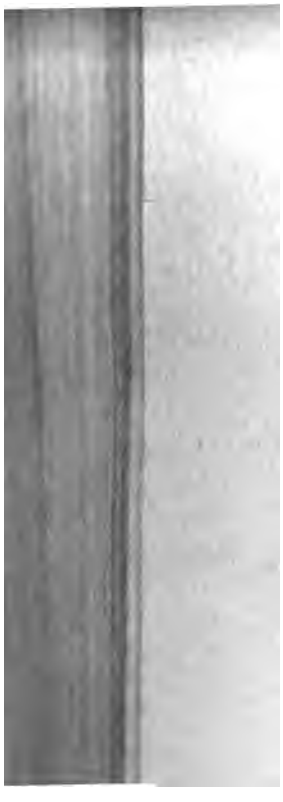
Im allgemeinsten Falle sind die drei Koeffizienten komplex und haben für jede Wellenlänge einen bestimmten Wert.

Sind die Teilchen so groß, daß man überhaupt von der geometrischen Form sprechen kann (bei der Vereinigung einiger weniger Atome kann man das nicht), und kann man diesen Teilchen Brechungskoeffizient und Absorptionsindex des makroskopischen Materials zuschreiben, so käme die Frage, ob die Teilchen etwa die Form von Rotationsellipsoiden haben, darauf hinaus[1]), ob die Koeffizienten sich für alle Wellenlängen mittels desselben P in der Form darstellen lassen.

$$(11)\quad \begin{cases} g_1 = m_0^2 \dfrac{m'^2 - 1}{4\pi + (m'^2 - 1) P} V, \\ g_2 = g_3 = m_0^2 \dfrac{m'^2 - 1}{4\pi + (m'^2 - 1) P'} V, \end{cases}$$

wo m_0 den Brechungsexponenten der Umgebung, m' den (eventuell komplexen) Brechungsexponenten des Teilchens, V sein Volumen und P und P' zwei nur von den Achsenverhältnissen abhängige Größen bedeuten, die der Beziehung:

1) Vgl. R. Gans, Ann. d. Phys. **37**. S. 884. 1912.



die numerische Exzentrizität (
Halbachsen A und B verstande

Es ist möglich, daß Lord
abgeleiteten Satz der elektroma
sessen hat. Leider ist es mir nic
da mir die dazu nötige Literatu

§ 2. Depolarisation des durch erzeugten Tyn

Das von einer trüben Lösun
ist linear polarisiert, wenn die T
ist zum Teil depolarisiert, wenn
und zwar ist der Depolarisations
die Form von der Kugel abweicl
des Polarisationsgrades ein Mitt
bestimmen. Auf diese Methode
und entwickelte die entsprechen
dem komplizierteren Falle, daß

Lord Rayleigh[3]) hat in ei
Arbeit die Formeln für den De
die nichtmetallischen Teilchen ent
frühere Veröffentlichung nicht ge
nicht zitiert. Übrigens beschränk
dünnte Lösungen, denn nur für
sprochene Satz, daß kugelförmige
Licht abbeugen. Ich werde bewei

keineswegs ein sicheres Kriterium für Abweichung von der Kugelgestalt ist, und in der Tat stützen dementsprechende Beobachtungen, die Hr. Dr. Teófilo Isnardi auf meine Anregung hin an Gummiguttlösungen angestellt hat, meine Formeln.

Ich will deshalb im folgenden die Theorie der Depolarisation nichtmetallischer trüber Lösungen unter Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung der Teilchen ableiten.

Um diese gegenseitige Beeinflussung bestimmen zu können, haben wir das sogenannte molekulare Feld zu berechnen, welches ein System von Dipolen am Orte eines derselben erzeugt. Mit diesem Problem haben wir uns bereits in unserer Theorie des Paramagnetismus[1]) beschäftigt; wir brauchen also die entsprechenden Formeln mutatis mutandis nur anzuwenden.

Nach jener Arbeit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das molekulare Feld A Komponenten hat, die zwischen A_x und $A_x + dA_x$, A_y und $A_y + dA_y$, A_z und $A_z + dA_z$ liegen:

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} W\, dA_x \cdot dA_y \cdot dA_z \\ \qquad = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3 a_{11} a_{22} a_{33}}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{A_x^2}{a_{11}} + \frac{A_y^2}{a_{22}} + \frac{A_z^2}{a_{33}}\right)} dA_x\, dA_y\, dA_z, \end{array} \right.$$

wo

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = C\int\int q^2 \left(1 + \dfrac{\sin^2\varepsilon \cos^2\psi}{3}\right) F(\varepsilon, \psi)\, d\varepsilon\, d\psi, \\ a_{22} = C\int\int q^2 \left(1 + \dfrac{\sin^2\varepsilon \sin^2\psi}{3}\right) F(\varepsilon, \psi)\, d\varepsilon\, d\psi, \\ a_{33} = C\int\int q^2 \left(1 + \dfrac{\cos^2\varepsilon}{3}\right) F(\varepsilon, \psi)\, d\varepsilon\, d\psi. \end{array} \right.$$

ist. In diesen Formeln bedeutet:

$$(18)\quad C = \frac{4\pi N}{5 s^3 m_0^4},$$

unter N die Anzahl Teilchen in der Volumeneinheit, unter m_0 den Brechungsindex des sie umgebenden Mediums, unter s den kleinsten Abstand verstanden, bis auf den die Mittelpunkte zweier Teilchen sich nähern können.

Ferner ist q der absolute Wert des Moments eines Dipols, $F(\varepsilon, \psi)$ die Verteilungsfunktion der Achsenrichtungen in Kugelkoordinaten ε, ψ.

---

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **49.** S. 149. 1916; **50.** S. 163. 1916.

Die in unserer magnetischen Arbeit angegebenen Werte für die Koeffizienten lauteten etwas anders, weil wir damals den absoluten Wert des Moments $q = \mu$ als konstant anzusehen hatten, und weil damals die Verteilung um die z-Achse herum symmetrisch war, also die Verteilungsfunktion von vornherein unabhängig von ψ war. Schließlich lag damals die Momentanachse fest im Teilchen, während das jetzt nicht der Fall ist: wir müssen jetzt also zwischen der Verteilungsfunktion der Achsen der Dipole $F(\varepsilon, \psi)$ und der der Figurenachsen der Teilchen $F'(\varepsilon', \psi')$ unterscheiden. (Von Figurenachse des Teilchens werden wir reden, weil wir es der Einfachheit halber als Rotationskörper auffassen wollen.)

Für die Orientierung der Teilchen sei keine Richtung ausgezeichnet, dieselbe sei gleichmäßig nach allen Seiten, so daß:

$$F'(\varepsilon_1' \psi') \, d\varepsilon' \, d\psi' = \frac{\sin \varepsilon'}{2\pi} \, d\varepsilon' \, d\psi' \tag{19}$$

gilt, eine Gleichung, in der ε' zwischen 0 und $\pi/2$, ψ' zwischen 0 und 2π liegen muß.

Da jeder Richtung der Figurenachse eine Richtung der Momentachse entspricht, gilt:

$$F'(\varepsilon', \psi') \, d\varepsilon' \, d\psi' = F(\varepsilon, \psi) \, d\varepsilon \, d\psi \tag{20}$$

für einander entsprechende Werte der Argumentenpaare.

Führen wir diese Beziehung in (17) ein und bezeichnen Mittelwerte über alle Teilchen in einer kleinen Kugel, welche den Dipol zum Mittelpunkt hat, durch eckige Klammern, so folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = C\left\{[\eta^2] + \frac{[\eta_z^2]}{3}\right\}; \quad a_{22} = C\left\{[\eta^2] + \frac{\eta_y^2}{3}\right\}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{33} = C\left\{[\eta^2] + \frac{[\eta_z^2]}{3}\right\}. \end{array} \right. \tag{21}$$

Andererseits ergibt sich aus (16):

$$[A_x] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_x \, W \, d\,A_x \, d\,A_y \, d\,A_z = 0 \text{ usw.}$$

$$[A_y A_z] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_y A_z \, W \, d\,A_x \, d\,A_y \, d\,A_z = 0 \text{ usw.,}$$

während:

(22) $$[A_x^2] = a_{11}: \quad [A_y^2] = a_{22}; \quad [A_z^2] = a_{33}$$

ist.

Wir behandeln nach dieser Vorbereitung zwei Fälle.

1. *Das einfallende Licht ist linear polarisiert.*

Die ein Teilchen erregende Kraft habe die Komponenten $K_x = 0$; $K_y = 0$: $K_z = K$.

Wir führen ein Koordinatensystem ξ, η, ζ ein, dessen ξ-Achse mit der Figurenachse des Teilchens zusammenfällt. Dann gelten für die Richtungskosinus der beiden Bezugssysteme die durch das Schema:

(23)
$$\begin{cases} & x & y & z \\ \xi & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \eta & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \zeta & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{cases}$$

gegebenen Beziehungen, und es gilt, wenn wir die drei Konstanten g_1, g_2, g_3 der Gleichungen (10) jetzt mit g und g' bezeichnen ($g_1 = g$; $g_2 = g_3 = g'$):

(24) $$K_\xi = K\,\alpha_3: \quad K_\eta = K\,\beta_3; \quad K_\zeta = K\,\gamma_3,$$

so daß das von K hervorgerufene Moment f die Komponenten hat

(25)
$$\begin{cases} f_\xi = g\,K_\xi = g\,K\,\alpha_3 \\ f_\eta = g'\,K_\eta = g'\,K\,\beta_3 \\ f_\zeta = g'\,K_\zeta = g'\,K\,\gamma_3 \end{cases} \qquad \begin{array}{c|c|c} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen nacheinander mit den nebenstehenden Koeffizienten, addieren sie dann, und berücksichtigen wir die zwischen den Richtungskosinus bestehenden Beziehungen, so folgt:

(26)
$$\begin{cases} f_x = K\,(g - g')\,\alpha_1\,\alpha_3 \\ f_y = K\,(g - g')\,\alpha_2\,\alpha_3 \\ f_z = K\,(g - g')\,\alpha_3^2 + K\,g', \end{cases}$$

so daß sich

(27) $$f^2 = K^2\,[g'^2 + (g^2 - g'^2)\,\alpha_3^2]$$

ergibt.

Außer diesem Moment f, welches von der erregenden Kraft K hervorgerufen wird, existiert aber noch ein Moment p

welches von dem molekularen Felde A erzeugt wird, und das sich folgendermaßen berechnet:

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{lll} p_\xi = g\,A_\xi = g\,(\alpha_1 A_x + \alpha_2 A_y + \alpha_3 A_z) & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p_\eta = g'\,A_\eta = g'\,(\beta_1 A_x + \beta_2 A_y + \beta_3 A_z) & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p_\zeta = g'\,A_\zeta = g'\,(\gamma_1 A_x + \gamma_2 A_y + \gamma_3 A_z)\,. & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array}\right.$$

Multipliziert man diese Gleichungen nacheinander mit den nebenstehenden Koeffizienten der einzelnen Kolonnen und addiert sie dann, so folgt:

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} p_x = A_x[(g-g')\,\alpha_1^2 + g'] + A_y\,(g-g')\,\alpha_1\alpha_2 \\ \qquad\qquad + A_z\,(g-g')\,\alpha_1\alpha_3\,, \\ p_y = A_x\,(g-g')\,\alpha_2\alpha_1 + A_y[(g-g')\,\alpha_2^2 + g'] \\ \qquad\qquad + A_z\,(g-g')\,\alpha_2\alpha_3\,. \\ p_z = A_x\,(g-g')\,\alpha_3\alpha_1 + A_y\,(g-g')\,\alpha_3\alpha_2 \\ \qquad\qquad + A_z[(g-g')\,\alpha_3^2 + g']. \end{array}\right.$$

Das Gesamtmoment ist demnach:

$$(30)\qquad q = f + p\,.$$

Bei der Berechnung der Mittelwerte aus (26) und (29) berücksichtigen wir die Formeln:

$$[\alpha_1^2] = [\alpha_2^2] = [\alpha_3^2] = \frac{1}{3};\quad [\alpha_1^4] = [\alpha_2^4] = [\alpha_3^4] = \frac{1}{5};$$

$$[\alpha_2^2\alpha_3^2] = [\alpha_3^2\alpha_1^2] = [\alpha_1^2\alpha_2^2] = \frac{1}{15}$$

und erhalten aus (26):

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} [f_x^2] = \frac{K^2(g-g')^2}{15};\quad [f_y^2] = \frac{K^2(g-g')^2}{15}; \\ \qquad\qquad [f_z^2] = K^2\left\{\frac{(g-g')^2}{15} + B\right\}, \end{array}\right.$$

also:

$$(32)\qquad [f^2] = K^2\left\{\frac{(g-g')^2}{5} + B\right\},$$

wo B eine Abkürzung für:

$$(33)\qquad B = g'^2 + \frac{2}{3}\,g'\,(g-g') + \frac{2}{15}\,(g-g')^2$$

ist.

Aus (29) ergibt sich mit Berücksichtigung von (22):

$$(34)\quad \begin{cases} [p_x^2] = (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \dfrac{(g-g')^2}{15} + a_{11} B, \\ [p_y^2] = (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \dfrac{(g-g')^2}{15} + a_{22} B, \\ [p_z^2] = (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \dfrac{(g-g')^2}{15} + a_{33} B, \end{cases}$$

so daß

$$(35)\qquad [p^2] = (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \left\{ \frac{(g-g')^2}{5} + B \right\}$$

folgt. Da ferner $[f_x p_x] = 0$ usw., erhalten wir aus (39). (32) und (35):

$$(36)\quad [q^2] = [f^2] + [p^2] = (K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}) \left\{ \frac{(g-g')^2}{5} + B \right\}.$$

Aus den Gleichungen (21) ergibt sich somit:

$$(37)\quad \begin{cases} a_{11} = \dfrac{C}{3} \left\{ \left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33} \right) \left(g^2 + 2g'^2 + \dfrac{(g-g')^2}{15} \right) + a_{11} B \right\} \\ a_{22} = \dfrac{C}{3} \left\{ \left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33} \right) \left(g^2 + 2g'^2 + \dfrac{(g-g')^2}{15} \right) + a_{22} B \right\} \\ a_{33} = \dfrac{C}{3} \left\{ \left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33} \right) \left(g^2 + 2g'^2 + \dfrac{(g-g')^2}{15} \right) \right. \\ \qquad\qquad \left. + a_{33} B + K^2 B \right\}. \end{cases}$$

Da wir die Werte $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ sowie $a_{33} - a_{11}$ brauchen werden, addieren wir die Gleichungen (37) und subtrahieren ferner die erste von der dritten.

Auf diese Weise erhalten wir:

$$(38)\qquad a_{11} + a_{22} + a_{33} = \frac{\frac{10}{9} C (g^2 + 2g'^2) K^2}{1 - \frac{10}{9} C (g^2 + 2g'^2)}$$

und

$$(39)\qquad a_{33} - a_{11} = \frac{\frac{CB}{3} K^2}{1 - \frac{CB}{3}}.$$

Bevor wir weitergehen, müssen wir die Depolarisation definieren. Beobachten wir einen Lichtstrahl, der aus linear polarisiertem und natürlichem Licht gemischt ist und sich in Richtung der y-Achse fortpflanzt, mittels eines Nikols, dessen

Schwingungsebene den Winkel δ (vgl. Fig. 1) mit der z-Achse bildet, so wird die Intensität sich in der Form:

$$J = C_1 + C_2 \cos^2 \delta \tag{40}$$

darstellen lassen. C_1 rührt dabei von dem natürlichen Licht her, während C_2 die Intensität des parallel z schwingenden polarisierten Lichtes ist.

Der Messung direkt zugänglich ist, wie wir sehen werden, das Verhältnis der Intensitäten des horizontal und vertikal schwingenden Lichtes. Dementsprechend könnte man dies Verhältnis:

$$\Delta = \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \tag{41}$$

als Depolarisation bezeichnen. Wir ziehen es aber vor, die Depolarisation durch die Größe:

$$\Theta = \frac{C_1}{C_2} \tag{42}$$

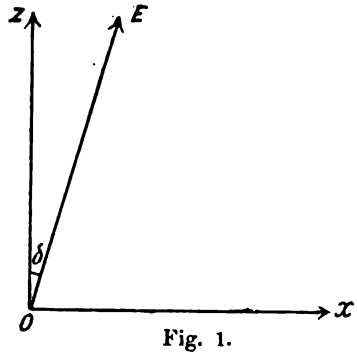


Fig. 1.

zu definieren. Es besteht dann die einfache Beziehung:

$$\Theta = \frac{\Delta}{1 - \Delta} \tag{43}$$

oder

$$\Delta = \frac{\Theta}{1 - \Theta}. \tag{43'}$$

Da C_1 die Intensität des horizontal schwingenden Lichtes, C_2 die Differenz zwischen der Intensität des vertikal und des horizontal schwingenden Lichtes ist, und da diese Intensitäten direkt proportional den Quadraten der in die entsprechenden Richtungen fallenden Momentkomponenten sind, so folgt:

$$\Theta = \frac{[q_z^2]}{[q_x^2] - [q_z^2]}. \tag{44}$$

Summieren wir, um Θ zu berechnen, die Gleichungen (21), so ergibt sich:

$$[q^2] = \frac{3}{10} \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{C}. \tag{45}$$

Führen wir diesen Wert in die erste und dritte Gleichung (21) ein, so folgt:

$$(46)\left\{\begin{aligned}[q_x^2] &= \frac{3}{C}\left\{a_{11} - \frac{3}{10}(a_{11} + a_{22} + a_{33})\right\},\\ [q_z^2] &= \frac{3}{C}\left\{a_{33} - \frac{3}{10}(a_{11} + a_{22} + a_{33})\right\},\end{aligned}\right.$$

so daß

$$(47)\qquad \Theta = \frac{a_{11} - \frac{3}{10}(a_{11} + a_{22} + a_{33})}{a_{33} - a_{11}}.$$

Mittels der Gleichungen (37), (38) und (39) ergibt sich somit

$$(48)\qquad \Theta = \frac{\frac{(g-g')^2}{15} + \frac{BC}{3}(g^2 + 2g'^2)}{B\left\{1 - \frac{10}{9}C(g^2 + 2g'^2)\right\}}.$$

Führt man diese Formel in die Depolarisation Θ_0 für unendlich kleine Konzentration ($C = 0$) ein, d. h.:

$$(49)\qquad \Theta_0 = \frac{(g-g')^2}{15B},$$

so folgt:

$$(50)\qquad \frac{\Theta - \Theta_0}{1 + \frac{10}{3}\Theta} = \frac{g^2 - 2g'^2}{3}C.$$

Dieser Ausdruck ist also der Konzentration direkt proportional.

Sind die Teilchen kugelförmig ($g = g'$), so ergibt sich aus (48)

$$(51)\qquad \Theta = \frac{g^2 C}{1 - \frac{10}{3}g^2 C},$$

d. h. es existiert auch eine Depolarisation, die aber mit abnehmender Konzentration verschwindet. Demnach ist eine beobachtete Depolarisation noch kein Beweis für nichtkugelförmige Gestalt, sondern man muß die Beobachtungen auf unendliche Verdünnung extrapolieren.

Andererseits ergibt sich aus der Depolarisation für unendlich kleine Konzentration [nach (49) und (33)]:

$$(52)\qquad \Theta_0 = \frac{(g-g')^2}{15g'^2 + 10(g-g') + 2(g-g')^2},$$

das Verhältnis g/g' und somit nach (11), (12), (13) und (14) die Form des z. B. als Rotationsellipsoid aufgefaßten Teilchens.

2. *Das einfallende Licht ist natürliches Licht.*

In ähnlicher Weise lassen sich die Formeln für natürliches einfallendes Licht entwickeln. Wir begnügen uns damit, die Resultate anzugeben.

Es ist:

$$(53)\quad [f_x^2] = K^2\frac{(g-g')^2}{15};\quad [f_y^2] = [f_z^2] = K^2\left\{\frac{(g-g')^2}{15} + \frac{B}{2}\right\}$$

und folglich:

$$(54)\quad [f^2] = K^2\left\{\frac{(g-g')^2}{5} + B\right\}.$$

Die Beziehungen für die Koeffizienten a_{11}, a_{22}, a_{33} werden:

$$(55)\quad \begin{cases} a_{11} = C\left\{\left(\frac{2}{9}(g-g')^2 + B\right)\left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}\right) + \frac{a_{11}B}{3}\right\}, \\ a_{22} = C\left\{\left(\frac{2}{9}(g-g')^2 + B\right)\left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}\right) + \frac{a_{22}B}{3} + \frac{B}{6}\right\}, \\ a_{33} = C\left\{\left(\frac{2}{9}(g-g')^2 + B\right)\left(K^2 + a_{11} + a_{22} + a_{33}\right) + \frac{a_{33}B}{3} + \frac{B}{6}\right\}, \end{cases}$$

so daß folgt:

$$(56)\quad a_{11} + a_{22} + a_{33} = \frac{10}{9}C(g^2 + 2g'^2)K^2,$$

$$(57)\quad a_{33} - a_{11} = \frac{\frac{CB}{6}K^2}{1 - \frac{CB}{3}}.$$

Somit wird in diesem Falle die Depolarisation:

$$(58)\quad \Theta' = \frac{a_{11} - \frac{3}{10}(a_{11} + a_{22} + a_{33})}{a_{33} - a_{11}}.$$

Setzt man in diese Gleichung die soeben gefundenen Werte ein und vergleicht Θ' mit dem für linear polarisiertes einfallendes Licht geltenden Resultat [Formel (48)], so ergibt sich:

$$(59)\quad \Theta' = 2\Theta$$

oder:

$$\frac{\Theta' - \Theta_0'}{1 + \frac{5}{4}\Theta'} = 2\,\frac{g^2 + 2g'^2}{3}\,C, \tag{60}$$

wo

$$\Theta_0' = \frac{2(g - g')^2}{15\,B}, \tag{61}$$

die Depolarisation für unendlich verdünnte Lösungen bedeutet.

Die Depolarisation bei natürlichem einfallenden Lichte ist also doppelt so groß, wie die bei linear polarisiertem einfallenden Lichte.

Die Formeln (50) und (60) gelten für jede beliebige Konzentration, so lange der mittlere gegenseitige Abstand der Teilchen groß gegen ihre Lineardimensionen ist.

Eine kleine numerische Rechnung möge uns über die Zahlenwerte aufklären, welche bei der Depolarisation des Lichtes durch nichtmetallische Teilchen in unendlich verdünnten Lösungen zu erwarten sind.

Es sei z. B. $m = 1{,}62$ der Brechungsexponent der Teilchen (Gummigutt), $m_0 = 1{,}33$ der des Wassers, so daß $m' = \frac{1{,}62}{1{,}33} = 1.218$ wird. Dann gilt für einige spezielle Formen der Teilchen nach den Gleichungen (11) bis (15). (43'), (49) und (33) die folgende Tabelle.

Tabelle 1.

Form	P	P'	g/g'	Δ	ϱ
Stäbchen . .	0	2π	1,242	0,00333	3° 18′
Kugeln . . .	$4\pi/3$	$4\pi/3$	1,000	0,00000	0 00
Scheiben . .	4π	0	0,6742	0,00880	5 22

Der gemäß der Gleichung:

$$\operatorname{tg}^2\varrho = \Delta \tag{62}$$

berechnete Winkel ϱ der letzten Kolonne wird uns erst später interessieren, wenn wir über einen Apparat zur Messung der Depolarisation sprechen.

Wir sehen, daß bei nicht metallischen Teilchen die Depolarisation stets sehr klein bleibt, selbst im Falle extremer Formen, wie Stäbchen und Scheiben. Ist $m' = \infty$, d. h. bestehen die Teilchen aus unendlich gut leitendem Material, so gilt die folgende Tabelle.

Tabelle 2.

Form	P	P'	g/g'	Δ	ϱ
Stäbchen . .	0	2π	∞	0,3333	30° 00′
Kugeln . . .	$4\pi/3$	$4\pi/3$	1	0,0000	0 00
Scheiben . .	4π	0	0	0,1250	19 28

Hr. Dr. Teófilo Isnardi hat bei den experimentellen Untersuchungen über nicht metallische Kolloide, die er auf meine Veranlassung hin angestellt hat, viel größere Depolarisationen beobachtet, als die Tabelle 1, ja sogar als die Tab. 2 angibt, und zwar Depolarisationen, die von der Konzentration abhängen. Daraufhin habe ich die vorstehende Theorie entwickelt, die, wie wir sehen werden, die experimentellen Befunde ohne Schwierigkeit erklärt.

§ 3. Ein Apparat zur Messung der Dipolarisation.

Um die Depolarisation zu messen, habe ich mir einen einfachen Apparat konstruiert. Er ist die Vereinigung einer Haidingerschen Lupe mit einem Nikol als Analysator, der mit einer Kreisteilung versehen ist.

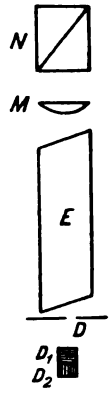


Fig. 2.

Die Haidingersche Lupe besteht aus einer Bodenplatte mit quadratischer Öffnung D (Fig. 2), einem Kalkspatrhomboeder E und einer Lupe M, die auf D eingestellt ist.

Durch die Doppelbrechung des Kalkspates sieht man beim Beobachten durch die Lupe zwei quadratische Öffnungen D_1 und D_2 in linear polarisiertem Licht leuchten, und zwar sendet etwa D_1 Licht aus, das horizontal schwingt, während D_2 vertikal schwingendes Licht emittiert.

Gibt man dem Nikol N eine geeignete Stellung, so sind die Intensitäten von D_1 und D_2, die J_1 bzw. J_2 heißen mögen, einander gleich (Halbschatten), und bildet dann die Schwingungsebene des Nikols mit der Horizontalen den Winkel ϱ, so gilt:

$$\text{(63)} \qquad \operatorname{tg}^2 \varrho = \frac{J_1}{J_2}.$$

Nun ist nach (40):

$$\text{(64)} \qquad J_1 = C_1; \quad J_2 = C_1 + C_2,$$

so daß gemäß (41):

$$\text{(65)} \qquad \operatorname{tg}^2 \varrho = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \Delta$$

folgt. Aus dem Winkel ϱ ergibt sich also ohne weiteres der Wert von Δ oder nach (43):

$$\text{(66)} \qquad \Theta = \frac{\operatorname{tg}^2 \varrho}{1 - \operatorname{tg}^2 \varrho}.$$

Dieser Winkel ist es, den wir in der letzten Kolonne der Tabb. 1 und 2 angegeben haben.

§ 4. Depolarisation des durch metallische Teilchen erzeugten Tyndallichtes.

In früheren Arbeiten[1]) hatte ich über eine Methode berichtet, mittels der Absorptionskurve die Teilchenform von Amikronen zu bestimmen und diese Methode auf Gold-, Silber- und Platinkolloide angewandt.

Schon damals hatte ich darauf hingewiesen[2]), daß die Depolarisation auch ein gutes Kriterium für die Teilchenform abgibt, und die entsprechenden Formeln für fast kugelförmige Körper entwickelt.

Jetzt möchte ich dieses Problem noch einmal eingehender für beliebige Abweichung von der Kugelform behandeln und die Ergebnisse für die Gestalt von Silberamikronen, die nach der Absorptionsmethode sowie nach der Depolarisationsmethode ermittelt worden ist, mit einander vergleichen.

Bei Lösungen, die aus metallischen Teilchen bestehen, beobachtet man weder eine Farben- noch eine Depolarisationsänderung bei Erhöhung der Konzentration. Deshalb können wir uns auf das theoretische Studium unendlich verdünnter Lösungen beschränken.

In eine kolloidale Lösung falle eine ebene, linear polarisierte Welle der Amplitude 1 ein, die in der x-Richtung fortschreite, und deren elektrischer Vektor mit der y-Achse den Winkel δ bilde.

Diese Welle induziert in einer Partikel ein elektrisches

---

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **37.** S. 881. 1912; **47.** S. 270. 1915; R. Gans und R. Calatroni, Ann. d. Phys. **61.** S. 465. 1920.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **37.** S. 896. 1912.

Moment f, welches sich ähnlich wie in § 1 berechnet. Es ergibt sich:

$$(67)\quad \begin{cases} f_x = e^{2\pi\,\mathrm{int}}(g - g')\,a_1(a_2\cos\delta + a_3\sin\delta), \\ f_y = e^{2\pi\,\mathrm{int}}(g - g')\,a_2(a_2\cos\delta + a_3\sin\delta) + e^{2\pi\,\mathrm{int}}\,g'\cos\delta, \\ f_z = e^{2\pi\,\mathrm{int}}(g - g')\,a_3(a_2\cos\delta + a_3\sin\delta) + e^{2\pi\,\mathrm{int}}\,g'\sin\delta\,. \end{cases}$$

Der Depolarisationsgrad bestimmt sich durch die Beziehung:

$$(68)\qquad \Delta = \mathrm{tg}^2\varrho = \frac{[f_x^2]}{[f_z^2]}\,.$$

In diesen Gleichungen bedeutet [vgl. Gleichung (11)]:

$$(69)\quad \begin{cases} g = m_0^2\,\dfrac{3}{4\pi}\,V\,\dfrac{m'^2-1}{3+(m'^2-1)\dfrac{3P}{4\pi}}; \\ g' = m_0^2\,\dfrac{3}{4\pi}\,V\,\dfrac{m'^2-1}{3+(m'^2-1)\dfrac{3P'}{4\pi}}\,. \end{cases}$$

Da aber m' für Metalle komplexe Werte hat, sind die numerischen Rechnungen verwickelter als im Falle nichtmetallischer Kolloide.

Wir wollen setzen:

$$(70)\quad \frac{m'^2-1}{3+(m'^2-1)\dfrac{3P}{4\pi}} = l\,e^{i\psi}; \qquad \frac{m'^2-1}{3+(m'^2-1)\dfrac{3P'}{4\pi}} = l'\,e^{i\psi'}$$

und:

$$(71)\qquad l\,e^{i\psi} - l'\,e^{i\psi'} = h\,e^{i\varkappa}\,.$$

So erhalten wir:

$$(72)\quad \begin{cases} f_x = m_0^2\,\dfrac{3}{4\pi}\,V\,k\,\alpha_1(\alpha_2\cos\delta + \alpha_3\sin\delta)\cos(2\pi n t + \varkappa), \\ f_z = m_0^2\,\dfrac{3}{4\pi}\,V\{k\,\alpha_3(\alpha_2\cos\delta + \alpha_3\sin\delta)\cos(2\pi n t + \varkappa) \\ \qquad\qquad + l'\sin\delta\cos(2\pi n t + \psi')\}, \end{cases}$$

so daß für natürliches einfallendes Licht durch Mittelwertbildung über alle Werte von δ zwischen 0 und 2π folgt:

$$(73)\quad \begin{cases} [f_x^2] = \left(m_0^2\,\dfrac{3}{4\pi}\,V\right)^2\dfrac{k^2}{30}, \\ [f_z^2] = \left(m_0^2\,\dfrac{3}{4\pi}\,V\right)^2\left\{\dfrac{k^2}{15} + \dfrac{l'^2}{4} + \dfrac{k\,l'}{6}\cos(\varkappa - \psi')\right\}. \end{cases}$$

Mittels dieser Werte nimmt Gleichung (68) die Form an:

$$(74) \qquad \Delta = \frac{k^2}{2k^2 + \frac{15}{2} l'^2 + 5 k l' \cos(\varkappa - \psi')} .$$

Setzen wir:

$$(75) \qquad l e^{i\psi} = p + i q ; \quad l' e^{i\psi} = p' + i q' ,$$

so daß

$$(76) \qquad k e^{i\varkappa} = p - p' + i (q - q') ,$$

so transformiert sich Δ in:

$$(77) \qquad \operatorname{tg}^2 \varrho = \Delta = \frac{(p^2 + q^2) + (p'^2 + q'^2) - 2 p p' + q q')}{2(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}(p'^2 + q'^2) + p p' + q q'} .$$

Um p und q zu berechnen, müssen wir:

$$(78) \qquad m'^2 - 1 = - a - b i$$

als Funktion der Wellenlänge kennen. Nach den Messungen von Hagen und Rubens[1]) ergibt sich die folgende Tabelle, in der λ die Wellenlänge in Luft, λ' die in Wasser bedeutet.

Tabelle 3.

λ	λ'	a	b
420	313,2	3,863	0,532
450	336,0	4,888	0,653
500	374,3	6,801	0,918
525	393,2	7,821	1,087
650	488,3	14,34	2,162
750	564,3	20,45	2,927

Führen wir als Abkürzungen:

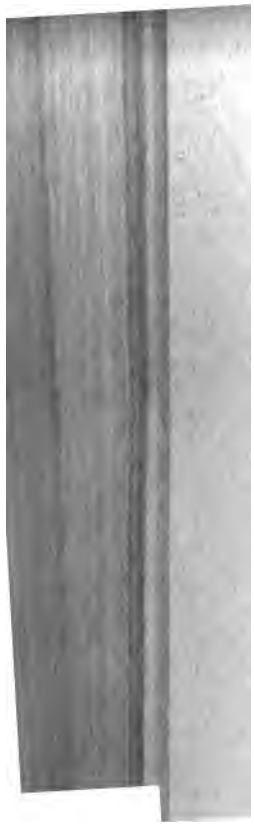
$$(79) \qquad \gamma = \frac{3P}{4\pi} ; \quad \gamma' = \frac{3P'}{4\pi}$$

ein, so ergibt sich aus den Gleichungen (70) und (75):

$$(80) \qquad p + q i = \frac{(a^2 + b^2)\gamma - 3a - 3bi}{9 - 6a\gamma + (a^2 + b^2)\gamma^2} .$$

Mittels dieser Beziehung und der Zahlenwerte der Tab. 3 folgen die Tabb. 4, 5 und 6.

1) E. Hagen und H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. S. 1 u. 432. 1902.



λ	$\gamma = 1{,}0$		
	p	q	p
420	3,539	− 1,565	2,71
450	2,421	− 0,4910	1,96
500	1,746	− 0,1801	1,48
525	1,592	− 0,1336	1,37
650	1,255	− 0,0486	1,11
750	1,168	− 0,0280	1,04

λ	$\gamma = 1{,}25$		
	p	q	p
420	1,965	− 0,4234	1,792
450	1,523	− 0,1895	1,416
500	1,218	− 0,08720	1,149
525	1,140	− 0,06826	0,944
650	0,9561	− 0,02820	0,912
750	0,9036	− 0,01681	0,864

λ	$\gamma = 1{,}5$		
	p	q	p
420	1,329	− 0,1893	[0,954
450	1,107		

Tabelle 4 (Fortsetzung).

λ	$\gamma = 2{,}2$		$\gamma = 2{,}6$		$\gamma = 3{,}0$	
	p	q	p	q	p	q
420	0,6921	− 0,05656	0,5425	− 0,03100	0,4458	− 0,02092
450	0,6244	− 0,03150	0,5001	− 0,02018	0,4168	− 0,01401
500	0,5657	− 0,01872	0,4613	− 0,01245	0,3894	− 0,00887
525	0,5476	− 0,01570	0,4492	− 0,01057	0,3811	− 0,00759
650	0,5008	− 0,00860	0,4174	− 0,00537	0,3576	− 0,00395
750	0,4862	− 0,00486	0,4070	− 0,00341	0,3501	− 0,00252

Tabelle 5.

λ	$\gamma = 0{,}0;\ \gamma' = 1{,}5$			$\gamma = 0{,}2;\ \gamma' = 1{,}4$		
	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$
420	1,691	1,803	− 1,678	3,061	2,400	− 2,540
450	2,702	1,236	− 1,781	5,917	1,561	− 2,904
500	5,234	0,8756	− 2,102	17,29	1,064	− 4,091
650	23,36	0,5957	− 3,675	1033,0	0,6997	− 3,250
750	47,46	0,5431	− 5,014	279,4	0,6338	− 12,56
λ	$\gamma = 0{,}4;\ \gamma' = 1{,}3$			$\gamma = 0{,}6;\ \gamma' = 1{,}2$		
	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$
420	7,053	3,335	− 4,313	2,719	4,962	− 8,014
450	20,95	2,031	− 5,746	155,9	2,758	+ 2,038
500	223,0	1,326	− 7,448	32,10	1,693	7,121
650	25,54	0,8325	+ 4,573	6,360	1,007	2,528
750	15,14	0,7480	3,360	4,794	0,8957	2,072
λ	$\gamma = 0{,}8;\ \gamma' = 1{,}1$			$\gamma = 1{,}4;\ \gamma' = 0{,}8$		
	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$
420	84,86	8,078	15,74	2,400	84,81	6,922
450	22,13	3,943	9,102	1,561	22,13	5,636
500	7,262	2,232	4,016	1,064	7,262	2,767
650	2,813	1,244	1,870	0,700	2,813	1,403
750	2,320	1,095	1,593	0,6338	2,320	1,213
λ	$\gamma = 1{,}8;\ \gamma' = 0{,}6$			$\gamma = 2{,}2;\ \gamma' = 0{,}4$		
	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$
420	0,9192	27,19	− 3,904	0,4816	7,053	− 1,729
450	0,6949	155,9	+ 0,3277	0,3909	20,95	− 2,603
500	0,5348	32,10	3,965	0,3203	223,0	− 3,919
650	0,3925	6,360	1,577	0,2509	25,54	− 2,507
750	0,3645	4,794	1,321	0,2363	15,14	1,888

Tabelle 5 (Fortsetzung).

λ	$\gamma = 2{,}6;\ \gamma' = 0{,}2$			$\gamma = 3{,}0;\ \gamma' = 0{,}0$		
	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$	$p^2 + q^2$	$p'^2 + q'^2$	$p\,p' + q\,q'$
420	0,2953	3,061	− 0,9231	0,1992	1,691	− 0,5707
450	0,2505	5,917	− 1,183	0,1739	2,702	− 0,6758
500	0,2130	17,29	− 1,848	0,1518	5,234	− 0,8558
650	0,1742	1033,0	− 1,793	0,1278	23,36	− 1,706
750	0,1657	279,4	− 6,410	0,1226	47,46	− 2,386

Tabelle 6.

Depolarisationswinkel ϱ.

	Verlängerte Ellipsoide					Kugel	Abgeplattete Ellipsoide				
	$\gamma = 0{,}0$ $\gamma' = 1{,}5$	$\gamma = 0{,}2$ $\gamma' = 1{,}4$	$\gamma = 0{,}4$ $\gamma' = 1{,}3$	$\gamma = 0{,}6$ $\gamma' = 1{,}2$	$\gamma = 0{,}8$ $\gamma' = 1{,}1$	$\gamma = 1{,}0$ $\gamma' = 1{,}0$	$\gamma = 1{,}4$ $\gamma' = 0{,}8$	$\gamma = 1{,}8$ $\gamma' = 0{,}6$	$\gamma = 2{,}2$ $\gamma' = 0{,}4$	$\gamma = 2{,}6$ $\gamma' = 0{,}2$	$\gamma = 3{,}0$ $\gamma' = 0{,}0$
420	39°52′	40°36′	41°12′	39°56′	27°46′	0°0′	23°21′	28°39′	30°47′	31°53′	32°35′
450	42 6	42 23	41 7	34 33	18 24	0 0	18 48	25 13	28 11	29 50	30 51
500	42 28	40 55	36 16	26 27	12 46	0 0	15 15	22 7	25 41	27 47	29 3
650	39 36	35 21	28 18	18 52	8 51	0 0	12 4	18 49	22 47	25 17	26 59
750	38 24	33 40	26 28	17 26	8 9	0 0	11 26	18 5	22 5	24 41	26 27

Diese Resultate sind in den Figg. 3 und 4 als Funktion von B/A für verschiedene Wellenlängen und in den Figg. 5 und 6 als Funktion der Wellenlänge für verschiedene Werte von γ dargestellt.

§ 5. Die Optik der Silberamikronen.

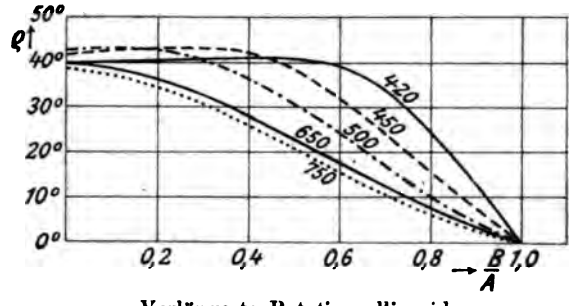
Wir haben die Zahlenwerte im vorigen Paragraphen in aller Ausführlichkeit mitgeteilt, weil die Tabb. 4, 5 und 6 die ganze Optik der Silberamikronen enthalten.

Nach einer früheren Arbeit[1]) ist nämlich die ***Absorption*** pro Längeneinheit der kolloidalen Lösung:

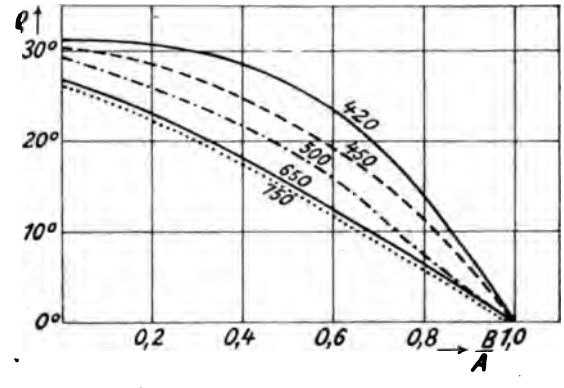
$$k = -\frac{2\pi}{\lambda'}(q + 2q')NV. \tag{81}$$

Die aus dieser Formel sich ergebenden Absorptionskurven unter der Annahme verschiedener Teilchenformen haben wir bereits an anderer Stelle berechnet und gezeichnet.[2])

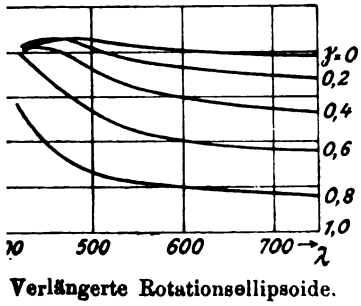
1) R. Gans, Ann. d. Phys. **37**. S. 886. 1912.
2) R. Gans, Ann. d. Phys. **47**. S. 270. 1915.



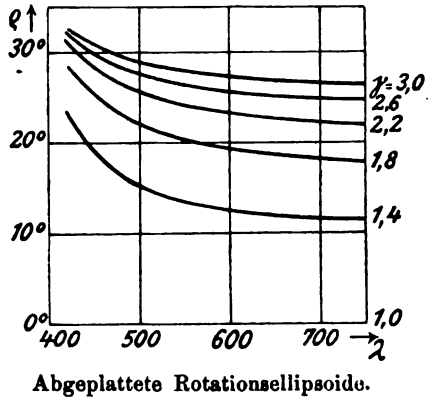
Verlängerte Rotationsellipsoide.
Fig. 3.



Abgeplattete Rotationsellipsoide.
Fig. 4.



Verlängerte Rotationsellipsoide.
Fig. 5.



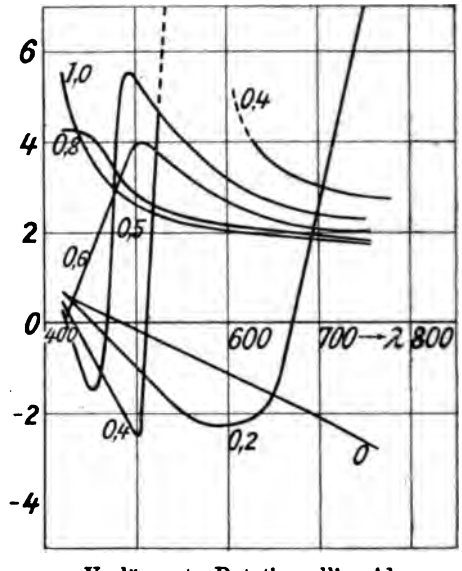
Abgeplattete Rotationsellipsoide.
Fig. 6.

Der *Brechungsexponent* ν der Lösung berechnet sich aus der Formel[1]):

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{p + 2p'}{2} N V, \tag{82}$$

in der ν den Brechungsexponenten des Lösungsmittels bedeutet.

In der folgenden Tabelle haben wir die Dispersion der Silberteilchen, d. h. $\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0 N V}$ als Funktion der Wellenlänge für verschiedene Teilchenformen zusammengestellt.



Verlängerte Rotationsellipsoide.
Fig. 7.

Tabelle 7.
Verlängerte Ellipsoide.

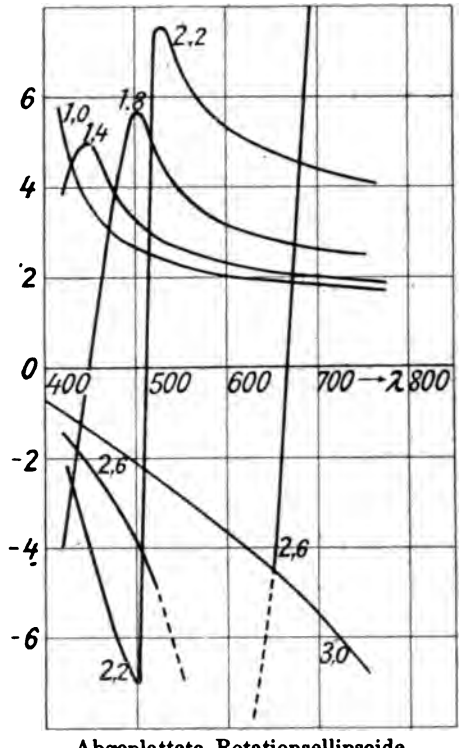
λ	$\gamma = 0$ $\gamma' = 1{,}5$	$\gamma = 0{,}2$ $\gamma' = 1{,}4$	$\gamma = 0{,}4$ $\gamma' = 1{,}3$	$\gamma = 0{,}5$ $\gamma' = 1{,}25$	$\gamma = 0{,}6$ $\gamma' = 1{,}2$	$\gamma = 0{,}8$ $\gamma' = 1{,}1$	$\gamma = 1$ $\gamma' = 1$
420	0,685	0,669	0,517	0,316	− 0,023	4,263	5,308
450	0,292	0,051	− 0,710	− 1,489	1,423	4,137	3,631
500	− 0,1991	− 0,986	− 2,530	5,474	3,970	2,818	2,619
525	− 0,4157	− 1,632	4,572	4,576	3,331	2,537	2,388
650	− 1,62	− 1,517	3,408	2,631	2,260	1,952	1,883
750	− 2,67	+ 7,054	2,805	2,302	2,040	1,807	1,752

1) R. Gans und H. Happel, Ann. d. Phys. **29.** S. 294. 1909.

Tabelle 7 (Fortsetzung).

Abgeplattete Ellipsoide.

λ	$\gamma = 1{,}4$ $\gamma' = 0{,}8$	$\gamma = 1{,}8$ $\gamma' = 0{,}6$	$\gamma = 2{,}2$ $\gamma' = 0{,}4$	$\gamma = 2{,}6$ $\gamma' = 0{,}2$	$\gamma = 3{,}0$ $\gamma' = 0{,}0$
420	3,863	– 3,902	– 2,205	– 1,449	– 1,065
450	4,977	– 0,030	– 3,941	– 2,135	– 1,421
500	3,176	5,712	– 7,076	– 3,802	– 2,072
525	2,811	4,594	7,530	– 4,988	– 2,416
650	2,093	2,827	5,242	– 4,498	– 4,60
750	1,921	2,489	4,122	– 15,90	– 6,64



Abgeplattete Rotationsellipsoide.
Fig. 8.

Aus den Figg. 7 und 8 ersieht man, daß die Dispersion kugelförmiger Silberteilchen normal ist, während bei Verlängerung sowie bei Abplattung der Teilchen bald eine ausgesprochene anomale Dispersion auftritt, deren quantitative Bestimmung erlauben würde, die Teilchenform zu ermitteln.

Den *Depolarisationsgrad* haben wir bereits im vorigen Paragraphen [Formel (77)] berechnet. Es soll deshalb nur noch die *seitliche Ausstrahlung* ermittelt werden, weil sie für die Farbe des Tyndallichtes bestimmend ist.

Im Ursprunge des Koordinatensystems befinde sich ein Dipol vom Moment f: derselbe sei angeregt durch eine ebene Welle der Amplitude 1 [vgl. die Gleichungen (67)]. Dann ist das elektromagnetische Feld im Punkte $x = 0; y = r; z = 0$:

$$(83)\qquad \begin{cases} E_x = -\frac{\ddot{f}_x}{r} & H_z = -\frac{1}{v r}\ddot{f}_x, \\ E_y = 0 & H_y = 0, \\ E_z = -\frac{\ddot{f}_z}{r} & H_x = \frac{1}{v r}\ddot{f}_z. \end{cases}$$

Aus diesen Werten ergibt sich die Strahlung in der y-Richtung:

$$(84)\qquad \begin{cases} S_1 = \frac{1}{4\pi v r^2}[\ddot{f}_x^2] = \frac{4\pi^2 n^4}{v r^2}[f_x^2], \\ S_2 = \frac{1}{4\pi v r^2}[\ddot{f}_z^2] = \frac{4\pi^2 n^4}{v r^2}[f_z^2]. \end{cases}$$

In diesen Formeln bedeutet S_1 die Intensität des seitlich ausgestrahlten Lichts, welches horizontal (d. h. $\parallel x$) schwingt, während S_2 die des vertikal ($\parallel z$) schwingenden Lichts bezeichnet. Da wir aber die seitliche Ausstrahlung berechnen wollen unter der Annahme, daß die Intensität des einfallenden Lichts 1 ist, während die Formeln (84) die Amplitude 1 des einfallenden Strahls voraussetzen, haben wir die rechten Seiten der Gleichungen (84) durch $\frac{1}{8\pi v}$ zu dividieren. So ergibt sich:

$$(85)\qquad S_1 = \frac{32\pi^4 n^4}{r^2}[f_x^2]; \quad S_2 = \frac{32\pi^4 n^4}{r^2}[f_z^2]$$

und mittels der Gleichungen (73), (75) und (76):

$$(86)\qquad \begin{cases} S_1 = \frac{3\pi^2}{5}\frac{N V^2}{r^2 \lambda'^4}\{(p^2+q^2)+(p'^2+q'^2)-2(pp'+qq')\}, \\ S_2 = \frac{3\pi^2}{5}\frac{N V^2}{r^2 \lambda'^4}\{2(p^2+q^2)+\tfrac{6}{2}(p'^2+q'^2)+(pp'+qq')\}. \end{cases}$$

Die Gesamtstrahlung des Tyndallichts in der y-Richtung ist demnach:

$$(87)\qquad \begin{cases} S = S_1 + S_2 = \frac{3\pi^2 N V^2}{5 r^2 \lambda'^4}\left\{3(p^2+q^2)+\frac{11}{2}(p'^2+q'^2)\right. \\ \qquad\qquad \left. -(pp'+qq')\right\}. \end{cases}$$

Man erkennt aus (86), daß im allgemeinen die Strahlungen S_1 und S_2 verschiedene Intensitäten haben. So erklärt es sich, daß wenn man mit weißem Licht beleuchtet und das Tyndallicht durch einen Nikol beobachtet, dieses seine Farbe je nach der Nikolstellung ändert.

Schließlich wird es noch erwünscht sein, für die in den Tabellen benutzten Werte γ die Achsenverhältnisse der entsprechenden Ellipsoide anzugeben. Da $\gamma = 3\,P/4\,\pi$ ist, so folgt aus (13), (14) und (15):

Tabelle 8.

Verlängerte Rotationsellipsoide		Abgeplattete Rotationsellipsoide	
γ	B/A	γ	B/A
0,0	0,000	1,0	1,000
0,2	0,228	1,4	0,620
0,4	0,399	1,8	0,383
0,5	0,482	2,0	0,294
0,6	0,573	2,2	0,219
0,8	0,769	2,6	0,095
1,0	1,000	3,0	0,000

§ 6. Experimentelle Bestimmung der Form von Silberamikronen.

Wir haben den Depolarisationsgrad einer kolloidalen Silberlösung (Kollargol) mittels des in § 3 beschriebenen Apparats gemessen, um die Teilchenform zu bestimmen.

Arbeitet man mit dem weißen Licht einer Bogenlampe, so ist die verschiedene Färbung der beiden quadratischen Felder, auf deren gleiche Intensität man einstellen soll, recht störend. Sie erklärt sich durch die Verschiedenheit der Werte S_1 und S_2, die wir im § 5 berechnet haben.

Um diesen Übelstand zu vermeiden, schalteten wir zwischen dem Bogen und dem Trog, der die Lösung enthielt, Strahlenfilter ein und erhielten so:

für grünes Licht der ungefähren Wellenlänge 500 $\mu\mu$ $\varrho = 25^0$
„ rotes „ „ „ „ 650 „ $\varrho = 19^0$.

Unter der Voraussetzung, daß die Teilchen verlängerte Ellipsoide sind, ergibt sich aus Fig. 3 B/A zwischen 0,57 und 0,60, und unter der Voraussetzung, daß sie abgeplattete Ellipsoide sind, B/A zwischen 0,25 und 0,37.

Vergleicht man diese Resultate mit den durch Absorptionsmessungen[1]) erhaltenen, so folgt aus den Tabb. 3 und 4 der zitierten Abhandlung, daß die Teilchen keine abgeplatteten Ellipsoide sein können, denn eine Lösung mit abgeplatteten Partikeln der durch Depolarisation bestimmten Form hätte ihr Absorptionsmaximum im Grünen, wäre also rot in der Durchsicht, während unsere Lösungen rein gelb waren.

Dagegen ist die Annahme verlängerter Rotationsellipsoide in Übereinstimmung mit den früheren Absorptionsmessungen, denn Lösungen mit Teilchen der durch Depolarisation bestimmten Form müßten ihr Absorptionsmaximum ungefähr bei 400 $\mu\mu$ haben, während wir mittels unserer photographischen Methode seine Lage ungefähr bei 412 $\mu\mu$ ermittelt hatten.

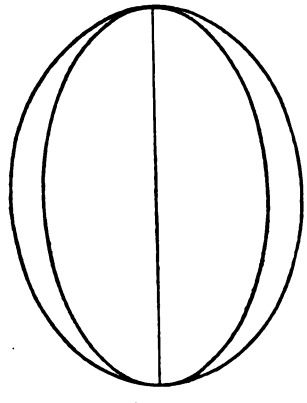


Fig. 9.

Diese Differenz erklärt sich leicht aus der Tatsache, daß wir beim Studium der Depolarisation die Lösungen nicht ultrafiltriert haben. Überhaupt bitten wir, die soeben beschriebenen Messungen der vorliegenden Arbeit nur als vorläufige Resultate zwecks einer ersten Orientierung anzusehen. Inzwischen hat Hr. Dr. Teófilo Isnardi auf meine Anregung hin sich mit dem Problem eingehender beschäftigt und an denselben Lösungen nach den beiden Methoden der Absorption und Depolarisation exaktere Formbestimmungen ausgeführt. Die Ergebnisse seiner Untersuchung werde ich baldigst mitteilen.

Damit man sich aber ein Bild der schon jetzt erreichten Genauigkeit der Formbestimmung ultramikroskopisch kleiner Teilchen machen kann, habe ich in Fig. 9 die beiden Meridianellipsen in natürlichen Längeverhältnissen gezeichnet, welche meinen Ergebnissen nach den beiden Methoden entsprechen. Das äußere Ellipsoid gilt gemäß den Absorptionsmessungen,

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 47. S. 270. 1915.

das innere nach den Depolarisationsbeobachtungen. Bedenkt man, daß die Teilchen sicher nicht mehr als 10 $\mu\mu$ Durchmesser haben, daß ihr Volumen also nur $5 \cdot 10^{-16}$ cmm betrug, oder mit anderen Worten, daß das Gesamtvolumen von 2000 Billionen Teilchen nur ein Kubikmillimeter ausmacht, so ist unser Ergebnis wohl als befriedigend zu betrachten.

La Plata, Instituto de Fisica, 24. August 1918.

(Eingegangen 22. November 1919.)

5. *Kritik zur Wanderungsgeschwindigkeitsformel Herrn Langevins*[1]; *von Hans Ferd. Mayer.*

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

1. Über die Wanderungsgeschwindigkeit kraftgetriebener Partikel in Gasen liegen mehrere theoretische Untersuchungen vor. Die erste Untersuchung, die sich auf Partikel beliebiger Kleinheit bezieht[2]), indem sie die Prinzipien der kinetischen Gastheorie zu Hilfe nimmt, findet sich in einer Arbeit Herrn Lenards aus dem Jahre 1900[3]), in der auf einfachem Wege eine allgemein brauchbare Wanderungsgeschwindigkeitsformel für Elektrizitätsträger in Gasen hergeleitet wurde.

Mit demselben Gegenstand beschäftigen sich — bei verfeinerter Berücksichtigung der Molekularbewegung — zwei weitere Arbeiten Herrn Lenards[4]) und zu einem gewissen Abschluß wird das Problem durch eine neuerdings erschienene Arbeit desselben Verfassers gebracht.[5])

Diesen Untersuchungen Herrn Lenards stehen Arbeiten Herrn Langevins aus den Jahren 1903 und 1905[6]) gegenüber, von denen die letztere besonders eingehend mit dem Gegenstand sich beschäftigt, und wohl deshalb, anscheinend mit Recht, viel Beachtung gefunden hat.[7]) Die Formel, die

1) Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Geh. Rat Lenard unternommen.

2) Für genügend große Partikel lag schon die Stokes-Kirchhoffsche hydrodynamische Lösung vor.

3) P. Lenard, Ann. d. Phys. 3. S. 313. 1900.

4) P. Lenard, Ann. d. Phys. 40. S. 393 u. 41. S. 53. 1913 (Teil I u. II).

5) P. Lenard, Ann. d. Phys. 60. S. 329. 1919 und 61. S. 665. 1920 (Teil III).

6) P. Langevin, Ann. d. Ch. et d. Phys. 28. S. 317. 1903 und 5. S. 245 u. f. 1905.

7) Über die sonstige hierher gehörige Literatur siehe P. Lenard a. a. O. Teil III, Abschnitt 7.

Herr Langevin dort ableitet, stimmt jedoch nicht mit derjenigen Herrn Lenards aus dem Jahre 1900, und noch viel weniger mit der endgültigen Formel von 1919 überein. Man hat nun — sehr zu Unrecht — versucht, die Formel Herrn Langevins als die allein richtige hinzustellen, ohne daß es bis heute jemand unternommen hätte, die Theorien Herrn Lenards und Herrn Langevins auf den Grad ihrer Genauigkeit zu vergleichen.

Zweck der vorliegenden Arbeit soll nun sein, die Quelle des Unterschiedes beider Theorien aufzudecken.

2. Das Problem der Wanderung kraftbewegter Partikel in Gasen ist bekanntlich folgendes: Ein Partikel der Masse m bewege sich in einem anderen Gase. Die Masse eines Gasmoleküls sei M, es mögen N Gasmoleküle in der Raumeinheit vorhanden sein. Wir denken uns das Partikel und die Gasmoleküle als glatte Kugeln von den Radien R bzw. r, die infolge der Wärmebewegung mit großer Geschwindigkeit hin und her fahren, und bei den gegenseitigen Zusammenstößen nach den Gesetzen des elastischen Stoßes reflektiert werden.[1])

Auf das Partikel wirke nun eine äußere Kraft K. Hierdurch wird die unregelmäßige Wärmebewegung des Partikels ein wenig abgeändert werden, derart, daß im Mittel Geschwindigkeiten in Richtung der äußeren Kraft überwiegen. Das Partikel erlangt also eine mittlere Geschwindigkeit ω in Kraftrichtung; es entsteht die Aufgabe, die Größe dieser Geschwindigkeit zu berechnen.

Die Überlegung, die sowohl der Rechnung Herrn Lenards als auch derjenigen Herrn Langevins zugrunde liegt, ist folgende: Bewegt sich das Partikel mit seiner Geschwindigkeit durch die Gasmoleküle hindurch, so verliert es bei jedem Zusammenstoß mit einem Gasmolekül einen bestimmten Betrag

1) Herr Langevin nimmt im Falle elektrisch geladener Partikel neben elastischen Stößen auch noch Fernkräfte an, mit denen das Partikel auf die ungeladenen Gasmoleküle einwirken soll, da jedoch die experimentelle Untersuchung (siehe P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. S. 714. 1903) gezeigt hat, daß solche Kräfte äußerst klein oder überhaupt nicht vorhanden sind, wird von ihnen hier abgesehen. Vgl. auch die eingehendere Erörterung hierüber P. Lenard a. a. O. Teil III. Abschnitt 5, Fall E.

seiner Geschwindigkeit. Im stationären Zustand wird dann dieser Geschwindigkeitsverlust gerade ausgeglichen durch den Geschwindigkeitszuwachs, den das Partikel während der Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen infolge der äußeren Kraft erhält. Diese äußere Kraft hat zur Folge, daß die Geschwindigkeit des Partikels auf der freien Weglänge keine gleichförmige ist; seine Bewegung ist vielmehr eine beschleunigte, ein Umstand, der für die mathematische Durchführung des Problems von großer Wichtigkeit sein wird.

Trotz der Gleichheit des Grundgedankens besteht ein Unterschied in den beiderseitigen Theorien insofern, als Herr Lenard das Problem der Wanderungsgeschwindigkeit direkt in Angriff nimmt, während Herr Langevin den Umweg über die Diffusion einschlägt.

3. Eng verwandt mit dem vorliegenden Problem ist das Problem der Diffusion, an das Herr Langevin (a. a. O. 1905) anknüpft. Es besteht nun aber doch ein wesentlicher Unterschied zwischen Diffusions- und Wanderungsgeschwindigkeit, und zwar der, daß im Falle der Diffusion die Bewegung des Partikels auf der freien Weglänge eine *gleichförmige*, im Falle der Wanderung aber eine *beschleunigte* ist. Dieser Umstand, den Herr Langevin nicht in Rechnung zieht, bildet, wie sich zeigen wird, eine der Quellen des Unterschiedes seiner Theorie der Wanderungsgeschwindigkeit und derjenigen Herrn Lenards.

4. Es handelt sich nun in erster Linie darum, den mittleren Geschwindigkeitsverlust des Partikels beim Zusammenstoß mit einem Gasmolekül zu finden.[1]) Wir nehmen der Einfachheit halber an, das Gasmolekül sei in Ruhe und das Partikel bewege sich mit der Geschwindigkeit u gegen das Gasmolekül. Der Ort, an dem das Partikel das Gasmolekül trifft, sei A. Wir zerlegen nun die Geschwindigkeit u des Partikels in eine

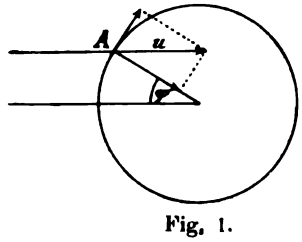


Fig. 1.

1) Der besseren Übersicht halber seien in diesem Absatz 4 schon bekannte Resultate aus Herrn Lenards Arbeiten eingeschaltet.

normale und in eine tangentiale Komponente. Die tangentiale Komponente $u \sin \varphi$ bleibt beim Stoße ungeändert. Ihr Beitrag zur Geschwindigkeit u' nach dem Stoß ist daher $u \sin^2 \varphi$. Die Normalkomponente von u ändert dagegen beim Stoß ihre Größe, man findet ihren Wert nach dem Stoß unter Anwendung der Sätze von der Erhaltung der Bewegungsgröße und der lebendigen Kraft zu

$$\frac{m - M}{m + M} u \cos \varphi .$$

Ihr Beitrag zur Geschwindigkeit u' nach dem Stoß ist

$$\frac{m - M}{m + M} u \cos^2 \varphi .$$

Die Geschwindigkeit nach dem Stoß ist daher in Stoßrichtung

$$u' = u \left(\sin^2 \varphi + \frac{m - M}{m + M} \cos^2 \varphi \right).$$

Nun beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß die Normalkomponente von u gerade einen Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ mit der Stoßrichtung bildet,

$$\frac{2\pi \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\pi} .$$

Die mittlere Geschwindigkeit nach dem Stoß ist daher

$$u' = u \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 \varphi + \frac{m - M}{m + M} \cos^2 \varphi \right) 2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi .$$

Die Integration ergibt

$$u' = \frac{m}{m + M} u = \mu \cdot u , \tag{1}$$

während die Komponenten senkrecht zur Stoßrichtung verschwinden.[1]) Das Massenverhältnis

$$\mu = \frac{m}{m + M} ,$$

welches in unserem Problem fortdauernd eine Rolle spielt, wollen wir als Lenardsche Konstante bezeichnen.

Ist das Gasmolekül nicht in Ruhe, sondern besitzt die Geschwindigkeitskomponenten U, V, W, während die des Par-

1) Es ist dies die von Herrn Lenard (a. a. O. 1900) gegebene Formel, deren Ableitung dort nur kurz in Worten angegeben ist.

tikels u, v, w sein mögen, so hat man offenbar in Gleichung (1) u und u' durch $u - U$ und $u' - U$ zu ersetzen; man findet so die mittlere u-Komponente nach dem Stoß zu

$$u' = -\frac{m u + M U}{m + M}$$

und ebenso gelten zwei analoge Formen für v' und w'. Der mittlere Geschwindigkeitsverlust, den das Partikel bei einem Zusammenstoß mit einem Gasmolekül erleidet, ist daher für die u-Richtung

$$u - u' = \frac{M}{m + M}(u - U). \tag{2}$$

5. Herr Langevin schließt nun so: Man denke sich für einen Augenblick, daß alle N-Gasmoleküle der Raumeinheit dieselben Geschwindigkeitskomponenten U, V, W besitzen, während sich das Partikel mit den Geschwindigkeitskomponenten u, v, w gleichförmig durch das Gas hindurch bewegt. Das Partikel erfährt dann nach einem bekannten Satz der kinetischen Theorie der Gase in der Zeiteinheit die Anzahl $N s^2 \pi c$ Zusammenstöße, worin $s = r + R$ die Radiensumme von Partikel und Gasmolekül und c ihre Relativgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{(u - U)^2 + (v - V)^2 + (w - W)^2}$$

bedeutet.

Nun würde das Partikel bei jedem Zusammenstoß in u-Richtung den Betrag $u - u'$ an Geschwindigkeit verlieren, in der Zeiteinheit daher den Betrag $(u - u') N s^2 \pi c$.

Nun sind aber die Geschwindigkeitskomponenten der Gasmoleküle nicht alle gleich und auch die des Partikels ändern sich von Stoß zu Stoß. Bezeichnet man daher mit df die Wahrscheinlichkeit, daß die Geschwindigkeitskomponenten des Partikels zwischen den Grenzen u, v, w und $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ liegen und ebenso mit dF die Wahrscheinlichkeit, daß die Geschwindigkeitskomponenten eines Gasmoleküls zwischen den Grenzen U, V, W und $U + dU$, $V + dV$, $W + dW$ liegen, so ist der mittlere Verlust an Geschwindigkeit, den das Partikel auf seinem Wege durch das Gas in der Zeiteinheit erleidet, gegeben durch

$$\int\int (u - u') N s^2 \pi c \, df \, dF.$$

Andererseits erhält das Partikel in der Zeiteinheit infolge der äußeren Kraft K, die wir unbeschadet der Allgemeinheit der Betrachtung in die Richtung der u-Achse legen können, den Geschwindigkeitszuwachs $b = K/m$, man hat daher als Bedingung des stationären Zustandes

$$K = m \int\int (u - u') N s^2 \pi c \, df \, dF \quad [1]$$

oder nach Gleichung (2):

$$K = \frac{m M}{m + M} \int\int (u - U) N s^2 \pi c \, df \, dF. \tag{3}$$

Ist das Gas als Ganzes in Ruhe, so ist bei Annahme Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung

$$dF = \left(\frac{h M}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hM(U^2 + V^2 + W^2)} \, dU \, dV \, dW,$$

worin h die Boltzmannsche Konstante bezeichnet.

Ist ω die mittlere fortschreitende Geschwindigkeit des Partikels in Kraftrichtung, so ist

$$df = \left(\frac{h m}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hm[(u-\omega)^2 + v^2 + w^2]} \, du \, dv \, dw.$$

Da ω sehr klein ist, wird bei Vernachlässigung höherer Potenzen von ω

$$df = \left(\frac{h m}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hm(u^2 + v^2 + w^2)} (1 + 2hmu\omega) \, du \, dv \, dw.$$

Setzt man diese Werte in (3) ein, so ergibt die Integration [2]

$$K = \frac{4\omega}{3} N s^2 \pi \sqrt{\frac{4}{h\pi}} \frac{m M}{m + M}$$

---

1) Diese Gleichung stammt im Grunde von Boltzmann; siehe L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie I. S. 196. 1895.

2) Die Integrationen lassen sich auf einfacherem Wege als bei Herrn Langevin durch Einführung neuer Veränderlicher

$$u = \mathfrak{U} + \frac{M}{m+M} \mathfrak{u}, \qquad U = \mathfrak{U} - \frac{m}{m+M} \mathfrak{u},$$

$$v = \mathfrak{V} + \frac{M}{m+M} \mathfrak{v}, \qquad V = \mathfrak{V} - \frac{m}{m+M} \mathfrak{v},$$

$$w = \mathfrak{W} + \frac{M}{m+M} \mathfrak{w}, \qquad W = \mathfrak{W} - \frac{m}{m+M} \mathfrak{w},$$

$$du \, dv \, dw \, dU \, dV \, dW = d\mathfrak{u} \, d\mathfrak{v} \, d\mathfrak{w} \, d\mathfrak{U} \, d\mathfrak{V} \, d\mathfrak{W}$$

und nachheriger Einführung von Polarkoordinaten lösen.

und hieraus folgt für die Wanderungsgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{3}{4} \frac{K}{N s^2 \pi} \sqrt{\frac{h\pi}{4} \frac{m+M}{mM}}$$

oder bei Einführung der Lenardschen Konstanten

$$\mu = \frac{m}{m+M},$$

der Gasdichte $D = N \cdot M$ und der mittleren molekularen Geschwindigkeit

$$W = \sqrt{\frac{4}{\pi h M}}$$

der Gasmoleküle wird

$$\omega = \frac{3}{4} \frac{K}{D s^2 \pi W} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}}. \tag{4}$$

Dies wäre nach Herrn Langevin die gesuchte Wanderungsgeschwindigkeit des Partikels.

6. Herr Lenard kommt in seiner erwähnten Arbeit (a. a. O. 1900) auf viel einfacherem Wege zu dem Resultat

$$\omega = \frac{K}{D s^2 \pi W} \frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}} \tag{5}$$

und die vervollständigte Wanderungsgeschwindigkeitsformel Herrn Lenards ist schließlich[1])

$$\omega = \frac{3}{3+\mu} \frac{K}{D s^2 \pi W} \frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}} \Omega_\mu, \tag{6}$$

worin der Faktor Ω_μ durch

$$\Omega_\mu = \frac{8}{\pi} \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\mu}{1+\mu}$$

gegeben ist.[2])

Man sieht, die Formeln Herrn Lenards und Herrn Langevins sind verschieden, und sie unterscheiden sich nicht nur etwa durch den konstanten Faktor $^3/_4$, sondern sie hängen auch in verschiedener Weise vom Massenverhältnis μ ab. Dies zeigt an, daß mindestens eine der beiderseitigen Formeln unter einem prinzipiellen Mangel leidet, und zwar ist es die Formel Herrn Langevins, wie im folgenden gezeigt werden soll.

7. Man hat dazu folgendes zu bedenken: Bewegt sich das Partikel mit der mittleren Geschwindigkeit ω durch das Gas,

1) P. Lenard, Teil III, Gleichung (21).
2) P. Lenard, Teil III, Gleichungen (8) und (51).

so ändert es von Weglänge zu Weglänge seinen Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, und zwar sollen diese in ihrer Wahrscheinlichkeit wie früher durch die Maxwellsche Funktion

$$df = \left(\frac{h^2 m}{\pi}\right)^{3/2} e^{-hm(u^2+v^2+w^2)}(1 + 2hmu\omega)\,du\,dv\,dw$$

gegeben sein. Einer bestimmten Stoßzeit[1]) t sind dadurch ganz bestimmte Werte von u, v, w zugeordnet. Nun ist aber die u-Komponente des Partikels während der Stoßzeit t infolge der äußeren Kraft K nicht konstant, sondern wächst von einem Werte u' am Anfang der freien Weglänge bis zu einem Werte $u'' = u' + bt$ am Ende der freien Weglänge. Die Geschwindigkeit u, die der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung entspricht, wird daher zwischen u' und u'' liegen.

In der im vorigen gegebenen Ableitung Herrn Langevins sind nun u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten, die das Partikel jeweils kurz vor dem Zusammenstoße, also am *Ende* der freien Weglänge besitzt. Denn diese Geschwindigkeitskomponenten sind maßgebend für die Größe des Geschwindigkeitsverlustes beim Zusammenstoß, wie man aus Gleichung (2) erkennt. Herr Langevin setzt — anscheinend unbewußt — voraus, daß die Maxwellschen Geschwindigkeitskomponenten u, v, w des Partikels stets mit den Endgeschwindigkeiten auf der freien Weglänge zusammenfallen.

Diese Voraussetzung ist aber ziemlich unwahrscheinlich. Das Maxwellsche Verteilungsgesetz sagt nur aus, daß in einem bestimmten Augenblick der Stoßzeit t Geschwindigkeitskomponenten von der Größe u, v, w vorhanden sind; in welchem Augenblick aber dieses Ereignis stattfindet, darüber macht das Gesetz keine Aussage. Es wäre nun doch offenbar eine ganz einseitige Bevorzugung eines bestimmten Augenblicks, wenn man — wie es Herr Langevin tut — annehmen wollte, daß dieses Ereignis jeweils genau am Ende der Stoßzeit stattfinden würde. Vielmehr wird dieses Ereignis bei vielen aufeinanderfolgenden Stoßzeiten einmal mehr zu Anfang, das andere Mal mehr zu Ende der Stoßzeit eintreten.

---

1) Mit Stoßzeit wird hier nach dem Vorgange Herrn Lenards die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen des Partikels bezeichnet.

Wir wollen daher Gleichung (3) in der Form schreiben

$$K = m \int\int (u'' - u') N s^2 \pi c \, df \, dF, \tag{7}$$

wobei u'', die Endgeschwindigkeit auf der freien Weglänge, und u', die Anfangsgeschwindigkeit auf der freien Weglänge, im allgemeinen von der Maxwellschen Geschwindigkeit u verschieden sind.

Man hat nun noch u' und u'' durch u auszudrücken. Hierzu kann folgende Überlegung dienen: Jedenfalls muß u so gewählt werden, daß die Gleichung

$$\omega = \frac{\sum u_\nu t_\nu}{\sum t_\nu} \tag{8}$$

erfüllt ist, indem $\sum u_\nu t_\nu$ den während einer — theoretisch unendlich langen — Zeit zurückgelegten Weg des Partikels in Kraftrichtung, $\sum t_\nu$ die dazu nötige Zeit bezeichnet, und worin die Summen von $\nu = 1$ bis $\nu = \infty$ sich erstrecken. Andererseits ist aber die Wanderungsgeschwindigkeit als Quotient als Gesamtweg durch Gesamtzeit[1])

$$\omega = \frac{\sum u_\nu' t_\nu + \frac{1}{2} b \sum t_\nu^2}{\sum t_\nu} \tag{9}$$

und da in jedem Falle

$$u_\nu' = u_\nu'' - b t_\nu, \tag{10}$$

so ist auch

$$\omega = \frac{\sum u_\nu'' t_\nu - \frac{1}{2} b \sum t_\nu^2}{\sum t_\nu}. \tag{11}$$

Aus (9) und (11) folgt

$$\omega = \frac{\sum \frac{u_\nu' + u_\nu''}{2} t_\nu}{\sum t_\nu}$$

und daher ist, wie der Vergleich mit (8) zeigt, mit Weglassung der Indizes

$$u = \frac{u' + u''}{2}.$$

Wie man sieht, liegt die Maxwellsche Geschwindigkeit u in der Mitte zwischen Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Partikels auf der freien Weglänge.

1) Siehe P. Lenard, a a. O. Teil I. S. 415.

Die letzte Gleichung ergibt in Verbindung mit Gleichung (10)

$$u' = u - \tfrac{1}{2} b t$$

und

$$u'' = u + \tfrac{1}{2} b t.$$

Mit der letzteren Geschwindigkeit erfolgt der Zusammenstoß; der dabei stattfindende Geschwindigkeitsverlust ist daher nach Gleichung (2)

$$u'' - u' = \frac{M}{m + M}(u - U + \tfrac{1}{2} b t). \tag{12}$$

Man sieht, der Geschwindigkeitsverlust bei einem Zusammenstoß — in Maxwellschen Geschwindigkeiten ausgedrückt — ist jetzt größer als bei Herrn Langevin. Zwar sagt Herr Langevin auf S. 254 seiner erwähnten Arbeit (a. a. O. 1905), daß die Abweichungen der augenblicklichen Geschwindigkeitskomponenten des Partikels von denen, wie sie durch Maxwells Verteilungsfunktion gegeben sind, nur sehr klein seien, und daß man sie deshalb vernachlässigen könne. Tatsächlich ist das Glied $\frac{1}{2} b t$ im Verhältnis zu fast allen vorkommenden Geschwindigkeitskomponenten u und U sehr klein; man muß aber bedenken, daß ω selbst eine gegen die thermische Geschwindigkeit des Partikels kleine Größe ist und daß deshalb auch kleine Vernachlässigungen von beträchlichem Einfluß auf die Wanderungsgeschwindigkeit sein können, was hier auch tatsächlich der Fall ist.

Im Falle der Diffusion fällt natürlich dieser Umstand weg, da infolge des Fehlens der beschleunigenden Kraft Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Partikels auf der freien Weglänge dieselbe ist, also in jedem Augenblick mit der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung zusammenfallen. Gleichung (4) gilt daher wohl im Falle der Diffusion — wobei an Stelle der äußeren Kraft das Druckgefälle in Richtung der u-Achse tritt — nicht aber im Falle der Wanderung eines Partikels in einem Kraftfelde und Herr Langevin verfährt keineswegs streng, indem er Wanderung und Diffusion als vollkommen analoge Vorgänge betrachtet.

8. Man hat nun, um exakter zu verfahren, mit dem durch Gleichung (12) gegebenen Geschwindigkeitsverlust denselben

Rechnungsgang wie früher zu verfolgen und erhält daher an Stelle von Gleichung (7)

$$K = \frac{m M}{m + M} \int\int \left(u - U + \frac{K t}{2 m}\right) N s^2 \pi c \, df \, dF,$$

wobei wieder

$$c = \sqrt{(u - U)^2 + (v - V)^2 + (w - W)^2}$$

die relative Geschwindigkeit von Partikel und Gasmolekül bedeutet. Die unter dem Integral auftretende Stoßzeit t ist nur Funktion der Relativgeschwindigkeit c und in ihrer Wahrscheinlichkeit durch

$$W(t)\,dt = N s^2 \pi c \, e^{-N s^2 \pi c t} \, dt$$

gegeben. Man hat daher noch die letzte Gleichung mit $W(t)\,dt$ zu multiplizieren und über alle möglichen Werte von t von $t = 0$ bis $t = \infty$ zu integrieren. Man erhält so

$$K = \frac{m M}{m + M} \int\int (u - U) \, N s^2 \pi c \, df \, dF + \frac{M K}{2(m + M)} \int\int df \, dF.$$

Nun ist bekanntlich $\int df = \int dF = 1$, man erhält daher, wenn man den zweiten Summanden der rechten Seite mit der linken Seite vereinigt

$$(13) \qquad K^{\frac{1+\mu}{2}} = \frac{m M}{m + M} \int\int (u - U) N s^2 \pi c \, df \, dF.$$

Die Ausführung der Integration ergibt

$$K^{\frac{1+\mu}{2}} = \frac{4\omega}{3} \sqrt{\frac{4}{h\pi}} \sqrt{\frac{m M}{m + M}}$$

und hieraus folgt für die Wanderungsgeschwindigkeit

$$(14) \qquad w = \frac{3}{4} \frac{K}{D s^2 \pi W} \frac{1 + \mu}{2\sqrt{\mu}}.$$

Man erkennt, daß sich diese Formel von der auf Diffusionsuntersuchungen gegründeten Formel Herrn Langevins [Gleichung (4) des Vorliegenden] durch das Hinzukommen des Faktors $\frac{1+\mu}{2}$ unterscheidet.

Hieran knüpft sich eine Bemerkung von allgemeiner Bedeutung. Es ist eine weitverbreitete Ansicht, daß man von der Diffusionsgeschwindigkeit ohne weiteres auf die Wanderungsgeschwindigkeit schließen könne.[1]) Dies ist tatsächlich nicht

1) Vgl. S. P. Townsend, Phil. Trans. A. 195. S. 259. 1900.

der Fall, man hat vielmehr, wie aus dem Vorliegenden hervorgeht, die Diffusionsgeschwindigkeit noch mit dem Faktor $\frac{1+\mu}{2}$ zu multiplizieren, um der beschleunigten Bewegung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen Rechnung zu tragen.

So findet Maxwell[1]) bei Annahme gleicher Stoßzeiten die Diffusionsgeschwindigkeit zu

$$\frac{K}{D s^2 \pi W} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

und hieraus würde sich für die Wanderungsgeschwindigkeit nach Multiplikation mit $\frac{1+\mu}{2}$ der Wert

$$\omega = \frac{K}{D s^2 \pi W} \frac{1+\mu}{2\sqrt{\mu}}$$

ergeben. Es ist dies gerade das Resultat, wie es schon von Herrn Lenard in seiner Arbeit von 1900 auf kurzem direkten Wege und ohne Anlehnung an die Diffusion abgeleitet wurde.

9. Gleichung (14) wurde hergeleitet unter der Voraussetzung, daß die Maxwellsche Geschwindigkeitskomponente u des Partikels genau in der Mitte zwischen Anfangsgeschwindigkeit und Endgeschwindigkeit auf der freien Weglänge liegt, was eine Verbesserung gegenüber Herrn Langevins Annahme ist. Dies hatte zur Folge, daß zu Herrn Langevins Formel noch der Faktor $\frac{1+\mu}{2}$ hinzutrat. Damit ist, wie man sieht, eine Annäherung an die vervollständigte Formel Herrn Lenards [Gleichung (6) des Vorliegenden] eingetreten, Übereinstimmung ist aber doch nicht erreicht; denn es erscheint der Faktor $\frac{3}{3+\mu}$ in Gleichung (14) durchweg für alle Massenverhältnisse, als 3/4 und der Faktor Ω_μ fehlt ganz.

Man muß aber bedenken, daß auch die Annahme, unter der Gleichung (14) hergeleitet wurde, nicht frei von Willkür ist. Die Schwierigkeit, die hier vorliegt, ist in der von Herrn Langevin gewählten Methode begründet. Denn die Geschwindigkeitskomponenten des Partikels sind auf der freien Weglänge nicht konstant, und weichen daher zu Anfang und

1) C. Maxwell, Scientific Papers 1. S. 398. 1890.

zu Ende einer freien Stoßzeit im allgemeinen von einer gewissen mittleren Geschwindigkeit, wie sie der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung entsprechen würde, ab. Der Übelstand ist nur der, daß über diese Abweichungen nichts bekannt ist, so daß man gezwungen ist, eine mehr oder weniger willkürliche Annahme einzuführen, um Anfangs- und Endgeschwindigkeit auf der freien Weglänge mit der dazugehörigen Maxwellschen Geschwindigkeit in Verbindung zu bringen, und je nach der Annahme wird auch die Wanderungsgeschwindigkeit verschieden ausfallen. Die Willkürlichkeit der Annahme läßt sich ohne weiteres nur umgehen, wenn man das Problem von Grund aus, ohne Anlehnung an die Diffusionsbetrachtung, in Angriff nimmt, wie es eben Herr Lenard mit dem oben angegebenen Resultat schon seit 1900 getan hat.

Wir können daher als Ergebnis unserer Untersuchung angeben, daß das von Herrn Langevin gewählte Rechnungsverfahren wohl in Anwendung auf Probleme der Diffusion brauchbar erscheint, nicht aber zur feineren Berechnung der Wanderungsgeschwindigkeit eines Partikels in einem Kraftfeld.

Heidelberg, November 1919.

(Eingegangen 9. Dezember 1919.)

6. *Über erzwungene Schwingungen bei gestörter Superposition;*

von E. Waetzmann.

§ 1. Fragestellung.

Bekanntlich ergibt die gewöhnliche Theorie der erzwungenen Schwingungen, die mit linearen Gleichungen operiert, sogenannte ungestörte Superposition der Schwingungen. Das soll heißen, daß sich die Schwingungen des erregten Körpers rein additiv aus den Perioden, die in der erregenden Kraft enthalten sind, zusammensetzen. Werden dagegen nichtlineare Gesetze für den erregten Körper zugrunde gelegt, so treten „Störungen" auf, die erregten Schwingungen enthalten auch solche Perioden, welche primär noch nicht gegeben sind. Die mathematische Behandlung dieser Vorgänge ist leider so schwierig, daß sie bisher über die Betrachtung des Massenpunktes[1]) und eines Spezialfalles für die Saite und Membran[2]) nicht hinausgekommen ist. Dagegen harrt das im Hinblick auf eine experimentelle Untersuchung der gestörten Superposition besonders wichtige allgemeine Problem der Membran, und erst recht der belasteten Membran, noch der Lösung.

Das Experiment ist in unserer Frage bisher nicht glücklicher gewesen als die Theorie. Nach Helmholtz sollen zwar die sehr starken sogenannten subjektiven Kombinationstöne (K. T.) infolge nichtlinearer Kraftgesetze für das schwingende Trommelfell entstehen; jedoch können diese Beobachtungen an K. T. nicht als sichere Bestätigung der theoretischen Folgerungen aus den nichtlinearen Schwingungsgesetzen angesehen werden, so lange es nicht gelingt, entsprechende Vorgänge auch objektiv außerhalb des Ohres zu beobachten. Das wollte

1) H. Helmholtz, Pogg. Ann. 99. S. 497. 1856.
2) Cl. Schaefer u. E. Juretzka, Ann. d. Phys. 41. S. 581. 1913.

aber bisher, wenigstens in quantitativer Beziehung, durchaus nicht gelingen.[1]

In Anbetracht der großen Wichtigkeit der Frage der gestörten Superposition auch auf nichtakustischem Gebiete[2] wurden von neuem entsprechende Versuche aufgenommen. Die von Helmholtz am Massenpunkt entwickelte Theorie gibt Störungsglieder von verhältnismäßig kleiner Amplitude. Ob und inwieweit die am Massenpunkt gewonnenen quantitativen theoretischen Ergebnisse auch für kompliziertere Gebilde Gültigkeit behalten, wurde aber vorläufig außer Acht gelassen, und ebenso die noch weiter gehende Frage, ob vielleicht schon die Grundgedanken der Helmholtzschen Theorie auf das Hören der subjektiven K. T. nicht anwendbar sind[3]. Vielmehr wurde zunächst unter Verzicht auf einen theoretischen Leitfaden nach einer Versuchsanordnung gesucht, bei welcher membranartige Gebilde in Analogie zu der großen Stärke der subjektiven K. T. ganz grobe „Störungseffekte" ergeben könnten. Als geeignet hierfür erwiesen sich schwach gespannte, sehr empfindliche, auf einer Seite durch Wachskügelchen u. dgl. stark belastete Gummihäute, die senkrecht angeordnet waren. So unsympathisch diese Versuchsanordnung mit derartigen komplizierten, für eine theoretische Behandlung kaum zu definierenden Gebilden zunächst auch erscheinen mag, so hat sie sich doch auf das beste bewährt. *Tatsächlich erhält man an unseren Gummihäuten bei passender Wahl der erregenden Töne die gesuchten Störungen in geradezu verblüffender Stärke.* Hierauf kam es aber für den ersten Schritt allein an. Vergegenwärtigen wir uns außerdem die Kompliziertheit der Gebilde im Ohre, welche das Hören vermitteln und speziell die Entstehung der subjektiven K. T. veranlassen sollen, so wird man vielleicht finden, daß die von mir gewählte Versuchsanordnung nicht nur zweckentsprechend, sondern auch verhältnismäßig

1) Auf die fragliche Literatur möchte ich hier der Platzersparnis halber nicht eingehen, zumal ich demnächst in anderem Zusammenhange ausführlich auf diese Fragen zurückkomme.

2) Vgl. z. B. G. Duffing: „Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung." Sammlung Vieweg, Heft 41 u. 42. 1918.

3) Vgl. E. Waetzmann, Ann. d. Phys. 42. S. 743—44. 1913.

einfach ist. Daß sich die Resultate der vorliegenden Untersuchung nicht nur auf solche Schwingungen beziehen, die zu den akustischen im engeren Sinne des Wortes gehören, braucht wohl kaum gesagt zu werden.

Eine kurze Mitteilung über Schwingungsaufnahmen an belasteten Gummihäuten, die ich im folgenden der Kürze des Ausdruckes halber auch als Membranen bezeichnen werde, habe ich bereits gemeinsam mit W. Moser[1]) veröffentlicht. Auch in der Aufnahme und Analyse eines großen Teiles der der vorliegenden Arbeit zugrunde liegenden Schwingungskurven bin ich durch Hrn. W. Moser unterstützt worden.

§ 2. Versuchsanordnung.

Es wurden zum großen Teil dünne Gummihäute benutzt, wie sie früher in Drogerien käuflich waren. Diese Häute wurden über den verdickten Rand der kleineren Öffnung eines Trichters gezogen und mit Gummischnüren festgebunden. Die Spannung läßt sich dann nur grob, aber in sehr einfacher Weise ändern. Wenn es darauf ankam, auch feinere Spannungsänderungen ausführen zu können, wurde ein ringförmiger Wulst benutzt, der aus zwei halbkreisförmigen Hälften bestand, deren Abstand mittels feiner Schrauben ein wenig geändert werden konnte. Bei längeren Versuchsreihen mußte des öfteren nachgeprüft werden, ob der Spannungszustand genügend konstant geblieben war. Der Durchmesser der Gummihäute betrug durchschnittlich etwa 5 cm. Die Belastung geschah durch Wachskügelchen, die eventuell noch durch Metallstückchen beschwert waren, und in der Regel etwas seitlich der Mitte der Membranen angebracht wurden. Ihr Gewicht wurde so gewählt, daß es gegenüber den elastischen Kräften der Häute stets merklich, zuweilen sehr stark in Betracht kam. Durch die angeklebten Gewichte wurde die Gummihaut je nach dem Ort der Belastung und dem Verhältnis zwischen ihren elastischen Kräften und der Größe des Belastungsgewichtes mehr oder weniger stark durchgebogen und deformiert. *Die Ebene der Häute war bei den in der vorliegenden Arbeit abgebildeten Kurven die Vertikalebene.*

1) E. Waetzmann u. W. Moser, Verh. d. D. Phys. Ges. 19. S. 13. 1917.

Das Stativ, welches den Trichter mit Gummihaut hielt, stand auf einer Platte, die auf drei Gummibällen ruhte, die ihrerseits auf einem schweren Tisch lagen, dessen Füße auf Blei- und Gummiplatten standen. Hierdurch waren die Membranen gegen kurzperiodische Erschütterungen, die durch den Boden kamen, genügend geschützt; langperiodische Erschütterungen stören weniger. Natürlich mußten die Membranen bei ihrer außerordentlich großen Empfindlichkeit auch vor Erschütterungen, die durch die Luft übertragen werden, sorgfältig bewahrt werden. Z. B. macht schon ein geringer Luftzug im Zimmer, der von dem Experimentator erregt wird, eine Aufnahme unmöglich.

Die photographische Registrierung der Schwingungsform einer bestimmten Stelle der Membran geschah in der üblichen Weise mit Hilfe eines kleinen an der betreffenden Stelle — in der Regel dicht neben dem Belastungskörper — befestigten Spiegels. Zunächst wurde immer die Ruhelage (Nullinie) photographiert, darauf die Schwingungen.

Als Tonquellen für die Erregung der Häute dienten in erster Linie Stimmgabeln auf Resonanzkästen; wenn es auf Reinheit der „Töne" nicht ankam, auch ein lautsprechendes Telephon, das durch eine Wechselstromsirene betrieben wurde. Pfeifen u. dgl. eignen sich weniger gut. Die Wechselstromsirene war wegen der Möglichkeit, die Tonhöhe in weiten Grenzen kontinuierlich zu ändern, für manche Zwecke besonders bequem. Die Tonquellen standen auf einem Tisch für sich, vor dem freien Ende des Trichters. Jedoch konnten die erregenden Töne der Gummihaut auch von der Gegenseite zugeleitet werden, wobei, um beiderseitig gleiche Verhältnisse zu haben, bei einigen Aufnahmen ein Doppeltrichter benutzt wurde, der aus zwei mit ihren engeren Öffnungen zusammenstoßenden Einfachtrichtern bestand. Die Gummihaut liegt dann in der Berührungsebene der beiden Einfachtrichter. Der Zweck der verschiedenseitigen Erregung der Gummihaut wird in § 4 ersichtlich werden. Die Grundperiode der Gummihaut wurde in der Weise bestimmt, daß die Tonquelle (Telephonmembran), mit hoher Schwingungszahl beginnend, kontinuierlich vertieft, und das tiefste Resonanzmaximum aufgesucht wurde.

Einige Male wurden zwischen Klangquelle und Membran

zur möglichst restlosen Beseitigung von Obertönen (O. T.) Interferenzrohre eingeschaltet. Jedoch konnte die Frage der O. T. noch nicht genügend geklärt werden. Wir kommen hierauf in § 4 zurück.

Ein Teil der aufgenommenen Kurven wurde mit einem Maderschen harmonischen Analysator analysiert. Nach einigen Vorversuchen konnte man sich ein ungefähres Bild von den auftretenden Schwingungsarten machen, und es gelang bald, die Versuchsbedingungen (Spannung und Belastung der Membran, Höhe der erregenden Töne relativ zum Grundton der Membran usw.) so zu wählen, daß der gerade gewünschte Haupttyp von Schwingungen erhalten wurde. Ich betone das deshalb, weil den Beobachter bei einer etwaigen Wiederholung der Versuche der Fülle der Variationsmöglichkeiten und der auftretenden Erscheinungen gegenüber leicht eine gewisse Ratlosigkeit beschleichen könnte. Es empfiehlt sich auch dringend, die Form der erregenden Kräfte zunächst so einfach wie möglich, d. h. so zu wählen, daß etwaige „Störungseffekte" leicht zu erkennen und zu verfolgen sind[1]), *also mit Einzeltönen zu beginnen, dann zwei Töne zu nehmen, die eine typische Schwebungskurve geben und dann erst zu komplizierteren Erregungsformen überzugehen*

Unsere Gummihäute theoretisch zu behandeln, erscheint zunächst ausgeschlossen. Dagegen ist es auch ohne Theorie möglich, sich über ihre Schwingungsform Vorstellungen zu bilden, welche den tatsächlichen Vorgängen ziemlich nahe kommen dürften und das Zustandekommen der beobachteten „Störungseffekte" zum großen Teil verständlich machen. Die Wachskugel wird sich, wenn sie genügend schwer ist, bei Schwingungen der Gummihaut ähnlich bewegen, als wenn sie nicht von der ganzen Haut getragen würde, sondern von einer Anzahl von Gummibändern, deren Enden am Rande des Trichters befestigt sind. Und wir wollen noch weiter abstrahieren und unsere Haut in erster Annäherung als ein einzelnes, oben und unten befestigtes, seitlich durchgebogenes und in der Nähe der Durchbiegungsstelle belastetes Gummiband ansehen. *Die Gummihaut reduziert sich dann auf ein Pendel, aber, wie wir sehen werden, auf ein Pendel von variabler Länge.* Die

1) Vgl. hierzu E. Waetzmann, Phys. Zeitschr. 15. S. 638. 1914.

Wachskugel ist der Pendelkörper, und ihr jeweiliger Drehpunkt ungefähr der nächste senkrecht über ihr liegende Knotenpunkt, im einfachsten Falle, bei Schwingungen in der Grundperiode der Gummihaut, also eine Stelle des festen Randes. Die untere Befestigung des Gummibandes und die Seitenbänder können dann als Dämpfungsvorrichtung gedeutet werden.

§ 3. Erregung der Gummihaut durch einen Ton.

Wird die Gummihaut durch einen Ton (Primärton = P. T.) erregt, so erfolgen die Schwingungen des betrachteten Punktes vielfach nicht symmetrisch zu seiner Ruhelage („Einseitigkeit" der Schwingungen). Diese einseitige Verschiebung der Schwingungskurve gegenüber der Nullinie ist zuweilen sehr groß, größer als die Schwingungsamplitude (Fig. 2, Kurvenbild *b*). Die Einseitigkeit tritt aber nicht immer auf.

Abgesehen von besonderen Fällen, auf die hier nicht eingegangen werden soll, war sie für sehr tiefe P. T., die unterhalb oder in der Nähe der Grundperiode der Membran lagen, nicht vorhanden (Fig. 1. Kurve *a*), und kam erst bei höheren P. T. zum Vorschein (Fig. 1, Kurven *b* u. *c*). Zuweilen, aber seltener, trat sie innerhalb des benutzten P. T.-Intervalles nur für einen bestimmten kleinen Tonbereich auf, um nicht nur für tiefere, sondern auch für höhere P. T. wieder zu verschwinden oder wenigstens unmerklich zu werden. Sehr selten kam es vor, daß für eine bestimmte Höhenlage des P. T. die einseitige Verschiebung der Schwingungen gegen die Nullinie nach der entgegengesetzten Seite erfolgte als die Verschiebung für andere Höhenlagen des P. T. (Fig. 1, Kurve *f* gegenüber *d*, *e* und *g*).

Die Kurven *a*, *b* und *c* der Fig. 1 sind an der gleichen Gummihaut, deren Grundperiode bei etwa 170 Schwingungen lag, aufgenommen. Die P. T.-Höhe betrug 200 bzw. 500 bzw. 700 Schwingungen. Die Kurven *d* bis *g* der Fig. 1 sind ihrerseits wieder an ein und derselben Gummihaut mit einer Grundperiode von etwa 100 Schwingungen aufgenommen. Die P. T.-Höhe betrug 640 bzw. 500 bzw. 700 bzw. 500 (Kontrollaufnahme) Schwingungen.

Durchweg wurde bei konstant gehaltener P. T.-Höhe ein starker Anstieg der Einseitigkeit mit wachsender Stärke des P. T. beobachtet. Zur Veranschaulichung diene Fig. 2.

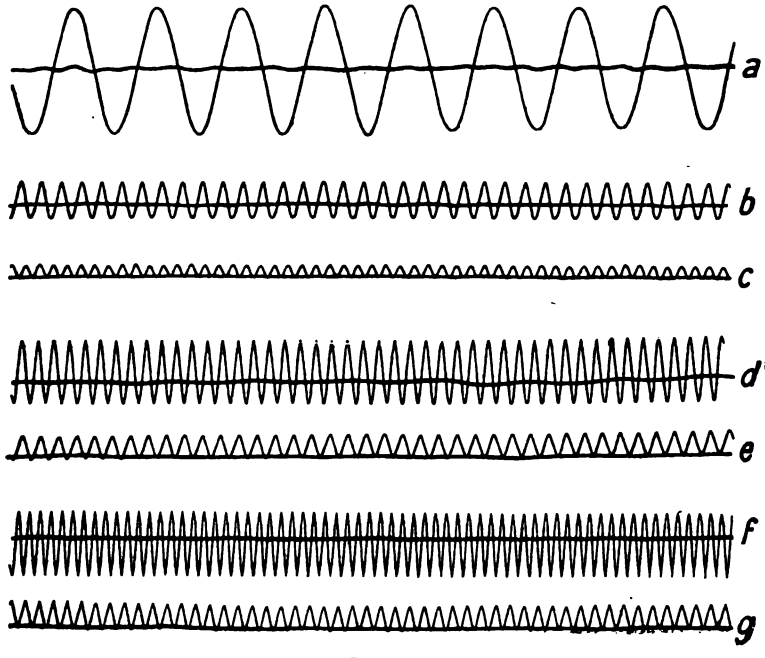


Fig. 1.

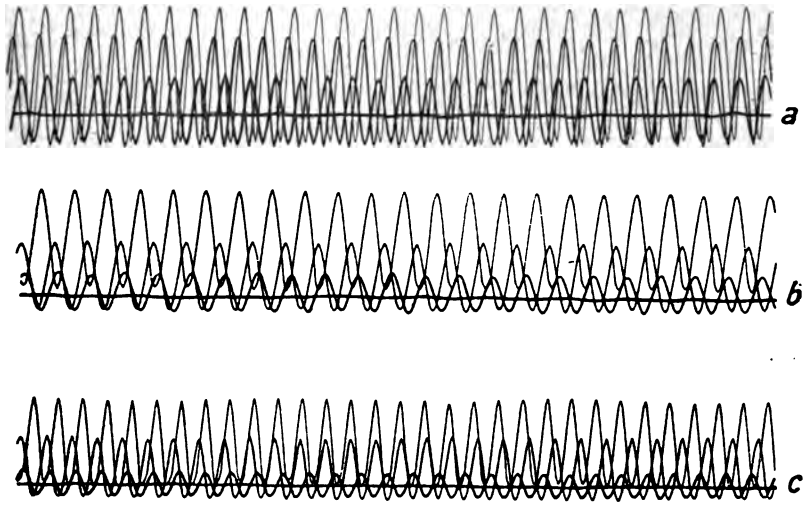


Fig. 2.

Die Kurvenbilder *a* und *b* der Fig. 2 sind an der gleichen, sehr stark belasteten Gummihaut mit einer Grundperiode von etwa 330 Schwingungen aufgenommen; das Kurvenbild *c* an einer weniger stark gespannten und geringer belasteten Haut mit einer Grundperiode von etwa 170 Schwingungen. Die P. T.-Höhe für jedes der drei Bilder *a*, *b* und *c* betrug 562 bzw. 480 bzw. 500 Schwingungen. Innerhalb jeder der drei Kurvenbilder war die P. T.-Höhe also konstant; scheinbare kleine Unterschiede sind durch etwas verschiedene Laufgeschwindigkeit des Registrierapparates bei den nacheinander erfolgenden Aufnahmen für verschiedene Tonstärken veranlaßt.

§ 4. Die Entstehung der Einseitigkeit.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wie die beobachtete Einseitigkeit zustande kommt. Wir müssen hierauf ausführlich eingehen, zumal uns diese Überlegungen gleichzeitig den Schlüssel für das Verständnis der Kurvenbilder in § 5 geben sollen.

Durch die einseitige Belastung der Gummihaut wird die Ruhelage des betrachteten Punktes (Ort des Spiegels), wie sie vor der Belastung bestand, geändert. Gegenüber der Ruhelage bei unbelasteter Membran sind die Schwingungen der belasteten also einseitig verschoben. Photographiert wird aber nach der Belastung. Die Nullinien unserer Kurven stellen also immer die Ruhelage der belasteten Membran dar. Daß gegenüber dieser Ruhelage Einseitigkeit zustande kommt, ist aber durchaus nicht selbstverständlich. Im Gegenteil müßten die Schwingungen symmetrisch zu der der einseitigen Belastung entsprechenden Ruhelage erfolgen, wenn wir unser Gebilde als gewöhnliches Pendel betrachten. Bevor wir zu der notwendigen erweiterten Betrachtungsweise übergehen, wollen wir prüfen, ob die zurzeit vorliegende Theorie der gestörten Superposition unsere Beobachtungsergebnisse verständlich zu machen vermag.

Hierzu müssen wir zunächst überlegen, ob die durch die Belastung verursachte Durchbiegung der Haut Veranlassung gibt[1]), daß die einzelnen betrachteten Punkte nicht mehr dem gewöhnlichen linearen symmetrischen Kraftgesetz, sondern einem

1) H. v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen. 5. Ausg. S. 262. Anm.

unsymmetrischen Kraftgesetz gehorchen, beispielsweise dem Helmholtzschen quadratischen (Kraft $= a x + b x^2$) Gesetz. Abgesehen davon, daß die beobachtete Einseitigkeit oft zu groß erscheint, um sich aus dem Helmholtzschen Ansatz ableiten zu lassen, gibt derselbe keine Abhängigkeit der Einseitigkeit von der P. T.-Höhe, sondern nur von den elastischen Eigenschaften des Massenpunktes und von der Stärke der Erregung. *Gerade die Abhängigkeit von der Höhe der P. T. ist aber das Hauptcharakteristikum der beobachteten Einseitigkeiten.* Auch andere Ansätze als der Helmholtzsche über die Größe und Form der elastischen Kraft bzw. der Dämpfung[1]), aus denen ein Anwachsen der Einseitigkeit mit der P. T.-Höhe folgt, können den Beobachtungen schon qualitativ nicht gerecht werden, da die beobachtete Einseitigkeit in viel verwickelterer Weise von der P. T.-Höhe abhängt als es diese Ansätze ergeben. Und es bliebe auch hier die Schwierigkeit, die Größe des beobachteten Effektes zu verstehen, obwohl freilich die Einseitigkeit relativ zu den Amplituden der P. T. um so größer ausfällt, je tiefer der Grundton der Membran relativ zu den P. T. ist, was natürlich auch schon für den Helmholtzschen Ansatz gilt.

Durch ziemlich genau entsprechende Überlegungen wie die eben angestellten kann man sich ferner klar machen, daß die Einseitigkeit nicht eine Folge des Schalldruckes[2]) sein kann. Das wurde auch noch unmittelbar experimentell bestätigt, indem der P. T., ohne daß sonst etwas an der Versuchsanordnung geändert wurde, der Gummihaut erst von der einen und dann von der anderen Seite zugeleitet wurde (vgl. § 2). Im Falle einer Schalldruckwirkung würde die Einseitigkeit in den beiden Fällen nach entgegengesetzten Seiten der Ruhelage gerichtet sein. Das Experiment zeigte aber das Gegenteil. Die einseitige Verschiebung erfolgte beide Male im gleichen Sinne, wie es z. B. dem Helmholtzschen Kraftansatz entsprechen würde, der aber seinerseits durch die vorangegangenen Überlegungen schon ausgeschaltet ist.

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 33. S. 1216. 1910.

2) E. Waetzmann, Verh. d. D. Phys. Ges. 16. S. 424. 1914 und Phys. Zeitschr. 21. 1920.

Der wirkliche Grund für die Entstehung der Einseitigkeit dürfte ein viel plumperer sein, und der Weg, sie zu verstehen, ist bereits angedeutet worden. Wir betrachten unsere belastete Gummihaut als ein Pendel, dessen Drehpunkt nicht festliegt, sondern mit wachsender Unterteilung der Gummihaut, also im allgemeinen mit wachsender Höhe des P. T. vom Rande der Membran immer näher an den Pendelkörper heranrückt. *Solange die Membran als Ganzes schwingt, also für relativ tiefe P. T., ist der Drehpunkt der feste Rand; die Schwingungen müssen, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, symmetrisch zur Ruhelage erfolgen.* Bildet sich nun für einen höheren P. T. z. B. ein zweiter Knotenkreis aus, innerhalb dessen sich der Belastungskörper befindet, so liegt der Drehpunkt jetzt ungefähr (s. weiter unten) in diesem Knotenkreis. *Die Pendellänge ist damit entsprechend verkürzt, und die Schwingungen für diesen höheren P. T. müssen gegen die Ruhelage, die ja immer die gleiche bleibt, einseitig verschoben sein,* und zwar um einen Betrag, der von der Differenz der Mittellagen des unverkürzten und des verkürzten Pendels abhängt. Die Mittellage des verkürzten und des unverkürzten Pendels ist nur deshalb eine verschiedene, weil der Pendelkörper seitlich sitzt; *also erst die Belastung der Gummihaut bringt, in Übereinstimmung mit der Beobachtung, die einseitige Verschiebung der Schwingungen gegen die Nullinie hervor, und zwar, wieder in Übereinstimmung mit der Beobachtung, nur für P. T., die relativ zum Grundton der Membran hoch liegen.* Berücksichtigt man die Fülle der möglichen Schwingungsformen schon der unbelasteten Haut, und die weiteren Variationsmöglichkeiten durch Änderung der Größe und des Ortes der Belastung sowie des Ortes des Spiegels, so kann es nicht überraschen, wenn gelegentlich für eine bestimmte Tonhöhe auch ein Durchknicken nach der entgegengesetzten Seite als für andere Tonhöhen eintritt. Ebenso ist es verständlich, daß es neben der Grundschwingung auch unterteilte Schwingungsformen der Gesamtmembran gibt, bei welchen an dem gerade betrachteten Ort keine Einseitigkeit entsteht.

Bei den bisher angestellten Beobachtungen wurde die P. T.-Höhe im allgemeinen sprungweise geändert. Wir müssen uns aber, besonders im Hinblick auf § 5 darüber klar sein,

wie sich die Form der Membranschwingungen ändert, wenn die P. T.-Höhe kontinuierlich geändert wird. Wir können diese Frage auch dahin spezialisieren, welches die Form der Membranschwingungen ist, wenn der erregende Ton zwischen zwei Eigentönen der Membran liegt. Man nahm früher trotz einer gegenteiligen Behauptung Savarts[1]), die für unrichtig erklärt wurde, an, daß eine Membran nur auf solche Töne mitschwingen könne, die mit einem ihrer Eigentöne zusammenfallen. Daß heißt mit anderen Worten, daß nur diejenigen Formen von Membranschwingungen (Chladnischen Klangfiguren) möglich sind, welche den Eigenschwingungen der Membranen entsprechen. Durch Versuche von Elsas[2]) und F. A. Schulze[3]) wurde aber festgestellt, daß geeignete Membranen — zu welchen auch unsere Gummihäute zu rechnen sind — bei geeigneter Erregung tatsächlich auf jeden P. T. mitschwingen, und daß die einzelnen Knotenlinienfiguren, wie sie von den freien Schwingungen her bekannt sind, bei allmählicher Änderung der P. T.-Höhe kontinuierlich ineinander übergehen. Debye[4]) hat dann im Anschluß an die Beobachtungen von F. A. Schulze gezeigt, daß die so entstehenden Zwischenformen als die Übereinanderlagerung benachbarter freier Schwingungen gedeutet werden können. *Bei unserer Versuchsanordnung wird also mit einer kontinuierlichen Änderung der P. T.-Höhe eine kontinuierliche Änderung der Größe der Einseitigkeit Hand in Hand gehen.*

Endlich muß noch ein wichtiger Punkt, der schon oben angedeutet wurde, erörtert werden, nämlich die Zunahme der Einseitigkeit mit wachsender Amplitude. Auch er scheint mir für unsere Vorstellungen keine unüberwindlichen Schwierigkeiten zu bieten. Vielmehr ist es verständlich, daß der Drehpunkt für den Belastungskörper beispielsweise vom Rande erst dann völlig in den ersten Knotenkreis hineinrutschen wird, wenn durch große Elongationen und die hierdurch geweckten großen elastischen Kräfte das ganze Gebilde eine gewisse Steifigkeit erhalten hat, und die Knotenlinien entsprechend

1) F. Savart, Ann. de chim. et de phys. (2) 32. S. 384. 1826.
2) A. Elsas, Wied. Ann. 19. S. 474. 1883.
3) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 24. S. 795. 1907.
4) P. Debye, Ann. d. Phys. 25. S. 819. 1908.

fixiert sind. Für kleinere Amplituden wird der wahre Drehpunkt noch näher am Trichterrande liegen. Demgemäß würde einer Vergrößerung der Amplitude wieder eine Verkürzung der Pendellänge und damit vergrößerte Einseitigkeit entsprechen. Zuweilen schien die Membran, wenn sich ihre Amplitude einem bestimmten Maximalwert näherte, fast ruckweise in eine neue Symmetrielage umzuspringen.

Zu den obigen Überlegungen möchte ich noch folgendes bemerken: Sie sind nur entstanden, weil die bisher vorliegenden Theorien über unsymmetrische Schwingungen versagten. Demgemäß sollen und können sie weiter nichts leisten, als daß sie eine zwar anschauliche, aber nur rohe Deutung der hauptsächlichen Beobachtungsresultate zulassen. Wenn die Helmholtzsche Theorie der gestörten Superposition als hierfür ungeeignet abgelehnt wurde, so bezieht sich das nur auf ihre jetzige primitive Form. Dagegen soll nicht behauptet werden, daß, wenn es gelingen sollte, den einen oder anderen Fall unserer Versuchsanordnung theoretisch zu behandeln, hierfür nicht ähnliche Überlegungen zugrunde gelegt werden müßten wie der Helmholtzschen Rechnung.

Ferner möchte ich hervorheben, daß in der vorliegenden Arbeit nur solche Effekte berücksichtigt worden sind, die durch ihre Stärke besonders auffielen. Wenn z. B. gesagt wurde, daß bei Übereinstimmung des P. T. mit dem Grundton der Membran keine Einseitigkeiten auftraten, so soll das nur heißen, daß sie (in fast allen beobachteten Fällen) so gering waren, daß ihre Existenz ohne genaues Ausmessen nicht festzustellen war. Unter der Fülle der beobachteten Erscheinungen fanden sich einige, die auf andere Entstehungsursachen als die durch die Unterteilung der Gummihaut bedingten Vorgänge schließen lassen. Diese Beobachtungen sind aber nicht weiter verfolgt worden und noch nicht genügend geklärt. Hierher gehört auch die Frage der Entstehung von O. T. bei Erregung der Membran durch einen P. T.

§ 5. Erregung der Gummihaut durch zwei Töne.

Wird die Gummihaut jetzt gleichzeitig durch zwei P. T. erregt, deren Schwingungszahlen p und q seien, so entstehen in ihr unter geeigneten Bedingungen neben den den P. T. ent-

sprechenden Schwingungen noch Kombinationsschwingungen, in erster Linie Differenztöne erster Ordnung (D. T. 1. O.), also Töne von der Schwingungszahl $p-q$. Über deren Entstehung können wir uns nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen leicht Rechenschaft geben, ohne daß wir uns noch auf Einzelheiten einlassen. Wählen wir die P. T. so, daß ihre Resultierende periodisch nach $p-q$ ist und ausgesprochene Amplitudenschwankungen enthält, also z. B. $p = 600$ und $q = 500$ bei ungefähr gleichen Amplituden, so wird die Gummihaut zu Schwingungen erregt, welche eine im Tempo $p-q$ in ihrer Größe schwankende Einseitigkeit enthalten. D. h. aber, es entstehen in der Gummihaut neue Töne, die sich in einer Fourierschen Reihe darstellen lassen, deren Grundperiode mit der Periode der „Schwebungen" übereinstimmt. Liegt $p-q$ noch in der Nähe des Grundtones der Gummihaut, so ist infolge von Resonanz ein besonders starker D. T 1. O. zu erwarten, was durch Kurve *a* in Fig. 3 veranschaulicht wird.

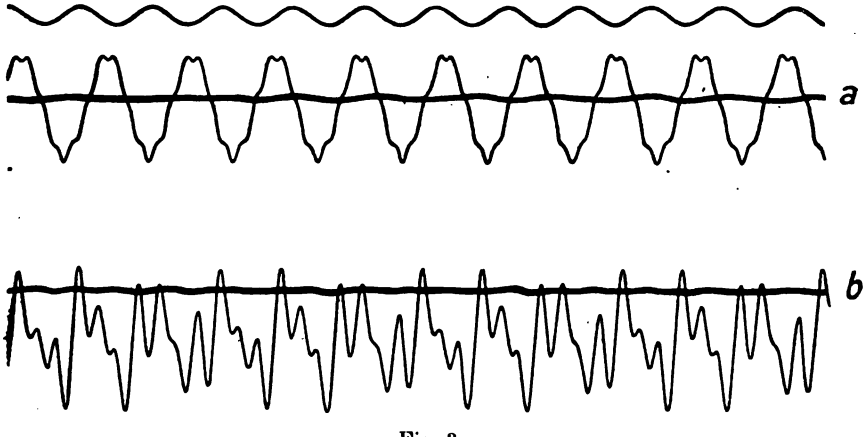
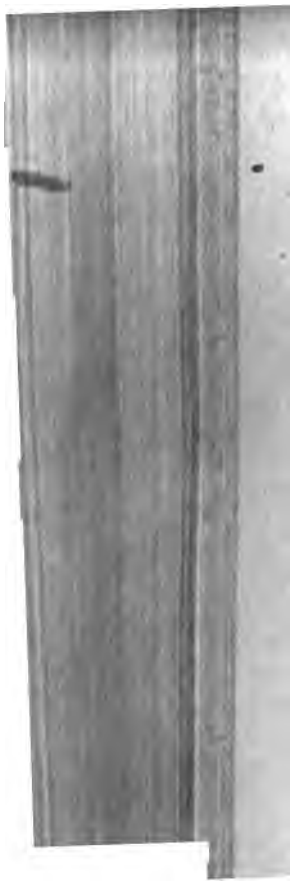


Fig. 3.

Hierin ist $p = 700$, $q = 600$ und n_0 etwa gleich 100. Die Analyse ergibt für die Amplituden von p, q und $p-q$ ein Verhältnis von etwa 0,5 : 1,4 : 13,0. *Also die Amplitude des Störungsgliedes ist etwa 26 bzw. 9 mal so groß als die Amplituden der P. T.!* Die obere Kurve des Bildes *a* der Fig. 3 ist die Schwingungskurve einer Vergleichsgabel.



der D.T. als das Produkt d
infolge des Schwankens der
deutet. Es wäre aber innerl
entwickelten Gedankenganges
auf eine andere Weise zustand
kurve" ist nämlich die „Schw
sondern ändert sich bei vers
tinuierlich vom Maximum zu
der Schwingungsanzahl könn
merkliches Schwanken der Ei
sich, wie in § 4 besprochen, b
P.T.-Höhe die Form der K
mitändert.

Neben dem D.T. 1. O.
bedingungen, insonderheit der
P. T. und der Lage der Eigentö
K.T. mehr oder weniger stark
Form der Resultierenden häng
schwankungen ab, und durch
tensität auf die einzelnen Glied
gegeben. Hat die Resultieren
form, so herrscht das dieser Sc
Glied der Reihe vor, also der
dem die Resonanzverhältnisse
Intervall der P. T. größer, also z.
Minima der Resultierenden ni
sind so werden

In den Kurven der Fig. 4 waren die P. T. p und q der Reihe nach 640 und 400 bzw. 700 und 500 bzw. 700 und 500. Die Grundtöne der Gummihaut waren n_0 = etwa 100 bzw. 220 bzw. 100. In allen drei Kurven der Fig. 4 tritt auch $2q-p$ in merklicher Stärke auf. In den Kurven *a* und *b* ist seine Amplitude etwa halb so groß wie die von $p-q$, die ihrerseits von der gleichen Größenordnung wie die Amplituden von q sind. In Kurve *c* der Fig. 4 ist das P. T.-Intervall das gleiche

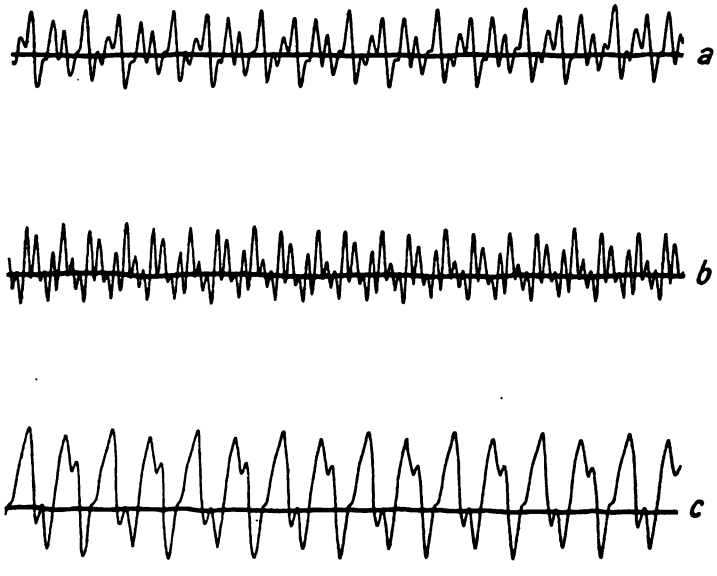
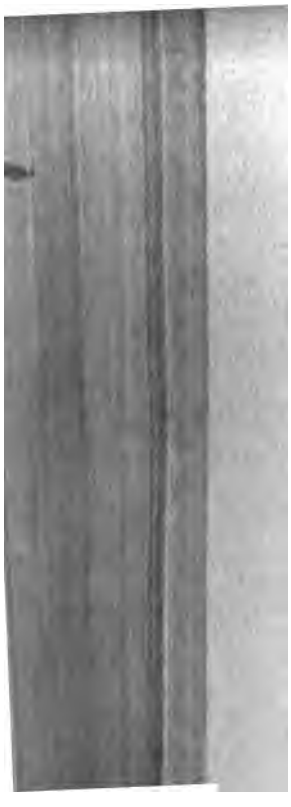
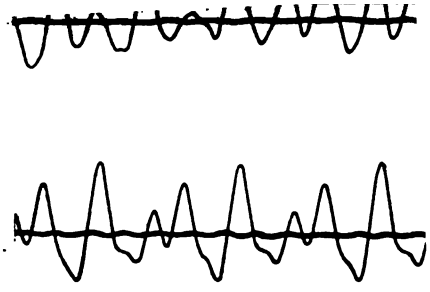


Fig. 4.

wie in *b*, aber die Resonanzverhältnisse sind günstiger gewählt, so daß in *c* sowohl $2q-p$ als auch namentlich $p-q$ relativ zu p und q viel stärker sind als in *b*. Das Amplitudenverhältnis von $p, q, p-q$ und $2q-p$ ist in *c* etwa 3,4 : 4,3 : 12,5 : 3,2.

In den Kurven der Fig. 5 sind zwei K. T. registriert, die bei subjektiver Beobachtung im allgemeinen so leise sind, daß ihre Existenz ernstlich in Zweifel gezogen worden ist. Kurve *a* in Fig. 5 enthält einen sogenannten zwischenliegenden D. T. 1. O., dessen Schwingungszahl zwischen denen der P. T. liegt, und Kurve *b* einen Summationston (S. T.) $p+q$. Die Schwingungs-





Fi

und ich möchte sie vorläufig
Rahmen dieser Arbeit habe ich
überhaupt nur deshalb mitge
falschen Eindruck zu erwecke
Punkte völlig geklärt und weil
objektiv existierenden S. T. au
Frage seines Zustandekommens

§ 6. Beziehungen zur

Die in der vorliegenden Ar
an einseitig stark belasteten G
Rückschlüsse auf die Theorie d
Entstehungsart subjektiver K. T
drängte sich mehr und mehr
Schwingungen des Trommelfelle

entsprechen dürften. Zur Aufklärung der Schwingungsvorgänge bei der Überleitung des Schalles vom Außenraum zum Innenohr müssen aber neben den in der vorliegenden Untersuchung behandelten Fragen auch noch andere Vorgänge berücksichtigt werden. Deshalb möchte ich hier nur andeutungsweise auf die Entstehung der subjektiven K. T. hinweisen, zumal ich demnächst in anderem Zusammenhange ausführlich darauf zurückkomme.

Wenn dem Ohre gleichzeitig zwei P. T. p und q von getrennten Tonquellen zugeleitet werden, so hört man auch unter den günstigsten Bedingungen in großer Stärke nur die K. T. $p-q$ und $2q-p$; alle anderen sind sehr viel schwächer als diese beiden.[1]) Entsprechend gelang es bisher bei den Versuchen mit den Gummihäuten nur in einigen Fällen, andere K. T. als $p-q$ und $2q-p$ in merklicher Stärke hervorzubringen. Dabei ist die Deutung ihres Zustandekommens noch nicht einmal einwandfrei. Ferner ist folgendes zu beachten: Der Gehörleitungsapparat enthält keine Teile, welche in dem mittleren Tongebiet ausgesprochene Resonanz zeigen. Infolgedessen werden die in diesem mittleren Tonbereich liegenden, von bestimmten P. T. erzeugten subjektiven K. T. nicht so stark sein wie die Störungen, welche wir bei den gleichen P. T. an den Gummihäuten erhalten konnten. Andererseits müssen kleine Änderungen der relativen Höhe der P. T. die Störungserscheinungen an den Gummihäuten viel stärker beeinflussen als die Entstehung der subjektiven K. T., durchaus wieder in Übereinstimmung mit den tatsächlichen Verhältnissen. Diese wenigen Hinweise sollen hier genügen.

Zusammenfassung.

Störungen der Superposition erzwungener Schwingungen sind von Helmholtz u. a. aus nichtlinearen Schwingungsgleichungen abgeleitet worden. Solche Störungen werden an einseitig stark belasteten Gummihäuten beobachtet und photographiert. Bei Erregung der Gummihäute durch Einzeltöne wird hauptsächlich eine einseitige Verschiebung der Schwingungen gegenüber der Ruhelage beobachtet, bei Erregung durch zwei

1) Vgl. hierüber C. Stumpf, Zeitschr. f. Psychol. 55. S. 1. 1910.

Primärtöne hauptsächlich die Entstehung von Differenztönen erster und zweiter Ordnung. Die gefundenen Störungen sind außerordentlich groß. Für ihre Erzeugung besonders wichtig ist die passende Wahl der Höhe der Primärtöne relativ zum Grundton der Gummihaut. Bei der Diskussion der Beobachtungsergebnisse im einzelnen zeigt sich, daß die bisher vorliegende Theorie der gestörten Superposition zu ihrer Deutung nicht ausreicht. Infolgedessen werden Überlegungen angestellt, welche, ohne irgendwelchen Anspruch auf Strenge zu machen, ein gutes Bild der Vorgänge geben und sich als Leitfaden für die experimentelle Untersuchung bewährt haben.

Breslau, Physikalisches Institut, Dezember 1919.

(Eingegangen 5. Januar 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

1920. № 13.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Die Versuche von F. Harreß über die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Körpern;* von *O. Knopf.*

Inhaltsverzeichnis. § 1. Das Ziel der Harreßschen Versuche. — § 2. Das Prismenpolygon. — § 3. Der Weg der Strahlenbündel. Versuche zur Sichtbarmachung der Interferenzstreifen. — § 4. Die definitive Form des Interferometers. — § 5. Der Rotationsapparat. — § 6. Versuche zur Erzeugung monochromatischer Interferenzstreifen. — § 7. Das endgültige Meß- und Aufnahmeverfahren. — § 8. Anpassung der Formel für die Streifenverschiebung auf den Fall eines rotierenden Körpers. — § 9. Zusammenstellung der Messungsergebnisse.

§ 1. Das Ziel der Harreßschen Versuche.

In den Jahren 1909—11 machte mein damaliger Assistent, der leider ein Opfer des Krieges gewordene F. Harreß, für seine Promotionsarbeit *„Die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Körpern"* im Keller der Jenaer Universitätssternwarte Versuche zur Bestimmung des Mitführungskoeffizienten des Äthers im Glase. Er hatte hierbei namentlich die Absicht, eine Entscheidung darüber herbeizuführen, welcher der beiden Formeln für den Mitführungskoeffizienten,

ob der Fresnelschen, $\frac{n^2-1}{n^2}$,

oder der Lorentzschen, $\frac{n^2-1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}$,

der Anspruch auf Richtigkeit zukomme.[1])

1) Nach Hrn. Einsteins Bemerkungen in den *Astr. Nachr.* 199. S. 7 und 47 würde in dem bei den Harreßschen Versuchen vorliegendem Fall die Relativitätstheorie für den Mitführungskoeffizienten den Wert $\frac{n^2-1}{n^2}$ verlangen, während Harreß den Lorentzschen Wert ganz allgemein für den aus der Relativitätstheorie sich ergebenden ansah. Dagegen ist $\frac{n^2-1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}$ nach Hrn. Einstein die bei der Fizeauschen Versuchsanordnung in Betracht kommende Formel.

Sein Resultat ist jedoch durch ein Versehen entstellt worden, indem er in seiner Formel für die vom Licht zum Durchlaufen des Körpers gebrauchte Zeit an Stelle von $1 - x$ den Mitführungskoeffizienten x selbst gesetzt hat. Auch finden sich in der Abhandlung einige Rechenfehler und einige, wenn auch ziemlich geringfügige Vernachlässigungen.

Hr. Harzer hat in den *Astronomischen Nachrichten*, Bd. 198, S. 377 die Berichtigung der Harreßschen Arbeit vorgenommen und hierbei zugleich die Behandlung der Beobachtungen auf eine theoretisch sicherere Grundlage gestellt. Er findet als Wert des Mitführungskoeffizienten

	für grünes Licht	für rotes Licht
	0,5802 ± 0,0020 (w. F.)	0,5964 ± 0,0015 (w. F.)

während die Formel

$\frac{n^2 - 1}{n^2}$ liefert 0,5977 0,5952

und die Formel

$\frac{n^2 - 1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}$ liefert 0,6210 0,6120

Infolge ihrer Veröffentlichung als Inauguraldissertation sind die Harreßschen Versuche nicht so in weiteren Kreisen bekannt geworden, wie sie es wohl verdient hätten, zumal bei einer etwaigen Wiederholung der Versuche die Erfahrungen, die Harreß gemacht hat, mit Nutzen verwendet werden können. Ich folge daher gerne einer Anregung von Hrn. v. Laue und gebe im Nachstehenden einen Auszug besonders des experimentellen Teiles der Inauguraldissertation des so früh ums Leben gekommenen, viel versprechenden jungen Gelehrten.

Frühere erfolgreiche Versuche zur Bestimmung des Mitführungskoeffizienten rühren von Fizeau[1]) und von Michelson[2]) und Morley[3]) her. Als bewegten Körper benutzten sie Wasser, welches bei ersterem durch eine Röhre von 1,49 m Länge und und 5,3 mm lichter Weite mit 7,069 m/sec Geschwindigkeit und bei den letzteren zwei durch eine Röhre von 3—6 m Länge

1) H. Fizeau, Compt. rend. 33. S. 349. 1851. Pogg. Ann. Erg. 3. S. 457. 1853. Ann. Chim. Phys. (3) 57. S. 385. 1859.

2) A. A. Michelson, Am. Journ. of Sc. (3) 22. S. 120. 1881.

3) A. A. Michelson u. E. W. Morley, Am. Journ. of Sc. (3) 31. S. 377. 1886.

und 28 mm Weite mit 8,72 m/sec Geschwindigkeit floß. Aus Fizeaus Versuchen ergibt sich der Mitführungskoeffizient zu 0,46, Michelson und Morley fanden 0,434, während die theoretischen Werte für Wasser sind

$$1 - \frac{1}{n^2} = 0{,}438$$

und

$$1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda} = 0{,}451\,.$$

In neuerer Zeit sind auch von Hrn. Zeeman Versuche angestellt worden, welche ein befriedigendes Resultat ergeben haben sollen.

Da die Werte des Mitführungskoeffizienten nach der Fresnelschen und der Lorentzschen Formel für Wasser etwas zu nahe beieinander liegen, als daß mit Sicherheit durch den Versuch entschieden werden könnte, welcher Formel der Vorzug einzuräumen sei, verwandte Harreß als bewegten Körper Glas und zwar ein schweres Barium-Silikat-Kron, Typ O 211 der Firma Schott und Genossen, für welches folgende Werte galten:

$$n_D = 1{,}57335$$

$$\Delta = \text{Dispersion von } C \text{ bis } F = 0{,}00998$$

$$\text{Dispersion von } D \text{ bis } F = 0{,}00705$$

$$\nu = \frac{n-1}{\Delta} = 57{,}5$$

$$\text{spez. Gewicht} = 3{,}21\,.$$

Für das von Harreß benutzte grüne Licht betrug nach Hrn. Harzers Rechnung, wie schon angegeben,

$$1 - \frac{1}{n^2} = 0{,}5977 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda} = 0{,}6210\,,$$

während für rotes Licht sich die beiden Werte 0,5952 und 0,6120 ergaben.

Bei den Versuchen zur Bestimmung des Mitführungskoeffizienten wird der letztere aus der Verschiebung eines Interferenzbildes erhalten und zwar lautet die Formel, welche den Zusammenhang zwischen der zu beobachtenden, in Streifenbreiten ausgedrückten Verschiebung Δ der Interferenzstreifen und dem Mitführungskoeffizienten x angibt,

$$\Delta = \frac{2 l q n^2 (1 - x)}{\lambda c},$$

wo c die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raum, q die Geschwindigkeit des bewegten Körpers, n der Brechungsindex der Substanz, l die Länge des im bewegten Körper vom Lichtstrahl zurückgelegten Weges und λ die für den leeren Raum geltende Wellenlänge des bei dem Versuch angewandten Lichtes ist.

Setzt man der Fresnelschen Theorie gemäß $x = 1 - 1/n^2$, so ergibt sich

$$\Delta = \frac{2 l q}{\lambda c}.$$

Nach der Fresnelschen Theorie ist daher die Streifenverschiebung von der Substanz des bewegten Körpers ganz unabhängig, während die Einführung des Lorentzschen Wertes des Mitführungskoeffizienten in die Formel für Δ die Streifenverschiebung von der Substanz des bewegten Körpers in wenn auch nur geringem Maße abhängig zeigt.

Sollte die Streifenverschiebung einen nicht zu geringen Betrag erhalten, so mußte schon die Länge des vom Lichtstrahl durchlaufenen Weges zu etwa 1 m und die Geschwindigkeit q des bewegten Körpers zu etwa 10 m genommen werden: dann wird $\Delta = \frac{r l q}{\lambda c} = 0{,}11$ Streifenbreiten.

§ 2. Das Prismenpolygon.

Die Form, welche Harreß, von Hrn. Straubels Rat unterstützt, für den Glaskörper wählte, war die eines aus Prismen zusammengesetzten Polygons, wie sie Fig. 1 zeigt. Das Licht wird von der Achse aus in den rotierenden Prismenkranz geworfen, durchläuft ihn unter Reflexion an den äußeren Prismenflächen, das eine Bündel in dieser, das andere in der entgegengesetzten Richtung, und tritt nach der Achse zu aus dem Prismenkranz wieder aus. Wird den beiden Bündeln vor ihrem Eintritt in das Polygon eine Phasendifferenz erteilt, so liefern sie nach ihrem Austritt ein Interferenzbild, welches bei Rotation des Polygons eine Verschiebung erleidet.

Die unentgeltliche Herstellung des kostspieligen optischen und mechanischen Apparates übernahm auf Hrn. Straubels Veranlassung bereitwilligst die Firma Carl Zeiss.

Auf Grund einer Durchrechnung von Polygonen mit 6—16 Seiten fand Harreß, daß sich bei 10 Reflexionen das günstigste Verhältnis zwischen der Länge des Lichtweges, der

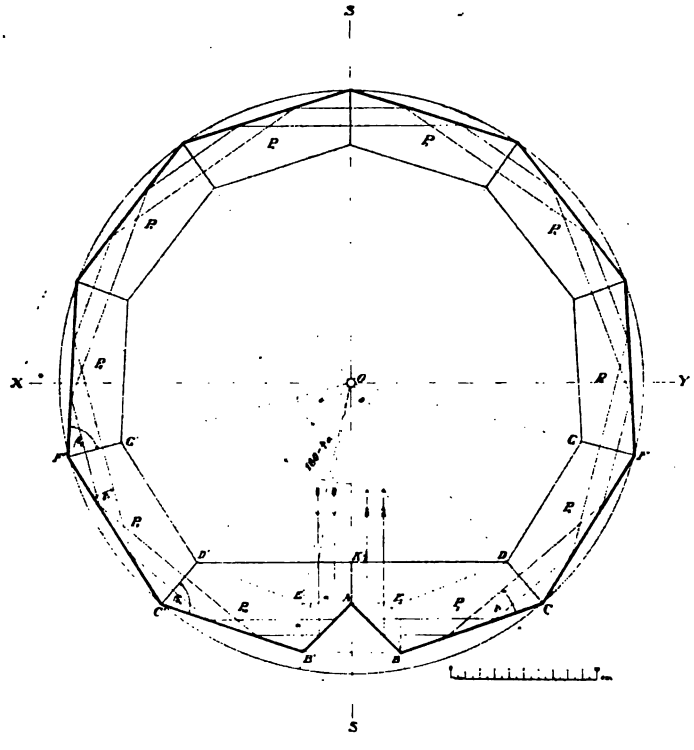


Fig. 1.

Zahl der Reflexionen und der Größe der Reflexionswinkel erreichen ließ, weshalb denn ein 10-seitiges Polygon für den Prismenkranz festgesetzt wurde.

Von den 10 hierzu benötigten Prismen konnten 8 (P_2 bis P_9) von vornherein als gleich angenommen werden, während zwei Körper, P_1 und P_{10}, eine andere Form erhalten mußten, um den Ein- und Austritt des Lichtes zu ermöglichen.

Mit dieser Festsetzung war die Gestalt der Prismen, abgesehen von ihrer Höhe, vollständig bestimmt.

In Fig. 1 mögen folgende Bezeichnungen gelten:

(1) Winkel $COF = C'OF' = \alpha$ (Zentriwinkel eines der 8 gleichen Prismen P_2 bis P_9).

(2) $AE = AE' = EB = DC = \ldots = a$.

(3) $EC = E'C' = b$.

(4) $OC = r$ (Radius des dem Polygon umschriebenen Kreises).

(5) $CF = s_1$ (Länge der Seite eines der 8 gleichen Prismen).

(6) $CB = s_2$ (Länge der Seiten der beiden Prismen P_1 und P_{10}).

Dann ist:

(7) $$\sphericalangle SOC = SOC' = 180^0 - 4\alpha.$$

Für die Größen a, b und r lassen sich sehr einfach folgende Beziehungen finden:

(8) $$\begin{cases} a = b \cdot \operatorname{cotg} 2\alpha, \\ b = r \cdot \sin 4\alpha - a, \\ r = \dfrac{a}{2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}. \end{cases}$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich α durch die Formel:

(9) $$\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 + \operatorname{tg} 2\alpha)}{\sin 4\alpha} - \frac{1}{2} = 0.$$

Diese Beziehung ist vollkommen unabhängig vom Radius des umschriebenen Kreises und stellt die Bedingungsgleichung für das gesuchte Polygon dar. Ist aus dieser Gleichung der Winkel α gefunden, so lassen sich dann bei gegebenem Radius r alle Bestimmungsstücke der Prismen berechnen nach den einfachen Formeln:

(10) $$\begin{cases} a = 2r \cdot \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}, \\ s_1 = 2r \cdot \sin \dfrac{\alpha}{2}, \\ s_2 = \dfrac{a}{\cos 2\alpha}. \end{cases}$$

Die numerische Auswertung der Bedingungsgleichung (9) ergibt als einzig mögliche Lösung für α den Wert:

$$\alpha = 34^0\ 45'\ 17''{\cdot}5.$$

Der Radius des umschriebenen Kreises wurde zu

$$r = 200 \text{ mm}$$ festgesetzt.

Werden die Dicken der Prismen P_2 bis P_9 mit d, die von P_1 und P_{10} mit d_2 bezeichnet, und nennt man die Winkel, unter welchen die Seitenflächen gegen die Reflexionsflächen geneigt sind, β_1 und β_2, so ergeben sich folgende Größenverhältnisse für die Glaskörper:

In allen Prismen ist: $a = 35{,}68$ mm.

8 Prismen: P_2 bis P_9	$s_1 = 119{,}47$ mm $d_1 = 34{,}05$ mm $\beta_1 = 72^0\,37'\,21{,}2''$.
2 Prismen: P_1 und P_{10}	$s_2 = 101{,}93$ mm $d_2 = 33{,}42$ mm $\beta_2 = 69^0\,30'\,35''$.

Die Austrittsflächen wurden quadratisch gewählt, so daß die Prismenhöhe in allen Fällen

$h = 35{,}68$ mm betrug.

Die beiden Glaskörper ABE und $AB'E'$ sind rechtwinklige Reflexionsprismen mit der Kantenlänge a. Sie wurden mit den beiden Prismen P_1 und P_{10} zu je einem Stück vereinigt. Um aber dabei die schwer zu bearbeitenden, einspringenden Ecken bei E und E' zu vermeiden, erhielten die beiden Körper die Form $ABCDK$ bezüglich $AB'C'D'K'$. Der dadurch entstehende Massenüberschuß auf einer Seite der Rotationsachse wurde später durch ein entsprechendes Stahlstück auf der entgegengesetzten Seite der Achse ausgeglichen.

Die Reflexionswinkel für symmetrisch durchgehende Strahlen betragen:

in P_2 bis P_9	$\gamma_1 = 17^0\,22'\,38{,}8''$.
und in P_1 und P_{10}	$\gamma_2 = 20^0\,29'\,25''$.

Alle Reflexionen im Glaskörper sind also Totalreflexionen und alle Eintrittsflächen der Prismen werden vom Licht senkrecht durchsetzt. Der Prismenkranz ist symmetrisch zur Geraden PS, aber nicht zu der dazu Senkrechten XY.

Die Länge des Lichtweges im Glase ist gegeben durch die Formel:

$$(11)\quad \begin{cases} l = 8\,s_1 \sin\beta_1 + 2\,s_2 \sin\beta_2 + 2\,a + 2\,a\cos(180^0 - 4\,\alpha) \\ l = 1228{,}4 \text{ mm}. \end{cases}$$

Dieser Weg ist für alle Strahlen, welche dem Mittelstrahl parallel verlaufen, genau gleich lang.

Über den zu erwartenden Lichtverlust kann folgende Überschlagsrechnung einen Anhalt geben.

In dem Prismenpolygon findet ein zehnmaliger Eintritt und ein zehnmaliger Austritt von Luft in Glas und umgekehrt statt. Der infolge der Reflexion auftretende Lichtverlust ist in beiden Fällen gleich groß und zwar bei senkrechter Inzidenz in alle Flächen nach Fresnel gleich

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

so daß beim ersten Übergang von einem Mittel ins andere der Strahl geschwächt wird von der Intensität 1 auf

$$R_1 = 1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = 0{,}955.$$

Beim Austritt aus dem Polygon, nach 20 Übergängen von einem Mittel ins andere, ist die Intensität des Strahles durch die Reflexion geschwächt auf

$$R_{20} = R_1^{20} = 0{,}399.$$

Zur Bestimmung des Lichtverlustes in der Glasmasse durch Absorption sei das diesbezügliche Resultat H. C. Vogels[1] für das Jenaer Kron O 202 benutzt, der Schmelze, aus welcher das Objektiv des großen Refraktors des Potsdamer Astrophysikalischen Observatoriums hergestellt wurde. Vogel fand für eine Glasdicke von 10 cm und die Wellenlänge $\lambda = 580\ \mu\mu$ den Durchlässigkeitsfaktor dieses sehr durchlässigen Glases zu

$$A = 0{,}872.$$

Unter Annahme dieses Wertes ist die Intensität des Lichtes nach Zurücklegung eines Weges von 1228 mm gleich

$$A_{12{,}28} = 0{,}872^{12{,}28} = 0{,}186.$$

Demnach würde die Intensität des aus dem Prismenpolygon austretenden Lichtes, wenn man diejenige des eintretenden gleich Eins setzt, betragen

$$J_a = A_{12{,}28} \cdot R_{20} = 0{,}074.$$

Nimmt man jedoch an, daß die Ausführung und Justierung der Prismen vollkommen exakt wäre, so würde durch Reflexions-

1) H. C. Vogel, Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. 1896. S. 1219.

verlust die Intensität nur auf $R_2 = 0{,}912$ erniedrigt werden, weil zwischen den einzelnen Prismen keine Luftkeile vorhanden wären, und es würde

$$J_a = 0{,}17.$$

Über die wirkliche Lagerung der Einzelprismen konnte aber natürlich keine genaue Angabe gemacht werden, so daß man sich mit einer Schätzung von J_a zu etwa 12 Proz. der ursprünglichen Lichtintensität begnügen muß.

§ 3. Der Weg der Strahlenbündel. Versuche zur Sichtbarmachung der Interferenzstreifen.

Für alle Interferenzanordnungen, bei denen zwei kohärente Lichtbündel einen beliebig langen Weg entgegengesetzt durchlaufen sollen, hat sich das Prinzip des Michelsonschen Interferometers[1]) als sehr geeignet erwiesen, und es wurde daher auch für die vorliegende Untersuchung in etwas modifizierter Weise verwandt. An Stelle einer Planparallelplatte zur Trennung des einfallenden Lichtbündels in zwei gleich helle, kohärente Teile wurde ein zerschnittener Würfel $A\,C\,B\,D$, dessen Schnittfläche $A\,B$ halbdurchlässig versilbert war, benutzt. In Fig. 2 ist das Prismenpolygon der Einfachheit halber fortgelassen und durch zwei rechtwinklig zueinander stehende Spiegel S_1 und S_2 ersetzt, welche in ähnlicher Weise wirken. Darin bedeutet L die punktförmige Lichtquelle, deren Strahlen, durch das Collimatorobjektiv O_1 parallel gemacht, senkrecht in die Würfelfläche $A\,D$ eintreten. In der Schnittebene wird das einfallende Licht in zwei gleich helle Teilbündel zerlegt, von denen das eine den Würfel durchdringt, während das andere senkrecht nach unten reflektiert wird. Durch das Spiegelpaar wird dieses Bündel zweimal geknickt und tritt hierauf in das Prisma R, welches es in den Würfel zurückwirft. Die Fläche $A\,B$ läßt sodann das Licht durch die Würfelfläche $A\,C$ nach oben austreten, wobei infolge der Halbdurchlässigkeit von $A\,B$ wieder die Hälfte der Intensität verloren geht. Das zweite Lichtbündel nimmt den entgegengesetzten Weg und wird bei seinen zwei

1) A. A. Michelson: Phil. Mag. (5) 13. S. 237. 1882. Am. Journ. of Sc. (3) 39. S. 115. 1890; s. auch: Light waves and their uses. Chicago 1903. Détermination expérimentale de la valeur du mètre etc. Mém. du Bureau internat. des poids et mesures, t. XI. Paris 1894.

Durchgängen durch AB entsprechend geschwächt. Während Michelson zur Justierung seines Interferometers die Fläche AB beweglich angeordnet hat, wurde hier aus technischen Gründen

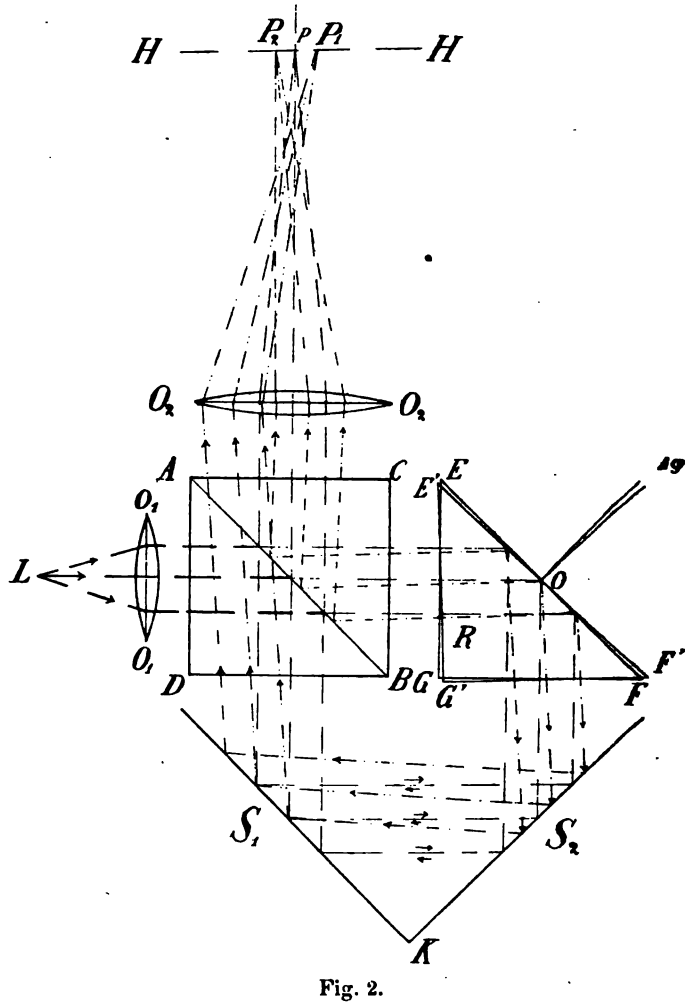


Fig. 2.

das Reflexionsprisma R um den Punkt O nach allen Seiten drehbar gemacht. In der Figur liegt O in der Reflexionsfläche, in Wirklichkeit lag der Punkt ca. 10 mm dahinter. Durch eine Drehung von R werden gleichzeitig beide Strahlenbündel

beeinflußt, während eine Bewegung der Fläche AB nur die Richtung des daran reflektierten Bündels ändert.

Sind nun die optischen Teile so justiert, daß die Flächen AB und EF einander und auch der Schnittkante K der Spiegel S_1 und S_2 parallel sind, so durchlaufen beide Teilbündel vollkommen gleich lange und entgegengesetzte Lichtwege und treten einander parallel nach oben aus dem Würfel aus. In der Brennebene HH des darüber stehenden Objektives O_2 entsteht dann von der Lichtquelle L der Bildpunkt P. Die beiden Strahlenbündel kommen jedoch hier nicht mit der gleichen Phase an, da der eine Teil die durchlässige Silberschicht zweimal durchdringen muß, während der andere ebenso oft an ihr reflektiert wird. Es entsteht so ein konstanter, von der Dicke der Silberschicht allein abhängiger Phasenunterschied zwischen beiden Bündeln. Dreht man nun das Prisma R aus seiner Lage EFG um den Winkel $\Delta\varphi$ in die Lage $E'F'G'$, so werden dadurch beide Teilbündel um $2\,\Delta\varphi$ nach entgegengesetzten Seiten von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt. Der Bildpunkt P teilt sich daher in zwei schwächere Punkte P_1 und P_2, welche nach verschiedenen Seiten von P wandern.[1]) Die Lichtwege beider Strahlenbündel werden mit der Drehung von R verschieden lang. Die zwei Bilder P_1 und P_2 von L schwingen aber ständig mit konstanter Phasendifferenz, so daß sie zur Entstehung von Interferenzen Veranlassung geben können.

Bei der ersten Versuchsanordnung waren der Glaswürfel W und das Reflexionsprisma R (Fig. 3) senkrecht über dem horizontal rotierenden Prismenkranz so aufgestellt, daß sie symmetrisch zur Rotationsachse standen und an der Rotation nicht mit teilnahmen. Beide Glaskörper hatten eine gemeinsame Fassung erhalten, welche gestattete, das Prisma R in einem gewissen Bereiche nach allen Seiten mikrometrisch zu verdrehen. Bei horizontalem Lichteinfall wurden also durch diese Vorrichtung zwei kohärente Lichtbündel senkrecht nach unten reflektiert, wobei der gegenseitige Abstand je zweier sich entsprechender Strahlen gleich einer Würfelkante war. Die beiden

1) Der Punkt P_1, in welchem die Strahlen konvergieren, die die Schnittfläche AB zweimal durchdrungen haben, müßte in Fig. 2 auf der linken Seite von P, dagegen P_2 auf der rechten Seite liegen.

Reflexionsprismen R_1 und R_2, welche symmetrisch zur Rotationsachse fest mit dem beweglichen Apparat verbunden waren, hatten eine solche Lage, daß die beiden Lichtbündel um 90° geknickt wurden, worauf sie das Prismenpolygon in entgegengesetzter Richtung durchliefen. In der durch Fig. 3 dargestellten Lage des rotierenden Teiles war der Lichtweg beider Bündel folgender:

1. reflektiertes Bündel: L, W (Reflexion), R_1, P_1, $P_2 \ldots P_9$, P_{10}, R_2, R, W (Reflexion), L';
2. durchgehendes Bündel: L, W, R, R_2, P_{10}, P_9, $\ldots P_2$, P_1, R_1, W, L'.

Die zwei Bündel durchliefen also denselben Weg, aber in entgegengesetzter Richtung. Aus Fig. 1 ist ersichtlich, daß bei parallelem Einfall der beiden Bündel in den Prismenkranz die beiden Lichtwege wohl immer parallel und gleich lang, aber nicht miteinander identisch sind. Dadurch werden allerdings die entstehenden Interferenzstreifen gegen Temperaturschwankungen und Dichteänderungen im Glaskörper empfindlich. Vollkommene Identität der Lichtwege hätte wohl theoretisch erzielt werden können durch die Wahl einer ungeraden Anzahl von Reflexionen im Prismenkranz. Da aber auch hier dieser Vorzug bei einer kleinen Abweichung der Prismen von ihrer berechneten Form oder einem Justierfehler im Polygon verloren gegangen wäre, so wurde von vornherein darauf verzichtet. Setzt man selbst theoretisch fehlerfreie Einzelprismen voraus, so wäre eine etwaige exakte Justierung des ganzen Polygons bei den starken Zugkräften, welche bei schneller Rotation auftreten mußten, auf längere Zeit nie aufrecht zu erhalten gewesen.

Nach dem Einsetzen der Prismen in ihre gemeinsame Fassung wurde das ganze Polygon mit Hilfe eines Autokollimationsfernrohres so justiert, daß ein auf der einen Seite senkrecht eintretendes Bündel wieder parallel zu sich austrat. Hiernach wurde der Prismenbehälter mit einer Stahlscheibe fest verschraubt, womit eine starke Pressung der Prismen auf ihre Unterlage verbunden war. War das Einlegen der Glaskörper und deren Justierung genügend sorgfältig vorgenommen worden, so trat mit der Verschraubung des Stahlstückes keine Änderung in der Justierung ein. Ließ man jedoch jetzt die

Maschine längere Zeit mit etwa 1500—2000 Touren pro Minute laufen, so zeigte sich, daß zunächst eine geringe Verlagerung der Prismen eintrat, die aber später völlig konstant blieb. Der hierdurch entstandene Fehler im Polygon wurde dann durch eine Nachjustierung des Prismas R kompensiert.

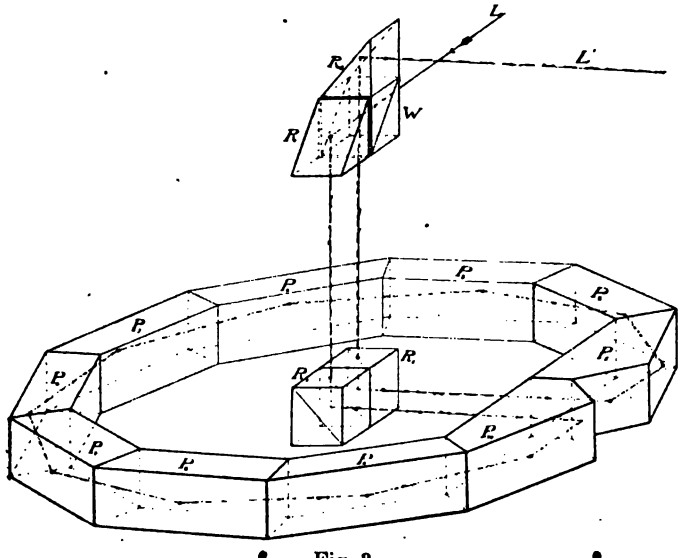


Fig. 8.

Bei den ersten Versuchen diente eine Siedentopfsche Quecksilberbogenlampe[1]) als Lichtquelle, welche bei Verwendung von Kaliumbichromatlösung in einer Didymglasküvette als Filter sehr gut monochromatisches Licht lieferte. Eine an der Lampe befestigte Beleuchtungslinse gab schon hinreichend paralleles Licht, so daß ein Kollimator entbehrt werden konnte.

Die Justierung des optischen Apparates wurde zunächst bei Beobachtung mit bloßem Auge so weit gebracht, daß die beiden Lichtbündel annähernd parallel austraten. In dem Fernrohr bei L' (in der Figur fortgelassen) sah man dann zwei gleichhelle, grüne Lichtscheibchen, die beiden Kraterbilder der Hg-Lampe. Bei langsamer Drehung des Prismas R be-

1) Zeitschr. f. Instrumentenkunde 24. S. 22. 1904.

wegten sich die Bilder entgegengesetzt zueinander und verschwanden wegen der kleinen Öffnung des ganzen Apparates schon bei kleinen Verschiebungen von *R* aus dem Gesichtsfeld. Der Parallelismus der austretenden Bündel war erreicht, wenn die Kraterbildchen genau koinzidierten. In diesem Falle traten in dem auf unendlich eingestellten Fernrohr sofort scharfe Interferenzstreifen auf. Kurz vor und nach dem Eintreten der Koinzidenz beider Kraterbildchen konnten noch Systeme von Interferenzstreifen beobachtet werden, welche aber nicht in der Brennebene des Fernrohrobjektives entstanden, sondern wesentlich dahinter lagen. Diese Streifen wurden bei den späteren Untersuchungen fast ausschließlich benutzt, da sie schärfer als das erste System erschienen und auch leichter zu erhalten und in Form und Lage zu ändern waren. Richtung und Breite der Streifen konnte beliebig variiert werden durch Verdrehung des Prismas *R*. Waren sie ziemlich eng, so erschienen sie völlig geradlinig, bei großer Streifenbreite jedoch trat eine ausgeprägt hyperbolische Form der Streifen auf. Außer diesen beschriebenen Interferenzbildern konnte noch eine ganze Anzahl von Streifensystemen gesehen werden, wenn der Okularauszug des Fernrohres langsam vor und zurück geschoben wurde. Bei diesen Interferenzen waren die Breite und Richtung der Streifen ganz verschieden und unabhängig von der Justierung des Prismas *R*. Ihr Ursprung war in den kleinen Luftkeilen zwischen den einzelnen Prismen des Polygons zu suchen.

Die besprochene Justierung gelang nur dann, wenn der rotierende Teil die in der Fig. 3 gezeichnete Lage genau inne hatte oder um 180° dazu verdreht war. Drehte man den Prismenkranz auch nur um Bruchteile eines Grades aus dieser Lage heraus, so änderte sich die gegenseitige Lage der beiden Kraterbildchen und das Streifensystem drehte sich um fast 90°. Aus diesem Grunde war also die Versuchseinrichtung so zu treffen, daß bei Rotation der Maschine nur ganz kurze Lichtblitze den Apparat in dem Augenblick durchlaufen mußten, in welchem der rotierende Teil sich genau in einer der beiden angegebenen Stellungen befand. Daher wurde zuerst eine Stahlscheibe von ca. 55 cm Durchmesser auf die Rotationsachse aufgesetzt und exakt zentriert. An zwei diametral gegenüber-

liegenden Stellen dieser Scheibe, die zugleich als Deckel für den Prismenbehälter diente, wurde sie mit zwei ganz engen Blenden versehen, welche in einem kleinen Bereiche verschiebbar angeordnet waren, um sie genau in die richtige Lage bringen zu können. Das Licht, durch eine Sammellinse zu einem Punkte in der Blendenebene konzentriert, wurde von unten durch die Blendenöffnungen senkrecht nach oben gesandt, dann wieder parallel gemacht und horizontal in den Apparat reflektiert. Die Versuche zeigten aber, daß hierbei die Öffnungen der Blenden sehr klein sein mußten, um eine genügende Bildruhe bei rotierendem Apparat zu erzielen. Damit war aber eine sehr erhebliche Lichtschwächung verbunden, so daß schon bei ganz niedrigen Tourenzahlen (ca. 100 pro Minute) die Bildhelligkeit so gering wurde, daß die Interferenzstreifen nicht mehr erkannt werden konnten. Da das Interferenzbild auch in weißem Licht sichtbar blieb, wurde die Hg-Lampe durch eine Gleichstrombogenlampe ersetzt, jedoch mit demselben negativen Resultat.

Um nun diese Blenden ganz entbehren zu können und eine größere Lichthelligkeit zu erzielen, kam bei derselben Anordnung die Beleuchtung mit Hilfe elektrischer Entladungsfunken in Frage. Wenn es gelang, starke elektrische Funken so zu erzeugen, daß sie entweder synchron mit der Tourenzahl der Maschine oder auch in einem rationalen Verhältnis dazu auftraten, so mußte immer bei einer ganz bestimmten Stellung des Prismenkranzes nach einem oder mehreren Umläufen ein Funke auftreten. Da bei der sehr kurzen Dauer der elektrischen Entladungen die Eigenbewegung der Maschine während dieser nicht in Frage kam, so mußten dann die Interferenzen in gleichen Zeitintervallen aufblitzen und völlig unbeweglich erscheinen.

Für diese Versuche wurde ein 40 cm Funkeninduktor benutzt, welcher mit Elektroden aus Kadmium oder Zink äußerst helles und auch für den vorliegenden Zweck sehr geeignetes Licht lieferte. Zunächst wurde mit einem gewöhnlichen Hammer- und Quecksilberunterbrecher versucht, ein rationales Verhältnis zwischen Funkenfolge und Tourenzahl herzustellen. Das Experiment lehrte jedoch, daß ein derartiges Zusammenarbeiten beider Apparate nur für sehr kurze Zeit aufrecht erhalten

werden konnte. Das Streifensystem blitzte dann in regelmäßigen Zwischenräumen auf und erschien unbeweglich. Aber schon bei der kleinsten Störung im Gang eines Apparates begannen die Streifen unruhig zu werden und zuckten schließlich ganz unregelmäßig hin und her. Deshalb wurde direkt auf die Achse des rotierenden Teiles eine Unterbrecherscheibe aufgesetzt, um Synchronismus zwischen der Zahl der Funken und den Umdrehungen zu erhalten. Das Eintreten dieses Zustandes war schon äußerlich dadurch zu erkennen, daß dann die laufende Maschine vollkommen still zu stehen schien, wenn sie bei verdunkeltem Zimmer mit dem Funkenlicht beleuchtet wurde, während sie bei irgendeiner Unregelmäßigkeit in der Unterbrechung scheinbar den Sinn ihrer Drehung ständig wechselte. Die Bildunruhe war jetzt sehr stark verringert, so daß zeitweise die Streifen fast eine halbe Minute lang unbeweglich erschienen. Dann aber trat auch hier das oben beschriebene Zucken der Streifen auf und war bei Schwankungen in der Tourenzahl des Antriebsmotors besonders stark. Ein absolut sicheres Arbeiten des Unterbrechers war auch bei dessen sorgfältigster Reinhaltung nie zu erzielen, so daß auch diese Versuche ohne nennenswerten Erfolg blieben.

§ 4. Die definitive Form des Interferometers.

Um die bei der ersten Anordnung des optischen Apparates aufgetretene Bildunruhe unschädlich zu machen, wurde jetzt der Glaswürfel W samt dem Reflexionsprisma R mit dem rotierenden Teile fest verbunden, so daß sie an der Rotation desselben teilnahmen. (Fig. 4.) Da bei großen Umlaufsgeschwindigkeiten zu befürchten war, daß sich infolge der auftretenden sehr starken radialen Zugkräfte die empfindliche Justierung dieser Prismen ändern würde, so wurden die vier Glaskörper W, R, R_1, R_2 zu einem einzigen, soliden Stück vereinigt und in einer sehr starken Rotgußfassung auf die Rotationsachse der Maschine verschraubt. Zur Justierung dieses Mittelstückes war vorgesehen, daß es etwas gedreht und nach allen Seiten gekippt werden konnte.

Bei den vorausgegangenen Versuchen hatten sich ferner die Reflexionsbilder, welche von den Ein- und Austrittsflächen der einzelnen Prismen herrührten, als sehr störend erwiesen,

weshalb bei der neuen Anordnung alle in Frage kommenden Flächen so abgeschrägt wurden, daß die Reflexionsbilder aus dem Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohres herausfallen mußten. Das Mittelstück bekam deshalb die in Fig. 4 gezeichnete Form, wobei der Deutlichkeit halber alle mechanischen Teile fortgelassen sind. Der Winkel, um welchen alle Flächen abgeschrägt wurden, betrug ca. 6°. Der ganze Glaskörper bestand also aus den Einzelteilen *A B C*, *A C D E*, *C D F G* und *L M N*, welche Trennung zur möglichst leichten technischen

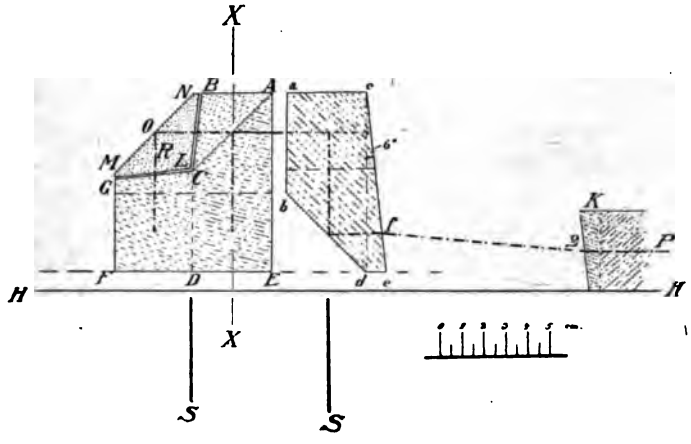


Fig. 4.

Herstellung der Stücke gewählt worden war. Die drei ersten Glaskörper wurden durch Zusammenkitten zu einem einzigen Stück vereinigt, welches die halbdurchlässige Silberschicht bei *A C* enthielt. Der einzige bewegliche Teil war das Reflexionsprisma *R*, dessen Winkel bei *M* und *N* 39° betrugen. *R* war drehbar um einen Punkt, der ca. 10 mm hinter der reflektierenden Fläche bei *O* lag, angeordnet, wobei die Justierung und Klemmung durch fünf Mikrometerschrauben erfolgen konnte.

Um den Strahlengang zwischen Mittelstück und Prismenpolygon sichtbar zu machen, ist in Fig. 4 rechts noch ein Schnitt durch den Körper bei *X X* um 90° gedreht gezeichnet.

Durch die Brechung in dem Glaskeile *c d e* mit der Kante in *c* verlief das Licht auf dem Luftwege *f g* schräg nach unten und wurde dann durch die entsprechenden Keile *K*, welche

mit den Kanten nach unten auf die Eintrittsstelle des Prismenpolygons gekittet waren, wieder horizontal gemacht. Um die volle Öffnung des Apparates ausnützen zu können, mußte das Mittelstück um einige Millimeter über der Fläche $H\,\bar{H}$, auf welcher der Prismenkranz ruhte, erhöht angeordnet werden. Die Richtung und Lage der Rotationsachse des Apparates ist in Fig. 4 durch die Striche S bezeichnet.

Der Justiervorgang war bei dieser Anordnung naturgemäß genau derselbe wie vorher. Schon die ersten Versuche zeigten, daß jetzt die Verdrehung des Streifensystems in der oben beschriebenen Art verschwunden war. Die Interferenzen waren jetzt auch bei kontinuierlichem Lichte selbst bei Tourenzahlen von 1500 und mehr Umdrehungen pro Minute sichtbar Als Lichtquelle wurde von nun ab ausschließlich eine 20 Amp. Gleichstrombogenlampe angewandt. Für Justierzwecke war die Siedentopfsche Hg-Lampe wohl noch sehr gut zu verwenden, bei rotierendem Apparat erwies sie sich jedoch auch bei voller Öffnung der Prismen als viel zu lichtschwach.

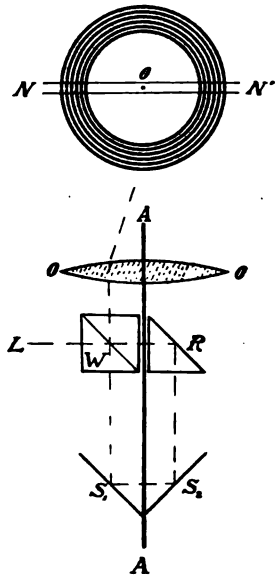


Fig. 5.

Zum Verständnis der Lagenänderung des Streifensystems bei einer Drehung des Prismenpolygons diene Fig. 5, in welcher das Prismenpolygon wieder durch die beiden rechtwinklig zueinander stehenden Spiegel S_1 und S_2 ersetzt ist. Die Rotationsachse des Apparates sei $A\,A$. Zunächst soll angenommen werden, daß der ganze optische Apparat nebst Bogenlampe und Objektiv O sich als Ganzes drehe. Dann ist ohne weiteres klar, daß sich für einen ruhenden Beobachter das von O entworfene reelle Streifensystem synchron mit der Maschine um die Achse $A\,A$ in einem Kreise drehen muß. Der Radius dieses Kreises ist bestimmt durch den scheinbaren Abstand der Interferenzstreifen von der Achse und durch die Lage und Brennweite des Objektives O. Sieht man jetzt das Objektiv

als ruhend an, so wird an der Erscheinung nichts geändert, denn die Strahlen durchdringen dann bei einer Umdrehung des Apparates verschiedene Teile desselben, was aber bei richtiger Justierung für den Bildort keine Änderung bedingt. Stehen die Interferenzstreifen senkrecht auf dem Radius des Kreises und sind sie genügend kurz, so muß also der Beobachter im ruhenden Fernrohr ein System von konzentrischen Kreisen bei Rotation der Maschine sehen (in der Fig. 5 um 90° gekippt gezeichnet). Große Streifenlänge und eine andere Orientierung derselben wird die Erscheinung verwaschen oder gar nicht erkennen lassen.

Nimmt man jetzt auch die Lichtquelle als ruhend an, so wird nur dann Licht zum Beobachter gelangen können, wenn der Prismenkranz die in der Figur gezeichnete Lage inne hat. Dreht man nun den Apparat um einen ganz kleinen Winkel aus dieser theoretischen Stellung heraus, so wird das einfallende Lichtbündel sehr stark zur Seite abgelenkt und damit bei der geringen Öffnung der Prismen ein großer Teil abgeblendet. Gleichzeitig bewegt sich aber auch das Bild der Interferenzen um eine kleine Strecke, welche von der Drehung des ganzen Apparates und von der damit verbundenen Änderung des Einfallswinkels des Lichtes abhängt. Die Bewegung erfolgt aber relativ langsam und ist sehr gering, denn schon eine Verdrehung der Maschine um 10—15′ nach beiden Seiten von der theoretisch richtigen Lage genügte, um das Bild verschwinden zu lassen, wobei die Bildhelligkeit von Null bis zu einem Maximum anwuchs und wieder auf Null zurücksank. Die Bewegung des Lichtmaximums erfolgte gleichsinnig mit derjenigen des Interferenzbildes, aber sehr viele Male schneller. Dem Beobachter erschien daher bei Rotation der Maschine das Interferenzbild scheinbar still zu stehen, während bei jeder Umdrehung ein Lichtblitz darüber hinweghuschte. (Stroboskop.) Diese Erscheinung ähnelt derjenigen, welche man bei einem fahrenden Eisenbahnzuge beobachten kann. Bei ruhendem Auge sind Einzelheiten der vorüberfahrenden Lokomotive nicht zu erkennen, folgt jedoch das Auge sehr schnell der Bewegung einzelner Teile, so scheinen diese stillzustehen.

Bei dieser Beobachtung der Streifen hängt deren Sichtbarkeit nicht von ihrer Orientierung, Form und Breite ab wie

vorher. Man sieht allerdings das gesamte Streifensystem nicht momentan als Ganzes aufleuchten, wie dies bei der Beobachtung mit Funkenlicht der Fall ist, sondern es werden verschiedene Teile des Interferenzbildes nacheinander sichtbar, wobei diese etwas verschiedene Lagen zueinander einnehmen. Wenn jedoch die Beleuchtungsdauer kurz genug ist, wird die hieraus folgende Unschärfe des Bildes unmerklich werden. Beifolgende kleine Tabelle zeigt, daß die Meßgenauigkeit von Photogrammen, welche bei ruhendem und bewegtem Apparat aufgenommen sind, nur wenig voneinander abweichen. Die angegebenen Streifenbreiten sind abgeleitet aus fünf Messungen von je fünf Interferenzstreifen nach der Formel $b = \frac{(l_1 + l_2) - (l_4 + l_5)}{6}$, wo l_1, l_2 ... die Einstellungen auf die Streifen bedeuten.[1])

	Apparat in Ruhe (Exposit.-Zeit ca. 1 Sek.)		Apparat in Bewegung (Exposit.-Zeit ca. 5 Min.)		
Platte	Aufnahme	Streifenbreite in mm	Aufnahme	Touren pro Min.	Streifenbreite in mm
70	2	0,1874	1	567	0,1869
	4	0,1878	3	527	0,1880
	6	0,1849	5	546	0,1877
	8	0,1875	7	525	0,1903
	10	0,1865	9	527	0,1885
	12	0,1865	11	485	0,1895
	14	0,1880	13	510	0,1890
	16	0,1874	15	278	0.1884
71	2	0,1876	1	300	0,1856
	4	0,1865	3	297	0,1879
	6	0,1861	5	441	0,1919
	8	0.1859	7	600	0,1845
	Mittel:	0,1868		Mittel:	0,1882
		± 0,0003 (m. F.) (± 0,2%)			± 0,0019 (m. F.) (± 1%)
	Gesamtmittel: 0,1875 ± 0,0007 (m. F.) (± 0,4%)				

Der größere mittlere Fehler bei den in Bewegung erhaltenen Aufnahmen rührt zum Teil von der besprochenen Unschärfe des Bildes her, außerdem wirken aber noch Ungleich-

1) Besser wäre die auf den Regeln der Ausgleichsrechnung beruhende Formel $b = \frac{2(l_5 - l_1) + (l_4 - l_2)}{10}$ zur Anwendung gekommen.

förmigkeit in der Tourenzahl, Luftunruhe und Erschütterungen des Apparates verschlechternd auf die Bilder. Die Meßgenauigkeit ist jedenfalls noch genügend und es kann durch mehrfaches Ausmessen eine noch größere Sicherheit des Resultates erhalten werden. Die Verbreiterung der Streifen bei rotierendem Apparat liegt noch innerhalb des mittleren Fehlers.

Das diskontinuierliche Aufblitzen des Streifensystems bei geringen Umlaufszahlen der Maschine war für die visuelle Messung der Interferenzen äußerst störend, es verschwand aber schon bei 400—600 Touren pro Minute, so daß dann das Bild einen vollkommen kontinuierlichen Eindruck machte. Wie aus Fig. 5 ersichtlich ist, müssen sich Verschiebungen des Streifensystems durch Weiter- oder Engerwerden der konzentrischen Kreise kenntlich machen. Durch geeignete Prismenkombinationen wurden nun zur Beobachtung dieser Erscheinung zwei diametral gegenüberliegende Teile dieser Kreise herausgeschnitten und so übereinander projiziert, daß sie nur durch eine feine, ganz scharfe Grenzlinie getrennt erschienen. Auf diese Weise konnten einmal direkt die doppelten Streifenverschiebungen gemessen, ferner aber auch die Einzelverschiebungen der beiden Gesichtsfeldhälften an geeigneten Meßmarken kontrolliert werden. Die Meßmethode ähnelt derjenigen, wie sie bei den Koinzidenz-Telemetern[1]) der Firma Zeiss Anwendung gefunden hat. Die Anordnung der optischen Teile ist aus Fig. 6 zu ersehen, worin aber die Größenverhältnisse der Deutlichkeit halber nicht richtig zur Darstellung gekommen sind.

L bedeutet die Lichtquelle, eine 20 Amp.-Gleichstrombogenlampe, deren Strahlen durch den Kondensor *C* parallel gemacht und durch die viereckige Blende *B* auf die nutzbare Größe abgegrenzt wurden. Das parallele Lichtbündel wurde nun durch die beiden Pentagonalprismen *M* in zwei gleiche Teile zerlegt, welche nach entgegengesetzten Seiten um je 90° abgelenkt wurden. Je zwei weitere Prismen derselben Form waren so angeordnet, daß die beiden Lichtbündel aus zwei um 180° voneinander abstehenden Richtungen in den Prismenkranz eintreten konnten. Bei dieser Anordnung waren Pentagonal-

1) Eingetragenes Pat. Nr. 16283, Kl. 42. 1903. D. R. P. Nr. 175900, Kl. 42. 1905. Dtsch. Mechan.-Zeitung S. 61. 1907.

prismen gewöhnlichen rechtwinkligen Prismen vorzuziehen, da bei jenen die Ablenkung um 90° von ihrer Orientierung völlig unabhängig ist und so die Justierung außerordentlich erleichtert wurde. In der in Fig. 6 dargestellten Lage der Maschine trat also das Licht von *M* kommend in das Mittelstück *G* des rotierenden Teiles ein, wurde hier in zwei kohärente Bündel zerlegt, welche das Polygon *J*, *H* in entgegengesetztem Sinne durchliefen, und trat dann durch das Mittelstück wieder nach oben aus, nachdem beide Bündel wieder vereinigt waren. Das über der Maschine befestigte, ruhende Prisma *R* warf dann das Licht horizontal nach vorn in den Beobachtungsapparat. Bei einer Drehung der Maschine um 180° konnte das Licht von der entgegengesetzten Seite eintreten und durchlief denselben Weg. So konnten also die Interferenzstreifen in zwei um 180° voneinander abstehenden Lagen der Maschine beobachtet werden. Diese beiden Bilder, welche also im Abstand von je einer halben Umdrehung des Prismenkranzes nacheinander aufblitzten, waren nun so übereinander zu bringen, daß sie möglichst genau ausgemessen werden konnten. Zu diesem Zweck bestand der optische Apparat von *R* an aus zwei völlig gleichen, symmetrisch angeordneten Teilen, durch welche die Interferenzbilder durch zwei getrennte Objektive entworfen wurden. In der gezeichneten Stellung des Prismenkranzes mußte also hinter dem Brennpunkte des astronomischen Fernrohrobjektives *O* (relat. Öffnung 1 : 10, $f = 607$ mm) ein reelles Interferenzbild entstehen. In das konvergente Strahlenbündel hinter dem Objektiv waren noch die Irisblende *A* und das Aufrichteprisma *D* eingeschaltet. Die Irisblende diente zum Abfangen von Reflexionsbildern und des störenden Nebenlichtes. Das Dovesche Prisma *D*, welches drehbar angeordnet war, wurde benutzt, um den Interferenzstreifen ein beliebiges Azimut geben zu können. Wegen der in diesen Prismen auftretenden starken Lichtbrechung liefern sie eigentlich nur scharfe Bilder, wenn sie sich im parallelen Strahlengang befinden. Dies war jedoch wegen der schwierigen Justierung des letzten Teiles der Anordnung nicht angängig, auch zeigte sich kaum eine merkliche Bildverschlechterung, wenn das Prisma erst vor das Objektiv, dann dahinter in das schwach konvergente Bündel gesetzt wurde. Das Reflexionsprisma *E* warf dann das Licht

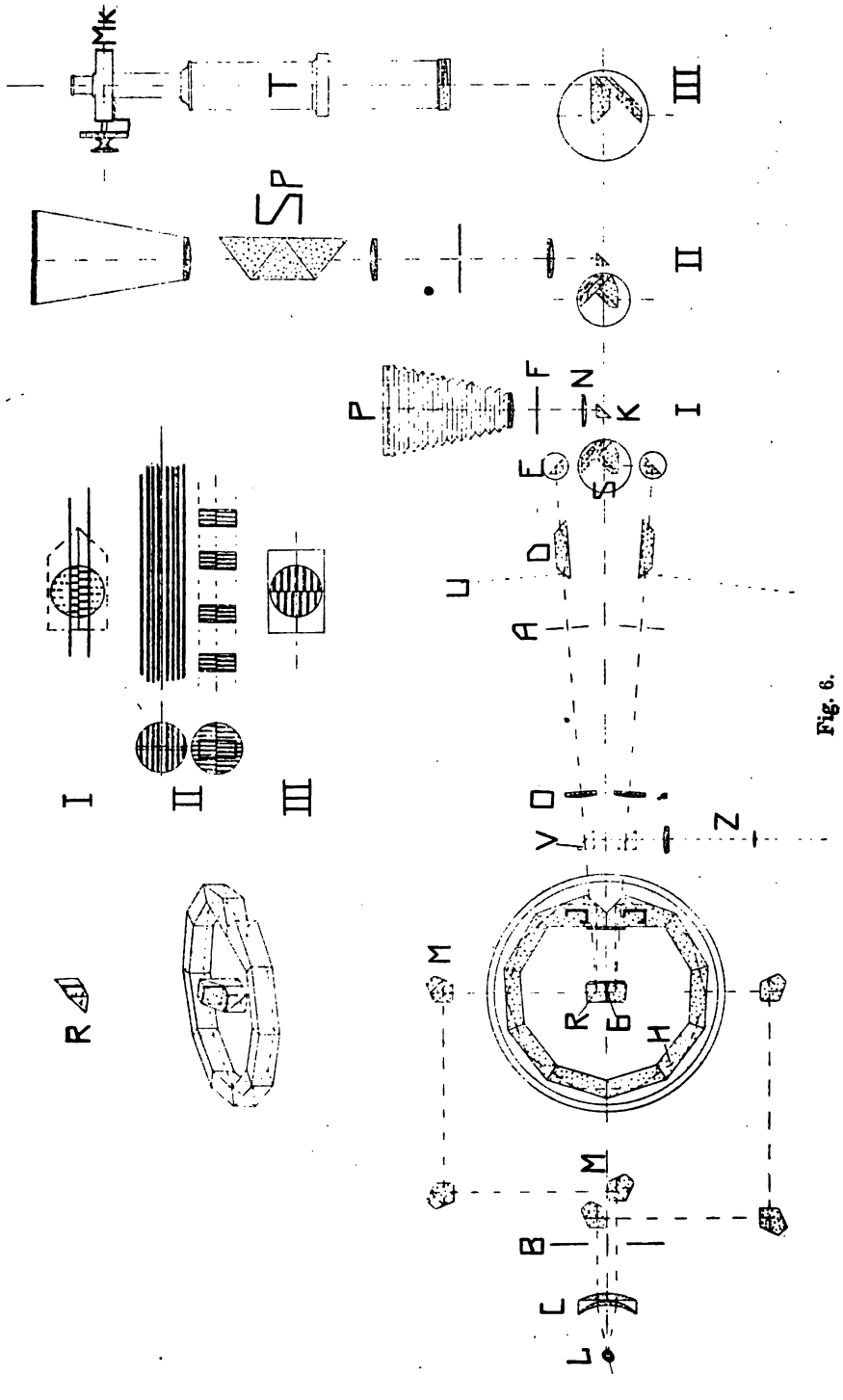


Fig. 6.

bündel so in das Koinzidenzprisma S, daß das reelle Interferenzbild in die Einstellebene derselben zu liegen kam. Dieses Prisma hatte die Form der Okularprismen, wie sie in Koinzidenztelemetern Verwendung finden. Im Prinzip entsprechen sie zwei übereinander stehenden, gekreuzten Spiegeln, durch welche zwei aus entgegengesetzten Richtungen kommende Lichtbündel so abgelenkt werden, daß sie parallel austreten. Die bei derartigen Spiegelkonstruktionen störend auftretende, sehr starke Trennungslinie zwischen den beiden Gesichtsfeldhälften ist bei den Koinzidenzprismen dadurch vermieden, daß die Spiegel durch zwei miteinander verkittete Prismen ersetzt sind, welche den Lichtbündeln nach einer oder mehreren Reflexionen die gewünschte Richtung erteilen. Die Kittfläche ist zur Hälfte versilbert und trennt so das Gesichtsfeld in zwei Teile. Die Trennungslinie wird von der sehr scharfen Grenze der Silberschicht gebildet. In geeigneter Weise an den Prismen angebrachte Dächer können noch zur Umkehrung der einzelnen Bilder dienen.

Auf diese Weise war es also möglich, beliebige Stellen der beiden Interferenzbilder zur Koinzidenz zu bringen und zwar so, daß die beiden Bildfeldhälften durch eine feine, scharfe Linie getrennt erschienen, auf welcher die Interferenzstreifen senkrecht standen. Bei irgendeiner Verschiebung der Streifensysteme mußten sich dann die beiden Bildhälften entgegengesetzt bewegen, so daß mit Hilfe einer geeigneten Meßvorrichtung (Kompensationseinrichtung oder Meßmikroskop) direkt der doppelte Betrag der Streifenverschiebung bestimmt werden konnte. In dem in Anordnung I und II gezeichneten Koinzidenzprisma lag die Trennungslinie der Bilder horizontal, aber gegen den Beobachter schräg nach hinten geneigt, so daß es nicht möglich war, sie gleichzeitig in ihrer ganzen Länge scharf zu sehen. Da diese Neigung jedoch nicht allzu stark war, konnten noch drei bis vier Interferenzstreifen links und rechts von der senkrecht zur Trennungslinie eingerissenen Meßmarke gleichzeitig mit dieser scharf eingestellt werden. Die dritte Beobachtungsanordnung bringt ein anderes Koinzidenzprisma mit vertikaler Trennungslinie zur Darstellung. Hierbei konnte man wohl auf die Linie in ihrer ganzen Ausdehnung gleichzeitig fokussieren, die Interferenzfransen erschienen aber nur

ganz in ihrer Nähe links und rechts scharf. Beide Methoden ließen die gleiche Meßgenauigkeit zu.

Die einzelnen Teile des ganzen Beobachtungsapparates waren justierbar auf optische Bänke montiert, welche auf einem in Höhe verstellbaren, eisernen Projektionstisch festgeklemmt wurden. Die drei Prismen *E* und *S* befanden sich zur leichteren Justierung auf kleinen, dreh- und verstellbaren Tischchen. Zum Schutz gegen Nebenlicht wurde diese ganze Einrichtung mit einem lichtdichten Kasten bedeckt. Davon ganz unabhängig waren die beiden Prismen *R* auf einem sehr festen, eisernen Dreifußgestell mit langem, horizontalem Arme befestigt, welches neben der Maschine auf dem Fußboden stand.

Justierung.

Bei der Justierung der ganzen Einrichtung wurde stets mit den der Lichtquelle zunächst liegenden Teilen begonnen und im Sinne der Lichtbewegung fortgeschritten. Ein ausgespannter Faden, welcher die Rotationsachse der Maschine in ihrer Verlängerung genau schnitt, markierte die Mittellinie der ganzen optischen Anordnung, so daß jetzt die einzelnen Teile roh eingestellt werden konnten. Dann nahm man das Mittelstück *G* des rotierenden Teiles aus dem Prismenbehälter heraus und stellte die Beleuchtungsprismen *M* so ein, daß die beiden Lichtbündel, aus entgegengesetzten Seiten kommend, zentral die Rotationsachse schnitten. Die richtige Lage der Prismen war leicht zu prüfen, wenn zwischen Kondensor *C* und der Blende *B* eine gute plane Glasplatte so aufgestellt wurde, daß sie die beiden Lichtbündel, nachdem jedes derselben alle sechs Pentagonalprismen in entgegengesetztem Sinne durchlaufen hatte, in ein Fernrohr reflektierte. In diesem waren zwei Kraterbildchen der Bogenlampe sichtbar, wenn beide Lichtbündel nicht genau parallel einfielen; koinzidierten beide Kraterbildchen, so war dies als Zeichen für die richtige Justierung der Beleuchtungsprismen anzusehen. Die nun folgende Justierung des rotierenden Teiles erfolgte nach Einschrauben von *G* in der schon beschriebenen Weise. Dazu wurde mit Vorteil das Fernrohr *Z* mit dem vorklappbaren Prisma *V* angewandt, so daß durch diese Justierung keine Änderung im übrigen optischen Apparat getroffen zu werden

brauchte. Mit Hilfe eines Theodoliten legte man dann die Symmetrielinie der beiden Hälften des Apparates optisch genau fest, horizontierte die beiden Prismen R und drehte sie um gleiche Winkel nach beiden Seiten von der Symmetrielinie unter Benutzung eines senkrecht dazu stehenden Millimetermaßstabes (Poggendorfsche Spiegelablesung). Bei richtiger Stellung der Maschine mußten dann die beiden von R kommenden Strahlenbündel horizontal verlaufen. Durch deren Richtungen waren ohne weiteres die Lagen der beiden optischen Bänke OE gegeben. Die zwei Objektive O wurden gleichweit von R entfernt festgeklemmt und die Irisblenden in deren Brennebenen befestigt.

Der schwierigste Teil der ganzen Justierung bestand nun in der Aufstellung der Prismen D, E und S. Die drei Prismen E und S wurden zunächst so eingestellt, daß die Austrittspupillen der beiden Hälften des optischen Apparates zusammenfielen. Dann verschob man diese Prismen gleichzeitig, bis die beiden reellen Interferenzbilder in die Ebene der Meßmarke des Koinzidenzprismas zu liegen kamen, was eventuell durch seitliches Verschieben derselben erreicht werden konnte. Dabei war es praktisch, die Maschine schnell laufen zu lassen, so daß zwei, scheinbar kontinuierliche Bilder beobachtet werden konnten. Erschienen nun Interferenzen und Trennungslinie gleichzeitig scharf, so wurden jene mit Hilfe der Prismen D soweit gedreht, daß sie genau senkrecht zur Trennungslinie der beiden Gesichtsfeldhälften standen. Bei richtiger Justierung aller Teile sah man also dann im Beobachtungsinstrument abwechselnd zu beiden Seiten der Trennungslinie zwei halbkreisförmige Bilder aufblitzen, in denen die Interferenzen erschienen. Bei größeren Umlaufsgeschwindigkeiten des Apparates bot das Gesichtsfeld einen Anblick, wie er in Fig. 6 III dargestellt ist.

Obgleich diese Anordnung derjenigen eines Koinzidenztelemeters ähnelt, kam bei diesen Messungen nicht das Koinzidenz-, sondern das Invertprinzip[1]) in Anwendung. Bei einer Drehung der Maschine um 180° erschien nämlich das zweite Interferenzbild ebenfalls um 180° zum ersten verdreht; da nun beide Bilder in den zwei Teilen des Beobachtungsapparates

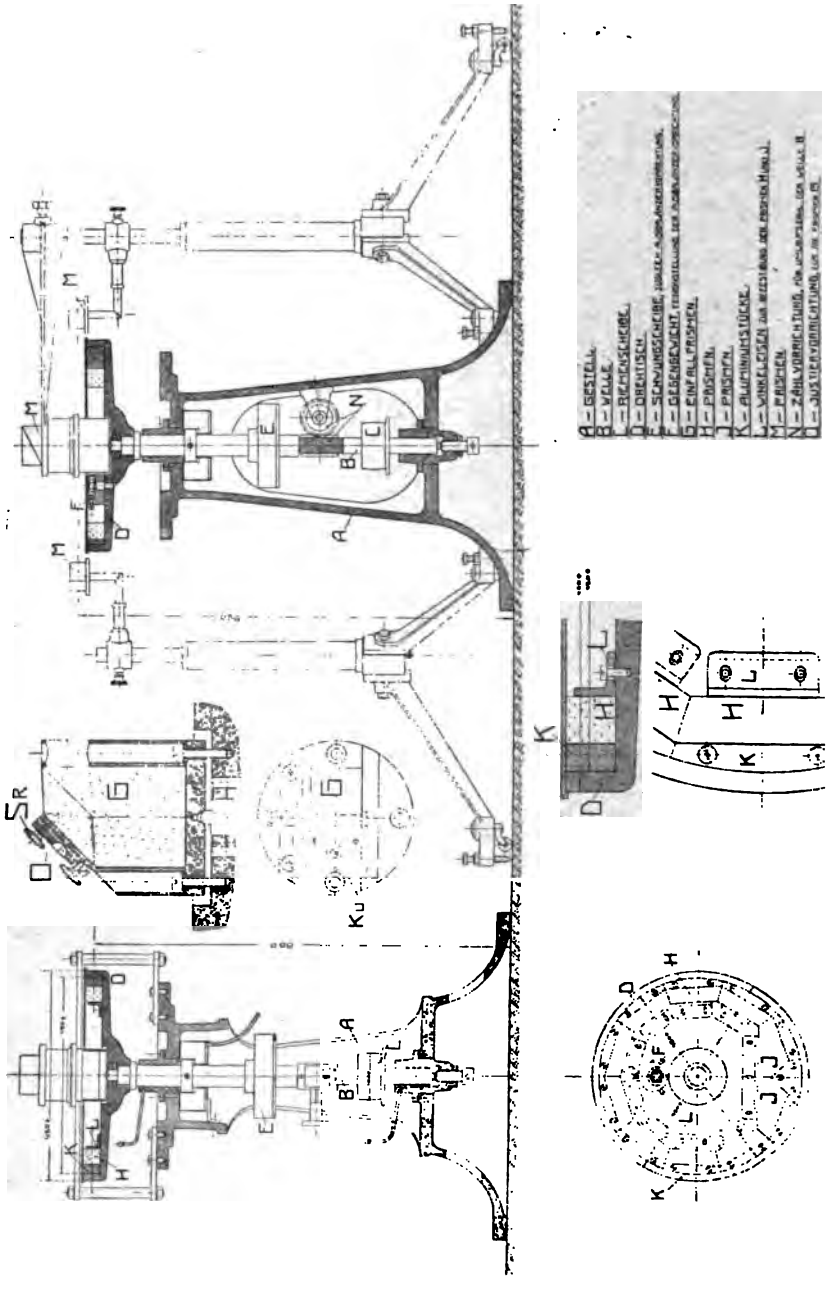
1) Eingetragenes Pat. Nr. 1462, Kl. 42. 1903.

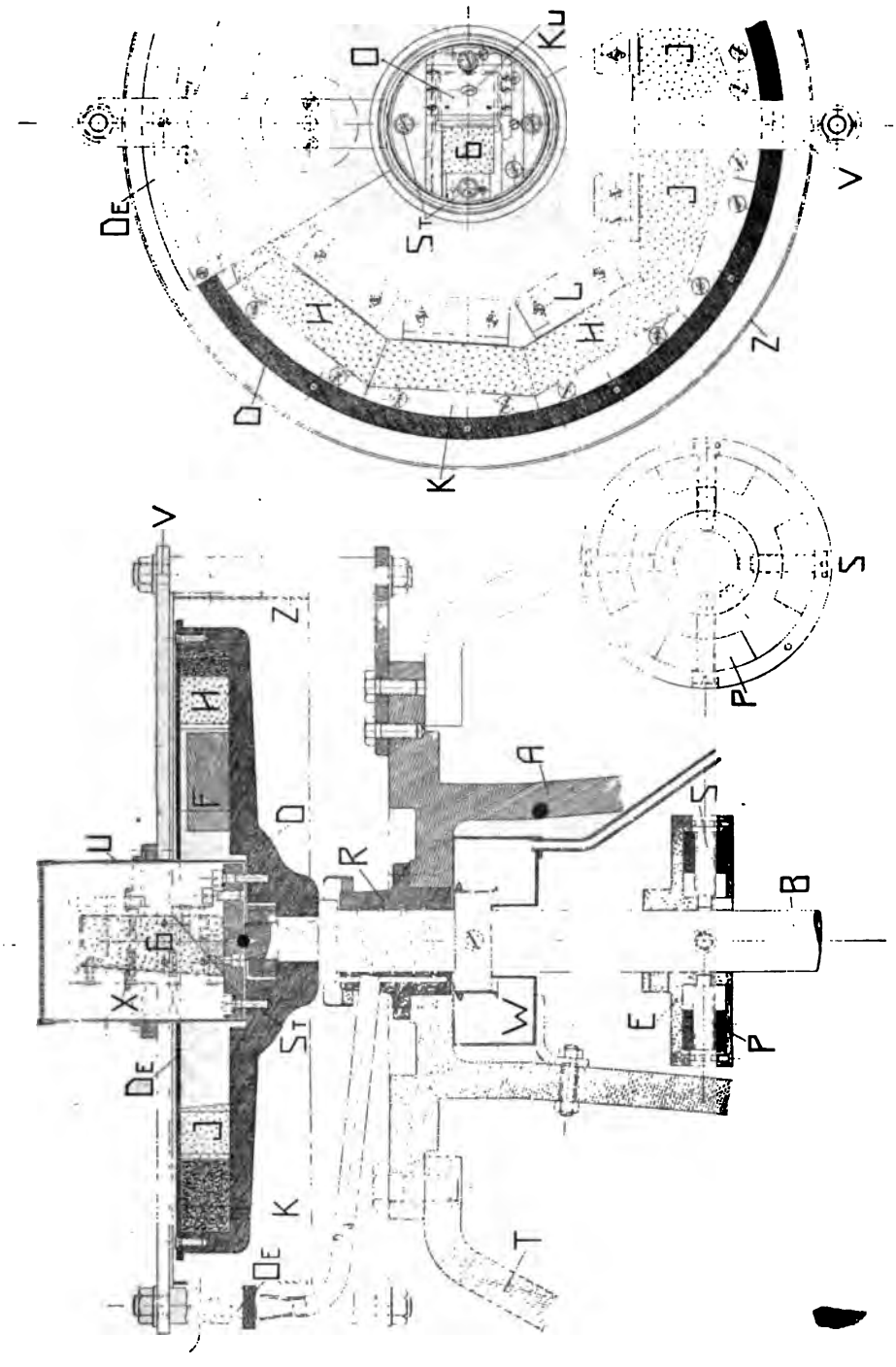
je die gleiche Anzahl von Drehungen erfuhren, mußten sie sich schließlich im Koinzidenzprisma die gleichen Seiten zuwenden. Waren die Interferenzstreifen einander nicht parallel, so erschien demnach die eine Gesichtsfeldhälfte als Spiegelbild der andern, während bei parallelen Streifen auf den Unterschied zwischen Koinzidenz- und Invertanordnung nur aus den Bewegungen beider Hälften zu schließen war. Da man mit Hilfe der beiden Doveschen Prismen *D* beide Bilder getrennt beliebig verdrehen konnte, waren die Messungen der Streifenverschiebungen in verschiedenen Variationen möglich (beide Hälften sich gleichzeitig oder entgegengesetzt bewegend). Bei der Beobachtung der Interferenzen war noch darauf zu achten, daß der positive Kohlekrater der Bogenlampe stets in gleicher Höhe blieb, so daß die Siemens-Schuckertlampe, obgleich sie eigentlich mit festem Lichtpunkt brennen sollte, von Zeit zu Zeit etwas nachreguliert werden mußte. Etwaige Änderungen in der Beleuchtung konnten auch während photographischer Aufnahmen mit langer Expositionszeit (8—12 Min.) leicht kontrolliert werden, ohne daß am Apparat selbst etwas zu ändern war. Denn einmal waren durch Vorschlagen des Prismas *V* die Interferenzen zu beobachten, wodurch aber die Exposition unterbrochen werden mußte, dann aber boten die an den schrägen Flächen der Prismen *D* reflektierten Lichtbündel *U* ein bequemes Mittel, die Streifen auch während photographischer Aufnahmen zu sehen. Passend aufgestellte Lupen ließen also stets die richtige Stellung der Bogenlampe erkennen oder eventuell korrigieren.

§ 5. Der Rotationsapparat.
(Tafel I und II.)

Alle mechanischen Teile des Apparates wurden ebenso wie die gesamte Optik in den Zeisswerken zu Jena ausgeführt. Die sachgemäße Konstruktion und Berechnung der Maschine hatte Herr M. Berger übernommen, dessen technische Ratschläge und ständige freundliche Unterstützung auch sonst der Untersuchung sehr zustatten kamen.

Bei der Konstruktion der Maschine war zunächst maßgebend, daß sie mit Sicherheit noch 3000 Touren pro Minute in beiden Umdrehungsrichtungen laufen sollte. Wegen des großen Gewichtes der rotierenden Teile und der damit verbundenen


APPARAT FÜR VERSUCHE ÜBER DEN FRESNELSCHEN MITFÜHRUNGSKOEFFIZIENTEN
A – GESTELL.
B – WELLE.
C – RICHTSCHEIBE.
D – OBERTISCH.
E – SCHWUNGSCHEIBE, ZUGLEICH ABSORPTIONSGEFÄSS.
F – GEGENGEWICHT, ERMÖGLICHT DIE HORIZONTALSTELLUNG DER ACHSE DES OBERTISCHES.
G – EINFALLSPRISMEN.
H – PRISMEN.
J – PRISMEN.
K – ALUMINIUMSTÜCKE.
L – WINKELEISEN ZUR BEFESTIGUNG DER PRISMEN H UND J.
M – PRISMEN.
N – ZAHLVORRICHTUNG, DIE UMDREHUNGEN DER WELLE B
O – JUSTIERVORRICHTUNGEN, UM DIE ACHSEN DES
SR
Ku



Tafel II. (Maßstab 1 : 5.)

Gefahr ihres Zerspringens bei hohen Geschwindigkeiten wurde nur das beste Material verwandt und alle Teile völlig präzis gearbeitet. Die Achse wurde als vertikal laufend festgesetzt, weil einmal ein passendes Gußgestell für die Maschine vorhanden war, dann aber schien eine solche Anordnung auch noch Vorteile in bezug auf Stabilität der Achse während des Betriebs zu gewähren. Als Antrieb kam nur Riemenübertragung in Frage, da die direkte Kupplung der Maschine mit einem Vertikalmotor kompliziert geworden wäre und sich auch ein Motor mit genügender Regulierfähigkeit nicht in passender Form beschaffen ließ. Konstruktionseinzelheiten sind bei der Beschreibung der betreffenden Maschinenteile erwähnt oder aus den beiden Tafeln zu ersehen.

1. Das Gestell *A*.

Dasselbe bestand aus Gußeisen und hatte eine Höhe von ca. 750 mm. Die obere und untere Seite waren plan gefräst. Der runde, breite Fuß (Durchmesser ca. 70 cm) besaß vier Löcher zum Befestigen der Maschine am Aufstellungsort. Da sich im Lauf der Versuche das Gestell als etwas zu schwach erwiesen hatte, wurde es nachträglich durch die beiden starken, schmiedeeisernen Stützen *T* versteift.

2. Der Prismenbehälter *D*.

Als Material für diesen Behälter wurde Siemens-Martinstahl wegen der starken Zugbeanspruchung, welcher dieser Teil im Betrieb ausgesetzt war, gewählt. Aus einem Stahlblock wurde zunächst die rohe Form geschmiedet, um möglichste Homogenität des Materials zu sichern, diese dann auf die Achse aufgesetzt und mit ihr gleichzeitig zwischen Spitzen abgedreht. Das fertige Stück hatte die Form eines Tellers mit überhöhtem Rande. Der äußere Durchmesser betrug 450 mm, die Wandstärke, welche außen zu 15 mm bemessen war, nahm nach innen allmählich zu. Der fertig abgedrehte Block wurde, ohne mit den nötigen Bohrungen für das Einsetzen der Optik versehen zu sein, zunächst allein in die Maschine eingesetzt und bei sehr hohen Tourenzahlen (ca. 3000 pro Minute) längere Zeit in Betrieb gehalten. Dabei zeigte sich, daß das Material außerordentlich homogen war, denn auch bei den größten Geschwindigkeiten waren am Gestell kaum merk-

liche Vibrationen zu verspüren. Wie eine leichte Überschlagsrechnung ergibt, müßte bei 3000 Touren pro Minute (70 m/s Umfangsgeschwindigkeit) ein Übergewicht von 1 g am Rand der Scheibe ($r = 22{,}5$ cm) einen radialen Zug von 2,26 kg erzeugen. Nach diesen Vorversuchen erhielt der Behälter die nötigen Bohrungen für den Stahldeckel *De* (gleichmäßig auf dem Umfang verteilt) und für die Befestigung der Aluminiumstücke *K*, welche als Anlageflächen für die Glasprismen dienten. Der sehr genau passende Deckel besaß einen außen übergreifenden Rand und wurde zuerst aus 3 mm-Stahlblech hergestellt, welches sich aber schon bei den ersten Versuchen stark verwarf. Ein zweiter Deckel von 5 mm Stärke wurde dann aus einem starken Stahlstück durch sorgfältiges Abdrehen gewonnen, und ließ erst nach langem Gebrauche schwache Verziehungen erkennen.

Die Innenfläche des Stahlkörpers, welche als Auflagefläche für das Prismenpolygon dienen sollte, wurde zunächst sehr genau plan gedreht und dann die Aluminiumteile eingepaßt und verschraubt. Diese Stücke, deren Innenflächen ganz genau der äußeren Form des Prismenkranzes entsprechen mußten, waren ganz exakt hergestellt. Die Flächen, an welchen die Prismen angelegt werden sollten, wurden plan geschliffen, um ein Kippen einzelner Prismen unmöglich zu machen. Nach dem mühsamen Aufprobieren aller Einzelteile und dem Einsetzen des Glases zeigte es sich, daß die Prismen völlig unbeweglich saßen. Um jedes Verlagern des Polygons zu verhüten, wurden die Teilprismen *J* etwas nach innen gepreßt, indem zwischen die entsprechenden Aluminiumteile und den äußeren Rand dünne ($^1/_{10}$ mm) Stahlbleche geschoben wurden. Der aufgeschraubte Deckel *De* verhütete ein Herausfliegen der Prismen nach oben. Da aber eine direkte Pressung der Prismen durch den Stahl gefährlich erschien, wurde der Prismenkranz mit mehreren Lagen Gummituch bedeckt und dann der Deckel so verschraubt, daß am Rande Metall auf Metall zu liegen kam. Einige Versuche bewiesen jedoch, daß diese Befestigung der Prismen noch nicht genügte. Deshalb wurden im Behälter noch die verschiebbar angeordneten Winkeleisenstücke *L* angebracht, welche gestatteten, die Glasprismen stark nach außen gegen ihre Anliegeflächen zu pressen. Als Zwischenlage zwischen

Glas und Eisen dienten dünne Filzsch
wurde mit Hilfe einer Schraubenzwinge
minium gepreßt und dann das Wink
Nach dieser Vorsichtsmaßregel zeigte
hohen Tourenzahlen keine plötzlichen Ve
etwaigen starken Temperaturänderunge
war ein gefährlicher Druck auf das Polyg
da die Ausdehnungskoeffizienten von
verschieden sind (Stahl: 0,0000100, G
stärkere Ausdehnung des Aluminiums (A
kam wegen der Kleinheit der Stücke nich
rung einzelner Teile trat im Laufe der

3. Das Mittelstück

Die Fassung des Glaskörpers *G*
Rotgußteilen, welche auf eine 15 mm di
Martinstahl geschraubt waren. Die S
vier versenkte Schrauben *St* mit dem
bunden, wobei aber das ganze Stück
gekippt werden konnte, da es auf ein
zur Rotationsachse ruhte. Um außer
kleine Drehung des Mittelstückes zu e
Schrauben *St* in kleine, halbkugelför
gelassen. Das bewegliche Reflexionspr
ließ sich in einer Art Kugelgelenk um d
welche das Prisma an dem starken D
Neigung des Prismas erfolgte von oben
baren Mikrometerschrauben *Sr*, die seit
Klemmung war durch die beiden Sc
Da bei der Rotation der Maschine weg
dieses Teiles ein starker Luftwirbel erz
man das ganze Mittelstück mit einem
Messingblech. Diese Haube reichte b
Prismenbehälters und war für den L
nötigen Fensteröffnungen versehen, die
verschlossen waren, damit die Luft i
mit diesem rotierte. Die beiden recht
hielten diesen Zylinder und waren se
Haltern am Gestell verschraubt. Die
zeitig zur Befestigung des Schutzrin

welcher den Beobachter gegen das umherspritzende Öl und etwaige abfliegende Teilchen schützen sollte. Die Messinghaube bewährte sich übrigens bei großen Tourenzahlen nicht; denn durch die starke Luftbewegung und Vibrationen der Maschine kam sie bald in solche Schwingungen, daß sie am rotierenden Teil anschlug und ihre Zertrümmerung befürchtet werden mußte. Sie wurde daher bei späteren Versuchen weggelassen und das Mittelstück durch aufgesteckte Papphülsen möglichst abgerundet. Dabei zeigte sich keinerlei Zunahme der Bildunruhe, eher eine Besserung.

4. Welle und Lager.

Die Achse B des Apparates war ihrer starken Beanspruchung wegen aus Siemens-Martinstahl hergestellt und von oben nach unten etwas verjüngt. Die Lager L bestanden aus Rotguß und waren in einem Abstand von 45 cm in das Gestell eingelassen. Das ganze Gewicht des rotierenden Teiles ruhte auf einer in der Welle versenkten, polierten Stahlkugel, welche im unteren Lager auf einer glasharten Stahlplatte rotieren konnte. Da die Maschine nach beiden Richtungen laufen sollte, waren in beide Lager doppelte Spiralwindungen zur Ölung eingeschnitten. Infolge des starken Ölverbrauchs mußten Ölfänger und der Abspritzungsring W angebracht werden, um ein Umherspritzen des Öles im Beobachtungsraume zu verhüten. Trotz ihrer sehr starken Beanspruchung bei hohen Tourenzahlen blieben beide Lager stets ziemlich kühl, wie das folgende Täfelchen zeigt. Die hier angeführten Temperaturen wurden während eines fast zwölfstündigen, ununterbrochenen Betriebs der Maschine in Abständen von ungefähr einer Stunde gemessen, wobei als Lagertemperatur die Temperatur des Öles angesehen wurde, welches sich auf dem Lager im Ölfänger sammelte. Die vorliegenden Messungen sind am oberen Lager ausgeführt worden.

Zeit (vorm.)	Temperatur	Zeit (nachm.)	Temperatur
7 Uhr — Min.	Anfang	1 Uhr 15 Min.	24,9°
7 „ 43 „	23,5°	2 „ 40 „	24,7°
8 „ 50 „	28,2°	3 „ 4 „	26,3°
9 „ 43 „	26,6°	4 „ 25 „	26,3°
10 „ 44 „	24,2°	5 „ 8 „	29,0°
11 „ 37 „	25,1°	6 „ 6 „	26,0°
— „ — „	—	6 „ 55 „	26,1°

Die Zimmertemperatur am Lager betrug durchschnittlich 20,0°, Bewegungsrichtung und Tourenzahl (bis ca. 1000) variierten. Die Tabelle ist ein Zeichen für den tadellosen Zustand der Welle und der Lager.

Auf der Achse saßen noch zwischen den Lagern die Riemenscheibe C und das Balanciergewicht E. Die Riemenscheibe war möglichst nahe am unteren Lager befestigt worden, damit Stöße im Antrieb hauptsächlich vom Gestell aufgenommen wurden.

5. Balancierversuche (Balanciergewicht E).

Die Hauptbedingung für ruhiges Laufen der Maschine war in der Vollkommenheit der Ausbalancierung des rotierenden Teiles gegeben, denn wie schon gezeigt wurde, erzeugten selbst minimale Übergewichte auf einer Seite der Achse bei einigermaßen großen Tourenzahlen ganz enorme Zugkräfte.

Zunächst wurden alle Teile für sich möglichst ausgeglichen und dann die fertig zusammengestellte Maschine als Ganzes ausbalanciert. Das schwere Mittelstück ließ man auf einer polierten, genau horizontalen Fläche rollen. Die hierbei sich zeigenden Ungleichheiten wurden durch Aufsetzen von Stahl- und Bleistücken möglichst beseitigt. Im Prismenbehälter wurde der durch die beiden schweren Prismen J, J erzeugte Massenüberschuß auf der gegenüberliegenden Seite durch das Stahlstück F kompensiert. Der gebrauchsfertig zusammengesetzte und roh justierte rotierende Teil wurde dann zwischen zwei Paar Friktionsräder gelegt, die ihrerseits in Kugellagern liefen, und weiter ausbalanciert. Durch Anbohren der Fassung wurde so der noch merkbare Massenüberschuß beseitigt. Diese Methode erwies sich jedoch noch als zu roh, da die Reibung der Friktionsräder wegen der großen Last des Stahlstückes zu groß war. Nach mehrfachen, verschiedenen Versuchen fand man, daß sich größere Genauigkeit erzielen ließ, wenn die Welle auf zwei gut plane, polierte Spiegelglasstücke gelegt wurde und der Apparat pendelte. Auf diese Weise konnte noch leicht 1 g Übergewicht auf einer Seite der Achse nachgewiesen werden. Nach peinlichster Sorgfalt in der Ausbalancierung und Einsetzen der Achse in das Gestell ergab sich jedoch, daß die genannten Methoden nicht genügend genau waren. Deshalb wurde auf die Welle das Balanciergewicht E

aufgesetzt. Dieses bestand aus einem völlig geschlossenen Stahlkörper *E*, in welchen sich von außen durch die Schrauben *S* der Abstand der vier ca. 200 g schweren Gewichte *P* von der Achse um ungefähr 16 mm getrennt ändern ließ. Dadurch war es möglich, den Schwerpunkt des ganzen Systems in gewissen Grenzen zu verlegen. Jetzt wurde nun durch einfaches Probieren diejenige Stellung der Gewichte gesucht, bei welcher die Maschine am ruhigsten lief. Einen gewissen Anhalt, nach welcher Seite der Prismenbehälter schlug, gewährte dabei die Benutzung eines feinen Fühlhebels. Auf diese Weise war es möglich, selbst bei 1500—2000 Touren p. Min. noch ein gutes Bild der Interferenzen zu erhalten, bei höherer Tourenzahl verschwanden die Bilder wegen Verziehung des Apparates. Die Maximalgrenze, bis zu welcher man in der Geschwindigkeit der Maschine gehen konnte, sank allerdings im Laufe der Untersuchung immer tiefer, so daß schließlich die Interferenzen schon bei 1000 Touren unscharf wurden.

6. Das Zählwerk *N*.

Zur Messung der Tourenzahl der Maschine war in die Welle *B* ein starkes Gewinde von 5 mm Steighöhe eingeschnitten, in welches ein Schneckenrad mit horizontaler Achse eingriff. Auf dieser saß ein Kontaktrad aus Hartgummi, welches bei jeder Umdrehung des Zahnrades einen Stromkreis schloß. Das Übersetzungsverhältnis zwischen Welle und Kontaktrad betrug 1 : 50 und war so gewählt, daß die Tourenzahl der Maschine bis auf höchstens 1 % Fehler bestimmt werden konnte. Diese Kontakte ließ man auf den hinteren Hebel des Chronographen der Univ.-Sternwarte registrieren, während die Sternzeituhr auf dem vorderen Signalhebel Sekundenpunkte markierte. Bei dieser Einrichtung konnte noch 0,01 Sekunde mit Sicherheit abgelesen werden, so daß bei Zeitdifferenzen auch nur ein Fehler von 0,01 Sekunde zu befürchten war. Da bei den Versuchen eine Sternzeituhr benutzt wurde, waren alle Beobachtungen der Tourenzahlen auf mittlere Zeit zu reduzieren, was nach der bekannten Beziehung erfolgte:

$$\text{eine Sek. St. Z.} = 0{,}99727 \text{ Sek. M. Z.}$$

Das folgende Täfelchen läßt die bei dieser Einrichtung erreichte Genauigkeit erkennen. Dabei bedeutet *A* die Anzahl

Sternzeitsekunden zwischen zwei Kontakten der Schnecke (= 50 Touren der Maschine).

A in St. Z.	Max. Fehler in s. St. Z.	Max. Fehler in %	Touren p. Min St. Z.	Red. auf M. Z.	Abs. Fehler in Touren p. Min.
30,0	± 0,01	± 0,03	100	+ 0,27	± 0,08
6,0	1	0,17	500	1,37	0,83
3,0	1	0,33	1000	2,74	3,33
1,5	1	0,67	2000	5,48	13,33
1,0	1	1,00	3000	8,22	30,00

Wie man sieht, war die Genauigkeit für alle vorkommende Fälle völlig ausreichend. Ungleichförmigkeiten im Gange der Maschine während eines Umlaufes der Kontaktscheibe ließen sich hierbei zwar nicht erkennen, sie waren aber wegen der großen Schwungmasse überhaupt kaum zu befürchten.

7. Der Antrieb.

Bei den ersten Probeversuchen mit der Maschine in der Werkstatt wurde ein $^1/_2$ PS.-Drehstrommotor mit horizontaler Achse benutzt. Der Motor zog aber zu schnell an, was für die Justierung hätte schädlich sein können, und brachte die Tourenzahl höchstens bis 2700 Touren p. Min. Deshalb wurde er durch einen Gleichstrommotor von $^1/_4$ PS. mit vertikaler Achse und Tourenregulier im Verhältnis 1 : 12 bei gleichbleibender Zugkraft ersetzt. Der Antrieb war jetzt sehr günstig, der Motor aber viel zu schwach. Nach mannigfachen Versuchen zeigte sich ein 5 PS.-Gleichstrommotor (110 V.) älteren Modells von Siemens-Schuckert am geeignetsten. Durch regulierbare Widerstände im Haupt- und Nebenstrom gelang es, die Tourenzahl der Maschine beliebig von ca. 70 Touren p. Min. bis über 3500 zu bringen. Der Betrieb war zwar wenig rationell, hatte aber den Vorteil, daß alle Stöße im Anlauf verschwunden waren. Der Motor lief ohne Veränderung der Bürstenstellung nach beiden Seiten gleich gut. Seine Achse lag horizontal und war ungefähr 2 m von der Maschine entfernt. Die Übertragung geschah durch einen gekreuzten und geleimten Riemen.

8. Die Aufstellung.

Die ganze Einrichtung fand Aufstellung in einem Kellerraume der Univ.-Sternwarte zu Jena. Die Maschine wurde mittels vier starker Schrauben in den Zementboden des Raumes eingelassen und der Fuß mit Zement ausgegossen. Bei der Aufstellung wurde darauf geachtet, daß die Achse genau vertikal stand, um gyroskopische Wirkungen des rotierenden Teiles zu verhindern.

§ 6. Versuche zur Erzeugung monochromatischer Interferenzstreifen.

Wie schon mehrfach erwähnt, zeigte sich die Siedentopfsche Hg-Lampe für diese Versuche als viel zu lichtschwach. Die sehr hell leuchtenden Metalldampflampen aus Quarz (Cd-Amalgamlampe[1]) wären voraussichtlich ausreichend gewesen, konnten aber nicht probiert werden, da keine zu beschaffen war. Um dafür einen Ersatz zu schaffen, wurden zunächst reine Metallstäbe im Lichtbogen verdampft. Die Beobachtungseinrichtung (Fig. 6 II) war dabei so getroffen, daß das Licht erst nach seinem Durchgang durch den ganzen Apparat spektroskopisch zerlegt wurde, so daß eine Reihe monochromatischer Interferenzbilder entstanden (Methode der Sonnenaufnahmen in monochromatischem Lichte mit Hilfe des Spektroheliographen). Das reelle Interferenzbild im Koinzidenzprisma *S* wurde dabei durch ein Objektiv von geeigneter Öffnung stark verkleinert auf den vertikal stehenden Spalt eines Spektralapparates *Sp* so projiziert, daß zunächst die Interferenzstreifen parallel zum Spalt, die Trennungslinie der beiden Gesichtsfeldhälften also senkrecht dazu standen. Bei Benutzung des Emissionslichtes von glühendem Metalldampf mußte dann im Spektroskop eine Reihe von monochromatischen Spaltbildern entstehen, in denen die Interferenzstreifen sichtbar waren. Damit aber außer der Meßmarke des Koinzidenzprismas noch eine genügende Anzahl von Interferenzstreifen in die Spaltöffnung zu liegen kam, mußte dieser ziemlich weit geöffnet werden (ca. 0,4—0,8 mm). Die Dispersion des Spektrographen war deshalb sehr hoch zu wählen, um die einzelnen Spaltbilder nicht aufeinander fallen

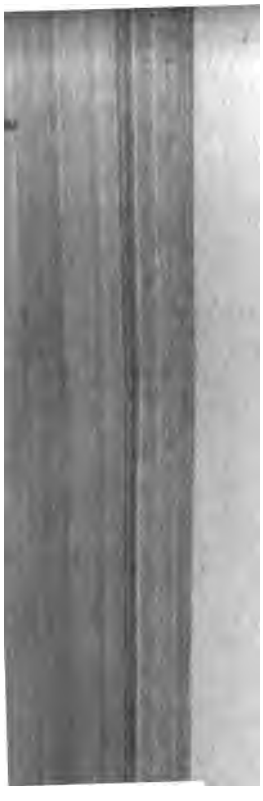
1) Zeitschr. f. Instrumentenkunde **21**. S. 201. 1901; **24**. S. 296. 1904.

zu lassen. Dadurch wurde auch der Vorteil erreicht, daß das Nebenlicht sehr geschwächt war, so daß sich die monochromatischen Spaltbilder, welche durch die Prismen des Apparates auch etwas an Helligkeit einbüßten, ziemlich hell aus dem schwachen kontinuierlichen Spektrum hervorhoben. Zur Zerlegung des Lichtes kamen bei diesen Versuchen ein photographisches Gitter, zwei große Flintglasprismen und ein Flüssigkeitsprisma nach Königsberger einzeln oder in Kombinationen in Anwendung. Von den untersuchten Metallen gaben Eisen und Kupfer den günstigsten Lichtbogen, auch Messing brannte sehr gut. Bei einer Stromstärke von 10—15 Amp. und Stäben von 10—15 mm Durchmesser gab Fe ein sehr helles, weißes Licht, dessen Spektrum aber zu linienreich war, so daß auch bei stärkster Dispersion die einzelnen Spaltbilder nicht mehr weit genug getrennt werden konnten. Kupfer brannte bei größerem Stabdurchmesser (20 mm) ebenfalls sehr ruhig, das Spektrum war linienärmer und günstiger wie das vorige, da die hellen Linien in Grün und Rot genügend weit auseinander lagen. Zink lieferte sehr schönes helles Licht, schmolz aber bei einigermaßen großen Stromstärken sofort ab und entwickelte sehr dicke, weiße Dämpfe. Messing oder Messing und Kupfer vertrugen eine größere Stromstärke und erzeugten einen ziemlich ruhigen Lichtbogen. Die größte Ruhe des Bogens wurde jedoch erzielt, wenn als positive Elektrode das Metall verwandt wurde, während der negative Pol aus Homogenkohle bestand. In allen Fällen wurde jedoch der Bogen sofort unruhig, zischte und rotierte, sobald das Metall weißglühend war. Versuche, den Lichtbogen zur Kühlung der Elektroden unter Flüssigkeit zu erzeugen, gelangen nicht. Bei derartigen Spektralaufnahmen der Interferenzbilder waren Expositionszeiten von 5—10 Min. erforderlich, wenn die Maschine in Betrieb war. Um scharfe Bilder zu erzielen, war aber während der Exposition größtmögliche Ruhe des Lichtes unbedingt erforderlich. Diese konnte aber auch bei ständiger Regulierung der Lampe (Handregulierlampe) nie in genügender Weise erreicht werden. Mit dem ungleichmäßigen Brennen des Bogens, welches auch bei Benutzung von Magneten und Drosselspulen nicht besser wurde, waren naturgemäß starke Spannungsschwankungen an den Elektroden verknüpft, welche sich ins Leitungsnetz aus-

breiteten, so daß auch die Tourenzahl des Motors, der von derselben Leitung gespeist wurde, ständig schwankte. Die Aufnahmen mit dieser Anordnung hatten deshalb nicht den gewünschten Erfolg.

Als Ersatz für die reinen Metallelektroden dienten nun später Kohlestäbe mit Füllungen aus verschiedenen Metallsalzen, wobei nur das vom Bogen emittierte Licht benutzt und das direkte Kraterlicht durch passende Blenden zurückgehalten wurde. Die sogenannten Spektralkohlen von Siemens erwiesen sich hierbei als unzweckmäßig, sie brannten ziemlich unruhig und zu rasch ab. Kohlestäbe mit Leuchtzusätzen, teilweise mit Metalladern, wie sie in der Beleuchtungstechnik (Effektkohlen) Verwendung finden, gaben zwar einen sehr hellen und ruhigen Bogen, besaßen aber zu viel Beimengungen, so daß die Spektren zu linienreich waren. Deshalb wurden von der Firma Gebr. Siemens auf besonderen Wunsch Kohlen mit chemisch-reinen Salzen der Metalle Cu, Zn, Cd und Ca als Füllungen hergestellt. Diese waren für den vorliegenden Zweck geeigneter als die anderen Kohlestäbe, bei ihnen trat aber das Nebenlicht neben dem Emissionslicht der Metalldämpfe sehr stark hervor. Bei größeren Stromstärken erschienen die Emissionsspektren stärker, dann aber brannte der Bogen sehr unruhig, und die Füllungen waren in kurzer Zeit verflüchtigt. Die spektrographischen Aufnahmen ließen sich jedenfalls auch hier nicht mit der nötigen Präzision ausführen. Ebenso konnte eine direkte, visuelle Ausmessung der Interferenzen wegen der Beaufsichtigung, welche Motor und Bogenlampe ständig erforderten, nicht durchgeführt werden. Die Versuche in dieser Richtung wurden daher abgebrochen und eine Anordnung gewählt, bei welcher Lichtquellen mit kontinuierlichem Spektrum benutzt werden konnten.

Die Interferenzstreifen wurden nun so gedreht, daß sie parallel zur Trennungslinie im Koinzidenzprisma waren, also senkrecht zum Spalt des Spektrographen lagen. Im Spektrum erschienen die Interferenzen ebenfalls in einfarbigem Lichte, wie bei der anderen Anordnung, aber parallel zur Längsausdehnung des Spektrums. Sie zogen sich, vom roten nach dem violetten Ende schwach konvergierend, durch alle Farben, wobei die Trennungslinie der beiden Gesichtsfeldhälften als



zu nentschwach. Die photogr
ferenzen gelangen bei ruhende
jedoch im Betrieb, so mußt
positionszeit wie in Ruhe gewäl
zu erhalten. Während dieser
nun die Tourenzahl der Mas
gehalten werden. Tagsüber we
netz, an welches der Motor ar
auch mag die Bogenlampe, die i
verursacht haben, aber auch
im Leitungsnetz erwartet wer
genügende Konstanz in der To
scharfe Aufnahmen zu erhalte
der Maschine vor den Versuc
Motors durch gleichzeitigen A
zweiten Motors nicht mit genü
diese Versuche aufgegeben unc
tische Interferenzstreifen verzic

Hierbei mag noch erwähn
reichen Spektralaufnahmen unt
folgende sehr gut für den jewe
bewährten:

1. Viridin-Inaloplatten (anti-hal
(ganzes Spektrum);

§ 7. Das endgültige Meß- und Aufnahmeverfahren.

Da die Versuche zur Herstellung von monochromatischem Lichte an den geringen dabei erreichbaren Helligkeiten scheiterten, wurden die definitiven Messungen unter Zuhilfenahme von Filtern aus gefärbten Gläsern ausgeführt. Diese Lichtfilter ließen zwar noch ziemlich große Wellenlängenkomplexe durch, absorbierten aber doch ca. 50 Proz. der auffallenden Lichtmenge, so daß die Helligkeit der Interferenzen sowohl für photographische Aufnahmen als auch visuelle Messungen bei verdunkeltem Beobachtungsraume gerade noch ausreichte. Versuche, die durchgelassenen Wellenlängengebiete durch größere Glasdicken oder Kombinationen von Filtern einzuengen, waren bei der damit verbundenen, starken Absorption ohne Erfolge geblieben. Die Streifen erschienen aber auch bei den einfachen Filtern sehr scharf und schwarz, nur bei Benutzung von grünem Lichte zeigten sich schwach farbige Ränder, welche sich aber als nicht störend erwiesen. Da die Filter aus ausgesuchten, beiderseitig planpolierten Glasscheiben bestanden, konnten sie, ohne daß eine Bildverschlechterung eintrat, zwischen Koinzidenzprisma und Beobachtungsinstrument gesetzt werden, teilweise befanden sie sich allerdings auch direkt hinter der Bogenlampe.

Bei den Versuchen, welche für die Herleitung des Resultates Verwendung fanden, wurden folgende zwei Gläser benutzt.

Nr.	Farbe	Dicke	Durchlässig für $\lambda = \mu\mu$	Mitte: $\mu\mu$	Schwach sichtbar
1	rot	1.7 mm	605—649	624	grün
2	hellgrün	2.4 „	516—580	535	rot

Die Durchlässigkeit der Filter wurde mit Hilfe eines Taschenspektroskopes mit Wellenlängenskala bestimmt.

Die photographischen Aufnahmen wurden mit einer Spektrometerkamera mit verschiebbarer Platte P (Fig. 6) ausgeführt, wobei zwischen Koinzidenzprisma S und Kameraobjektiv relat. Öffnung 1:5, $f = 300$ mm, das Reflexionsprisma K zur Knickung der Strahlen wegen Raummangels und das Fernrohrobjektiv N aufgestellt waren, um bei einer Vergrößerung des Interferenzbildes auf das Sechstache die Baulänge nicht zu groß werden

zu lassen. Bei dieser Anordnung betrugen die Expositionszeiten ca. 0,5 Sek., wenn der Apparat nicht rotierte, war aber die Maschine in Betrieb, so war die 600—800mal größere Zeit (für verschiedene Farben etwas verschieden) nötig, um brauchbare Negative zu erhalten. Nimmt man an, daß für die Exposition einer photographischen Platte nur die gesamte auftreffende Lichtmenge, ohne Rücksicht auf deren Dauer und Stärke, in Frage kommt, so ist die Belichtungsdauer bei rotierendem Apparat durch die Summe der Blitze bei jeder Umdrehung gegeben. Läuft die Maschine demnach m Touren pro Minute, so ist die Dauer eines einmaligen Aufleuchtens der Interferenzen in Sekunden:

$$t = \frac{60}{m \cdot 720},$$

wenn man den Prismenkranz um 0,5° bis zum völligen Verschwinden, von deren Erscheinen an gerechnet, verdrehen muß, wobei während der Drehung immer gleiche Helligkeit des Bildes angenommen wird. Damit nun die Belichtungszeiten bei rotierendem und ruhendem Apparat gleich werden, muß folgende Gleichung gelten, in welcher a (in Minuten) die Expositionszeit bei rotierendem Apparat bedeutet:

$$a\,m\,t = \frac{60\,m\,a}{720\,m} = 0{,}5,$$

oder

$$a = 6 \text{ Min.}$$

Diese Betrachtung gilt selbstverständlich nur für Umlaufsgeschwindigkeiten, bei denen die Dauer einer Umdrehung kleiner als 6 Min. ist, denn im andern Falle wäre es möglich, daß innerhalb 6 Min. gar kein Licht zur Platte gelangen könnte. Der berechnete Wert stimmt innerhalb gewisser Grenzen mit der experimentell bestimmten Belichtungsdauer überein, welche im Durchschnitt 5 bis 7 Min. betrug. Die zweite Folge aus obiger Überlegung, die Unabhängigkeit der Belichtungsdauer von der Tourenzahl, war aber anscheinend nicht erfüllt, denn bei hohen Umlaufsgeschwindigkeiten der Maschine mußten die Platten oft mehr als 15 Min. belichtet werden, ehe sich überhaupt ein Schimmer der Interferenzen zeigte. Diese Erscheinung könnte vielleicht durch eine Art Reizschwelle für die Platten erklärt

werden, indem diese bei genügend kurzen und sehr schwachen Lichtblitzen $\left(\text{Dauer} = \frac{1}{12000} \text{ Sek. bei 1000 Touren pro Minute}\right)$ an Empfindlichkeit verlieren.

Für jede Farbe wurde Fokussierung und Expositionsdauer durch Probeaufnahmen bestimmt. Zur visuellen Beobachtung der Streifenverschiebungen kam ein sog. Kometensucher der Universitätssternwarte nach Vorsetzen eines passenden Objektives in Verwendung. Hierbei wurde ein Koinzidenzprisma mit vertikaler Trennungslinie, des größeren Gesichtsfeldes wegen, benutzt.

Für die direkte Ausmessung der Interferenzen war der Kometensucher mit einem Schraubenmikrometer versehen, welches gestattete, das Fernrohrbild in Millimetern auszuwerten (Vergr. ca. 25). Die Aufstellung des an sich sehr schweren Instrumentes war auf dem Steinboden des Beobachtungsraumes hinreichend stabil.

Die Tourenzählvorrichtung arbeitete vollkommen selbsttätig und bedurfte keiner Überwachung. Signale, welche mit Hilfe eines besonderen Tasters gleichzeitig mit den Maschinenzeichen auf den Chronographen registriert wurden, gestatteten, neben der Tourenzahl Zeit und Dauer jeder Exposition oder Einstellung genau zu ermitteln, so daß diesbezügliche Notizen während der Beobachtung fortfielen. Ein im Beobachtungsraum angebrachtes Relais ließ stets erkennen, ob diese Vorrichtung ordnungsgemäß funktionierte.

Die Zimmertemperatur wurde mittels mehrerer im Versuchsraume verteilter Thermometer überwacht, ein Ventilator sorgte stets für möglichste Verteilung der durch die Bogenlampe und die Widerstände erzeugten Wärme. Ebenso maß man in regelmäßigen Abständen die Temperaturen der Lager und des Innern des Prismenbehälters.

Bogenlampe und Motor arbeiteten meist derart ruhig, daß ein Nachregulieren während einer Aufnahme oder Messung selten nötig war.

Zur Bestimmung der Breite und Verschiebung der Interferenzstreifen wurde sowohl bei der Ausmessung von Platten als auch bei visuellen Messungen ein Verfahren angewandt,

welches Hr. Pulfrich[1]) in seiner Abhandlung über das Abbe-Fizeausche Dilatometer empfiehlt.

Sind nämlich l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 die Mikrometerablesungen bei den Einstellungen der Meßmarke auf fünf nebeneinanderliegende Streifen, so sind, äquidistante Streifen vorausgesetzt, die Streifenbreite b in Mikrometerteilen und die Lage l_s des mittelsten Streifens gegeben durch die Gleichungen:

$$b = \tfrac{1}{6}\left(l_5 + l_4 - (l_2 + l_1)\right), \quad ^2)$$
$$l_s = \tfrac{1}{5}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5).$$

Zur Ausmessung der photographischen Platten wurde ein Komparator von C. Zeiß benutzt, welcher die gemessenen Längen von einer Nickelstahlskala abzulesen gestattete. Direkt konnten am Kopf der Mikrometerschraube noch 0,001 mm abgelesen werden, 0,0001 mm waren mit Sicherheit zu schätzen. Als Meßmarke diente ein Doppelfaden von passender Weite, welcher sich für Interferenzmessungen als sehr geeignet zeigte. Die Vergrößerung des Meßmikroskopes ließ sich variieren, so daß für jede Streifenbreite die günstigsten Verhältnisse leicht eingestellt werden konnten.

Für direkte, visuelle Messungen am Apparat fand ein Fernrohr mit gutem Schraubenmikrometer Verwendung.

Die Teilfehler der Nickelstahlskala des Komparators und die Fehler der Mikrometerschrauben wurden nicht näher untersucht, nachdem eine Reihe von Einstellungen auf Probeobjekte ergeben hatte, daß an allen benutzten Stellen die Teil- und Schraubenfehler sicher kleiner waren als die Einstellsicherheit. Etwaige zufällige Teilungsfehler wurden bei den definitiven Messungen dadurch eliminiert, daß bei der Repetition von Messungen immer andere Bereiche der Skala und der Schrauben in Benutzung kamen.

Bei genügend breiten und scharfen Interferenzen, wie man sie bei Benutzung von Filtern stets erhalten konnte, war es möglich, sowohl Breite als Lage der Streifen bis auf $\frac{1}{100} b$ genau zu bestimmen. Die Streifenverschiebungen betrugen aber nur 0,1 bis 0,2 b, so daß bei der erwähnten Meßgenauigkeit die

1) K. Pulfrich, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 23. S. 411—413. 1893.
2) Vgl. die Bemerkung zu dieser Formel auf S. 408.

Werte der Verschiebungen bis zu 10% ihres Betrags gefälscht werden konnten. Durch mehrfache Wiederholungen der Messungen ließen sich diese Fehlergrenzen nur unwesentlich einengen. Auch konnte die Breite der Interferenzen nicht zu groß genommen werden, da einmal mit der Breite die Einstellsicherheit abnimmt, dann aber erschienen auch stark verbreiterte Streifen im Apparat nicht mehr gerade, sondern hyperbelartig gebogen.

Zu diesen Einstellfehlern addierten sich noch etwaige Fehler, die durch die Ungleichförmigkeit in der Tourenzahl der Maschine entstanden. Die Messung der Tourenzahlen selbst war, wie schon gezeigt wurde, genauer als für die vorliegenden Zwecke nötig war. Die Geschwindigkeit der Maschine blieb meist während einer Beobachtung hinreichend konstant, wenn sie vorher lange genug eingelaufen war (5—10 Min.). Die Schwankungen in der Tourenzahl konnten nachträglich sehr leicht aus den Chronographenregistrierungen erkannt werden. Geschwindigkeitsänderungen bis zu höchstens 1% der Tourenzahl wurden bei der Berechnung noch zugelassen, Messungen bei stärkeren Geschwindigkeitsänderungen wurden ausgeschlossen.

Die Lage des Streifensystems bei ruhender Maschine heiße Nullpunkts- oder Ruhelage. Um über die Bewegung dieser Nullpunktslage, hervorgerufen durch Temperaturänderungen im Glase, Verlagerung von Prismen, Nachgeben von Schrauben, elastische Verziehungen usw., stets genau orientiert zu sein, wurden nach je einigen Messungen bei bewegter Maschine zwei bis drei Nullpunktsbestimmungen ausgeführt. Ferner ließ man den Apparat nach jeder Ruhelage in der entgegengesetzten Richtung wie vorher laufen, um zu sehen, ob die Streifenverschiebungen auch entgegengesetzt gleich ausfielen, was als sicheres Kriterium dafür anzusehen war, daß im Apparat keine Verziehungen aufgetreten waren.

Die folgenden Tabellen lassen das zur Bestimmung der Breitenverschiebung angewandte Verfahren erkennen.

Nachdem bei ruhendem Apparat durch Einstellung auf fünf nebeneinander liegende Streifen die Lage des Nullpunktes und die Streifenbreite erhalten war, wurde der Apparat in

Rotation versetzt und die Einstellung jener fünf Streifen verschiedene Male, im vorliegenden Fall fünfmal, wiederholt. Für die Zeiten dieser Messungen geben in Spalte 2 die z die zu 50 Touren der Maschine nötigen Sternzeitsekunden an und hieraus lassen sich ohne weiteres die in Spalte 3 angegebenen Tourenzahlen p. Min. ableiten. Spalte 4 und 5 geben die aus jenen Einstellungen gefundenen Streifenbreiten b und Streifenlagen l_s. Unter l_0 sind die für die Zeiten der Messungen bei bewegtem Apparat interpolierten Nullpunktsstellungen angeführt. $l_0 - l_s$ sind dann die in Mikrometerteilen ausgedrückten Verschiebungen δ_g oder δ_m, je nachdem die Rotation gegen oder mit dem Uhrzeiger erfolgt war. Die Verschiebungen δ_m sind hierauf durch Interpolation in die Werte übergeführt worden, welche beobachtet worden wären, wenn die Messungen bei denselben Rotationsgeschwindigkeiten des Apparates angestellt worden wären wie die Messungen der δ_g. Die hierbei sich zeigende Verschiedenheit der bei entgegengesetzt gleichen Umdrehungsgeschwindigkeiten gefundenen Werte δ_g und δ_m ist zum Teil den Messungsfehlern, zum andern Teil aber jedenfalls der Verziehung des Polygons infolge der Rotation zuzuschreiben. Ein systematisches Überwiegen nach einer Seite konnte jedoch nicht konstatiert werden. Wurden die Abweichungen größer als 6—7 %, so wurde eine neue Justierung des Apparates vorgenommen und die Beobachtungen fanden keine Verwendung. Das Mittel δ der ohne Rücksicht auf das Vorzeichen genommenen Verschiebungen δ_g und δ_m war als die der betreffenden Rotationsgeschwindigkeit des Apparates zugehörige Streifenverschiebung anzusehen.

1. Nullpunkt: $4{,}395^p$; $b = 1{,}170^p$.

2. Drehung gegen den Uhrzeiger.

Nr.	z	Touren p. Min.	b	l_s	l_0	δ_g
1	6,35	472,6	$1{,}173^p$	$4{,}501^p$	$4{,}395^p$	$- 0{,}106^p$
2	5,73	524,7	1,176	4,539	4,394	0,145
3	5,28	568,4	1,170	4,547	4,393	0,154
4	5,10	588,4	1,177	4,579	4,392	0,187
5	4,71	637,2	1,171	4,589	4,392	0,197

3. Nullpunkt: $4{,}392^{p}$: $b = 1{,}176^{p}$.

4. Drehung mit dem Uhrzeiger.

Nr.	x	Touren p. Min.	b	l_r	l_0	δ_m
1	6,00	500,1	1,172	4,272	4,392	+ 0,120
2	5,40	555,7	1,175	4,241	4,395	0,154
3	4,95	606,2	1,170	4,207	4,397	0,190
4	4,69	639,3	1,176	4,179	4,399	0,220

5. Nullpunkt: $4{,}399^{p}$; $b = 1{,}169^{p}$.

Nr.	x	Touren p. Min.	δ_m	δ_v	δ	Abweichung
1	5,73	524,7	+ 0,136	− 0,145	0,141	± 0,005 (4%)
2	5,28	568,4	0,168	0,154	0,161	0,007 (4%)
3	5,10	588,4	0,185	0,187	0,186	0,001 (0,6%)
4	4,71	637,2	0,217	0,197	0,207	0,010 (5%)

$b = 1{,}173^{p}$ (Mittel).

Im allgemeinen erschienen die Interferenzen, wenn der Motor nicht zu rasch anzog, vollkommen ruhig. Ein merkliches Zittern war erst bei 800 bis 900 Touren pro Minute zu beobachten. Während der ersten Zeit der Untersuchung gelang es, die Interferenzen selbst bei 1800 Umdrehungen des Prismenkranzes pro Minute noch zu sehen, diese Sichtbarkeitsgrenze sank aber später immer tiefer, ohne daß neue Justierung oder starkes Anziehen der Befestigungsschrauben der Prismen sie wieder auf die frühere Höhe bringen ließ. Bei den definitiven Messungen wurde daher nicht über 750 Touren pro Minute hinausgegangen, um keine Nullpunktsversetzungen während einer Beobachtung befürchten zu müssen, obgleich hierbei die Verschiebung des Streifensystems ziemlich gering war. In dieser Beziehung erwies sich überhaupt die visuelle Messung der photographischen Aufnahme trotz ihrer geringeren Meßgenauigkeit überlegen, denn letztere wies stets bedeutend größere Nullpunktsschwankungen auf als die erste, was wohl seinen Grund in der großen Länge der Belichtungszeiten hatte. Der Nullpunkt selbst änderte sich bei allen Beobachtungsserien in demselben Sinne, er stieg mit wachsender Temperatur des Prismenbehälters, ohne daß aber zwischen beiden Änderungen eine konstante Beziehung fest-

zustellen gewesen wäre. Eine Abhängigkeit der Nullpunktsbewegung vom Drehungssinn der Maschine bestand nicht.

Die Streifenbreite zeigte sich bei allen Messungen sehr konstant, ihre Änderung blieb stets unter der Fehlergrenze der Beobachtung. Die während einer sehr langen Beobachtungsserie von mehr als acht Stunden erfolgten Schwankungen des Nullpunktes und der Streifenbreite sind aus folgender Tabelle zu ersehen.

Zeit	Zahl der Aufnahmen	Nullpunktlage in mm	Streifenbreite in mm
10 Uhr 45 Min.	15	1,6934	0,1930
12 „ 13 „	13	1,7353	0,1916
13 „ 33 „	12	1,7639	0,1900
15 „ 0 „	13	1,7796	0,1890
16 „ 15 „	11	1,8205	0,1887
17 „ 10 „	12	1,8373	0,1873
18 „ 15 „		1,8489	0,1864

Im Laufe von 76 photographischen Aufnahmen hatte sich also der Nullpunkt um 0,1555 mm und die Streifenbreite um 0,0066 mm geändert, so daß im Durchschnitt auf eine Aufnahme eine Änderung von 0,002 bzw. 0,0001 mm entfällt, welche also noch innerhalb der Fehlergrenze der Beobachtung zu liegen kommt.

§ 8. Anpassung der Formel für die Streifenverschiebung auf den Fall eines rotierenden Körpers.

Wie bereits auf S. 392 angegeben, lautet die Formel für die in Streifenbreiten ausgedrückte Streifenverschiebung:

$$(1) \qquad \Delta = \frac{2 l q n^2 (1 - x)}{\lambda c} .$$

Diese Formel ist aber nicht ohne weiteres auf den bei den Versuchen vorliegenden Fall anwendbar, denn ein Lichtstrahl durchläuft bei seinem Durchgang durch das Prismenpolygon Teile des bewegten Mediums, die ganz verschiedene und auch verschieden gerichtete Geschwindigkeiten besitzen. Um sie daher zur Anwendung auf den hier vorliegenden Fall geeignet zu machen, gibt Harreß folgende Ausführungen.

In einem starren, durchsichtigen Medium, welches mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse O rotiert,

pflanze sich ein Lichtbündel LL' geradlinig fort (Fig. 7). Hierbei ist angenommen, daß die Richtung der Strahlen durch die Körpergeschwindigkeit nicht geändert wird, welche Annahme theoretisch nicht ganz richtig ist, da die Mitführung des Lichtes durch senkrecht zu seiner Fortpflanzungsrichtung bewegte Materie noch durch quadratische Glieder in v/V bestimmt ist. Wegen der Kleinheit dieser Glieder kommen sie aber hier nicht in Frage.

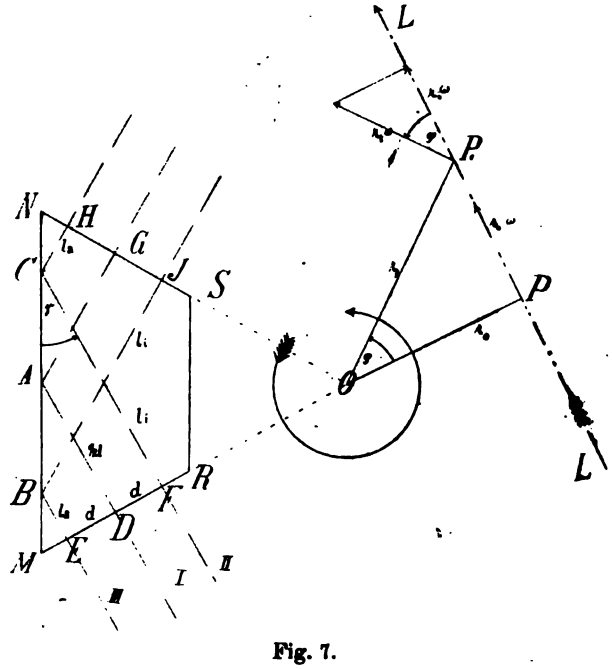


Fig. 7.

Im Punkte P, dem Treffpunkte des Lotes r_0 von O auf LL', sind die Richtungen der Ausbreitung des Lichtes und der Körpergeschwindigkeit dieselben, so daß für die Mitführung der Wert

$$r_0\,\omega$$

in Frage kommt.

In einem anderen Punkte P_1 des Lichtstrahles, sollen die Richtungen zwischen der Fortpflanzung des Lichtes und der Tangentialgeschwindigkeit des Mediums den Winkel $\varphi = \sphericalangle r_0 r_1$ einschließen. Dann kommt für die Änderung der Geschwindig-

keit des Lichtes nur die Projektion von $r_1 \omega$ auf LL' in Betracht. Diese Komponente der Körpergeschwindigkeit ist:

$$r_1 \omega \cos \varphi = r_0 \omega .$$

Da die Geschwindigkeit des vom Licht durchsetzten Körpers in der Richtung des Lichtstrahles im Punkte P_1 demnach gerade so groß ist wie in P, so ist auch die Mitführung des Äthers in P_1 und in P und überall auf dem Strahl LL' von gleicher Größe. Die Änderung der Lichtgeschwindigkeit in einem rotierenden Medium ist demnach so lange konstant, als sich der Lichtstrahl geradlinig fortpflanzt.

Führt man durch innere Reflexionen ein Lichtbündel ganz beliebig durch das rotierende Medium, so ist die resultierende Wirkung auf ein passend erzeugtes Interferenzsystem gleich der Summe der Einzelwirkungen während der geradlinigen Wegteile des Lichtes im Medium. Die Formel (1) läßt sich also schreiben:

$$\Delta = \frac{2 n^2 (1 - x)}{\lambda c} \omega \Sigma l r , \tag{2}$$

worin l die Wege des Lichtes von einer Reflexion zur anderen und r die Lote vom Rotationszentrum auf diese bedeuten.

Nun ist aber

$$\omega = \frac{2 \pi 50}{z_m} ,$$

wo z_m die Zeitdifferenz zwischen zwei Kontakten der Tourenzählvorrichtung in Minuten mittlerer Zeit bedeutet, so daß man folgende Formel erhält:

$$\Delta = 200 \frac{n^2 \pi (1 - x)}{z_m \lambda c} \Sigma l r . \tag{3}$$

Der Ausdruck $\Sigma l r$ ist nun für das benutzte Polygon numerisch zu bestimmen.

In Fig. 7 sei $MNRS$ ein Prisma des Polygons, in welches ein Strahlenbündel senkrecht zur Fläche MR eintritt, an MN reflektiert wird und senkrecht zu NS wieder austritt. Von einer eventuellen Änderung des Reflexionsgesetzes durch Rotation des Prismas um O soll hier abgesehen werden.

Betrachtet man drei Strahlen, den Mittelstrahl I und zwei im Abstande d zu ihm symmetrisch liegende, andere Strahlen II

und *III*, so ergibt sich die Summe der beiden Produkte aus den Teilstrecken und den von *O* auf sie gefällten Loten

für Strahl *II* zu $r_a l_a + r_i l_i = (r + d) l_a + (r - d) l_i$,

„ „ *I* „ $r \frac{l}{2} + r \frac{l}{2} = r l$,

„ „ *III* „ $r_i l_i + r_a l_a = (r - d) l_i + (r + d) l_a$.

Hierbei ist $l = s \cdot \cos \gamma$ und $l_a + l_i = l$.

Für einen beliebigen Strahl im Abstande d vom Mittelstrahl ist also die Summe jener beiden auf ein Prisma sich beziehenden Produkte gleich

$$r l - d (l_i - l_a).$$

Dieser Ausdruck hat für $d = 0$. also für den Mittelstrahl, sein Maximum $r l$ und nimmt mit wachsendem d erst langsam, dann rasch ab, wie man sofort erkennt, wenn man ihn in die Form überführt

$$r l - 2 d^2 \operatorname{ctg} \gamma.$$

Für $d = \pm 10$ mm, $l = 114$ mm und $r = 18{,}3$ cm macht das Glied $2 d^2 \operatorname{ctg} \gamma$ schon 3 Proz. von $r l$ aus. Trotzdem haben Harreß und Hr. Harzer wohl mit Recht nur den Mittelstrahl bei der Summierung der Produkte berücksichtigt, denn bei den Versuchen wurde darauf geachtet, daß die Höhe der Bogenlampe, sowie sie sich etwas geändert hatte, sofort korrigiert wurde. Jedenfalls ist der durch Einführung des Maximalwertes der Produktensumme in das Resultat gekommene Fehler viel geringer als wenn man unter der Annahme gleichmäßigen Vorkommens der verschiedenen möglichen Bogenlampenstellungen alle die Fläche a^2 durchdringenden parallelen Lichtstrahlen in Betracht gezogen hätte.

Nach Harreß' Schätzung könnte der Fehler höchstens 1 bis 2 Proz. betragen, das Resultat für den Mitführungskoeffizienten sich also um so viel zu hoch ergeben.

Nicht geringere Beachtung verdient, worauf Hr. v. Laue aufmerksam gemacht hat, der Umstand, daß die beobachteten Interferenzstreifen, wie Fig. 5 (S. 406) zeigt, nicht von den beiden das Prismenpolygon in entgegengesetzter Richtung durchlaufenden Mittelstrahlen selbst, sondern von etwas schief auffallenden Strahlen herrührten. In der Mitte der kreisförmigen Interferenzfigur würden die Streifen nicht von gleicher Breite ge-

wesen sein, dies fand in genügender Ant
Entfernung von der Mitte statt. Von
diese Quelle der Unsicherheit des Resu

In Formel (3) ist die Summe Σl
tation des Apparates teilnehmenden W
auszudehnen, auch auf die Strecke zwis
der Prismenseite DD' in Fig. 1 (S. 39
zu beachten, daß der Mitführungskoeffiz
ist und daß Strecken, auf welchen der L
gesetzten Richtungen um den Mittelpun
herumläuft, mit entgegengesetzten Vorze

Die Wege des Lichtstrahles im Mit
auch bei Harreß und bei Hrn. Harz
rücksichtigt.

Ausführlicher geschrieben lautet F

$$(4) \qquad \Delta = \frac{200 n^2 \pi (1 - x)}{x_m \lambda c} \sum_{\text{Glas}} l r + \frac{}{}$$

wo $\sum_{\text{Glas}} l r = (8 s_1 \cos \gamma_1 + s_2 \cos \gamma_2) \left(r - \right.$

$$\left(r \cos (180^0 - 4\alpha) + \frac{a}{2}\right) - \left(a \cos\right.$$

und $\sum_{\text{Luft}} l r = - a (r - a) \cos (180^0 - 4\alpha)$

Drücken wir die Anzahl z_m Minute
zu 50 Touren der Maschine erforderlich
beobachteten z Minuten Sternzeit aus,
vall gleich ist, setzen wir also

$$z_m = 0{,}99727\ z,$$

so bekommen wir

für $\lambda = 625\,\mu\mu$ und $n_{625} = 1{,}57167$ $x_{625} =$

für $\lambda = 535\,\mu\mu$ und $n_{535} = 1{,}57665$ $x_{535} =$

Die Abweichung der Harreßsche

$$x_{625} = 0{,}62917\ z \cdot$$

$$x_{535} = 0{,}49952\ z \cdot$$

kommt, wie schon erwähnt, hauptsächli
in seiner Formel für die Streifenversch

$1 - x$ stehen hat, außerdem aber hat er die Wegstrecken des Lichtstrahls durch die Luft und durch den zwischen DD' und EE' liegenden Glaskörper unberücksichtigt gelassen und bei Einführung von z an Stelle von z_m einen Rechenfehler begangen.

§ 9. Zusammenstellung der Messungsergebnisse.

Die folgenden beiden Tabellen geben die Einzelresultate, welche mit den beiden farbigen Gläsern, also mit Benutzung der Wellenlängen $\lambda = 625\ \mu\mu$ und $\lambda = 535\ \mu\mu$ in je vier Messungsreihen erhalten wurden. z bedeutet wieder die Anzahl der Sternzeitsekunden, welche der Apparat zu 50 Umdrehungen brauchte, δ die für diese Rotationsgeschwindigkeit gefundene Streifenverschiebung, ausgedrückt in Mikrometerteilen, Δ dieselbe Streifenverschiebung, ausgedrückt in Streifenbreiten, und $\tilde{x}$ den Mitführungskoeffizienten, berechnet nach den Formeln

$$x_{625} = 0{,}99627 - 0{,}59004\ z \cdot \Delta,$$
$$x_{535} = 0{,}99629 - 0{,}50188\ z \cdot \Delta.$$

Die letzte Spalte enthält den aus den einzelnen Messungsreihen sich ergebenden Wert von x.

Tabelle I.

$\lambda = 625\ \mu\mu$.

Nr.	z	δ	Δ	x	Mittelwert x
			1. Reihe.	$b = 1{,}019^{\mathrm{p}}$	
1	6,09	0,120	0,118	0,572	
2	6,04	0,108	0,106	0,618	
3	5,55	0,126	0,124	0,590	
4	5,54	0,127	0,125	0,588	
5	5,43	0,118	0,116	0,625	
6	5,37	0,120	0,118	0,622	$x = 0{,}596$
7	5,11	0,134	0,132	0,598	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}0240$
8	4,92	0,149	0,146	0,572	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}0066$
9	4,81	0,152	0,149	0,573	
10	4,62	0,134	0,132	0,636	
11	4,50	0,148	0,145	0,611	
12	4,38	0,162	0,159	0,585	
13	4,18	0,179	0,176	0,562	

Tabelle I (Fortsetzung).

Nr.	x	δ	Δ	x	Mittelwert x
			2. Reihe. $b = 1{,}022^{p}$		
1	6,03	0,121	0,118	0,576	
2	5,85	0,124	0,121	0,579	
3	5,21	0,136	0,133	0,587	
4	5,09	0,141	0,137	0,585	
5	4,93	0,151	0,147	0,569	
6	4,87	0,138	0,134	0,611	$x = 0{,}592$
7	4,78	0,146	0,142	0,596	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}017$
8	4,70	0,153	0,149	0,583	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}005$
9	4,69	0,154	0,150	0,581	
10	4,29	0,148	0,144	0,632	
11	4,18	0,168	0,162	0,602	
12	4,12	0,167	0,163	0,600	
			3. Reihe. $b = 1{,}111^{p}$		
1	5,81	0,128	0,115	0,602	
2	5,60	0,133	0,120	0,600	
3	5,28	0,149	0,135	0,576	
4	5,27	0,128	0,115	0,639	
5	5,15	0,158	0,142	0,565	
6	5,14	0,142	0,128	0,608	
7	5,12	0,145	0,131	0,601	
8	5,04	0,134	0,121	0,636	
9	4,99	0,155	0,140	0,584	
10	4,97	0,165	0,149	0,559	$x = 0{,}586$
11	4,90	0,168	0,151	0,560	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}023$
12	4,87	0,161	0,145	0,580	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}005$
13	4,86	0,154	0,139	0,598	
14	4,81	0,160	0,144	0,588	
15	4,81	0,165	0,149	0,573	
16	4,78	0,163	0,147	0,582	
17	4,65	0,172	0,155	0,571	
18	4,59	0,175	0,158	0,568	
19	4,54	0,182	0,163	0,560	
20	4,54	0,177	0,159	0,570	
			4. Reihe. $b = 0{,}995$		
1	6,69	0,097	0,097	0,613	
2	6,67	0,097	0,097	0,614	
3	5,48	0,115	0,116	0,621	
4	5,48	0,119	0,120	0,608	
5	5,24	0,127	0,128	0,601	
6	5,10	0,125	0,126	0,617	
7	5,06	0,127	0,128	0,614	
8	5,05	0,127	0,128	0,615	
9	5,05	0,129	0,130	0,609	
10	5,04	0,130	0,131	0,607	
11	5,04	0,132	0,133	0,601	
12	5,08	0,139	0,140	0,581	

Tabelle I (Fortsetzung).

Nr.	z	δ	Δ	x	Mittelwert x
13	5,01	0,135	0,136	0,594	
14	5,00	0,140	0,141	0,580	
15	4,97	0,136	0,137	0,594	
16	4,94	0,137	0,138	0,594	$x = 0{,}590$
17	4,92	0,143	0,144	0,578	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}0187$
18	4,91	0,145	0,146	0,573	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}0032$
19	4,88	0,136	0,137	0,602	
20	4,85	0,138	0,139	0,599	
21	4,84	0,152	0,153	0,559	
22	4,76	0,152	0,153	0,567	
23	4,73	0,142	0,143	0,597	
24	4,70	0,153	0,154	0,569	
25	4,66	0,151	0,152	0,578	
26	4,64	0,153	0,154	0,575	
27	4,60	0,155	0,156	0,573	
28	4,60	0,147	0,148	0,594	
29	4,52	0,160	0,161	0,567	
30	4,51	0,157	0,158	0,576	
31	4,49	0,161	0,162	0,567	
32	4,47	0,161	0,162	0,569	
33	4,45	0,162	0,163	0,568	
34	4,35	0,166	0,167	0,568	
35	4,21	0,156	0,157	0,606	

Tabelle II.

$\lambda = 535\ \mu\mu$.

Nr.	z	δ	Δ	x	Mittelwert x
			1. Reihe.	$b = 1{,}018^{\mathrm{p}}$	
1	5,84	0,127	0,125	0,630	
2	5,78	0,135	0,133	0,610	
3	5,74	0,145	0,142	0,587	
4	5,73	0,143	0,140	0,594	
5	5,40	0,163	0,160	0,563	
6	5,31	0,147	0,144	0,613	
7	5,28	0,168	0,165	0,559	$x = 0{,}576$
8	5,12	0,159	0,156	0,595	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}0318$
9	5,10	0,185	0,182	0,530	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}0082$
10	5,10	0,158	0,155	0,600	
11	5,09	0,179	0,176	0,547	
12	5,09	0,174	0,171	0,560	
13	4,96	0,174	0,171	0,570	
14	4,95	0,195	0,192	0,519	
15	4,89	0,182	0,179	0,557	

Tabelle II (Fortsetzung).

Nr.	z	δ	Δ	x	Mittelwert x
			2. Reihe.	$b = 1{,}153^{\mathrm{P}}$	
1	8,52	0,100	0,087	0,624	
2	6,56	0,139	0,121	0,598	
3	6,48	0,144	0,125	0,590	
4	6,19	0,156	0,136	0,574	
5	6,07	0,154	0,134	0,588	
6	5,99	0,154	0,134	0.594	
7	5,92	0,157	0,137	0,589	
8	5,74	0,176	0,153	0,556	
9	5,60	0,164	0,143	0,594	
10	5,53	0,185	0,160	0,552	$x = 0{,}564$
11	5,50	0,194	0,168	0,532	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}029$
12	5,48	0,196	0,170	0,529	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}008$
13	5,39	0,199	0,173	0,528	
14	5,39	0,200	0,173	0,528	
15	5,36	0,193	0,167	0,547	
16	5,30	0,199	0,173	0,536	
17	5,27	0,195	0,169	0,549	
18	5,26	0,199	0,173	0,540	
19	5,12	0,202	0,175	0,547	
20	4,56	0,207	0,180	0,584	
			3. Reihe.	$b = 1{,}013^{\mathrm{P}}$	
1	5,85	0,142	0,140	0,585	
2	5,60	0,149	0,147	0,583	
3	5,54	0,140	0,138	0,613	
4	5,26	0,166	0,164	0,563	$x = 0{,}583$
5	5,23	0,154	0,152	0,595	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}018$
6	5,21	0,158	0,156	0,588	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}006$
7	4,99	0,170	0,168	0,576	
8	4,91	0,167	0,165	0,590	
9	4,63	0,194	0,192	0,550	
			4. Reihe.	$b = 1{,}242^{\mathrm{P}}$	
1	5,86	0,165	0,133	0,605	
2	5,40	0,193	0,156	0,574	
3	5,29	0,193	0,156	0,582	
4	5,17	0,204	0,164	0,571	
5	5,10	0,179	0,151	0,610	
6	4,93	0,204	0,164	0,591	
7	4,88	0,200	0,161	0,602	$x = 0{,}588$
8	4,86	0,201	0,162	0,601	Mittl. F. eines Einzelresult. $= \pm 0{,}016$
9	4,83	0,206	0,166	0,594	Mittl. F. des Mittels $= \pm 0{,}004$
10	4,83	0,213	0,172	0,579	
11	4,82	0,205	0,165	0,597	
12	4,59	0,214	0,172	0,600	
13	4,45	0,241	0,194	0,562	
14	4,37	0,248	0,200	0,558	

Als Mittelwerte der x ergeben sich aus den einzelnen Messungsreihen die folgenden Werte:

	x_{625}	x_{535}
1. Reihe	0,596 ± 0,0066 (m. F.)	0,576 ± 0,0082 (m. F.)
2. „	0,592 ± 0,0050	0,564 ± 0,0065
3. „	0,586 ± 0,0052	0,583 ± 0,0061
4. „	0,590 ± 0,0032	0,588 ± 0,0044

Bei dieser Mittelbildung sind, wie es in der Harreßschen Dissertation geschieht, die verschiedenen Resultate für x in je einer Versuchsreihe als von gleicher Zuverlässigkeit angenommen und haben daher alle das gleiche Gewicht erhalten. Nach der bei den Versuchen angewandten Methode sind aber die Messungen der Streifenverschiebung, d. h. die δ oder, was nahezu auf dasselbe hinauskommt, die Δ von gleicher Genauigkeit und daher mit gleichem Gewicht zu versehen, wie das in der Harzerschen Bearbeitung der Harreßschen Versuche geschehen ist.

Stellt man, um dem gleichen Gewicht der Δ Rechnung zu tragen, die Beobachtungsgleichungen in der Form auf

$$\frac{x_{625}}{0{,}59004 \cdot \varkappa} - \frac{0{,}99627}{0{,}59004 \cdot \varkappa} + \Delta = 0 \text{ und } \frac{x_{535}}{0{,}50188 \cdot \varkappa} - \frac{0{,}99623}{0{,}50188 \cdot \varkappa} + \Delta = 0,$$

so erhält man aus den einzelnen Messungsreihen die von den obigen nur wenig abweichenden Werte:

	x_{625}	x_{535}
1. Reihe	0,595 ± 0,0040 (m. F.)	0,573 ± 0,0050 (m. F.)
2. „	0,594 ± 0,0031	0,560 ± 0,0036
3. „	0,585 ± 0,0029	0,581 ± 0,0038
4. „	0,589 ± 0,0018	0,587 ± 0,0030

Da die Abweichungen der aus den einzelnen Reihen hervorgehenden Werte von x zum Teil größer sind als die mittleren Fehler, so ist klar, daß bei den verschiedenen Versuchsreihen nicht nur zufällige Fehler im Spiel waren. Vereinigt man trotzdem die letzt hingeschriebenen Werte nach der Methode der kleinsten Quadrate, indem man das Gewicht dem reziproken Wert des Quadrates des mittleren Fehlers proportional setzt, zu Endwerten, so findet man

$$x_{625} = 0{,}590 \pm 0{,}0013 \quad \text{und} \quad x_{535} = 0{,}577 \pm 0{,}0018,$$

wobei die angegebenen mittleren Fehler jedoch kaum Anspruch auf Beachtung erheben können.

Obwohl die für x_{625} und x_{535} gefundenen Werte ziemlich weit auseinander liegen, so ist durch die Versuche doch nicht als erwiesen anzusehen, daß der Wert der Mitführungskoeffizienten von der Wellenlänge des Lichtes abhängt: ist doch der Mitführungskoeffizient für rotes Licht in der dritten Versuchsreihe kleiner herausgekommen als der für grünes Licht in der vierten Versuchsreihe, während im allgemeinen das umgekehrte Verhältnis stattfindet. Der Theorie nach müßte aber der Mitführungskoeffizient für rotes Licht kleiner sein als der für grünes Licht, da die Formel $x = 1 - \frac{1}{n^2}$ für $n = 1{,}57167$ und $n = 1{,}57665$ die Werte liefert

$$x_{625} = 0{,}5952 \quad \text{und} \quad x_{535} = 0{,}5977.$$

Es haben bei den Harreßschen Versuchen offenbar manche Umstände eine nicht gar unbedeutende Unsicherheit des Resultates veranlaßt, weshalb eine Wiederholung der Versuche sehr erwünscht wäre. Gerade mit Rücksicht auf eine spätere Wiederholung sind im Vorstehenden die Erfahrungen, welche Harreß gemacht hat, und zwar auch die ungünstigen Erfahrungen, welche mit dieser und jener Anordnung gemacht wurden, ausführlich mitgeteilt worden. Auf die Notwendigkeit einer noch exakteren Konstruktion des Rotationsapparates deutet der von Harreß erwähnte Umstand hin, daß während der ersten Zeit der Untersuchung die Interferenzstreifen noch bei 1800 Umdrehungen des Apparates pro Minute gut zu sehen waren, bei den definitiven Messungen aber nicht über 750 Umdrehungen hinausgegangen werden konnte, und daß neue Justierung und stärkere Befestigung der Prismen keine Besserung brachte. Ferner macht Hr. v. Laue darauf aufmerksam, daß die Einzelwerte von x in Tab. I, Reihe 3 und 4, und in Tab. II, Reihe 1 und 2 anfangs, d. h. bei langsamerer Rotation des Apparates, über dem Mittelwert und gegen das Ende hin, bei schnellerer Rotation, unter dem Mittelwert liegen. Man darf wohl vermuten, daß die hier wirkende Fehlerquelle auch schon die ersten Messungen beeinflußt hat und das Resultat daher hat zu niedrig herauskommen lassen. — Eine weitere Fehlerursache war die Höhenänderung der Lichtquelle, infolge deren der Weg der Lichtstrahlen in den Prismen nicht dauernd derselbe war, d. h. nicht dauernd seine mittlere Lage beibehielt. Auch

wäre die Anwendung monochromatischen Lichtes, wenn ihm die genügende Intensität hätte erteilt werden können, sicherlich dem durch Filter hindurchgegangenen Licht vorzuziehen gewesen.

All diese Mängel fallen aber kaum der Methode zur Last, dürften vielmehr bei Wiederholung der Versuche zu vermeiden sein. Die Ergebnisse der Harreßschen Untersuchung können zu einer Wiederholung der Versuche nur ermutigen.

(Eingegangen 21. Januar 1920.)

2. *Zum Versuch von F.* *von M. v. Laue.*

In der vorhergehenden Veröffentlichun
über einen Versuch des verstorbenen Fra
Jahren 1909—1911, bei welchem mitte
erscheinung die Fortpflanzung des Li
drehenden Glaskörper beobachtet wird.
ihm der von Sagnac[1]) 1913 veröffentlic
Unterschied liegt darin, daß bei diesem d
der Lichtfortpflanzung ist (genauer: Lu
druck; doch unterscheidet sie sich optisch
Raum, als daß es auf den Unterschied a
alle Spiegel und sonstige, den Lichtweg
stimmende Apparate mit drehen. Daß b
die Lichtquelle und der Beobachtungsappa
streifen an der Drehung teilnehmen, wäh
feststehen, bedingt keinen wesentlichen
Interferenz kommenden Strahlen durchla
suchen zwischen ihrer Trennung und W
in Drehung befindliche Teile der Anordn
her erleiden beide Strahlen die gleiche
gilt sowohl bei Harreß wie bei Sagn
Interferenzerscheinung sind gemeinsam
tungslos.

Beide Versuche beweisen zunächst, d
gänge in einem sich gegen die Erde dre
anders verlaufen als in einem mit der E
letzteres dürfen wir hier mit hinreiche
ein berechtigtes System im Sinne der
tivitätstheorie betrachten. Für mechani

1) G. Sagnac, Compt. rend. **157.** S. 708
Phys. (5) **4.** S. 177. 1914.

bekanntlich jeder Versuch über die Zentrifugalkraft den entsprechenden Beweis (Sagnacs Deutung seines Versuchs als eines Nachweises für das Dasein eines „Äthers" ist durchaus nicht zwingend). Daß dieser Unterschied zwischen den genannten Bezugssystemen nach der Auffassung der allgemeinen Relativitätstheorie kein ursprünglicher ist, sondern die Folge ihrer verschiedenen Bewegung gegen das Fixsternsystem, brauchen wir hier nicht in Betracht zu ziehen.

Schon 1911 habe ich die relativistische Theorie für den später von Sagnac ausgeführten Versuch gegeben[1]) und möchte hier den Harreßschen Versuch in die Theorie mit einbeziehen. Insofern es sich bei ihm um die Lichtausbreitung in bewegten Körpern handelt, liegt letzterer in nächster Nachbarschaft des alten Fizeauschen und des neuen Zeemanschen[2]) Interferenzversuchs. Wir möchten im folgenden den Zusammenhang dieser Versuche besonders hervorheben.

In die Rechnung, welche Harreß selbst seinem Versuche beigab, hatte sich ein Versehen eingeschlichen, welches die Versuchsergebnisse zunächst unverständlich machte. Harzer[3]) hat dies bemerkt und eine Berechnung veröffentlicht, deren Ergebnis im wesentlichen richtig ist und zusammen mit einer Notiz von Einstein[4]) die Harreßschen Messungen mit genügender Genauigkeit zu deuten vermag. Aber volle Befriedigung vermögen wir auch bei dieser Form der Theorie nicht zu empfinden. Zunächst — das ist zwar bei der bisherigen Genauigkeit des Harreßschen Versuches ohne praktische, wohl aber von grundsätzlicher Bedeutung — übersieht Harzer, daß auch die in Luft liegenden Teile des im Rotationsapparat zurückgelegten Lichtweges zum Phasenunterschied bei der Interferenz etwas beitragen. Sodann zieht Harzer mit vollem Recht in Betracht, daß im sich drehenden Körper sich der Lichtstrahl krümmen muß. Aber der Ansatz, aus welchem

---

1) M. Laue, Münch. Sitz.-Ber. 1911. S. 404. Vgl. auch H. Witte, Verh. d. D. Phys. Ges. **16.** S. 142 u. 754. 1914.

2) P. Zeeman, Versl. Akademie Amsterdam **28.** S. 1451. 1919; P. Zeeman u. A. Snethlage, ebenda **28.** S. 1462. 1919.

3) P. Harzer, Astron. Nachr. **198.** S. 378. 1914 u. **199.** S. 10. 1914.

4) A. Einstein, Astron. Nachr. **199.** S. 9 u. 47. 1914.

er seine Gestalt ermittelt[1]), ist unseres Erachtens nicht selbstverständlich, wenngleich er sich wohl aus der Relativitätstheorie beweisen läßt. Ebenso ist Harzer im Recht, wenn er das Spiegelungs- und Brechungsgesetz im Hinblick auf die Bewegung des Körpers verändert; ob sich aber die Art, wie er es tut, aus der Relativitätstheorie zu rechtfertigen ist, haben wir nicht zu entscheiden vermocht. Und schließlich — und das ist fast die Hauptsache — kann man sehr einfach zeigen, daß die Krümmung des Lichtstrahls und die Veränderungen bei der Spiegelung und Brechung, gleichgültig, wie man sie berechnet, für diesen Phasenunterschied nichts ausmachen, solange man sich, was selbstverständlich durchaus berechtigt ist, auf Glieder erster Ordnung in dem Verhältnis der Körper- zur Lichtgeschwindigkeit beschränkt. Das aber macht die Theorie sehr viel übersichtlicher.

Der Vollständigkeit wegen, und weil Einsteins Bemerkung den meisten Fachgenossen nicht ganz leicht zur Hand ist, geben wir in §§ 2 und 3 deren Inhalt wieder.

§ 1. Im Unterschiede gegen den Fizeauschen und den Zeemanschen Versuch pflanzt sich bei Harreß das Licht nicht in der Bewegungsrichtung des Körpers oder entgegengesetzt fort, sondern unter einem beliebigen Winkel. Ist dieser Winkel, bezogen auf das Ruhsystem des Körpers ϑ^0, hat die Geschwindigkeit des Körpers gegen das der Betrachtung zugrunde gelegte berechtigte Bezugssystem — hier also gegen die Erde — den Betrag q, und bedeuten, wie üblich, c die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum und n^0 den Brechungsindex des Körpers, bezogen auf das Ruhsystem, so hat die Phasengeschwindigkeit des Lichts gegen das genannte Bezugssystem nach der Relativitätstheorie den Betrag[2])

$$V = c\,\frac{c + q\,n^0 \cos\vartheta^0}{\sqrt{(q + c\,n^0\cos\vartheta^0)^2 + n^{0\,2}(c^2 - q^2)\sin^2\vartheta^0}}\,.$$

Wir vernachlässigen im folgenden stets alle Glieder zweiter und höherer Ordnung in q/c, und können dann schreiben

1) Wir meinen Harzers Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = -\omega k y, \qquad \frac{dy}{dt} = v + \omega k x$$

auf S. 379 a. a. O.

2) Vgl. M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip, Gl. (257).

$$(1) \qquad V = \frac{c}{n^0} + q\cos\vartheta\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

wobei wir den Winkel ϑ auf das System beziehen, gegen welches sich der Körper mit der Geschwindigkeit q bewegt. Gleichung (1) beweist, daß zu dem Wert c/n^0, der im Falle der Ruhe gälte, die Komponente der Körpergeschwindigkeit nach der Strahlrichtung[1]) multipliziert mit dem Mitführungskoeffizienten $(1 - 1/n^2)$ hinzutritt.

Die Transformationsformel für die Schwingungszahl vom Ruhesystem auf das gegen die Erde feste lautet streng

$$\nu = \nu^0 \frac{c + q\,n^0\cos\vartheta^0}{\sqrt{c^2 - q^2}},$$

also bis auf Glieder zweiter und höherer Ordnung

$$(1a) \qquad \nu = \nu^0\left(1 + \frac{q\,n}{c}\cos\vartheta\right).$$

§ 2. Beim Fizeauschen Interferenzversuch durchläuft das Licht eine *feststehende* Röhre von der Länge l, in welcher Wasser mit der Geschwindigkeit q in der Strahlrichtung oder ihr entgegen strömt. Die Zeit, welche der im Sinne der Strömung laufende Strahl zur Durchlaufung der Röhre braucht, ist nach (1)

$$(2) \qquad t_+ = l:\left[\frac{c}{n^0} + q\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{l\,n^0}{c}\left[1 - \frac{q\,n}{c}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Nun ist aber die relative Schwingungszahl ν^0 des Lichtes gegen das Wasser eine andere, als die gegen das an der Erde feste Bezugssystem, ν. Da der Übertritt des Lichts in und aus dem Wasser an *feststehenden* Flächen vor sich geht[2]), bleibt nämlich auch während der Fortpflanzung im Wasser

---

1) Genauer genommen handelt es sich um die Richtung der Wellennormale. Da der Richtungsunterschied zwischen beiden aber selbst von der ersten Ordnung klein ist, spielt das hier keine Rolle. Harreß begründet in seiner Dissertation Gl. (1) aus dem Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeit, das jedoch bekanntlich nicht für die Phasengeschwindigkeit der Lichtwellen gilt.

2) Natürlich beginnt die Wasserströmung nicht unmittelbar hinter den Platten, durch welche das Licht ein- und austritt, sondern das Licht gelangt erst allmählich in das Gebiet der vollen Geschwindigkeit q. Da aber die Strömung stationär ist, der Ort jeder Geschwindigkeitsänderung längs des Strahlenganges also feststeht, so bleibt die im Text angestellte Überlegung dennoch richtig.

die Schwingungszahl gegen das genannte Bezugssystem erhalten. Infolgedessen wird nach (1a)

$$\nu^0 = \nu\left(1 - \frac{q n}{c}\right),$$

und der in (2) einzusetzende Brechungsindex n^0 ist aus dem Brechungsindex n des ruhenden Wassers für die Schwingungszahl ν zu berechnen nach der Formel

$$n^0 = n\left(1 - \frac{q \nu}{c} \frac{d n}{d \nu}\right).$$

Setzen wir diesen Wert in (2) ein, so finden wir mit H. A. Lorentz[1]):

$$t_+ = \frac{l n}{c}\left|1 - \frac{q n}{c}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\nu}{n}\frac{d n}{d \nu}\right)\right|. \tag{3}$$

Für den zwischen den Durchlaufszeiten beider Strahlen bestehenden Unterschied folgt daraus:

$$t_+ - t_- = \tau = -\frac{2 l q n^2}{c^2}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\nu}{n}\frac{d n}{d \nu}\right). \tag{4}$$

Dies ist die Formel, welche Fizeau, Michelson und Morley und schließlich mit einer Genauigkeit von einigen Tausendsteln Zeeman bestätigt haben.[2])

§ 3. Beim Zeemanschen Versuch ist die feststehende Röhre mit dem strömenden Wasser ersetzt durch einen Körper, welcher sich als Ganzes mit der Geschwindigkeit q in der Richtung des einen Strahls und dem anderen entgegen bewegt. Um zu berechnen, wie die Durchlaufszeit für den ersteren Strahl durch die Geschwindigkeit q beeinflußt wird, führen wir zweckmäßig den Begriff der Relativgeschwindigkeit des Lichts gegen den Körper ein, diese bezogen auf das an der Erde feste Bezugssystem. Sie beträgt nach (1), da $\cos\vartheta = 1$ zu setzen ist:

$$V - q = \frac{c}{n^0} - \frac{q}{n^2}. \tag{5}$$

Denn für zwei Geschwindigkeiten, welche sich auf das gleiche System beziehen, gilt auch nach der Relativitätstheorie die

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895, S. 101 ff.

2) A. A. Michelson u. E. W. Morley, American Journ. of science **31**. S. 377. 1886; P. Zeeman, Verslagen Akadem. Amsterdam **23**. S. 245. 1914; **24**. S. 18. 1915.

gewöhnliche Vektoraddition; beim Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeiten ist es gerade wesentlich, daß die zu addierenden Geschwindigkeiten sich auf verschiedene Systeme beziehen. Die Zeit, in der dieser Strahl die Strecke l im Körper durchläuft, ist demnach

$$T_+ = \frac{l}{V - q} .$$

Nun ist aber noch zu bedenken, daß das Licht, wenn es wie beim Zeemanschen Versuch, durch zwei zur Strecke l senkrechte Endflächen ein- und austritt, infolge der Bewegung eine kürzere Strecke in Luft zurücklegt, als wenn der Körper ruht. Denn während der Zeit T_+ verschiebt sich der Körper um die Strecke $T_+ \cdot q$. Bezeichnen wir also mit L den Abstand der beiden dem bewegten Körper nächsten *feststehenden* Teile der Versuchsanordnung, so braucht der genannte Strahl, um von dem einen dieser Teile zum anderen zu kommen, die Zeit

$$(6) \qquad \begin{cases} t_+ = T_+ + \frac{1}{c}\left(L - (l + T_+ q)\right) \\ \qquad = \frac{1}{c}(L - l) + \frac{l}{c}\left(n^0 + \frac{q}{c}(1 - n)\right) . \end{cases}$$

Auch hier ist die Schwingungszahl in dem mit dem Körper verbundenen Bezugssystem eine andere als in dem erdfesten. Und zwar bleibt diesmal beim Ein- und Austritt des Lichts die Schwingungszahl zu ersterem erhalten, weil die Flächen, an denen dies geschieht, die Bewegung des Körpers teilen. In (1a) ist diesmal $n = 1$ zu setzen, wenn wir für das im leeren Raum fortschreitende Licht ν^0 aus ν berechnen wollen; also:

$$\nu^0 = \nu\left(1 - \frac{q}{c}\right), \qquad n^0 = n - \frac{\nu q}{c}\,\frac{dn}{d\nu} .$$

Setzt man dies in (6) ein, so folgt:

$$t_+ = \frac{1}{c}\left(L - l(1 - n_0)\right) + \frac{lq}{c^2}\left(1 - n - \nu\frac{dn}{d\nu}\right) .$$

Der Zeitunterschied für beide Strahlen ist danach

$$(7) \qquad \tau = t_+ - t_- = \frac{2lq}{c^2}\left(1 - n - \nu\frac{dn}{d\nu}\right) .$$

Dies ist die von Einstein, Zeeman und H. A. Lorentz[1] aufgestellte und von Zeeman auch im wesentlichen betätigte Formel.

Wir kommen nun dem Harreßschen Versuch schon ganz nahe, wenn wir den Zeemanschen Versuch gemäß Fig. 1 abgeändert denken. Bei ihr tritt das Licht nicht durch zwei zur Geschwindigkeit senkrechte Flächen ein und aus, sondern dies geschieht an zwei zur Geschwindigkeit parallelen. Der von A kommende Strahl wird nach seinem Eintritt bei B an einer der Endflächen des Körpers nach C und dort an der anderen Endfläche nach D gespiegelt. Schreiben wir hier dem Körper wieder die Länge $l\,(= BC)$ zu und die Breite b, so braucht der im Sinne der Bewegung laufende Strahl in ihm die Zeit

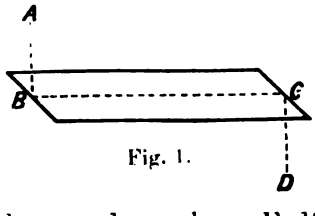


Fig. 1.

$$t_+ = \frac{l}{V-q} + \frac{bn^0}{c} = \frac{ln^0}{c}\left(1 + \frac{q}{n^0 c}\right) + \frac{bn^0}{c}. \tag{8}$$

Die Strecke, welche er in Luft zurückzulegen hat, wird durch die Bewegung nicht verändert. Ferner bleibt die Schwingungszahl ν^0, die sich auf das mitbewegte System bezieht, bei den Spiegelungs- und Brechungsvorgängen an den *mitbewegten* End- und Grenzflächen des Körpers erhalten. Da ferner vor dem Ein- und nach dem Austritt die Strahlrichtung zur Geschwindigkeit q senkrecht ist[2]), stimmen nach (1a) ν und ν^0 hier überein. Somit ist überhaupt $\nu^0 = \nu$, $n^0 = n$ zu setzen und wir finden nach (8)

$$\tau = t_+ - t_- = \frac{2lq}{c^2}. \tag{8a}$$

Im Gegensatz zu den Gleichungen (4) und (7) ist hier der Brechungsindex ganz herausgefallen. Auch hat τ und damit die Streifenverschiebung das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, wie beim Fizeauschen Versuch. Dort beschleunigt

1) Vgl. die angeführte Arbeit von Zeeman und Snethlage.

2) Das gilt nur für das Ruhesystem streng; in dem erdfesten System weicht die Strahlrichtung wegen der Aberration um einen kleinen Winkel erster Ordnung davon ab. Doch braucht das in (1a) wegen unserer Beschränkung auf Größen erster Ordnung nicht berücksichtigt zu werden.

nämlich die Mitführung den mit der Bewegung der Materie laufenden Strahl, so daß er die feststehende Strecke l in kürzerer Zeit zurücklegt als im Ruhefall. Hier hingegen laufen alle Teile des Apparates vor dem genannten Strahl fort, und dadurch wird jene Verkürzung aufgehoben und sogar ins Gegenteil verkehrt.

Den tiefsten Grund für die Unabhängigkeit des Zeitunterschieds vom Brechungsindex zeigt aber die Lorentz-Transformation. Ein Glasstab ruhe im Bezugssystem K', seine Endflächen mögen die Gleichungen $x' = 0$ und $x' = 1$ haben. Zur Zeit $t' = -n^0 l : c$ entsenden wir von jeder dieser Flächen eine bestimmte Phase einer sinusförmigen Lichtwelle nach der gegenüberliegenden Fläche. Beide Phasen erreichen ihr Ziel zur Zeit $t' = 0$. Nun beziehen wir diesen Vorgang auf ein System K, gegen welches K' die Geschwindigkeit q in der positiven x'-Richtung hat. Die Transformationsgleichung für die Zeit lautet:

$$t = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \left(t' + \frac{q x'}{c^2} \right) .$$

Nur der zweite Summand im Zähler bedingt hier die Zeitdifferenz τ. Für den in der positiven x'-Richtung laufenden Strahl sind nämlich Abgangs- und Ankunftszeit der betrachteten Phase, bezogen auf K

$$-\frac{n^0 l}{\sqrt{c^2 - q^2}} \quad \text{und} \quad \frac{q l}{c\sqrt{c^2 - q^2}} .$$

Die Durchlaufungszeit ist die Differenz davon, also in Gliedern erster Ordnung

$$t_+ = \left(n^0 + \frac{q}{c} \right) \frac{l}{c} .$$

Die Zeit, welche das Licht in Fig. 1 für die zu BC senkrechten Wege braucht, wird durch die Transformation nicht in Gliedern erster Ordnung verändert. Stimmen also in beiden Strahlen die relativen Schwingungszahlen überein, so schließen wir aus dem letzten Ausdruck:

$$\tau = t_+ - t_- = \frac{2 l q}{c^2} .$$

§ 4. Der Harreßsche Versuch unterscheidet sich von dem in Fig. 1 beschriebenen nur dadurch, daß die rein trans-

latorische Geschwindigkeit der Glaskörp
ersetzt ist. Technische Gründe haben
geführt. Für die Theorie bedeutet sie ein
weil mit der Drehung Beschleunigungen
weiß aber wohl noch nicht sicher, wie
Vorgänge in der Materie wirken. Die
theorie wäre freilich zu Aussagen darü
wollen zunächst zeigen, daß sie keine
nigungseinflüsse erwarten läßt. Die vork
kräfte sind nämlich der Größenordnu
bis 100 mal so groß wie die Erdanz
Körper. Da nun die Schwerebeschleu
mächtigeren Himmelskörpern, als es di
die hier zu erreichende Genauigkeit be
die optischen Vorgänge ausübt, so ist
schen Versuch kein solcher zu erwarten

Nun braucht man ja freilich Aus
Relativitätstheorie noch nicht für unbe
Dann aber fehlt uns jeder Anhalt übe
schleunigungen und man muß mangels
so rechnen, als gäbe es keine. (Dies tu
Übrigens kämen solche Wirkungen, so
Lichtstrahls beeinflussen, für den zu bere
schied nicht in Frage. Nur wenn sie
Lichtgeschwindigkeit beträfen, könnten
beweisen ist, etwas ausmachen.

Wir beginnen nun mit dem ange
alle durch die Drehung hervorgeruf
Strahlenganges relativ zum Apparat für
nung in den Gliedern erster Ordnung n
denken uns den Apparat zunächst in
einen Strahl, welcher vom Punkte P d
Sinne der späteren Drehung umlaufend
Platte gelangt. Sein Weg besteht au
Strecken; die Länge irgendeiner davon
$\sum \frac{l}{V} = \sum \frac{ln}{c}$ ist die Zeit, welche e

1) Diese Bemerkung verdanke ich ei
W. Wien.

geschilderten Weges braucht. Auch bei einer Drehung des Apparates gibt es einen Strahl, welcher im Sinne der Drehung umlaufend von dem mitbewegten Punkte P zu dem ebenfalls mitbewegten Punkte Q gelangt. Die Drehung bewirkt einmal eine Veränderung der Relativgeschwindigkeiten V, mit welchen die Strecken l durchlaufen werden (wir rechnen hier vorbehaltlich des Beweises so, als ob auf jeder Strecke lV konstant bliebe), sodann aber infolge der Verlagerung des relativen Strahlenganges Änderungen der Strecken l selbst. Die Gesamtänderung der Durchlaufungszeit beträgt:

$$\sum \delta\left(\frac{1}{V}\right) \cdot l + \sum \frac{n\,\delta l}{c} \cdot$$

Hierin ist nun das zweite Glied nach dem Fermatschen Satze vom ausgezeichneten Lichtweg klein von der zweiten Ordnung; denn die Veränderungen δl sind höchstens von der Ordnung q/c. Und damit ist der Beweis geliefert; er gilt unabhängig davon, wie man die Veränderungen δl berechnet.

Nun liegt zwar der weitere Einwand nahe: Die betrachteten Strahlen haben in P und Q verschiedene Richtungen. Für einen auf Unendlich eingestellten Beobachtungsapparat, in dessen Brennebene die Interferenzen erscheinen, sind sie also nicht gleichwertig.[1]) Damit überschreitet man aber den Geltungsbereich der geometrischen Optik. Die in Rede stehenden Richtungsunterschiede sind von der ersten Ordnung in q/c. Für den Rand des Harreßschen Apparates ist q stets kleiner als $2 \cdot 10^3$ cm/sec^{-1}, ein Wert, der etwa 1000 Umdrehungen in der Minute entspräche. Infolgedessen ist der Winkel zwischen beiden Strahlen von der Größenordnung 10^{-7}. Die ausgenutzte Öffnung des Beobachtungsapparates war sicherlich in einem Quadrat von 3,6 cm Seitenlänge enthalten. Denn nach S. 22 der Harreßschen Arbeit sind die Austrittsflächen der Prismen für das Licht solche Quadrate. Der Beobachtungsapparat kann also nur Winkel auflösen, welche von der Größenordnung 10^{-5} oder größer sind. Die hier in Frage kommenden liegen aber, wie gezeigt, wesentlich unter dieser Grenze.

1) Harreß erklärt die Interferenzerscheinung für Planparallelitätsringe. Es muß dahingestellt bleiben, ob er nicht tätsächlich eine andere Interferenzerscheinung eingestellt hatte.

Wir schließen daraus, daß Verlagerungen des relativen Lichtweges für die Berechnung von τ nicht zu berücksichtigen sind.[1])

§ 5. Nach diesen Vorbereitungen stellen wir zunächst fest: 1. Nach Gleichung (1a) kommt es für die absolute Phasengeschwindigkeit V des Lichts gegen das an der Erde feste Bezugssystem nicht auf die zur Strahlrichtung senkrechte Komponente der Körpergeschwindigkeit an, sondern nur auf die dazu parallele. 2. Hat eine Gerade l den kleinsten Abstand r von der Drehungsachse und bildet ihre Richtung mit dieser den

1) Für § 4 liefert uns Hr. Harzer eine erfreuliche Bestätigung in dem folgenden Absatz seiner Arbeit:

„Nimmt man mit Hrn. Harreß an, daß die Strahlen im rotierenden Mittel die geradlinige Gestalt behielten, die sie im ruhenden Mittel haben, und schreibt man dementsprechend die durch die Rotation bewirkte Veränderung nur der durch die Mitführung entstehenden Veränderung der relativen Geschwindigkeit auf den unveränderten Wegen zu, so entsteht die Formel

$$\delta q = \lambda (1 - k)\, \omega \frac{\Sigma p q}{\lambda v},$$

die sich inhaltlich von der Formel, die Hr. Harreß auf S. 59 gibt, nur durch die Vertauschung von k mit $1 - k$ unterscheidet. . . .

Es war in Hinblick auf den idealen Fall, den der Apparat nach Möglichkeit zu realisieren strebt, eine gewisse Ähnlichkeit dieser Zahlen mit den für den wirklichen Fall geltenden von vornherein zu erwarten; daß sich aber die Annahme über die unveränderliche Gestalt der Strahlen, die für die einzelnen Wege zwischen zwei optisch wirkenden Flächen ganz unzutreffend ist, für die Gesamtheit der Wege mit dem alle Stellen der Rechnung umfassenden hohen Grade der Annäherung als zulässig erweist, ist sehr überraschend. Eine auf einer analytischen Untersuchung beruhende Erklärung dieser nahen Übereinstimmung habe ich nicht gefunden; ich muß sie deshalb in der unbestimmten Bedeutung des Wortes als zufällig bezeichnen."

Soweit Hr. Harzer. Wir haben nur noch die Vermutung hinzuzufügen, daß er auch in seiner Formel, nicht nur bei der Zahlenrechnung, den Einfluß der Krümmung hätte verschwinden sehen, wenn er auch die schon erwähnten Luftstrecken mitberücksichtigt hätte. Die von ihm genannte Gleichung ist, abgesehen von diesem Unterschied, mit unserer Formel (11) gleichlautend. Denn es bedeuten p und q die Strecken l und r, es ist $v = c/n$ und $k = 1 - n^{-2}$; die von uns berechnete Zeitdifferenz τ ist aber gleich $\delta q \frac{\lambda}{v}$. Schließlich ist bei Hrn. Harzer stets $\sin(r) = 1$

Winkel Θ, so ist in jedem ihrer Punkte die Komponente der Körpergeschwindigkeit nach ihrer Richtung gleich $\omega r \sin \Theta$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung bedeutet. Beweis: Wir wählen die Drehungsachse als z-Achse, den kürzesten Abstand r als y-Achse eines rechtwinkligen Achsenkreuzes Die Gerade l hat dann die Gleichungen $y = r$, $x : z = \operatorname{tg} \Theta$. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ aber hat in irgendeinem Punkte der Geraden die Komponenten $\mathfrak{q}_x = \omega r$, $\mathfrak{q}_z = 0$. Daraus schließen wir auf den Winkel zwischen l und $\mathfrak{q}$: $\cos(l\,\mathfrak{q}) = \frac{\mathfrak{q}_x}{q} \sin \Theta$, also $q \cos(l\,\mathfrak{q}) = \omega r \sin \Theta$. Die Phasengeschwindigkeit des Lichts gegen das erdfeste Bezugssystem ist infolgedessen nach (1):

$$V = \frac{c}{n^0} + \omega r \sin \Theta \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{9}$$

Von größter Wichtigkeit ist nun die Frage nach der Schwingungszahl ν^0 des Lichts gegen den Glaskörper, da von ihm, wie schon in den oben besprochenen Fällen, der Brechungsindex n^0 abhängt. Wir fragen zuerst: Ändert sich die relative Schwingungszahl, während das Licht von einer Spiegelungsstelle zur anderen fortschreitet? Die Antwort lautet: Nein. Denn bei diesem Vorgang bleibt die Schwingungszahl ν zum erdfesten Bezugssystem jedenfalls erhalten; bestände zwischen zwei raumfesten Punkten ein Unterschied der Schwingungszahlen, so bedeutete das ja eine dauernd wachsende Phasenverschiebung der Schwingungen in ihnen, welche nicht möglich ist. Da aber auf der ganzen geradlinigen Strahlenbahn die Komponente $q \cos \vartheta$ denselben Wert hat, so bleibt nach (1a) auch ν^0 erhalten. Freilich ist der Strahl nicht genau geradlinig; jedenfalls sind aber die vorkommenden Richtungsänderungen klein von der ersten Ordnung in q/c, kommen also in dem zweiten Gliede von (1a), das selbst zu q/c proportional ist, nicht in Betracht. Die Spiegelungen und Brechungen geschehen alle an mitbewegten Flächen, lassen somit auch die relative Schwingungszahl ν^0 ungeändert. Schließlich hat das Licht unmittelbar vor seinem Eintritt und nach seinem Austritt aus den beweglichen Teilen der Versuchsanordnung eine Richtung senkrecht zu der dort herrschenden Geschwindigkeit, so daß hier die relative und die absolute Schwingungszahl ν^0 und ν übereinstimmen. *Somit ist überall im Interferometer* $\nu^0 = \nu$

und $n^0 = n$, wobei unter n der ohne Rü
gung zu berechnende Brechungsindex d
stehen ist.

§ 6. Die Berechnung des Zeitunte
nun leicht durchführen. Dividieren wir
relativen Strahlengangs durch die zugel
digkeit, welche für den mit der Drehu
nach (9) den Betrag

$$V - q\cos(q\,l) = V - \omega\, r \sin\Theta =$$

hat, so finden wir für die Zeit, welche
Trennung bis zur Wiedervereinigung mi

$$t_+ = \sum \frac{l\,n}{c} + \frac{\omega}{c^2}\sum r\,l \tag{10}$$

Für den Zeitunterschied folgt daraus:

$$\tau = t_+ - t_- = \frac{2\,\omega}{c^2}\sum r \tag{11}$$

Darauf, daß die über alle Teile des St
liegenden, zu erstreckende Summe auch
hält, macht Hr. Knopf auf S. 440 aufm

Dieser Zeitunterschied hat eine-d
mal nämlich die Mitführung des Lichts
sodann aber die Tatsache, daß jeder
der Drehung vor dem einen Strahl fortl
entgegenkommt. Beide Ursachen zusam
eine vom Brechungsindex unabhängige,
übereinstimmende Zeitdifferenz. Selbst v
den leeren Raum zum Träger der Lich
daß jede Mitführung fortfällt, bringt die z
Ursache noch die gleiche Streifenverschi
hatte in seiner Dissertation nur die erst
gesetzt.

Läßt man den Wert des Mitführun
unbestimmt (Bezeichnung: x) und setzt
nach (9):

$$V = \frac{c}{n} + x \cdot \omega\, r \sin$$

so findet man statt (11) die entsprechende Formel in der Schreibweise von Hrn. Knopf:

$$\tau = \frac{2\omega}{c^2} \sum [n^2 (1 - x) \sin \Theta \, r \, l].$$

$l \sin \Theta$ ist die Projektion eines Teils des Strahls, wie er im Ruhefall verläuft, auf eine zur Drehungsachse senkrechte Ebene. $\frac{1}{2} l r \sin \Theta$ ist somit die Dreiecksfläche, welche durch diese Projektion und die geraden Verbindungen ihrer Endpunkte mit dem Durchstoßpunkt der Achse durch die Ebene begrenzt ist. Der Mittelstrahl kehrt zu seinem Ausgangspunkt zurück; für ihn ist $\frac{1}{2} \sum r l \sin \Theta = F$ die von seiner Projektion umschlossene Fläche. Somit läßt sich Gleichung (11) an die früher beim Sagnacschen Versuch gewählte Form schreiben:

$$\tau = \frac{4 \omega F}{c^2} .$$

§ 7. Zum Schluß müssen wir noch untersuchen, wie die Breite des zur Interferenz benutzten Strahlenbündels die Erscheinung beeinflußt. Es liegt hier nämlich der ganz ungewöhnliche Fall vor, daß in den beiden Scharen paralleler Strahlen, welche das Fernrohr in einem Punkt vereinigt, der Zeitunterschied τ zwischen je zwei sich entsprechenden schon erheblich veränderlich ist. Darauf hat schon Harreß hingewiesen; er sowohl wie Hr. Knopf geben für die Zeitdifferenz, berechnet für einen zum Mittelstrahl der Fig. 1 bei Harreß parallelen Strahl, dessen Abstand vom Mittelstrahl aber die zur Drehachse senkrechte Komponente δ hat, eine Formel

$$\tau = \tau_0 - f(\delta). \tag{12}$$

τ_0 bedeutet hier den Wert von τ für den Mittelstrahl, f ist eine positive Funktion zweiten Grades, deren Wert in der vorhergehenden Arbeit geometrisch ermittelt ist. Nach Harreß beträgt das zweite Glied für den durchaus möglichen Wert von einem cm für δ 3 Proz. von τ_0.

Unter diesen Umständen genügt es nicht, für die Lichtschwingung im Vereinigungspunkt aller dieser Strahlen den Ansatz

$$e^{i\nu\left(t + \frac{\tau_0}{2}\right)} + e^{i\nu\left(t - \frac{\tau_0}{2}\right)}$$

zu machen, sondern man muß dafür setzen:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\delta_{\max}} \left[e^{i\nu\left(t+\frac{\tau}{2}\right)} + e^{i\nu\left(t-\frac{\tau}{2}\right)} \right] d\delta \\
&\qquad = 2 e^{i\nu t} \left[\cos\frac{\nu\tau_0}{2} \int_0^{\delta_{\max}} \cos\left(\frac{\nu}{2} f(\delta)\right) d\delta \right. \\
&\qquad \left. + \sin\frac{\nu\tau_0}{2} \int_0^{\delta_{\max}} \sin\left(\frac{\nu}{2} f(\delta)\right) d\delta \right].
\end{aligned} \tag{13}
$$

Solange

$$
\left(\frac{\nu}{2} f(\delta)\right)^2 \ll 1 \tag{14}
$$

ist, kann man unter den Integralzeichen den Cosinus mit Eins, den Sinus mit seinem Argument vertauschen und findet dann als Ausdruck für die Schwingung:

$$
2\delta_{\max} e^{i\nu t} \left[\cos\frac{\nu\tau_0}{2} + \frac{\nu}{2} f' \cdot \sin\frac{\nu\tau_0}{2} \right] = 2\delta_{\max} e^{i\nu t} \cos\frac{\nu}{2}(\tau_0 - f').
$$

f' ist dabei der Mittelwert von f, gebildet über alle vorkommenden δ. Es ist dann also ganz so, als wäre die Zeitdifferenz τ innerhalb der betrachteten Strahlengesamtheit unveränderlich, hätte aber den über diese Gesamtheit gebildeten Mittelwert.

Ist Bedingung (14) nicht mehr erfüllt, so treten in (13) Fresnelsche Integrale auf, da $f(\delta)$ eine quadratische Funktion ist. Dann ist die Streifenverschiebung nicht mehr proportional zu ω, sondern hängt in weniger einfacher Weise davon ab. Man darf hierin keinen Widerspruch dagegen sehen, daß wir sonst immer nur zu ω proportionale Summanden berücksichtigt haben. Für die Berechnung der Zeitunterschiede τ sind nach wie vor quadratische und höhere Glieder vernachlässigt. Aber die obige Rechnung zeigt eben, daß man bei hinreichender Breite des Strahlenbündels trotzdem eine zu ω nicht mehr proportionale Streifenverschiebung beobachtet.

§ 8. Was kann uns nun der Harreßsche Versuch, wenn er erst bis zu der ganzen erreichbaren Vollendung durchgeführt ist, lehren? Harreß selbst und Hr. Knopf berechnen aus ihm den Mitführungskoeffizienten des Glases und prüfen, wie

weit der gemessene Wert mit der Fresnelschen Formel dafür übereinstimmt. Wir haben hier die Theorie so geformt, daß der Versuch als ein Ersatz für den in Fig. 1 dargestellten erscheint und letzterem eigentlich als Zweck die Bestätigung der Umrechnungsformel für die Zeit in der Lorentz-Transformation zugeschrieben. Doch besteht natürlich zwischen diesen Auffassungen kein Widerspruch. Die Optik der ohne Beschleunigung bewegten Körper ist eine so einheitliche und in sich verflochtene Theorie, daß man sie nur als Ganzes bestätigen oder widerlegen kann. Jede Bestätigung irgendeiner ihrer Aussagen kommt immer dem Ganzen zugute.

Voraussetzung der Theorie ist bisher, daß die mit der Drehung verbundenen Beschleunigungen die Lichtgeschwindigkeit in keiner wahrnehmbaren Weise beeinflussen. Die allgemeine Relativitätstheorie stützt diese Annahme. Ob sie zutrifft, kann nur die sehr wünschenswerte Wiederholung des Versuchs zeigen.

Berlin, Dezember 1919.

(Eingegangen 21. Januar 1920.)

3. *Die Aufrechterhaltu negativen Erdladung, das Gru luftelektrischen Forsc*

von R. Seeliger

Die luftelektrische Forschung steht lichen Teil der Lösung ihres Grundprob dem Elektrizitätshaushalt der Atmosphä jedenfalls gewinnt man aus der Literatu trotz aller Bemühungen eine befriedigend lage hier noch nicht erreicht ist. Die dreierlei Gründe haben: 1. Kann das bi stehende Beobachtungsmaterial unvollstä sein. 2. Kann unter den im Rahmen un nisse überhaupt möglichen, d. h. ausde eine oder andere, die vielleicht gerade würde, nicht herangezogen worden sein. weise die Mitwirkung einer prinzipiell noch unbekannten Ursache anzunehmen zu dieser dritten Alternative entschließt Hypothesenbildung ergeht, wird man ersteren nach Möglichkeit durchdiskutier aber vor allem notwendig, daß man sozus Liste aller überhaupt möglichen Theori Grundlage der weiteren Untersuchung wenn dann 1. und 2. mit Sicherheit ve wären, müßte man wohl 3. bejahen. Zwa tung bereits verschiedene Ansätze vor[2]), e kussion ist aber bisher, soviel mir beka geführt worden.

1) Zusammenfassende Bearbeitungen der I von E. v. Schweidler u. F. Kohlrausch in I Elektrizität 3. S. 193—276 und ein Artikel von Encyclop. d. Math. Wiss. 6. 1, 9 S. 235—365, be Elektrizität".

2) Vgl. etwa E. v. Schweidler, Ency Wien. Ber. 127. S. 1. 1918.

Es gelingt nun in der Tat in recht einfacher Weise unter Benutzung eines geeigneten Schematismus, den ersten Teil der Aufgabe zu lösen und die genannte vollständige Liste aufzustellen. Wesentlich schwieriger ist dann allerdings die Diskussion dieser einzelnen möglichen Theorien, soweit nicht von vornherein aus der allgemeinen physikalischen Erfahrung heraus ein Teil von ihnen abgelehnt werden kann; denn die Unvollständigkeit der heute zur Verfügung stehenden empirischen Daten macht einerseits eine *quantitative* Diskussion — die allein zur Entscheidung führen könnte — unmöglich, und gibt andererseits, wie dies ja bei geophysikalischen Fragen vielfach der Fall ist, der Hypothesenbildung noch allzuviel Spielraum. Wenn es somit in der Natur der Sache begründet ist, daß eine endgültige Entscheidung heute noch nicht getroffen werden kann, so ist, wie ich glaube, doch ein gewisser Fortschritt darin zu sehen, daß es gelingt, die Zahl und Art der überhaupt in Betracht kommenden Theorien genau zu umschreiben und ganz erheblich einzuengen und die Bejahung der oben erwähnten dritten Alternative als jedenfalls nicht unbedingt notwendig zu erweisen.

Das Problem, um welches es sich hier handelt, hat am klarsten v. Schweidler a. a. O. formuliert durch die Frage nach der Natur des sog. „Kompensations- oder Gegenstromes". In der Atmosphäre strömt normalerweise dauernd positive Ladung von oben nach unten und entsprechend negative von unten nach oben, d. h. es fließt dem Erdkörper aus der Atmosphäre ein positiver Strom zu und zwar von bemerkenswerter örtlicher und zeitlicher Konstanz (ca. $2 \cdot 10^{-16}$ Amp/cm^2 = $6 \cdot 10^{-7}$ CGS./cm^2); dieser Strom ist bedingt durch die natürliche Leitfähigkeit und durch die Existenz eines elektrischen Feldes in der Atmosphäre. Der Zustand kann nun trotz der fortwährenden Tätigkeit dieses sog. „normalen Leitungsstromes" offenbar nur dann stationär sein — daß es sich um einen stationären Zustand handelt und nicht um ein vorübergehendes Phänomen, wird wohl allgemein angenommen und bedingt gerade die hier zu betrachtende Schwierigkeit — wenn die ausgleichende Wirkung des Leitungsstromes kompensiert wird durch einen zweiten Prozeß, den v. Schweidler zunächst ganz allgemein als Kompensationsstrom bezeichnet. Die Frage

nach der Natur und physikalischen Deu
sationsstromes bildet das eingangs erwäl
elektrischen Forschung.

Man kommt nun an Hand einfach
trachtungen zu einem übersichtliche
Schema aller für die Deutung des Komp
haupt in Betracht kommenden theoret
wenn man ausgeht von dem Prinzip der
linien für den stationären Zustand. Lei
pensationsstrom müssen, zunächst rein g
eine geschlossene Schleife bilden, von d
von der Atmosphäre zur Erde fließende
strom, der Rest durch den Kompensatio
Dabei wollen wir, um das folgende Sch
komplizieren, von vornherein festsetzen,
stets den Mittelwert der wirklich flie
die ganze bisherige Beobachtungszeit,
Jahre, verstehen. Wir können dies
meinheit der Betrachtung zu beeinträ
natürlich implizite — andernfalls wä
Schwierigkeit vorhanden — die durch d
nisse wie man heute annimmt und wo
nehmen muß, erwiesene Voraussetzung,
Zeitintegral über den normalen Leitung
schieden ist. Dagegen sei ausdrücklich
sich nicht auch um eine analoge räumli
über die ganze Erdoberfläche handelt,
„Strom" die Stromdichte an jeweils e
zu verstehen haben. In der geschloss
Strom*richtung* in allen Teilen gegeben
Atmosphäre–Erde des positiven Leitungss
der im Kompensationsstrom fließenden
deren Bewegungsrichtung bleibt dagegen

Wir können nun sofort zwei verse
der Stromschleife unterscheiden und
große Klassen von Theorien. Die er
durch eine „dreieckige" Schleife; die V
A und *E*, welche die Atmosphäre und di
ist die eine Seite, auf der der Leitungss

Eckpunkt P entspringen die Stromlinien der Kompensationsströme. Es deckt sich diese Klasse mit der von v. Schweidler a. a. O. durch den Zusatz „an Ort" bezeichneten Art von Theorien, bei welchen der Kompensationsstrom an demselben Ort wie der Leitungsstrom, nämlich am Beobachtungsort, in den Erdkörper mündet, also wesentlich vertikal gerichtet ist. Die zweite Klasse ist charakterisiert durch eine „viereckige" Stromschleife, deren eine Seite wieder AE ist, deren beide andere Ecken P_1 und P_2 seien. Sie deckt sich mit der v. Schweidlerschen Art, „an entfernter Stelle", bei welcher der Kompensationsstrom nicht am Beobachtungsort die Erde trifft. Demgemäß sind horizontale Komponenten des Kompensationsstromes anzunehmen, teils in der Atmosphäre, teils in der Erde als Erdströme. Noch kompliziertere Formen der Stromschleife anzunehmen, ist offenbar unnötig; dagegen müssen wir der Vollständigkeit wegen als eine dritte mögliche Klasse noch solche für möglich halten, welche durch geometrische Kombination der beiden ersteren Klassen entsteht.

Es ist nun leicht, diese erste Einteilung zu der gewünschten Liste auszubauen, wenn man nur streng systematisch und zwar zunächst sozusagen rein geometrisch vorgeht. Die erste Klasse (I) enthält nämlich, wie man unmittelbar sieht, drei und nur drei Unterklassen, die charakterisiert sind durch die Lage des Punktes P, da dieser außerhalb der Atmosphäre (I 1), in der Atmosphäre (I 2) oder in der Erde (I 3) liegen kann. Ebenso zerfällt die zweite Klasse (II) in eine Reihe von Unterklassen je nach der Lage der Punkte P_1 und P_2 in je einem der drei eben genannten Gebiete. Und zwar gibt es hier ebenfalls nur drei Unterklassen II 12, II 13 und II 23, da die Unterklassen mit Lage der Punkte P_1 und P_2 in demselben Gebiet (II 11, II 22, II 33) zusammenfallen mit den bereits angeführten Unterklassen der Art I. Eine weitere und zwar die letzte Verfeinerung unseres Schemas, welche nun bereits zu den einzelnen möglichen Theorien selbst führt, erhalten wir endlich durch Berücksichtigung des Punktes, den wir bisher ganz unbeachtet gelassen haben, nämlich durch Berücksichtigung des Vorzeichens der in den Kompensationsströmen fließenden Ladungen. Die Zahl der sich so ergebenden geometrischen Möglichkeiten können wir aber von vornherein beschränken

durch die folgenden einfachen physik
Da die Kompensationsströme der Klass
Leitungsströme sein können, so fällt
Kombinationen der Ladungsvorzeichen
normalen Leitungsstrom auf AE realisie
positive Ladung in der einen, negative
tung desselben Schleifenteils strömt, d.
Teil nur entweder positiver oder nega
in Frage. Demgemäß zerfällt jede de
4 mögliche Theorien. Da aber ferner
Punkt P praktisch zusammenfällt mit
so kommt hier nur das Vorzeichen au
teil $A(P)E$ bzw. $AE(P)$ in Betracht, di
Zweieck ausgeartet. Wir haben also
sondern nur 8 mögliche Theorien der
verständlicher Bezeichnung die Theorie
I 1 *nn*; I 2 *p*, I 2 *n*; I 3 *p*, I 3 *n*. Für d
gelangen wir in ganz ähnlicher Weis
Liste, deren Ableitung wir uns aber el
abkürzen können. In der Unterklasse
P_1 außerhalb der Atmosphäre, P_2 in d
bar das Vorzeichen der im Erdzweig E
gleichgültig, da die Erde nur dem Aus
ankommenden bzw. von dort ausgehende
wir haben also hier im ganzen nur
nämlich in analoger Bezeichnung wie obe
II 13 *p n*, II 13 *n p*, II 13 *n n*. In der U
in der Atmosphäre und P_2 in der Erde
stromes dasselbe wie oben, so daß
Theorien II 23 *p p* ... II 23 *n n* zu verz
kommen nun aber, soll die wesentliche
Liste nicht gefährdet werden, noch
nämlich die eines Leitungsstromes in
sphäre auf AP_1 bzw. P_1P_2; dadurch en
liche Theorien, die wir bezeichnen wo
II 23 $(np)n$, II 23 $p(np)$ und II 23 $n(np)$,
also im ganzen 9 Theorien der Untera
Die dritte Unterklasse II 12 endlich
Atmosphäre und P_2 in der Atmosphäre

dadurch, daß sie überhaupt von vornherein abzulehnen ist. Denn es fällt bei ihr die charakteristische Eigenschaft, daß Leitungsstrom und Kompensationsstrom an verschiedenen Orten in den Erdkörper münden, fort. Wenn wir die Kombinationstheorien der Art III aus praktischen Gründen vorerst nicht behandeln und uns auf die einfachen Theorien der Art I und II beschränken, so können wir zusammenfassend nun mit Sicherheit behaupten, daß 21 und nur 21 derartige Theorien denkbar sind. Diese sollen nun der Reihe nach besprochen werden, wobei sich zeigen wird, daß eine große Zahl von ihnen teils auf Grund von Erfahrungstatsachen, teils auf Grund allgemeiner physikalischer Erwägungen abzulehnen ist und nur eine kleine Zahl für eine ernstliche Diskussion übrig bleibt.

Theorien der Klasse I. Kennzeichen ist, daß ein Kompensationsstrom in demselben Punkt in die Erde mündet, in welchem der Leitungsstrom beobachtet wird. Die physikalische Natur der Kompensationsströme läßt sich dahin einschränken, daß es sich dabei nur um Konvektionsströme handeln kann.

I 1. Der Punkt P liegt außerhalb der Atmosphäre.

Die Kompensationsströme kommen aus dem Weltraum oder von einem andern Himmelskörper, bzw. sie strömen von der Erde oder ihrer Atmosphäre dorthin. In erster Linie wird man an korpuskulare Strahlen beiderlei Vorzeichen denken, man wird aber daneben auch Ladungstransport durch Strahlungsdruck, Einfangung geladener Materie durch die Erde usw. in den Bereich der Möglichkeiten ziehen müssen. Das Schema der Stromschleife gibt die Fig. 1.

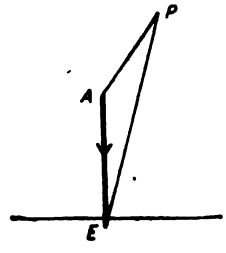


Fig. 1.

I 1 *p p*, I 1 *n p*. Strom $E \to P$ positiv. Physikalisch nicht brauchbar, da keinerlei Anzeichen dafür vorhanden sind, daß der Erdkörper positive Strahlen — denn nur um solche könnte es sich handeln — in dem hier geforderten Betrag emittiert.

I 1 *p n*. Strom $P \to A$ positiv, Strom $P \to E$ negativ. Physikalisch liegt diese Annahme einer von Simpson ausgespro-

chenen Theorie[1]) zugrunde, nach welcher von außen, etwa von der Sonne kommende, positive und negative Strahlen die Erde treffen: die leichter absorbierbaren positiven Strahlen bleiben bereits in der Atmosphäre stecken, während die negativen wenigstens zum Teil bis zur Erdoberfläche durchdringen. Wenn nun auch die Existenz des positiven Stromes $P \to A$ durch die Ergebnisse der Nordlichtforschung recht wahrscheinlich gemacht ist, ist die Theorie doch abzulehnen, da der negative Strom $P \to E$ in der hier zu fordernden Stärke sicher nicht vorhanden ist. Es geht dies hervor aus einer auch für das folgende prinzipiell wichtigen Untersuchung von v. Schweidler.[2])

I 1 *n n*. Negativer Strom $A \to P$, negativer Strom $P \to E$. Die Existenz des Stromes $A \to P$ läßt sich, wie wir noch sehen werden, zwar plausibel machen, die Theorie ist aber aus demselben Grund, wie die vorhergehende, abzulehnen.

I 2. Der Punkt P liegt in der Atmosphäre.

Neben den für die Theorien I 2 prinzipiell heranzuziehenden Korpuskularstrahlen kommt für eine Deutung des nun ganz innerhalb der Atmosphäre verlaufenden Kompensationsstromes nur noch in Betracht die Annahme von mechanischen Konvektionsströmen, z. B. durch vertikale Luftbewegungen usw. Das Schema der Stromschleife ist gegeben durch die Fig. 2.

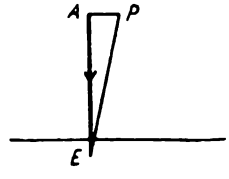


Fig. 2.

I 2 *p*. Strom $E \to P$ positiv. Die Emission einer hinreichend intensiven Korpuskularstrahlung, etwa einer α-Strahlung von radioaktiven in der Erdrinde vorhandenen Substanzen, ist auszuschalten. Dagegen könnte eine Konvektion positiver Raumladung durch aufsteigende Luftströme in Betracht kommen und ist sogar mit Sicherheit nachgewiesen; physikalisch ist diese Theorie identisch mit I 3 *p*.

I 2 *n*. Negativer Strom $P \to E$. Die Deutung durch abwärtsgehende Luftströme scheidet wegen der positiven Raumladung der Atmosphäre aus. Dagegen besteht physikalisch

1) G. C. Simpson, Nature. 69. S. 270. 1904.
2) E. v. Schweidler, Wien. Ber. 121. S. 1. 1918.

die Möglichkeit, korpuskulare negative Strahlen aus der Atmosphäre anzunehmen, welche in der Erde absorbiert werden. Diese Annahme liegt auch in der Tat in zwei Theorien vor, nämlich

a) der Theorie von Swann.[1]) Von der Atmosphäre gehen β-Strahlen aus, welche in der Erde absorbiert werden.

b) Nach einer Bemerkung von v. Schweidler[2]) könnte man annehmen, daß die atmosphärische β-Strahlung nicht spontan von radioaktiven Stoffen ausgeht, sondern man könnte sie auch auffassen als anisotrop verteilte Sekundärstrahlung einer in die Atmosphäre von außen eindringenden, sehr harten Impulsstrahlung. Jedenfalls lassen die neueren Beobachtungen über die sogenannte „durchdringende Strahlung" eine solche Annahme nicht von vornherein als aussichtslos erscheinen.[3])

Beide Hypothesen sind nun aber auf Grund der oben zitierten Untersuchung von v. Schweidler, also aus demselben Grund wie I 1 pn abzulehnen. Nun gibt es aber noch eine dritte Möglichkeit zur Deutung des negativen Stromes $P \to E$, die benutzt ist in der

c) Theorie von Gerdien.[4]) Negative Ladung soll im Überschuß durch die Niederschläge herabgebracht werden. Auch diese Theorie ist wohl sicher abzulehnen auf Grund der neueren exakten Messungen der Niederschlagselektrizität, welche die Ergebnisse jener ersten Beobachtungen nicht bestätigten, sondern gerade das Gegenteil ergaben.

I 3. *Der Punkt P liegt in der Erde.*

Bezüglich der Natur der Kompensationsströme gilt dasselbe wie oben unter I 2. Das Schema der Stromschleife ist gegeben in Fig. 3.

I 3 n. Deckt sich mit I 2 n und ist aber wie dieses abzulehnen.

1) W. F. G. Swann, Terr. Magn. **20**. 105. 1915; **21**. 1916.
2) v. Schweidler, Wien. Ber. **127**. 1. 1918.
3) Vgl. R. Seeliger, Münch. Ber. 1. 1918.
4) H. Gerdien, Phys. Ztschr. **6**. 647. 1905; vgl. auch R. Seeliger, Wien. Ber. **125**. 1. 1916.

I 3 *p*. Deckt sich mit I 2 *p*. Ernstliche Beachtung verdient hier die von Ebert[1]) aufgestellte Theorie der sog. Bodenatmung, nach welcher aus den Erdkapillaren die Bodenluft mit einem beträchtlichen Überschuß positiver Elektrizität beladen austritt und zwar infolge der stärkeren Adsorption negativer Ladungsträger an die Wände der Kapillaren. Da qualitativ die Ebertsche Theorie heute als festbegründet anzusehen ist, kann über ihre Leistungsfähigkeit nur eine quantitative Diskussion entscheiden; dabei handelt es sich um zwei Punkte, nämlich um die quantitative Ergiebigkeit der Bodenatmung und um die Frage, ob und wie die positiven Ladungen in die höheren Schichten der Atmosphäre gelangen.

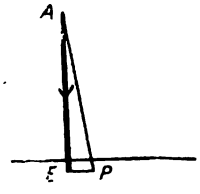


Fig. 3.

Theorien der Klasse II. Die Theorien, zu deren Besprechung wir nun übergehen, sind, wie bereits erwähnt, dadurch gekennzeichnet, daß der Kompensationsstrom nicht in demselben Punkt wie der Leitungsstrom in die Erde mündet. Es bringt dies eine erhebliche Vergrößerung der Zahl der auch physikalisch nicht ohne weiteres abzulehnenden Möglichkeiten mit sich, da man nun den Kompensationsstrom auf Teilen der Erdoberfläche münden lassen kann, von denen noch keine Beobachtungen vorliegen (z. B. auf dem offenen Meer) oder vor allem, in denen besondere physikalische Verhältnisse durch anderweitige Überlegungen zu erwarten sind (z. B. in hohen Breiten). Die Theorien der Art II werden also in der Hauptsache — und darin liegt teils ihre vorteilhafte Vielseitigkeit, teils ihre unangenehme Dehnbarkeit — die Möglichkeiten umfassen, in denen die Unvollständigkeit des Beobachtungsmaterials, und zwar bezüglich der geographischen Verbreitung der Beobachtungsorte, eine Rolle spielt.

II 13. Punkt P_1 liegt außerhalb der Atmosphäre, Punkt P_2 in der Erde.

Bezüglich der Deutung der Kompensationsströme gilt dasselbe wie bei den Theorien der Art. I 1. Das Schema der Stromschleife gibt die Fig. 4.

1) H. Ebert, Phys. Ztschr. 5. 135. 1904. Wegen zahlreicher sich anschließender Arbeiten vgl. die Besprechung bei v. Schweidler und Kohlrausch, a. a. O. S. 272 ff.

II 13 *n n*. Negativer Strom $A \to P_1$, negativer Strom $P_1 \to P_2$. Die Existenz des Stromes $A P_1$ ist jedenfalls nicht von vornherein abzulehnen, wie wir später sehen werden. Bezüglich des Stromes $P_1 P_2$, der also in einer Einstrahlung von Elektronen bestehen müßte, können wir die aus der Untersuchung von v. Schweidler folgende und den bisherigen Theorien so verderbliche Aussage der Nichtexistenz eines solchen Stromes nun dadurch bedeutungslos machen, daß wir den Punkt P_2 prinzipiell an einen Ort verlegen, für welchen noch keine Messungen nach dem Vorgang v. Schweidlers vorliegen.[1]) Es wäre das allerdings an sich nicht mehr als eine reine Willkürlichkeit; für einen Fall aber läßt sich durch anderweitig gewonnene Einsichten ein solches Vorgehen immerhin, wenn auch nicht strenge rechtfertigen, so doch stützen, nämlich für eine Verlegung von P_2 in die Polargebiete der Erde. Dort nämlich läßt die Korpuskulartheorie des Polarlichts[2]) den Einfall von Elektronen großer Geschwindigkeit auf die Erdoberfläche wenigstens nicht als ausgeschlossen erscheinen. Zusammenfassend liegen die Verhältnisse jedenfalls so, daß die eben behandelte Möglichkeit nicht von vornherein abgelehnt werden kann.

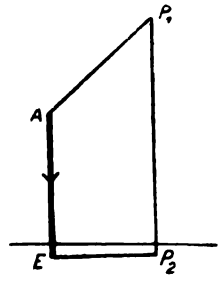


Fig. 4.

II 13 *p n*. Positiver Strom $P_1 \to A$, negativer Strom $P_1 \to P_2$. Es tritt an die Stelle eines negativen von der Atmosphäre ausgehenden ein positiver in dieselbe eintretender Strom. Da dessen Existenz (vgl. I 1 *p n*) ebenfalls nicht unmöglich erscheint, ist auch diese Theorie nicht von vornherein abzulehnen.

II 13 *n p*. Strom $A \to P_1$ negativ, Strom $P_2 \to P_1$ positiv. Die Theorie ist abzulehnen, da auch bei Verlegung von P_2 in unbekannte Gebiete der Erdoberfläche sich keinerlei plausible Gründe für eine genügend intensive Emission positiver Strahlen

---

1) Hierauf hat v. Schweidler a. a. O. S. 16 selbst schon ausdrücklich hingewiesen.

2) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von L. Vegard, Jahrb. Rad. u. Elektr. 14. S. 383. 1917.

von ausgezeichneten Punkten der Erdoberfläche beibringen lassen.[1])

II 13 *p p*. Strom $P_1 \to A$ positiv, Strom $P_2 \to P_1$ positiv. Ist aus demselben Grund wie die vorhergehende Theorie abzulehnen.

II 23. Punkt P_1 in der Atmosphäre, Punkt P_2 in der Erde.

Der Deutung der Kompensationsströme ist nun besonders in dieser Unterklasse der weiteste Spielraum gelassen. Korpuskulare Strahlen und mechanische Konvektion durch Luftströmungen müssen wir ebenso wie bei den Theorien der Art I 2 natürlich generell auch hier als möglich erklären; es kommt nun aber neu hinzu, daß wir nicht von vornherein auch die Deutung als Leitungsströme in der ionisierten Atmosphäre wie bei I 2 ausschließen können, einem Umstand, dem wir auch bereits (S. 468) durch Aufnahme der 4 Möglichkeiten II 23 (*n p*) *p* ... II 23 *n* (*n p*) Rechnung getragen haben. Denn da P_1 und P_2 in uns noch unbekannten Gebieten liegen können, in denen wir allgemein, d. h. ohne physikalische Diskussion, auch über das elektrische Feld nichts aussagen können, so ist die Möglichkeit der Ausbildung von Leitungsströmen mit kompensierender Wirkung jedenfalls nicht ohne weiteres wie bisher zu verneinen. Das Schema der Stromschleife ist gegeben durch die Fig. 5.

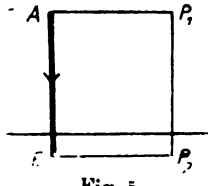


Fig. 5.

II 23 *n n*, II 23 *p n*. Positiver bzw. negativer Strom auf $A P_1$, negativer Strom $P_1 \to P_2$. Beide Möglichkeiten sind, ganz abgesehen von der Deutung des Stromes auf $A P_1$, abzulehnen wegen des negativen Stromes auf $P_1 P_2$. Dieser könnte nur gedeutet werden als mechanischer Konvektionsstrom oder als Korpuskularstrahlenstrom, etwa im Sinne der Swaunschen Theorie (S. 471). Nun ist es natürlich möglich, den Punkt P_2 in Gebiete der Erdoberfläche zu legen, für welche noch keinerlei Beobachtungen vorliegen. Derartige Annahmen wären aber

1) Von allzugewagten Hypothesen, wie z. B. der Emission positiver Ladung bei Vulkanausbrüchen, wollen wir hier in dieser tunlichst nüchternen Untersuchung natürlich absehen.

wie man bei näherem Zusehen erkennt, nichts weiter als reine Willkürlichkeiten, zu deren Stütze auch nicht die geringsten Gründe sich würden anführen lassen.

II 23 *n p*. Ist aus Gründen derselben Art abzulehnen.

II 23 *p p*. Positive Ströme $P_1 \rightarrow A$ und $P_2 \rightarrow P$. Deutet man die Ströme durch korpuskulare Strahlen, so ist diese Möglichkeit aus denselben Gründen wie bei den drei ersten abzulehnen. Dagegen kommt dieser Möglichkeit eine gewisse Bedeutung zu, wenn man die Ströme als mechanische Konvektionsströme deutet und für $P_2 \rightarrow P_1$ die Ebertsche Theorie zu Hilfe nimmt. Wenn dann zwar auch eine prinzipiell neue Möglichkeit in dieser Kombination nicht enthalten ist, so ist sie doch zur Ergänzung der Ebertschen Theorie I 3 *p* notwendig und nützlich[1]) in allen Fällen, wo diese für den Beobachtungsort *E* selbst versagen würde: so z. B. wenn *E* auf dem Meer liegt.

II 23 (*n p*) *n* bis II 23 (*n p*) (*n p*). Sämtliche derartige Möglichkeiten, welche den Kompensationsstrom ganz oder teilweise als Leitungsstrom deuten, sind abzulehnen, teils aus den soeben genannten Gründen, teils weil die zur Unterhaltung des Leitungsstromes auf $P_1 P_2$ notwendigen elektromotorischen Kräfte und großen Leitfähigkeiten fehlen. Es hat die Verhältnisse Swann[2]) durchdiskutiert und ist zu negativen Resultaten gekommen. Zu bemerken ist allerdings, daß wir über die Leitfähigkeit der höchsten Luftschichten zwar nur sehr wenig wissen, daß aber verschiedene Umstände (kräftige Ionisation durch die durchdringende Strahlung, durch die Sonnenstrahlen und durch korpuskulare Strahlen; große freie Weglänge, Ladungsträger vermutlich zum Teil freie Elektronen, deshalb große Beweglichkeit) und vielleicht auch einige Versuche über die Ausbreitung funkentelegraphischer Signale dafür zu sprechen scheinen, daß die Leitfähigkeit dort tatsächlich sehr groß ist. Im Grenzfall würden dann die hier betrachteten Stromschleifen übergehen in die Stromschleifen der ersten Art, insofern das Stück $A P_1$ physikalisch einer metallischen Verbindung entsprechen würde.

1) Vgl. E. v. Schweidler, Enzykl. Art., S. 259.

2) W. F. Swann, Terr. Magn. **20**. S. 107 f. u. 111 f. 1915. Der Inhalt des zweiten Teils der ausführlichen Arbeit von Swann war mir sowohl im Original wie in Referaten nicht zugänglich.

Fassen wir nun das Ergebnis der bisherigen Betrachtungen zusammen. Wir konnten bereits auf Grund unserer ersten groben Diskussion von den 21 möglichen einfachen Theorien die Mehrzahl als unbrauchbar ablehnen; nur bei drei Theorien war eine Ablehnung wenn überhaupt, so jedenfalls nicht ohne weiteres möglich. Es sind dies die Theorien:

I $3p$ mit der Ergänzung II $23pp$, charakterisiert durch die Ebertsche Deutung eines positiven aufsteigenden Kompensationsstromes infolge Erdabsorption und Bodenatmung.

II $13pn$; II $13nn$, charakterisiert durch die Umgehung des v. Schweidlerschen Einwandes vermöge einer Verlegung der Auftreffstelle von negativen Korpuskularstrahlen in die Polargebiete der Erde.

Diese drei Theorien bieten jedenfalls a priori nicht zu verneinende Möglichkeiten einer Lösung und verdienen also eine eingehendere Diskussion. Was zunächst die beiden Theorien der Art II anlangt, so wird die Entscheidung natürlich letzten Endes zu geben sein durch die Vornahme von Beobachtungen in den Polargebieten und zwar durch Wiederholung der fundamentalen Versuche von v. Schweidler. Es scheint mir bereits darin ein Erfolg unserer systematischen Diskussion zu liegen, daß sich nun mit vollständiger Bestimmtheit ein einfaches experimentum crucis angeben läßt. Vorerst allerdings wird man auf anderem Wege versuchen müssen, Aussagen zu machen. Da das experimentum crucis durch theoretische Betrachtungen natürlich nie zu ersetzen ist, muß man sich damit zufrieden geben, nachzusehen, ob etwa irgendwo die fraglichen Theorien in Widerspruch mit anderweitigen bisher vorliegenden Erfahrungen und Ansichten stehen. Soviel ich sehe, muß diese Frage wenigstens nach der qualitativen Seite hin verneint werden. Zunächst benötigen beide das Einfallen eines Elektronenstromes auf die Erdoberfläche und zwar nur in den Polargebieten der Erde. Diese Konzentration auf ausgezeichnete Gebiete der Erdoberfläche wird aber ebenso wie die Existenz eines Elektronenstromes überhaupt, durch die neueren Untersuchungen über die Polarlichter (vgl. den S. 473 zitierten Bericht von Vegard), zumindest wahrscheinlich gemacht. Man könnte nun versuchen, nach einem Widerspruch der Theorie

mit der Erfahrung auf folgendem Wege, vermutlich dem einzig möglichen, zu suchen. Wenn in den Polargebieten Elektronen auf die Erde treffen, so müßte nach den Voraussetzungen der Theorie der Absorptionskoeffizient so klein sein, daß mehr als die Hälfte der Strahlen zur Erde durchdringt. Ist δ die Dichte der Atmosphäre in der Höhe h über dem Boden, α der Absorptionskoeffizient der Luft nach dem Massenproportionalitätsgesetz bezogen auf die Masseneinheit, so ist

$$\ln \frac{J_0}{J_h} = \alpha \int_h^\infty \delta \, d\, h,$$

so daß die am Erdboden ankommende Intensität in Bruchteilen der in die Atmosphäre von außen eindringenden ist

$$J = J_0 \, e^{-\alpha m},$$

wenn m die Masse der Atmosphäre über 1 cm² ist. Nun soll sein $J > 0{,}5\, J_0$, also muß sein

$$\alpha m < \ln 2 = 0{,}7,$$

da m von der Größenordnung 10^3 ist, so ergibt sich für α als obere Grenze

$$\alpha < 0{,}7 \cdot 10^{-3}. \tag{1}$$

Andererseits muß der Einfall der Elektronen wiederum im Sinne der betrachteten Theorie innerhalb einer Polarkalotte erfolgen, in denen die Schweidlerschen Versuche noch nicht gemacht sind. Nun ist der Winkel α_m der Nordlichtzone nach Störmers Theorie[1]) gegeben durch

$$\left| \begin{array}{l} \sin \alpha_m = \sqrt{\frac{2R}{c}}, \\ c = \sqrt{\frac{n}{H\varrho}}, \end{array} \right. \tag{2}$$

wenn R der Erdradius in cm ($= 6{,}4 \cdot 10^8$), n das magnetische Moment der Erde ($= 8{,}52 \cdot 10^{25}$) ist und $H\varrho$ in bekannter Weise die Geschwindigkeit der Elektronen definiert,

$$H\varrho = \frac{m v}{e} \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{3}$$

---

1) Vgl. L. Vegard, a. a. O., S. 435.

Wenn man den Absorptionskoeffizient α als Funktion von r kennt, so erhält man aus (1) eine untere Grenze v_m für v und könnte zusehen, ob der aus (2) und (3) mit $v = v_m$ folgende Wert von α_m nicht etwa in bekannte geographische Breiten reicht; wäre dies der Fall, so wäre die Theorie abzulehnen. Leider ist aber für den angegebenen α-Wert die Geschwindigkeit so nahe der Lichtgeschwindigkeit, daß Erfahrung wie Theorie hier noch ganz im Stiche lassen. Wegen der ganz außerordentlich hohen, aus Gl. (1) jedenfalls zu folgernden Werte der Geschwindigkeit allein kann man aber keineswegs die Theorie ablehnen, da man in der Theorie des Nordlichts mit ähnlich hohen Werten zu rechnen hat; hypothetisches, aber keiner Erfahrung widersprechendes darf im Sinne der vorliegenden Betrachtungen nicht zur Ablehnung führen.

Was den positiven in die Atmosphäre einströmenden bzw. negativen aus ihr austretenden Teil des Kompensationsstromes anlangt, so ist die Möglichkeit der Existenz beider ebenfalls nicht a priori abzulehnen. Für den Fall des positiven Stromes ist dies im Anschluß an die Vegardsche, neuerdings von Stark[1]) auf ganz anderem Wege gestützte Theorie des Nordlichts ohne weiteres klar. Auch die Existenz eines negativen Stromes ist unter Zugrundelegung einer an sich plausiblen Hypothese keineswegs ausgeschlossen und scheint mir sogar insofern beachtenswert zu sein, als sie wenigstens für diesen einen Teil des Kompensationsstromes Unabhängigkeit von Vorgängen in der Tropo- und Stratosphäre plausibel macht und damit einen Hinweis auf die merkwürdige, eingangs erwähnte Konstanz und vielleicht auch auf die Ursache der jährlichen Periode (Wintermaximum) des Leitungsstromes geben kann. Es ist als sicher anzunehmen, daß die äußersten Schichten der Atmosphäre stark ionisiert sind.[2]) Ferner deuten neuere Erfahrungen an ionisierten Gasen darauf hin[3]), daß dort die negativen Träger zum großen Teil als freie Elektronen existieren können und daß diese im thermischen Gleichgewicht mit den

1) J. Stark, Die Naturwissenschaften 6. S. 145. 1918.

2) Einen Bericht über die interessante einschlägige Literatur werde ich a. a. O. geben.

3) Vgl. R. Seeliger. Die Ionisation der Gase. Graetz, Handb. d. Elektr. 3.

Gasmolekülen sind, also eine rund 30 mal größere mittlere Geschwindigkeit besitzen als die Gasmoleküle. Da zugleich ihre freie Weglänge sehr groß ist, so wird ein Teil der Elektronen ohne Zweifel den Anziehungsbereich und die Atmosphäre für immer verlassen und als negativer Strom in den Weltraum ausstrahlen. Eine einfache Rechnung ergibt, daß bei einer Temperatur von rund 30° abs. bereits für den größten Teil der Elektronen dies der Fall sein wird.

Die zweite oben S. 476 als noch möglich angeführte Theorie war nun die von Ebert. Über die quantitative Brauchbarkeit derselben existiert eine lebhafte Diskussion, die jedenfalls nicht eindeutig zu ungunsten der Theorie ausgefallen ist bis auf einen Punkt, der in der Tat eine ernstliche Schwierigkeit einzuschließen scheint.[1]) Ebert muß annehmen, daß die positiven Raumladungen durch mechanische Konvektionsströme von der nächsten Nähe der Erdoberfläche in die Atmosphäre fortgeschafft werden; ist v die Konvektionsgeschwindigkeit, ϱ die Ladungsdichte, so müßte also $\varrho \cdot v$ = Leitungsstrom sein und es ist nun allerdings fraglich, ob in größerer Entfernung vom Boden $\varrho \cdot v$ genügend große Werte hat. Mangels brauchbarer Daten über die Größe der vertikalen Luftbewegung kann man hier allgemein eine Entscheidung nicht treffen und muß in der Tat die Frage noch offen lassen; es scheint aber auf alle Fälle nicht möglich zu sein, die Ebertsche Theorie für größere Höhen aufrecht zu erhalten. Swann hat nämlich a. a. O. die Grundlagen der Ebertschen Theorie von einem neuen Gesichtspunkt aus diskutiert; er berechnet die Relaxationszeit einer aufsteigenden geladenen Luftmasse und findet aus dem Wert $3 \cdot 10^{-4}$ für die Leitfähigkeit, daß in etwa 10 Minuten die Ladung auf $^1/_{10}$ gesunken sein wird; dies entspricht bei einer Aufsteigegeschwindigkeit der Luftmasse von 1 m/sec. einem Weg von nur 600 m. Die Überlegungen von Swann sind aber nicht streng und führen bei genauerer Rechnung zu Resultaten, die erheblich günstiger für die Ebertsche Theorie sind; prinzipiell jedoch wird hierdurch nichts

1) Man vgl. die ausführliche Darstellung bei v. Schweidler und Kohlrausch a. a. O. S. 272—273.

geändert und es scheint nach wie vor unmöglich, bis zu Höhen von auch nur wenigen Kilometern Konvektionsströme zur Kompensation heranziehen zu können, um so weniger also natürlich bis zu einer Höhe von 9 km, wo aus Potentialgradient und Ionendichte die Existenz des Leitungsstromes noch unmittelbar sichergestellt ist.

Zum Schluß müssen wir nun noch auf die früher bereits kurz erwähnten sogenannten Kombinationstheorien eingehen, die zur Vervollständigung unserer Liste natürlich heranzuziehen sind. Von unserem Standpunkt aus sind diese Theorien charakterisiert durch kompliziertere polygonale Stromschleifen, die sich zusammensetzen aus den einfachen bisher besprochenen Schleifen; geometrisch ist die Zahl der möglichen Kombinationen, wie man sofort sieht, natürlich eine sehr große, sie läßt sich aber in ähnlicher Weise, wie bei den einfachen Theorien, von von vornherein erheblich reduzieren. Dabei kann man die Leistung dieser Kombinationen ganz allgemein darin sehen, daß sie (durch räumliches Übereinandersetzen von zwei Stromschleifen) den Punkt A der unteren Schleife in tieferen Schichten der Atmosphäre anzunehmen gestatten und so die Möglichkeit geben, Schwierigkeiten zu vermeiden, die mit einer über die ganze bisher der direkten Beobachtung zugängliche Schichthöhe von 0 bis ca. 9 km ausgedehnten Vertikalerstreckung der einfachen Schleife verbunden sind. Man könnte also daran denken, auf diesem Weg z. B. die Ebertsche Theorie bezüglich höherer Luftschichten, in welche der mechanisch-konvektive Transport positiver Ladungen nicht mehr hinaufreicht, gewissermaßen zu entlasten. Die eingehendere Diskussion zeigt, daß 8 (bzw. 12) derartige Kompensationstheorien mit zwei Schleifen möglich sind (wenn man die beschränkenden Folgerungen unserer bisherigen Betrachtungen bereits berücksichtigt), nämlich die Kombinationen von I 2 (I 3) und II 2 mit I 1′, I 2′, II 22, II 23, wobei die den Typen I 1 und I 2 rein geometrisch entsprechenden Typen mit gestrichenen Zahlen bezeichnet sind. Als Beispiel diene das Schema Fig. 6 für die Kombination I 3 mit I 1′.

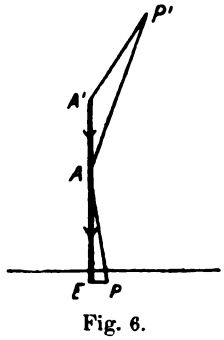


Fig. 6.

Soviel ich sehe, ist aber keine dieser 8 Kombinationen dazu geeignet, aus der Schwierigkeit herauszuhelfen. Rechnet man, was hier sicher genügt, nach der auf der isothermen Barometerformel fußenden einfachen Absorptionsgleichung[1]):

$$J = J_0 \cdot e^{-\frac{a}{b} \cdot e^{-b \cdot h}},$$

so erkennt man, daß es z. B. nicht möglich ist, in dem für den Anschluß an die Ebertschen Konvektionsströme in Betracht kommenden Höhen von einigen Kilometern eine genügend starke Absorption zu konstruieren, d. h. dorthin einen steilen Intensitätsabfall einer von oben kommenden korpuskularen Strahlung zu verlegen und zugleich mit dem Schweidlerschen Versuch auf dem Erdboden nicht in Konflikt zu kommen. Es ist mir wenigstens nicht gelungen, eine befriedigende Lösung zu finden, wenn ich auch die Möglichkeit einer solchen noch nicht generell verneinen kann.

Zusammenfassung.

Nimmt man wie üblich an, daß der ionenelektrische Zustand der Erdatmosphäre ein stationärer ist, so muß die aus dem normalen Leitungsstrom und dem v. Schweidlerschen Kompensationsstrom bestehende Stromschleife geschlossen sein. Dies erlaubt, eine vollständige Liste aller für eine Deutung des Kompensationsstromes überhaupt in Betracht kommenden theoretischen Annahmen aufzustellen, die im ganzen aus 21 einfachen und 8 aus diesen durch Kombination gebildeten Theorien besteht. Die nähere Diskussion scheidet von diesen die meisten aus, so daß nur zwei einfache Theorien (und vielleicht einige Kombinationstheorien) übrig bleiben. Für die Richtigkeit der beiden einfachen Theorien läßt sich ein mit den heutigen Mitteln zu erledigendes experimentum crucis angeben, das darin besteht, nachzusehen, ob auch in den Polargebieten der Erde kein Elektronenstrom die Erdoberfläche trifft. Die Kombinationstheorien bestehen in einer immerhin möglichen, wenn auch wenig wahrscheinlichen Ergänzung der Ebertschen Theorie für die höheren Schichten der Troposphäre.

1) P. Lenard, Heidelbg. Akad. 1918. Nr. 5. S. 128.

(Eingegangen 5. Januar 1920.)

4. *Erwiderung auf Hrn. Sommerfelds Bemerkungen über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie;* *von H. Weyl.*

Mit Hrn. Sommerfeld bin ich darin einig, daß meine Behandlung des in Rede stehenden Problems für die Praxis der drahtlosen Telegraphie nichts Neues bietet; hier wird man sich nach wie vor der grundlegenden, von Hrn. Sommerfeld gewonnenen Resultate zu bedienen haben. Was ich versprach, war lediglich eine sachgemäßere Methode der mathematischen Behandlung und eine gewisse Klärung des ganzen Vorgangs. Immerhin besteht, wenn ich nicht irre, zwischen Hrn. Sommerfeld und mir in einem Punkte eine wesentliche Meinungsverschiedenheit.

1. Nicht dem Sommerfeldschen *Begriff* der Oberflächenwelle streite ich die sachliche Berechtigung ab, sondern der Behauptung, daß eine derartige Oberflächenwelle in dem Vorgang, den wir beide untersuchen, tatsächlich enthalten sei. Der Umstand, daß eine mathematische Methode die einen einheitlichen physikalischen Vorgang darstellende Funktion in mehrere Summanden spaltet, gibt gewiß noch kein Recht zu der Ansicht, daß das Phänomen re vera aus diesen Teilvorgängen als selbständigen Wesenheiten zusammengesetzt sei. Der „künstliche" Charakter der Sommerfeldschen Zerlegung scheint mir namentlich aus folgenden beiden Umständen hervorzugehen:

a) die drei einzelnen Bestandteile, insbesondere die Oberflächenwelle, haben eine Singularität auf der Achse $r = 0$, während der Gesamtvorgang dort regulär ist (*darum* hielt ich es zum Zwecke einer „natürlichen" Diskussion für angezeigt, die Wellenfortpflanzung im ganzen oberen Halbraum zu betrachten);

b) wo die Abtrennung der Oberflächenwelle bei der Diskussion von Hrn. Sommerfeld überhaupt aufrecht erhalten wird (bei großer numerischer Entfernung), verschwindet ihr Beitrag (wegen der exponentiellen Abnahme) vollständig in der asymptotischen Entwicklung; aus dem anschaulichen Charakter des Gesamtvorgangs kann also in keinem Fall die Existenz der Oberflächenwelle abgelesen werden; die Bemerkungen auf S. 720 der Sommerfeldschen Arbeit über eine gewisse „Unstimmigkeit" schienen mir recht deutlich das Unbefriedigende der Situation zu bezeichnen.

2. Es schien mir wichtig, hervorzuheben, daß es sich bei der ganzen Untersuchung um den Grenzfall $\lim n$ (Brechungsindex) $= \infty$ handelt, um das Analogon des Gibbsschen Phänomens. Der Fall eines endlichen festen n (asymptotische Entwicklung nach Potenzen der reziproken Entfernung), den ich in § 2 rasch erledige, wird in § 6 der Sommerfeldschen Arbeit gestreift; aber nicht diese Entwicklung wird, wie es der Übergang zu § 7 ankündigt, dann in § 7 weitergeführt, sondern von da ab steht allein der Grenzfall $n = \infty$ in Frage. Innerhalb seiner tritt erst die Fallunterscheidung zwischen mäßiger und großer numerischer Entfernung ein. Ich kann zwischen diesen beiden Fällen keinen anderen Unterschied zugeben, als ihn etwa auch das Verhalten der Funktion $\mathrm{Si}(x)$ für mäßige und unendlich große x zeigt: die asymptotische Formel gibt an, wie die Funktionsbewegung im Unendlichen „ausläuft". — Wie beim Gibbsschen Phänomen automatisch die Größe nx als Argument auftritt [vgl. S. 489 meiner Arbeit], wenn man eine gleichmäßig gültige Grenzformel für $n = \infty$ haben will, so bei unserm Problem die „numerische Entfernung" $r_1 = r/|n|^2$ an Stelle von r [und $z/|n|$ an Stelle von z]; darin kommt für mich ihre grundsätzliche Bedeutung hinreichend klar zum Ausdruck. Dadurch, daß ich Gl. (23) durch Umrahmung als das Wichtigste und das Schlußresultat kennzeichnete, auf das Analogon des Gibbsschen Phänomens hinwies und zur anschaulichen Diskussion aufforderte, glaubte ich für den Leser genug getan zu haben.

3. Namentlich im Falle eines festen endlichen n trägt die Betrachtung des ganzen oberen Halbraums sehr zur physikalischen Klärung des Vorgangs bei. Die asymptotische Ent-

wicklung auf S. 487 unten meiner Note stellt, wenn man sie beim ersten Gliede abbricht, den Vorgang mit einem Fehler dar, der in jenem ganzen Bereich gleichmäßig von der Größenordnung $1/R$ ist, beim Abbrechen nach dem zweiten Glied mit einem Fehler von der Größenordnung $1/R^2$, usf.; die Nachbarschaft der Trennungsebene nimmt da durchaus keine Sonderstellung ein. Die von mir am Schluß des § 2 reproduzierte Formel (33a) der Sommerfeldschen Arbeit findet durch diese Entwicklung ihre natürliche Erklärung. Es sei gestattet, folgende Bemerkung anzufügen. Die „numerische Entfernung" ϱ wird, wenn man diesen Begriff auf den ganzen oberen Halbraum ausdehnen will, am besten erklärt als der absolute Betrag der von mir auf S. 496 eingeführten Größe w:

$$\varrho = |w| = |R - r\cos\alpha - z\sin\alpha|.$$

Die Entwicklung des § 2 gilt nun nicht nur bei festem endlichen n, sondern gleichmäßig für *alle* n im Sinne einer asymptotischen Darstellung für *große* ϱ; es ist nämlich, wenn man mit dem ersten Gliede abbricht, der Fehler (gleichmäßig für alle n) $\geqq \frac{\text{Const.}}{\varrho}$, beim Abbrechen nach dem zweiten Gliede $\geqq \frac{\text{Const.}}{\varrho^2}$, usf., wie sich leicht beweisen läßt.

So glaube ich, ist die von mir in § 2 entwickelte Methode die sachgemäße zur Behandlung des Problems für *alle Werte von n und große* ϱ; die in § 4 angegebene hat dieselbe Bedeutung für *alle* ϱ *und große n.* Die Wichtigkeit des physikalischen Problems schien mir die Mitteilung dieser Methode zu rechtfertigen. Im übrigen weiß ich sehr wohl, wie viel leichter das Herumbessern an der mathematischen Behandlung eines physikalischen Problems ist, als seine erste Bezwingung.

(Eingegangen 2. März 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

1920. № 14.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Quantitative Unterwasserschallversuche; von H. Barkhausen und H. Lichte.*

(Mitteilungen aus dem Laboratorium der Torpedoinspektion.)

I. Das Problem.

Die Schallerzeugung im Wasser und die im Vergleich zur Luft ziemlich gute Fähigkeit des Wassers, den Schall auf große Entfernungen zu übertragen, ist seit langem bekannt. Schon Leonardo da Vinci hatte die Erfahrung gemacht, daß man Schiffe auf See mittels einer in das Wasser gesteckten Tuba hört. Er schreibt darüber: „Wenn Du Dein Schiff anhalten wirst und den Kopf eines Sprachrohres auf das Wasser setzen und das andere Ende an Dein Ohr, so wirst Du Schiffe hören, die recht weit von Dir entfernt sind.“ [1]) Es sei ferner auf die Versuche von Beudant (1820), sowie von Sturm und Colladon [2]) auf dem Genfer See (1827) hingewiesen, die mit ganz einfachen Mitteln schon eine Reichweite von 15 km, später sogar von 35 km erzielten. In neuerer Zeit, seit etwa 20 Jahren, sind die Unterwasserschallsignale auch praktisch in der Marine zum Ansteuern von mit Unterwasserglocken ausgerüsteten Feuerschiffen verwandt worden und zwar mit gutem Erfolge. In der Kriegsmarine erhielten sie eine ganz besondere Bedeutung mit der erhöhten Verwendungsfähigkeit der Unterseeboote. Waren sie doch für diese im getauchten Zustande zunächst das einzige Mittel, sich mit der Außenwelt zu verständigen.

Längere Zeit dachte man sogar in der Marine an die

1) Leonardo da Vinci, Der Denker, Forscher und Poet. Auswahl von Marie Herzfeld. S. 43. Fortpflanzung des Schalles in flüssigen und in festen Körpern. 3. Aufl. Jena 1911. Eugen Diederichs.

2) Colladon et Sturm: Ann. chim. et phys. (2) **36**. S. 113, 225. 1827; Pogg. Ann. **12**. S. 39, 161. 1828. Beudant: von Colladon und Sturm erwähnt.

Möglichkeit, die drahtlose Telegraphie mit elektromagnetischen Wellen durch die Unterwasserschalltelegraphie (U. T.), die militärisch manche Vorteile bieten würde, zu verdrängen. Waren doch schon mit den ersten einfachen Apparaten gelegentlich Reichweiten von 100 km und mehr erzielt worden. Wenn man diese Reichweiten nicht dauernd erhielt, so schob man die Schuld auf die Unvollkommenheit der Apparate, der Sender und Empfänger. Als Empfänger wurden nämlich Mikrophonempfänger verwandt, von denen bekannt ist, daß sie in der Empfindlichkeit stark schwanken. Selbst die besten in der Fernsprechtechnik verwandten Mikrophone schwanken um 200—300 Proz. und bei Spezialausführungen kann man durch sorgfältige Einstellung, die man einfach durch Probieren ermitteln muß, oft enorme Empfindlichkeiten erzielen, die das 10—100fache der normalen betragen. Die anfangs benutzten Mikrophone waren einstellbar und daher besonders schwankend.

Auch auf Unregelmäßigkeiten am Sender führte man die beobachteten starken Schwankungen in der Reichweite der U.T. zurück. Es wurden meist Sirenen verwandt, bei denen sich die rotierenden aufeinanderschleifenden Teile stark abnutzten. An „Verwehungen" des Schalles, wie sie in der Luft vorkommen, hatte man beim Wasser nicht gedacht. Sie schienen hier unmöglich zu sein.

Der Beginn des Krieges, mit dem der eine von uns auch als wissenschaftlicher Hilfsarbeiter bei der Torpedoinspektion eintrat, gab der U. T. eine erhöhte Bedeutung. Es schien da erforderlich, zunächst einmal die grundlegende Frage zu klären, welchen Einfluß das Wasser bei der Ausbreitung des Schalles habe. Denn hiervon hing ja die ganze Entwicklungsmöglichkeit der U. T. ab.

Bei jedem Ausbreitungsvorgang hat man zwischen zwei Arten der Energieabnahme zu unterscheiden:

1. Der durch die räumliche Ausbreitung, d. h. die Verteilung der Energie auf immer größer werdende Flächen. Bei Kugelwellen folgt hieraus eine quadratische Abnahme mit der Entfernung vom Sender. Bei dieser Ausbreitungsart bleibt die Energie an sich erhalten, im Gegensatz zu der

2. Abnahme der Energie durch Absorption, Zerstreuung oder dgl. In diesem Falle wird überall im Medium ein Teil

der Schallenergie in Energie anderer Form, beispielsweise Wärme umgewandelt, oder durch unregelmäßige Zerstreuung oder dgl. der weiteren Ausbreitung entzogen. Das wesentliche ist, daß wir dann pro Kilometer immer dieselbe Abnahme auf einen bestimmten Bruchteil haben, ganz gleichgültig, ob die Entfernung vom Sender groß oder klein ist. Die Abnahme erfolgt nach einer Exponentialfunktion.

Im allgemeinen wirken beide Faktoren zusammen. Dann überwiegt bei kleinen Entfernungen die quadratische Abnahme, bei großen Entfernungen die exponentielle. Solange das quadratische Gesetz noch gültig ist, läßt sich die Reichweite durch Verbesserung der Apparate noch wesentlich erhöhen. Eine Steigerung der Senderleistung oder der Empfängerempfindlichkeit auf das 100fache ergibt eine 10fache Reichweite, d. h. beispielsweise von 10 km auf 100 km. Sobald aber die exponentielle Abnahme überwiegt, ist praktisch durch eine Verbesserung der Apparate fast gar nichts mehr zu gewinnen. Nehmen wir z. B. eine Abnahme auf die Hälfte pro km an, so ergibt sich für n km eine Abnahme auf $(1/2)^n$, d. i. für $n = 10$ km auf $1/1000$. In diesem Falle würde also eine Steigerung der Senderenergie oder Empfängerempfindlichkeit auf das 1000fache nur eine Steigerung der Reichweite um 10 km, d. h. z. B. von 10 auf 20 km, bewirken. Eine nochmalige Steigerung der Senderleistung auf das 1000fache, d. h. also auf das 1000000fache der ursprünglichen, würde wieder nur 10 km weiter, also auf 30 km reichen. Man sieht, daß dann 100 km niemals zu erreichen sind.

Auf Grund dieser Überlegungen hielten wir eine genaue Untersuchung der Ausbreitung des Schalles im Wasser für erforderlich, und zwar kam es weniger auf die Bestimmung der maximalen Reichweite an, die ja bisher schon oft gemessen war, als auf die viel schwierigere Untersuchung, nach welchem Gesetze die Abnahme der Schallenergie auf dem ganzen Wege erfolge.

II. Apparate und Meßverfahren.

1. Sender.

Zur Ausführung der Versuche standen seinerzeit verschiedene Sender und Empfänger zur Verfügung. Wenn wir

uns zunächst mit den Sendern befassen, so traf es sich sehr glücklich, daß gerade zu der Zeit, in der mit den Versuchen begonnen wurde, zwei *elektrisch betriebene Schallsender*, der Fessenden Oszillator der Submarine Signal Co. in Boston und der Elektromagnetsender der Signal-Gesellschaft m. b. H. in Kiel, bekannt wurden. Beide Sender sind im wesentlichen große Telephone, nur nach anderen Gesichtspunkten konstruiert. Die Membran wird elektromagnetisch durch Wechselstrom in Schwingungen versetzt und gibt ihre Energie als Schall an das Wasser ab. Die Membran und das sie erregende mechanische System haben deutlich ausgesprochene Eigenschwingungen, kommen also nur bei Resonanz stark ins

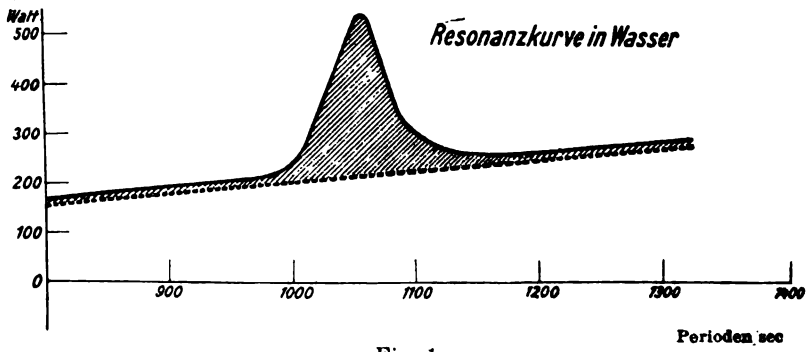


Fig. 1.

Schwingen. Es zeigte sich, daß die zugeführte elektrische Leistung, die an einem eingeschalteten Wattmeter unmittelbar abgelesen werden konnte, in gleicher Weise bei Resonanz stark anstieg, wie aus Fig. 1 zu ersehen ist. Da bei der Aufnahme dieser Kurve die Stromstärke absichtlich konstant gehalten wurde, sollte man ohne mechanische Schwingungen die punktierte Linie erwarten, da die Kupfer- und Eisenverluste mit der Frequenz langsam ansteigen. Die schraffiert gezeichnete Fläche, die eine normale Resonanzkurve bildet, überlagert sich diesen Verlusten. *Sie stellt die durch die mechanischen Schwingungen verursachten Verluste dar, die zum Teil durch innere Dämpfung verloren gehen, zum größten Teil aber akustisch ausgestrahlt werden.* Daß der erstere Teil

sehr klein war, ergab sich durch den Vergleich mit der Aufnahme der Resonanzkurve in Luft (Fig. 2), die wegen des Fehlens der Strahlungsdämpfung außerordentlich scharf war, also anzeigte, daß die innere Dämpfung sehr viel kleiner war. Für genaue Bestimmungen kann ihr prozentualer Anteil leicht in Rechnung gesetzt werden.[1])

Beide Apparate waren mit Gleichstrom polarisiert; die magnetische Anzugskraft war daher proportional dem Produkt aus der Gleichstrom- und der Wechselstromstärke. *Dann mußte die ausgestrahlte Leistung quadratisch mit dem Produkt dieser beiden Stromstärken wachsen.* Diese Folgerung fand sich auch experimentell weitgehend bestätigt. Verminderung allein der Wechselstromstärke auf $1/n$ verminderte den Aus-

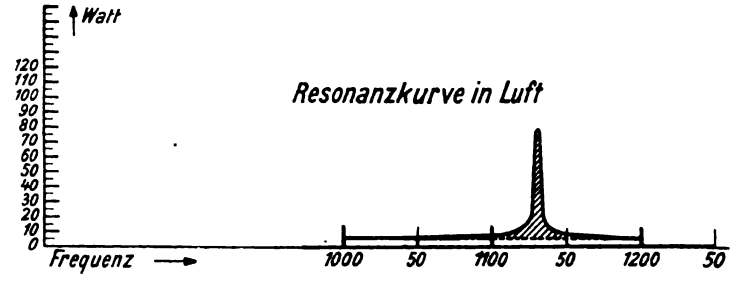


Fig. 2.

schlag am Wattmeter auf $1/n^2$, und zwar sowohl in der Resonanz wie außerhalb derselben. Man erhielt also wieder genau die Fig. 1, nur mit einem um $1/n^2$ verminderten Strommaßstab. Verminderung der Gleichstromstärke auf $1/n$ verminderte dagegen nur die Größe der schraffierten Fläche auf $1/n^2$; so daß die schwächer werdende mechanische Resonanzerscheinung gegenüber den konstanten elektrischen Verlusten bald gar nicht mehr hervortrat.

Das quadratische Gesetz fand sich weitgehend gut bestätigt. Nur bei großen Stromstärken trat schließlich Sättigung ein. Beim Fessenden Oszillator änderte sich gelegentlich auch

1) Diese Fragen sind inzwischen von den Herren Hahnemann und Hecht genauer untersucht worden. Vgl. Phys. Zeitschr. 20. S. 104, 245. 1919.

die Resonanzlage mit der Stromstärke, wenn die Vorspannung seiner inneren Membranen ungünstig gewählt wurde. Die Elastizität der sich durchbiegenden Membran, die hier für die Resonanzlage maßgebend ist, ist nämlich vom Ausschlag abhängig. Daher treten auch gelegentlich sogenannte „Kipperscheinungen" auf, ein plötzliches Umspringen des Schwingungszustandes bei einer gleichmäßigen Änderung der Frequenz, und zwar bei zu-

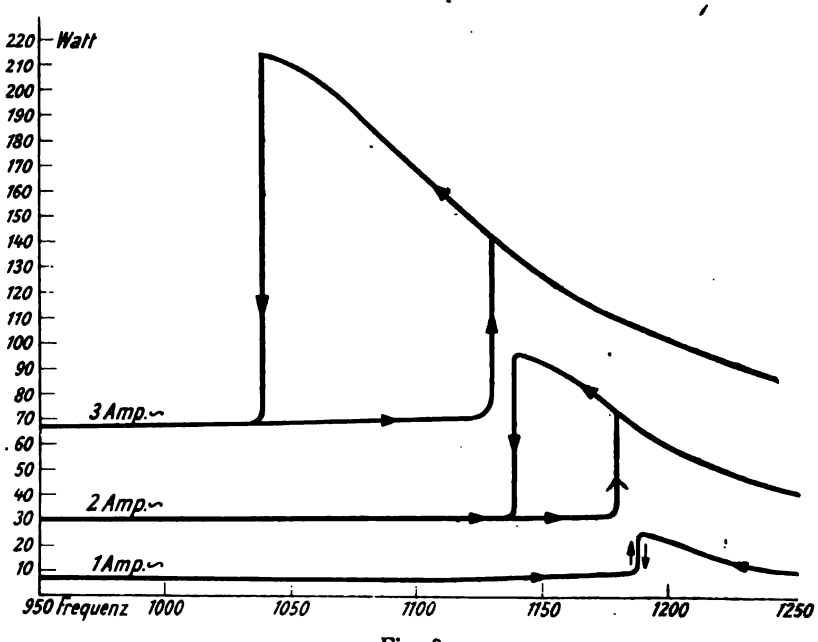


Fig. 3.

nehmender Frequenz an einer andern Stelle als bei abnehmender (Fig. 3). Die gleichen Erscheinungen sind bei elektrischen Schwingungskreisen mit Eisenkernspulen bekannt.[1]) Auch bei diesen ist die Selbstinduktion und damit die Resonanzlage von der Stromstärke abhängig. — Beim Sender der Signal-Gesellschaft wurde niemals eine Verschiebung bemerkt. Bei diesen werden als elastische Zwischenglieder longitudinal beanspruchte Stäbe benutzt, deren Elastizität bekanntlich bis an die Grenze

1) Vgl. Barkhausen, Labile Zustände elektrischer Systeme. Verh. d. D. Phys. Ges. XI. S. 267. 1909.

der Zerreißfähigkeit konstant ist. Daher ist der Sender der Signal-Gesellschaft zu Meßzwecken hervorragend geeignet.

Der mechanisch-akustische Schwingungsvorgang wurde auch rechnerisch untersucht[1]) und gute Übereinstimmung mit den Messungen gefunden. Besonders gab die folgende Erscheinung eine gute Bestätigung.

Bei Druckschwankungen von 1 Atm. berechnet sich die akustisch ausgestrahlte Leistung im Wasser zu 0,3 Watt/cm², so daß eine Membran von 1000 cm² „wirksamer Fläche" 300 Watt ausstrahlt. Höhere negative Druckschwankungen sind aber, falls der Sender nicht tief untergetaucht wird, unmöglich, da sonst *Vakuumbildung* eintritt, das Wasser sich von der Membran loslöst. In der Tat beobachtete man eine starke, schaumartige Blasenbildung an der Sendermembran, wenn die am Wattmeter angezeigte Leistungsdifferenz 300 Watt überschritt. Gleichzeitig schwankte der Zeiger des Instrumentes unregelmäßig hin und her, während er sonst ruhig feststand. Tauchte man den Sender tiefer unter, trat das Schwanken erst bei einer höheren Leistung ein. So konnte also experimentell das Eintreten einer bestimmten Druckschwankung sicher festgestellt werden und da sich dafür die akustisch ausgestrahlte Leistung in gleicher Höhe errechnete wie die am Wattmeter angezeigte Differenz, ist ihre Identität sichergestellt.

Hieraus folgt übrigens weiter ein wichtiges Konstruktionsprinzip, nämlich daß die Membran eines Senders eine durch die Senderleistung und die Eintauchtiefe bestimmte Größe nicht unterschreiten darf, damit keine Blasenbildung eintritt.

Daß die in Fig. 1 schraffierte Leistungsdifferenz tatsächlich akustisch ausgestrahlt wurde, wurde schließlich noch geprüft an einem aperiodischem Telephon, das in der Nähe des Senders ins Wasser gehängt wurde und auf ein Duddelgalvanometer geschaltet war. Die Ausschläge an diesem Galvanometer sind proportional dem Quadrat der durchfließenden Stromstärke, in unserem Fall also dem Quadrat der Schwingungsweite der Telephonmembran, d. h. direkt proportional der das Telephon treffenden akustischen Leistung.

1) Vgl. hierzu **Hahnemann und Hecht**, Phys. Zeitschr. **17**, S. 601. 1916 und **18**. S. 261. 1917.

In der Tat erhielten wir bei Änderungen der Frequenz des den Sender speisenden Wechselstromes am Galvanometer eine Resonanzkurve von derselben Form wie die in Fig. 1 gezeichnete schraffierte Fläche. Auch blieb bei Änderung der Gleich- oder Wechselstromstärke am Sender der maximale Ausschlag am Duddelgalvanometer stets proportional der maximalen Erhöhung des Wattverbrauches am Sender; das Verhältnis beider ist konstant wie die folgende Tabelle zeigt.

Differenz im Wattverbrauch	Ausschlag am Galvanometer	Verhältnis beider
280	45°	6,2
95	18°	5,3
160	30°	5,3
45	9,5°	4,7

Das war ein weiterer Beweis dafür, daß die Differenz im Wattverbrauch tatsächlich als Schallenergie ausgestrahlt wurde.

Durch diese Messungen wurde wohl zum ersten Male, wie uns scheint, *in einwandsfreier Weise die von einer Schallquelle akustisch ausgestrahlte Leistung festgestellt.* Dies war auch praktisch in zweierlei Hinsicht wichtig. Zunächst ergab sich hieraus der Wirkungsgrad der Sender in der Resonanzlage zu etwa 50% (vgl. Fig. 1). Eine wesentliche Erhöhung der Lautstärke war also nicht mehr durch Verbesserung der Apparate, sondern nur durch Steigerung der zugeführten Leistung möglich. Und zweitens konnte mit einem einmal geeichten Sender durch einfaches Regulieren der Stromstärken jede gewünschte Lautstärke quantitativ genau hergestellt werden, und zwar herab bis zu den kleinsten Lautstärken. Im allgemeinen wurde der Gleichstrom konstant gehalten und der Wechselstrom verändert. Dann ergab z. B. ein Sender 4 Watt ausgestrahlte Leistung pro 1 Amp.^{2} Wechselstrom, also 100 Watt bei 5 Amp., $^4/_{100}$ Watt bei $^1/_{10}$ Amp., $4 \cdot 10^{-6}$ Watt bei 10^{-3} Amp. usw. Hiervon wurde bei der Empfängerprüfung und bei den Reichweitenversuchen weitgehendst Gebrauch gemacht.

Außer den elektrischen Sendern wurden gelegentlich auch mit Druckwasser betriebene, von der Signal-Gesellschaft hergestellte *Sirenen* benutzt. Bei diesen kann die ausgestrahlte

Schalleistung nicht gemessen und somit auch nicht auf ihre Konstanz geprüft werden. Sie kann nur unter der wohl kaum exakt bestehenden Voraussetzung berechnet werden, daß der pulsierend austretende Wasserstrom zerlegt werden kann in einen gleichförmigen akustisch unwirksamen und einen sinusförmigen, hin und zurückflutenden Anteil, dessen Amplitude A etwa gleich der mittleren, gleichförmigen Strömung zu setzen ist, da ja der Wasserstrom zeitweise ganz null wird. Die Rechnung sei hier nur kurz angedeutet.

Das Geschwindigkeitspotential eines von einer Schallquelle ausgehenden Zuges von harmonischen Wellen ist

$$\varphi = -\frac{A}{4\pi r}\cos \varkappa (a\,t - r).$$

Daher ist der gesamte durch eine Kugel vom Radius r hin und her pulsierende Strom

$$4\pi r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = A \cos \varkappa a\, t,$$

wenn $r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ ist. A ist der Maximalbetrag der an der Schallquelle zugeführten Strömung. Nach Raleigh[1]) beträgt nun in diesem Fall die von der Schallquelle in den Raum ausgestrahlte Leistung

$$W = \frac{\varrho \varkappa^2 a A^2}{8\pi} = 1{,}05 \frac{n^2}{10^5} A^2 \text{ erg/sec}.$$

Setzen wir A in lit/sec ein, so erhalten wir

$$W = 1{,}05 \left(\frac{n}{1000}\right)^2 A^2_{\text{lit/sec}} \text{ Watt}.$$

Bei den benutzten Sirenen war A etwa 10 lit/sec, also die ausgestrahlte Leistung bei der Frequenz $n = 1000$/sec etwa 100 Watt. Da der Betriebsdruck etwa 6 Atm. betrug, berechnet sich der Wirkungsgrad zu nur 2 Proz. Die Rechnung ist daher nur mit Vorsicht hinzunehmen, da durch andere mitschwingende Teile, z. B. das Zuleitungsrohr, auch noch Schall erzeugt werden kann.

---

1) Raleigh, Theorie des Schalles. Deutsch von Neesen. II. S. 128 ff. 1880.

Ein Vergleich der beiden zur Verfügung stehenden Sender typen, der freilich wegen des sehr verschiedenen Toncharakter recht ungenau ist, ergab für beide die gleiche Größenordnun der ausgestrahlten Schalleistung (300 Watt).

2. Empfänger.

Als Empfänger wurden aus Gründen der Einfachheit un Bequemlichkeit in der Hauptsache *Mikronenempfänger* be nutzt, in einer Ausführung, wie sie im wesentlichen auch au Handelsschiffen zum Abhören von Unterwasserglockensignale benutzt werden. Die Mikrophone sind in Bronzekapseln wasserdicht eingeschlossen (Fig. 4). Ein Teil der Kapselwan

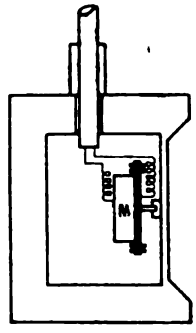


Fig. 4.

wird gebildet aus der die Schallwellen aufnehmenden Mem bran, mit der das eigentliche Mikrophon M akustisch leitend in Verbindung steht. Die Stromzuführung übernimmt ein wasser dicht in die Kapsel eingezogenes Gummiaderkabel. Die Mikrophone konnte man vom Empfangsschiff aus am Kabe leicht beliebig tief ins Wasser hängen. Ihre Schaltung ist aus Fig. 5 zu ersehen. Der Gleichstrom J wurde zwei bis dre Trockenelementen E entnommen und durch einen Regulier widerstand R_r auf 50 Milliampere einreguliert. Die durch di Schallwellen entstehenden Stromschwankungen wurden durch den Transformator T dem Fernhörer F zugeführt. Die *Laut stärkemessung* geschah nach der Parallelohmmethode, indem der Widerstand R so lange verkleinert wurde, bis der Senderton gerade nicht mehr im Fernhörer wahrnehmbar war. Dies

Einstellung war auf etwa 20 Proz. genau, Nebengeräusche im Mikrophon oder am Meßort verursachten freilich oft wesentlich größere Fehler. Die „Lautstärke" wurde berechnet nach der Formel

$$L = 1 + \frac{1000}{R},$$

indem der Kombinationswiderstand T parallel $F = \frac{T \cdot F}{T + F}$ für Wechselstrom etwa 1000 Ohm betrug.[1]) F war ein 1000-ohmiger Fernhörer mit einem Wechselstromwiderstande

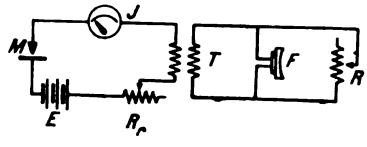


Fig. 5.

von etwa 3000 Ohm. Die so berechnete „Lautstärke" ist zunächst nur ein Maß für die vom Mikrophon erzeugte Wechselstromstärke und es war zu prüfen, welche akustische das Mikrophon treffende „Wasserlautstärke" dieser entsprach. Ein roher Versuch zeigte schon, daß hier sehr große Fehler unvermeidlich sind. Eine geringe Umlagerung der Mikrophonkontakte, wie sie oft bei den geringsten Erschütterungen schon eintrat, konnte die gemessene „Lautstärke" um das zwei- bis dreifache ändern, obwohl die Wasserlautstärke genau konstant gehalten wurde. Es hat in diesem Falle gar keinen Zweck, eine möglichst genaue Einzelmessung zu machen. Dagegen erhält man einigermaßen brauchbare Resultate, aus denen sich auch Gesetzmäßigkeiten ableiten lassen, wenn man das Mittel aus sehr vielen Messungen, die unregelmäßig durcheinander liegen, nimmt. So wurde die Beziehung zwischen berechneter und Wasserlautstärke in folgender Weise geprüft. Sechs Empfänger wurden in 1—5 m Abstand vom Sender ins Wasser gehängt. Zum Empfangstelephon parallel lagen abwechselnd

1) Die übliche Rechnung, bei der nur die Stromverzweigung zwischen R und F betrachtet wird, ist falsch. Bei kleinerem Widerstande T reguliert R z. B. praktisch erst von da ab, wo es kleiner als T wird.

durcheinander die Widerstände $R = 1, 10, 100, \infty$ Ohm, wa
also berechneten Lautstärken von 1000, 100, 10, 1 entsprich
Für jede Widerstandsstufe wurde mehrmals diejenige Sende
stromstärke bestimmt, bei der man gerade noch auf de
Empfänger einen Ton hörte. Obwohl die so bestimmte
Senderstromstärken unter denselben Bedingungen oft meh
als 1 : 3 voneinander abwichen, ließ sich doch deutlich e
kennen, daß die Änderungen der Senderstromstärke durchwe
geringer waren als die zugehörigen Lautstärken. Bei tiefe
Perioden war die Senderstromstärke sehr nahe der Wurze
aus der nach obiger Formel berechneten Lautstärke pro
portional, d. h. eine Änderung von R im Verhältnis 1 : 10
trat schon bei einer Änderung der Stromstärke von 1 : 10 ein
Hiernach wäre die berechnete Lautstärke nicht ein Maß fü
die Amplituden, sondern für deren Quadrat, d. h. für di
akustische Leistung im Wasser. Bei höheren Periodenzahle
war aber mehr das Umgekehrte der Fall.

Mit einem geeichten Sender, bei dem die ausgestrahlte
Leistung pro Ampere bekannt war, konnte so auch eine *absolute Eichung* der Empfänger vorgenommen werden unte
der Annahme, daß die Ausbreitung der Schallenergie in ge
ringen Abständen vom Sender quadratisch vor sich geht, die
Schalldichte sich also aus der Senderleistung dividiert durch
die Oberfläche der Kugel mit dem Empfängerabstand als
Radius berechnen läßt.[1]) Daß der Sender nach allen Seiten
gleich stark wirkte, wurde durch Drehen des Senders nach
gewiesen. Es ergab sich, daß eine Schalldichte von de
Größenordnung 10^{-15} Watt/cm^2 am Ort des Mikrophons er
forderlich war, um einen hörbaren Ton zu erzeugen Das
menschliche Ohr braucht etwa 10^{-18} Watt/cm^2. Das steht in
guter Übereinstimmung mit der beobachteten Tatsache, daß
der Schall unter Wasser in dem Luftraum z. B. eines Unter
seebootes mit dem bloßen Ohr etwas schlechter empfange

1) Streng genommen müssen hierbei Sender und Empfänger vo
allen reflektierenden Wänden, also von dem Grund und der Wasser
oberfläche einen Abstand haben, der groß gegen ihren gegenseitige
Abstand ist. Dieser muß andererseits groß gegen die Senderabmessunge
sein. Diese Bedingungen sind schwer zu erfüllen und waren es bei de
Eichung auch nicht, so daß nur die Größenordnung richtig ist.

wird als mit der Unterwasserschallapparatur. Es geht ja nur etwa $^1/_{1000}$ des Schalles vom Wasser in die Luft über.

Wegen der großen Inkonstanz der Mikrophone wurden, wo es die Verhältnisse gestatteten und es auf sehr genaue Messungen ankam, besonders bei den ersten genauen Versuchsreihen neben dem Mikrophon auch die vorher erwähnten elektrischen *Sender als Empfänger* benutzt. Die Wirkungsweise der elektrischen Sender als Empfänger ist dieselbe, wie die eines angesprochenen Telephons. Infolge der Membranschwingungen und der dadurch bewirkten Änderung des magnetischen Flusses werden in der Magnetspule des Apparates elektromotorische Kräfte induziert, die in einem unmittelbar angeschalteten Telephon einen Ton erzeugen. Die Lautstärke wurde auch hier durch Schwächung des Stromes bis zum Verschwinden des Tones gemessen. Da Sender und zugehöriges Telephon zusammen nur 40 Ohm wirksamen Widerstand hatten, wurde die Schwächung nicht durch Parallelohm, sondern durch einen Vorschaltwiderstand hergestellt (Fig. 6).

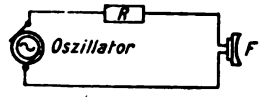


Fig. 6.

Die Lautstärke berechnet sich dann nach der Formel

$$L = 1 + \frac{R}{40}.$$

$R = 0$ ergibt die Lautstärke 1, d. h. die kleinste, eben noch hörbare Lautstärke. Bei sehr großen Lautstärken, nur wenige Meter vom Sender entfernt, konnte der akustisch induzierte Empfangsstrom unmittelbar durch ein an Stelle des Fernhörers F eingeschaltetes Milliamperemeter gemessen werden. Diese sehr genaue Messung wurde nochmals zur Prüfung der Theorien benutzt. Wie zu erwarten, ergab sich Proportionalität dieses Stromes mit der Senderwechselstromstärke, sowie der Erregerstromstärke des Senders und der des Empfängers. Nur bei sehr großen Stromstärken traten Sättigungserscheinungen ein. Es ist zu beachten, daß neben dem Sender jetzt auch

der Empfänger eine ausgesprochene Resonanz besaß, und bei im allgemeinen nicht genau übereinstimmten. Das letzte war bis zum gewissen Grade eine Erleichterung. Wur nämlich eine mittlere Frequenz eingestellt, so konnte die in ziemlich weiten Grenzen geändert werden, ohne daß d Empfangsstrom sich änderte.

Die Empfindlichkeit des Senders als Empfänger war et zehnmal geringer als die guter Mikrophone.[1]) Dafür war ab die sicher gewährleistete Konstanz der Messung ein sehr groß Vorteil. Freilich brachte die Verwendung der Sender a Empfänger erhebliche Schwierigkeiten mit sich. Wegen d großen Gewichtes — ein Sender wiegt 250 kg — war nur am Kran ins Wasser zu lassen. Ferner erfordert 6 Amp. Gleichstromerregung; diese Versuche konnten also n gemacht werden von Schiffen aus, die elektrische Maschine an Bord hatten.

3. Meßverfahren.

Zur Durchführung der oben genannten Versuche über d Schallausbreitung waren zwei Stationen erforderlich, ei Sende- und eine Empfangsstation, von denen die eine an Lan die andere auf einem Schiff oder beide auf Schiffen unterg bracht waren. Eine Station war gewöhnlich fest, d. h. sie ände ihren Standort nicht, während die zweite Station beweglich wa Die Abstandsbestimmungen zwischen beiden Stationen wurde gemacht entweder durch Peilungen von Bord aus nach Lan marken oder einfach durch Ablaufen eines Schiffes mit ko stanter bekannter Geschwindigkeit von der Gegenstation u Zeitmessung. Wo es möglich war, wurden beide Methode kombiniert und aus den nach beiden Methoden gefundene Werten der Mittelwert genommen. Versetzung durch Wi und Strom wurde nach Möglichkeit berücksichtigt. Die Fehl in der Entfernungsbestimmung betrugen etwa 5—10 Proz.

Da ein großer Teil der Empfangsmessungen mit Mikr phonen gemacht werden mußte, wurden zur Verminderu der Fehler sämtliche Lautstärkemessungen unter Benutzu mehrerer Empfangsapparaturen von mehreren Beobachter

1) Zu den späteren genauen Messungen wurden zum Teil wenig empfindliche, aber dafür etwas konstantere Mikrophone benutzt.

mindestens zwei, gleichzeitig ausgeführt. Die von den verschiedenen Beobachtern auf verschiedenen Empfangsapparaturen gemessenen Werte wurden dann zu Mittelwerten vereinigt.

Um die Genauigkeit noch zu vergrößern, wurde für jeden Beobachtungsort, d. h. für jeden Abstand vom Sender, in dem die Lautstärke gemessen wurde, mit verschiedenen Stromstärken, die durch verschiedene Morsezeichen gekennzeichnet waren, gesendet und für jede Stromstärke die Lautstärke bestimmt. Aus allen so erhaltenen Werten wurden die Lautstärken pro Ampere-Senderstrom gebildet und aus diesen Werten wieder der Mittelwert gebildet. Die Stromstärken wurden dabei in den Grenzen 1 : 70, die ausgestrahlte Schallleistung also fast wie 1 : 5000 geändert. Diese Methode ist sehr zuverlässig. Prinzipielle Fehler der Parallelohmmethode fallen bei ihr fast ganz heraus; denn es werden bei ihr die Mikrophone in allen Entfernungen, wenigstens zum Teil, mit derselben Lautstärke, insbesondere auch mit der geringsten wahrnehmbaren Lautstärke beansprucht. Dadurch wurde ferner gleichzeitig festgestellt, welche geringste Schalleistung für jede Entfernung erforderlich war.

Um sich ein Bild von der Genauigkeit der Methode machen zu können, seien in der folgenden Tabelle die an einem Punkt mit verschiedenen Mikrophonempfängern gemessenen Werte mitgeteilt.

Ampere	*G*-Empfänger			*M*-Empfänger		
	P_1	P_2	*L*/Amp.	P_1	P_2	*L*/Amp.
14	10	7	9	15	15	5
8	10	8	14	20	20	6
4	30	30	8	50	40	5,5
2	40	40	12,5	50	70	8,3
1	50	80	15	300	120	6,5
0,5	200	300	10	10000 (?)	—	2 (?)
		Mittel = 11				Mittel = 6,5

Die Senderstromstärke wurde von 14 bis 0,5 Amp. geändert. Unter P_1 und P_2 sind die mit zwei Empfängern von zwei Beobachtern aus mehreren Messungen ermittelten Parallelohmwerte und unter *L*/Amp. die daraus ermittelten Lautstärken pro Amp. mitgeteilt. Die so ermittelten Werte weichen

trotz der Ungenauigkeit der Methode und der Schwierigkeit der Messung nicht zu sehr voneinander ab.

Zum Vergleich sei auch eine Meßreihe mitgeteilt, bei der ein Sender als Empfänger diente.

Amp.	R_1	R_2	$\frac{R_1 + R_2}{2 \text{ Amp.}}$	
14	8540	7040	556	Sender gesättigt
8	3540	4040	474	
4	2040	3040	635	
2	1540	2040	895	
1	840	940	890	
0,5	290	240	1060	
0,2	140	—	700	
			Mittel = 759	

Die unter R_1 und R_2 mitgeteilten Zahlen bedeuten die von verschiedenen Beobachtern gemessenen Widerstandswerte, bei denen Verschwinden der Lautstärke eintrat. In der letzten Reihe sind die Mittelwerte aus beiden Messungen dividiert durch die Amperezahl enthalten.

Die beiden mitgeteilten Tabellen ergeben, daß innerhalb der Versuchsfehler sowohl beim Empfang mit Mikrophonen[1]) wie mit Oszillator die Lautstärke proportional der Senderstromstärke zunimmt, daß also die Lautstärke dividiert durch die Senderstromstärke für eine bestimmte Entfernung als konstant angenommen werden kann, obwohl die Senderstromstärke wie 1 : 70 geändert wurde. Die teils erheblichen Abweichungen vom Mittelwerte fallen ganz unregelmäßig und zeigen keine Abhängigkeit von der Stromstärke. Sie sind durch die Unsicherheit der Hörmessung bedingt.

III. Ergebnis der Versuche.

1. Abnahmegesetz.

Die ersten systematischen Untersuchungen über die Abhängigkeit der Lautstärke von der Entfernung wurden in der beschriebenen Weise am 17. und 18. Mai 1915 in der Eckern-

1) Die oben mitgeteilte Abweichung der Mikrophone von der Proportionalität wurde hier zum Teil dadurch kompensiert, daß der Sender bei 14 und 8 Ampere schon etwas übersättigt war.

förder Bucht angestellt. Der Abstand wurde etwa von Kilometer zu Kilometer geändert.

In den folgenden Tabellen sei der Anschaulichkeit wegen eine vollständige Meßreihe mitgeteilt. Die Tabellen a bis h enthalten die an den einzelnen Punkten gemessenen Lautstärken. Die erste Spalte jeder Tabelle enthält die Stromstärke, mit der der Sender betrieben wurde, die unter R_1 und R_2 mitgeteilten Werte bedeuten die von zwei Beobachtern mit einem Oszillator gemessenen Lautstärken. Aus je zwei zusammengehörigen Werten der von beiden Beobachtern gemessenen Lautstärken wurde der Mittelwert gebildet und durch die Amperezahl dividiert. Der so entstandene Wert ist in Spalte 4 enthalten. Die Spalten 5—7 und 8—10 geben entsprechende Messungen mit zwei Mikrophonempfängern wieder. Aus den für jeden einzelnen Punkt und für jeden Empfänger gefundenen Werten für die Lautstärke pro Ampere wurden die Mittelwerte gebildet.

18. Mai 1915 9—12 Uhr vormittags 2. Versuchsreihen.

R = Vorschaltwiderstand + 40 Ohm.

P = Parallelwiderstand. $L = \dfrac{L_1 + L_2}{2}$.

$L_1 = 1 + \dfrac{1000}{P_1}$, $L_2 = 1 + \dfrac{1000}{P_2}$

a) Entfernung 0,93 km.

Amp.	Oszillator			G-Empfänger			M-Empfänger		
	R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	10040	—	717	3	—	24	3	—	24
8	5040	—	630	4	—	31	8	—	16
4	4040	—	1010	5	—	50	4	—	62
2	2040	—	1030	10	—	50	40	—	12
1	1040	—	1040	16	—	66	70	—	14
0,5	640	—	1280	500	—	6	K. E.	—	(2)
0,2	440	—	2200	200	—	30	„	—	(5)
			Mittel = 1142			Mittel = 37			Mittel = 26

b) Entfernung 2,16 km.

Amp.	Oszillator R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	*G*-Empfänger P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	*M*-Empfänger P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	8540	7040	556	10	7	9	15	15	5
8	3540	4040	474	10	8	14	20	20	6
4	2040	3040	635	30	30	8	50	40	5,5
2	1540	2040	895	40	40	12,5	50	70	8,3
1	840	940	890	50	80	15	300	120	6,5
0,5	290	240	1060	200	300	10	10000 (?)	—	2 (?)
0,2	140	—	700						
		Mittel = 759			Mittel = 11			Mittel = 6,5	

c) Entfernung 8,24 km.

Amp.	Oszillator R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	*G*-Empfänger P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	*M*-Empfänger P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	3540	5040	307	20	20	4	40	30	2,1
8	2040	2040	255	40	30	3,7	40	30	3,7
4	940	1040	247	60(?)	—(?	4	50	50	5,2
2	540	790	333	40	60	10	300	80	4,2
1	290	440	365	1000	100	6,5	—	1000	2
0,5	—	240	480	—	1600	4	—	—	—
0,2	—	(?		—	10000	5,5			
		Mittel = 331			Mittel = 5,4			Mittel = 3,4	

d) Entfernung 4,07 km.

Amp.	Oszillator R_1	R_2	$\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	*G*-Empfänger P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$	*M*-Empfänger P_1	P_2	$\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	2040	2040	163	20	15	4,1	20	20	4
8	1040	1040	130	30	30	4	40	30	3,7
4	440	—	110	30	80	5,5	40	90	5
2	540	—	270	100	90	5,7	200	150	3,4
1	240	—	240	1000	—	2	—	—	—
0,5	40	—	88						
0,2	—	—	—						
		Mittel = 165			Mittel = 4,2			Mittel = 4,02	

e) Entfernung 4,99 km.

Amp.	Oszillator R_1	Oszillator R_2	Oszillator $\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	G-Empfänger P_1	G-Empfänger P_2	G-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$	M-Empfänger P_1	M-Empfänger P_2	M-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	1040	1040	74	20	20	3,6	30	40	2
8	640	440	67,5	50	60	2,3	100	80	1,5
4	190	240	17,5	200	200	1,5	200	300	1,2
2	40	40	20	300	500	1,8	250	600	1,9
1	140	—	140	1000	—	2	—	—	
0,5	—	—	—	10000	—	2	—	7 (?)	
		Mittel = 63,8			Mittel = 2,2			Mittel = 1,6	

f) Entfernung 6,18 km.

Amp.	Oszillator R_1	Oszillator R_2	Oszillator $\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	G-Empfänger P_1	G-Empfänger P_2	G-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$	M-Empfänger P_1	M-Empfänger P_2	M-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	240	240	17	100	100	0,8	200	200	0,5
8	40	40	5	—	200	0,75	10000	300	0,3
4	—	—	—	1000	300	0,8	1000	300	0,8
2	—	—	—		1000	1	10000	300	1,8
		Mittel = 11			Mittel = 0,8			Mittel = 0,7	

g) Entfernung 7,12 km.

Amp.	Oszillator R_1	Oszillator R_2	Oszillator $\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	G-Empfänger P_1	G-Empfänger P_2	G-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$	M-Empfänger P_1	M-Empfänger P_2	M-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	40	80	4	150	150	0,5	300	200	0,3
8	40	—	5	300	400	0,49	300	500	0,46
4	—	—		500 (?)	600	0,7	500	500	0,75
		Mittel = 4,5			Mittel = 0,5			Mittel = 0,5	

h) Entfernung 7,96 km.

Amp.	Oszillator R_1	Oszillator R_2	Oszillator $\frac{R_1+R_2}{2\,\text{Amp.}}$	G-Empfänger P_1	G-Empfänger P_2	G-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$	M-Empfänger P_1	M-Empfänger P_2	M-Empfänger $\frac{L}{\text{Amp.}}$
14	—	—	—	500		0,2	500	—	0,2
8	—	—	—	500	10000	0,25	500	10000	0,25
4	—	—	—	10000	—	0,27	—	—	
					Mittel = 0,25			Mittel = 0,23	

schreiten um je 3 km sinkt die Lautstärke also auf 1 : 2,3³, d. h. auf rund den zehnten Teil. In Übereinstimmung mit diesem Ergebnis wurde beobachtet, daß zur Überbrückung von

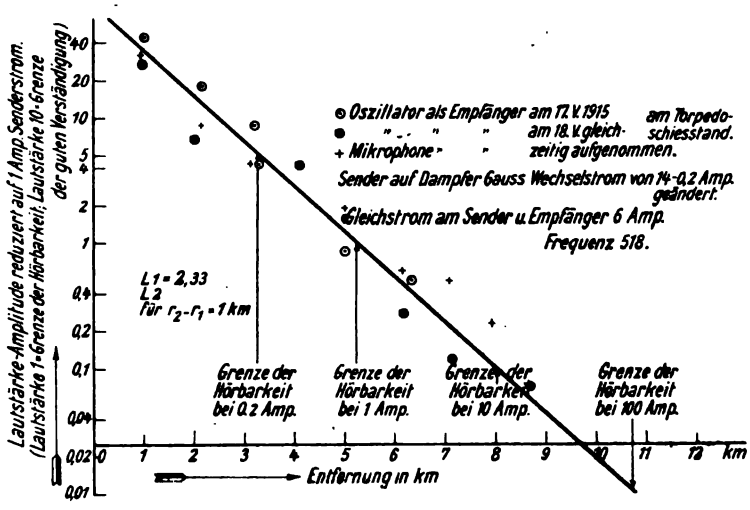


Fig 7.

8 km 10 Ampere am Sender erforderlich waren, zur Überbrückung von 5 km nur noch 1 Ampere und für 3 km $^1/_5$ Ampere Senderstrom ausreichte. Die aufgewandte Leistung wächst quadratisch mit der Stromstärke und es waren für 8 km ein Kilowatt, für 5 km 10 Watt, für 3 km 0,4 Watt, d. h. $^1/_{2500}$ der Leistung für 8 km erforderlich. Für 11 km wären hiernach 100 Kilowatt, für 14 km 10000 Kilowatt erforderlich gewesen. *Es war also als praktisch vollkommen unmöglich nachgewiesen, selbst bei wesentlicher Verbesserung der Apparate eine irgendwie größere Reichweite zu erzielen.*

2. Einfluß der Wassertiefe.

Nach diesen ersten Versuchen herrschte zunächst große Ratlosigkeit. So geringe Reichweiten waren bis dahin noch nie beobachtet worden. Man konnte sich den Grund dieser starken Abnahme überhaupt nicht erklären und vermutete, daß die Wassertiefe oder die Beschaffenheit des Bodens vielleicht

die Schuld sein könnten. Es wurde deshalb eine Wiederholung der Versuche unter den verschiedensten Bedingungen vorgenommen.

Wir wollen zunächst die Ergebnisse einiger Versuche mitteilen, die im Juni 1915 bei verschiedenen Wassertiefen in der Danziger Bucht angestellt wurden. Da das Abnahmegesetz bereits bekannt war, wurden nur Stichproben auf 4 und 8 Seemeilen und in möglichst weiter Entfernung gemacht. Sie

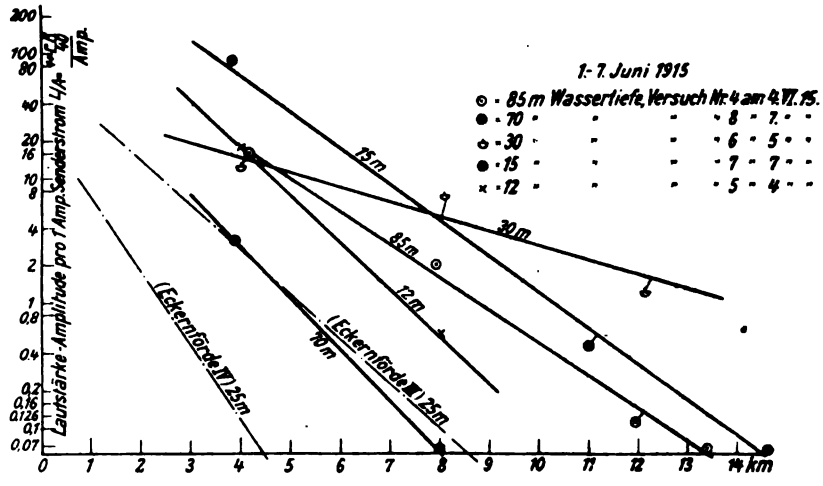


Fig. 8.

wurden ausgeführt bei 12, 15, 30, 70 und 85 m Wassertiefe (Fig. 8). Die Messungen sind nicht sehr genau, lassen aber doch den Schluß zu, daß *die verschiedene Wassertiefe sicher nicht die Ursache für die starke Dämpfung*, die auch hier auftrat, *sein konnte.*

Es war schon bei den Eckernförder Versuchen beobachtet worden, daß sich die Lautstärke innerhalb einiger Minuten langsam änderte, auch wenn der Oszillator als Empfänger benutzt wurde, die Apparate also nicht die Ursache dafür sein konnten. Das trat hier in noch höherem Maße ein. Es kamen Lautstärkenunterschiede von 1 : 5 vor. Bei tiefem Wasser hörte man ferner oft ein langes Nachhallen wie in einer Kirche. Morsezeichen kamen dann sehr verschwommen an und waren

schwer oder gar nicht zu entziffern. Es herrschte an diesen Tagen Sonnenschein und meist glatte See. Temperaturmessungen mit einem elektrischen Thermometer ergaben in größeren Tiefen um 6 bis 8° kälteres Wasser als an der Oberfläche. Vgl. hierzu den folgenden Abschnitt.

Während also bei Wassertiefen zwischen 10 und 100 m keine Unterschiede zwischen den verschiedenen Tiefen hinsichtlich der Dämpfung des Schalles festgestellt wurde, liegen die Verhältnisse anders, wenn der Schall größere Strecken flachen Wassers durchläuft.

Der obere Teil der Fig. 9 zeigt die äußeren Bedingungen des in Landnähe ausgeführten Versuches. Der Sender stand in 3 km Abstand von der Landungsbrücke. Gegeben wurde mit 517 Perioden und zwei verschiedenen Stromstärken. 3 Mikrophone wurden von einem Ruderboot aus ins Wasser gehängt. Die Lautstärke wurde wie früher angegeben gemessen, die Tiefe wurde durch Lotung festgestellt, die Entfernung an der Landungsbrücke durch Abschreiten, die Entfernungen zwischen der Landungsbrücke und der ausgelegten Markierungsboje durch Abrudern mit konstanter Geschwindigkeit nach der Zeit bestimmt. Die Zwischenwerte wurden geschätzt. Daher sind die Entfernungen nicht sehr genau, nur der Größenordnung nach richtig.

Die untere Kurve der Fig. 9 zeigt die von See her anfangs langsam, später schnell abnehmende Lautstärke.

Der Schall wird also beim Durchlaufen größerer Längen flachen Wassers sehr stark geschwächt Bei 517 Perioden, d. h. rund 3 m Wellenlänge, geht die Schallautstärke bei einer Wassertiefe von 3 m, d. h. von einer Wellenlänge, beim Durchlaufen von 100 m auf den vierten Teil, bei 2 m Wassertiefe auf den sechzehnten Teil zurück. Bei 4 bis 5 m Wassertiefe ist die Schwächung wesentlich geringer, schätzungsweise $^1/_2$ für 100 m.

Auf 1 km Länge würde die Schwächung von 100 m Länge 10mal nacheinander eintreten. Bei 2 m Wassertiefe würde dann die Lautstärke auf $(^1/_{10})^{10}$, bei 3 m Wassertiefe auf $(^1/_4)^{10}$, bei 4 m Wassertiefe auf $(^1/_2)^{10} = {}^1/_{1000}$ geschwächt werden. Hiernach ist mit einiger Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß bei

einer Wassertiefe von über 9 m, d. h. von über 3 Wellenlängen, der Einfluß auf die Schwächung des Schalles zu vernachlässigen ist. In der Tat zeigen die vorher mitgeteilten Reichweiten-

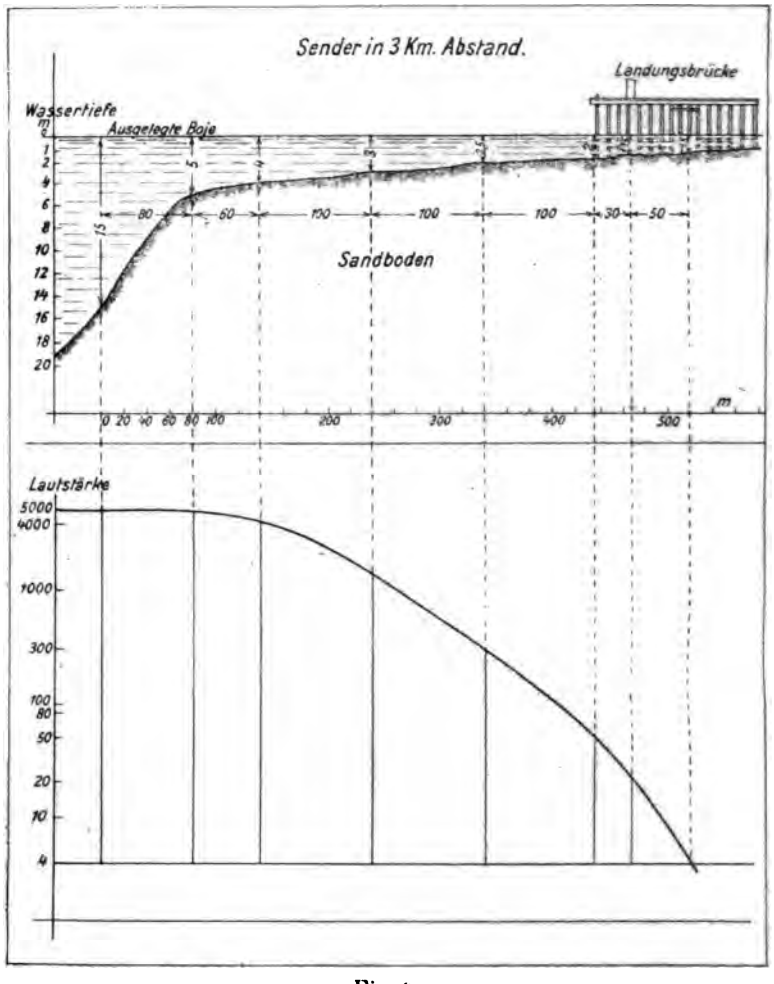


Fig. 9.

versuche, daß zwischen 12 und 80 m Wassertiefe kein merklicher Unterschied in der Dämpfung des Schalles eintritt. Spätere Versuche ergaben meist eine Schwächung, wenn der Schall über Sandbänke laufen mußte, die weniger als 6 m Wasser hatten.

Die Tatsache, daß bei geringer Wassertiefe eine sehr starke Dämpfung eintritt, ist wohl dadurch zu erklären, daß Sandboden den Schall sehr stark dämpft und nicht durchläßt. Das wurde auch experimentell bewiesen, indem Mikrophone am Strande eingegraben wurden. Schläge gegen einen im Boden gesteckten Metallstab waren in unmittelbarer Nähe sehr laut zu hören, aber schon in einer Entfernung von wenigen Metern nicht mehr. Würde sich der Schall auch im Sandboden fortpflanzen, so müßte auch in der Nähe des Bodens im Wasser eine größere Lautstärke herrschen. Das Gegenteil ist aber der Fall, die Lautstärke ist unmittelbar am Boden geringer.

Nach verschiedenen Versuchen ist die Lautstärke unabhängig von der Tiefe, in der sich Sender oder Empfänger befinden, so lange sie nicht unmittelbar auf dem Meeresboden liegen oder von der Wasseroberfläche weniger als eine Wellenlänge entfernt sind. Wenn sich Sender oder Empfänger der Oberfläche mehr als eine Wellenlänge (bei 500 Perioden gleich 3 m) nähern, so nimmt die Lautstärke merklich ab. Direkt an der Oberfläche ist die Lautstärke Null. Bei $^1/_3$ Wellenlänge sinkt sie auf $^1/_4$ des Wertes, den sie bei 3 oder 10 m hat. Das ist theoretisch auch etwa zu erwarten, da die Mikrophone auf Druckschwankungen ansprechen, die ja in der Oberfläche Null sind. Versucht man freilich die ganze Schallausbreitung im Wasser rechnerisch darzustellen, so findet man, wenn man die Oberfläche als akustisch weich betrachtet, d. h. die Grenzbedingung Schalldruck = 0 einführt, daß in größerer Entfernung vom Sender überhaupt keine Lautstärke mehr vorhanden sein sollte.

3. Die Ursache für die Dämpfung.

Durch diese und zahlreiche spätere Versuche wurde einwandfrei festgestellt, daß lediglich der Zustand des Wassers selbst die alle Hoffnungen zerstörende starke Dämpfung des Schalles bedingen müsse. Es gelang jetzt noch, dies theoretisch zu begründen.[1]) Es sind die Ungleichförmigkeiten von

1) H. Lichte, Physik. Zeitschr. 11. S. 385. 1919.

Es soll hier nicht unerwähnt bleiben, daß eine Dämpfung infolge innerer Reibung des Wassers nicht in Frage kommt. Rayleigh, Theorie

Temperatur und Salzgehalt, die die Schallgeschwindigkeit im Wasser fast ebenso stark beeinflussen, wie Temperatur und Wind in der Luft. Es tritt daher *erstens* bei horizontalen Schichtungen eine Krümmung der Schallstrahlen verbunden mit einer Abwanderung der Energie nach oben oder unten ein. Diese ist in Luft bekanntlich die Ursache dafür, daß man mit dem Winde viel weiter hört, als gegen den Wind. (Der Wind ist oben stets stärker als am Boden.) Im Wasser folgt daraus, daß im Sommer, wenn das Wasser oben wärmer ist als unten, die Schallenergie nach unten abwandert, im Winter entsprechend nach oben. Da nun der Boden den Schall nur wenig, die Oberfläche dagegen praktisch vollkommen reflektiert, so muß die Reichweite im Sommer kleiner sein als im Winter. Diese Folgerung fand sich durch die zahlreichen während der folgenden Jahre angestellten Versuche durchaus bestätigt.

Zweitens wird aber jede vertikale Wand verschiedener Beschaffenheit eine Reflexion oder bei unregelmäßiger Form eine Zerstreuung des Schalles bewirken. Die Verhältnisse liegen ähnlich wie beim Nebel. Die Wassertropfen sind an sich durchsichtig, aber die diffuse Zerstreuung läßt das Licht nicht durch. Wenn beim Schall auch die Inhomogenitäten wesentlich geringer sind, so muß doch eine ununterbrochene Folge solcher Unregelmäßigkeiten insgesamt eine starke Wirkung ausüben, besonders beim Wasser, wo ein Teil der zerstreuten Energie durch den nahen Boden verschluckt wird. Daß in Luft sehr starke Inhomogenitäten, wie z. B. heiße Flammenwände, den

---

des Schalles II. S. 368 ff., berechnet den Dämpfungskoeffizienten bei Vorhandensein von innerer Reibung

$$\alpha = \frac{8\pi^2\mu}{3\varrho a^3} n^2,$$

wenn μ der Reibungskoeffizient, ϱ die Dichte, a die Schallgeschwindigkeit und n die Frequenz bedeuten.

Für Wasser ist

$$\varrho = 1, \quad a = 1{,}44 \cdot 10^5, \quad \mu = 0{,}01;$$

daraus berechnet sich

$$\alpha = n^2 \cdot 10^{-16},$$

und wenn wir $n = 1000$ annehmen

$$\alpha = 10^{-10};$$

d. h. es tritt eine Abnahme der Amplitude auf $1/e$, also eine Intensitätsverminderung auf fast $^1/_{10}$ erst nach 100000 km auf.

Schall nicht durchlassen, hat Tyndall gezeigt.[1]) Ebenso ist das wirbelige Schraubenwasser großer Schiffe für den Unterwasserschall fast undurchlässig.

Eine Zeitlang wurden auch bei den Reichweiteversuchen Temperatur und Salzgehalt des Wassers mit elektrischen Apparaten in verschiedenen Tiefen gemessen. Fig. 10 zeigt z. B. die Abnahme der Temperatur mit der Wassertiefe im Sommer an drei verschiedenen Punkten. Die daraus rechnerisch zu folgernde Dämpfung ist noch größer als die gemessene, auch wenn man berücksichtigt, daß der nach unten hin zunehmende Salzgehalt den Temperatureinfluß zum Teil kompensiert.

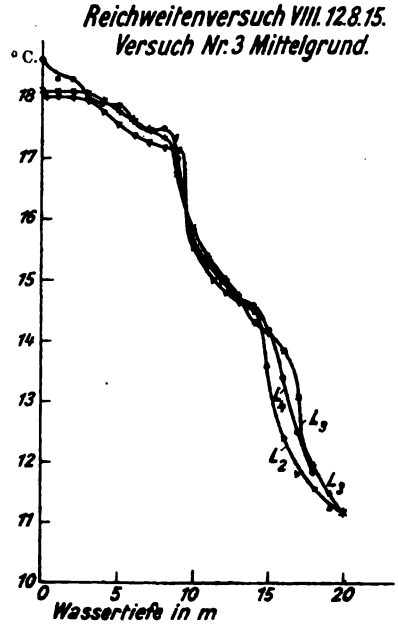


Fig. 10.

Hieraus erklären sich auch die außerordentlich verschiedenen Reichweiten, die bald nur wenige Kilometer, bald über 100 km betrugen. Bei einer fest verlegten Sender- und Empfangsanlage war im Sommer mit der größten Senderleistung von 300 Watt oft ein Empfang auf den 8 und sogar nur 6 km entfernten Empfängern nicht möglich, während im Winter gelegentlich eine ausgestrahlte Schalleistung von nur 0,01 Watt noch auf 15 km, dem weitesten Empfänger deutlich gehört wurde. Bei rein quadratischer Abnahme der Energie berechnet sich in diesem Falle die Schalldichte am Empfangsort zu $0{,}4 \cdot 10^{-15}$ Watt/cm^2. Da dieser Schalldichte tatsächlich etwa die Grenzlautstärke der Mikrophone entspricht, wie im II. Abschnitt angegeben, muß hier die Dämpfung ganz verschwindend gewesen sein, wenn nicht durch die obere und

1) J. Tyndall, On Sound. 4. Aufl. 1883.

untere enge Begrenzung des Wassers ein anderes Ausbreitungsgesetz als das quadratische bestanden hat (Sprachrohrwirkung).

Bei quadratischer Ausbreitung würde ein 1-Kilowatt-Sender noch in 1000 km Abstand eine Schalldichte von 10^{-14} Watt/cm² erzeugen. Ohne Dämpfung könnte man also Reichweiten von weit über 1000 km erwarten! Normalerweise herrscht aber ein so starker „Nebel", daß die Reichweite kaum 10 bis 20 km beträgt.

Wenn, wie bei den anfangs aufgestellten Versuchen, die Dämpfung des Wassers quantitativ festgestellt wird, so kann man diese mit in Rechnung setzen und bei bekannter Senderleistung die Schalldichte für jede Entfernung ausrechnen. Tut man dies für die größte Reichweite, bei der mit Mikrophonen noch Zeichen hörbar waren, so erhält man immer eine Schalldichte von der Größenordnung 10^{-15} Watt/cm² in guter Übereinstimmung mit der im II. Abschnitt mitgeteilten absoluten Eichung der Empfänger.

4. Örtliche Einflüsse.

Wenn die Verteilung von Temperatur und Salzgehalt einen so starken Einfluß hat, wird es auch verständlich, daß die Reichweiten in nahe beieinander liegenden Gegenden stark schwanken können. Mit genau denselben Apparaten und genau denselben Anordnungen war z. B. bei einem Versuch, der sich in nordöstlicher Richtung von Boje Mittelgrund A (westliche Ostsee) erstreckte (am 23. Juli 1915) schon auf 2 km kein Empfang mehr möglich, während bei einem Versuch, der am nächsten Tage von Boje Kiel-Leuchtfeuer in nördlicher Richtung sich erstreckte, auf 15 km noch gut empfangen wurde und auf 9 km noch eine sehr große Lautstärke herrschte. Bei dem zweiten Versuch nahm die Lautstärke bis 9 km etwa proportional der Entfernung ab, d. h. so, als ob überhaupt keine dämpfende Wirkung vorhanden sei. Von 9 km ab setzte aber eine nicht unerhebliche Dämpfung ein, so daß bei 15 km schon wesentlich schwächerer und bei 20 km gar kein Empfang mehr war. Im allgemeinen wurden frei von Küsten und Sandbänken größere Reichweiten erzielt, als in engen Buchten. Der Grund dafür ist sicher in der gleichmäßigeren Temperatur oder wenigstens in der gleichmäßigeren Schichtung der Temperatur im freien Wasser zu suchen. In Küstengegenden stauen sich

gerade die Strömungen und werden besonders stark. Insbesondere tritt hier Wirbelbildung ein, während im freien Wasser mehr Potentialströmung herrscht. Der Schall wird daher diffus zerstreut und vom Boden absorbiert. Gelegentlich wurde freilich auch beobachtet, daß in Landnähe die Reichweiten größer waren als in größeren Abständen von Land. Besonders ungünstig müssen hiernach die Flußmündungen sein, zumal hier auch noch der verschiedene Salzgehalt hinzukommt.

5. Einfluß der Frequenz.

Ungleichförmigkeiten im Wasser müssen vom Schall um so leichter überwunden werden, je größer die Wellenlänge, je tiefer also die Frequenz ist. Umgekehrt muß der ungünstige Einfluß zu geringer Wassertiefe gerade bei den langen Wellen zuerst hervortreten. Es war daher auf alle Fälle wichtig, den Einfluß der Frequenz auf die Ausbreitung zu untersuchen, zumal eine andere Frequenz die einzige Möglichkeit bot, die Dämpfung des Wassers und damit die Reichweite zu ändern. Es schien zunächst einmal wichtig, mit leicht zu beschaffenden Mitteln zu untersuchen, ob irgendein Gang der Reichweite mit der Frequenz bestehe. Es stand hierzu ein elektromagnetischer Sender für 1000 Perioden und ein solcher für 230 Perioden und ferner eine Sirene zur Verfügung. Letztere wurde durch einen besonderen Elektromotor in Umdrehungen versetzt, so daß man durch Ändern der Tourenzahl Tonhöhen von 1500 bis 2500 Schwingungen pro Sekunde einstellen konnte. Außerdem konnte auf der Empfangsseite durch Einschalten eines elektrischen Schwingungskreises vor das Telephon auf die Grund- und Obertöne der Sirene abgestimmt werden, so daß die Abnahme der Lautstärke für beide gleichzeitig gemessen werden konnte. Die Mikrophonempfänger waren für die tiefen und die hohen Frequenzen wesentlich weniger empfindlich. Doch war dies nicht von Bedeutung, da ja das Abnahmegesetz, nicht die Reichweite festgestellt werden sollte. Die elektromagnetischen Sender wurden wieder mit verschiedenen Stromstärken betrieben. Bei der Sirene war eine quantitativ meßbare Abschwächung nicht möglich, so daß sie nur mit voller Lautstärke benutzt wurde. Der Druck des Betriebswassers wurde genau konstant gehalten.

Für eine Versuchsreihe sind die Werte in Fig. 11 zusammengestellt. Abszissen und Ordinaten sind gewählt wie bei den früheren Kurven. Die Neigung der Linien, die die Größe der Dämpfung darstellen, sind bei allen Kurven im wesentlichen dieselben, zeigen insbesondere keinen Gang mit der Frequenz.

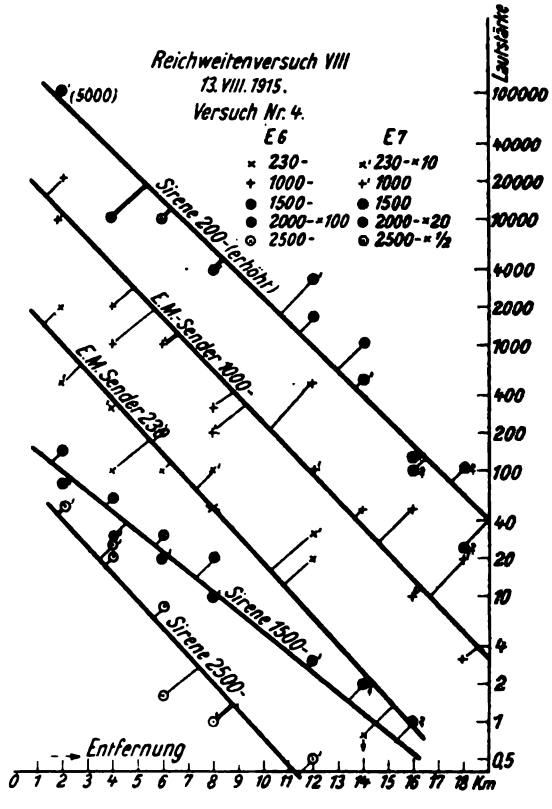


Fig. 11.

Die mittlere Frequenz 1500 erscheint (zufällig) am wenigsten gedämpft. Ein wesentlicher Vorteil der höheren Frequenzen bestand dagegen für die praktische Anwendung darin, daß sie durch Störungen aller Art wesentlich besser hindurchgehört werden.

Es wurden später auch Versuche mit ganz tiefen, direkt kaum hörbaren Frequenzen (50 Perioden pro Sekunde) gemacht.

Aus theoretischen Überlegungen sollte man für diese eine geringere Dämpfung erwarten. Auch pflanzen sich ganz langsame Schwingungen ja durch den Erdboden sehr weit fort, wie man an den Erdbebenwellen und den Aufzeichnungen von Maschinenerschütterungen durch die Seismographen erkennen kann. — Die praktischen Schwierigkeiten erwiesen sich aber als recht groß. Die eigens hierfür gebauten elektromagnetischen Sender strahlten nur geringe Leistung, etwa 10 Watt, aus. Die Mikrophonempfänger sind für diese tiefen Perioden sehr unempfindlich. Es wurde daher ein zweiter Sender als elektromagnetischer Empfänger benutzt. Der Ton selbst wurde durch besondere Mittel, die hier nicht näher angegeben werden können, hörbar gemacht. Neben den Tönen hatte man enorme Störungen durch den geringsten Seegang oder irgendeine Bewegung im Schiff, daher erzielte man nur Reichweiten von etwa 1 km. Innerhalb der Fehlergrenze war die Abnahme quadratisch, damit ist aber nicht gesagt, daß keine Dämpfung vorhanden ist, denn eine nicht übermäßig große Dämpfung tritt erst bei größerer Entfernung merklich in Erscheinung. Wegen der praktischen Schwierigkeiten konnten die Versuche nicht zu Ende geführt werden.

Zusammenfassung.

1. Die von einem elektromagnetischen Sender tatsächlich akustisch ausgestrahlte Leistung wurde bis auf etwa 10 Proz. genau bestimmt.

2. Die Grenzlautstärke von Unterwassermikrophonen entspricht etwa einer Schalldichte von 10^{-15} Watt/cm^2.

3. Die Ausbreitung des Schalles auf große Entfernungen erfolgt (wie in der Luft) nicht nach dem Gesetz des Quadrates der Entfernungen, sondern nach einem Dämpfungsgesetz, d. h. die Lautstärke sinkt immer auf einen bestimmten Bruchteil, wenn man um eine bestimmte Strecke weitergeht.

4. Die Ursache hierfür sind (wie in der Luft) akustische Ungleichförmigkeiten, insbesondere eine unregelmäßige Temperaturverteilung.

5. Die Folgerung hieraus, daß die Reichweite des Unterwasserschalls im Sommer im allgemeinen wesentlich geringer ist als im Winter, wird durch die Versuche bestätigt.

6. Die normalen Reichweiten in
im Sommer etwa 10 km, im Winter
Küsten waren sie geringer. Gelegen
Apparaten nur 2 km, anderseits ü
quadratischer Ausbreitung ohne D
Reichweite von über 1000 km ergeb

7. Die Größe der Dämpfung i
Frequenzen unabhängig von der F
Frequenzen konnten die Versuche
Schwierigkeiten nicht zum Abschluß

8. Aus dem Dämpfungsgesetz fo
der Apparate nur einen unwesentlic
weite haben kann. Diese ist vielme
Zustande des Wassers abhängig.

Dresden und Kiel, Dezember

(Eingegangen 16. Jan

2. *Über eine physikalische Theorie der Bewegung des Erdschattens in der Atmosphäre;* *von H. Dember und M. Uibe.*

Achter Bericht über die Ergebnisse der auf Teneriffa ausgeführten Arbeiten.[1])

1. Die Erde wirft im Strahlengang des Sonnenlichts einen Schattenkegel, der als Dämmerungserscheinung[2]) in der Erdatmosphäre und bei Mondfinsternissen auf der Mondscheibe sichtbar ist. Die Aufgabe, den Anfang und das Ende einer der verhältnismäßig seltenen Mondfinsternisse zu berechnen, ist schon lange und mit großer Exaktheit gelöst. Dagegen sind von der täglich zweimal sichtbaren Erscheinung des Erdschattens in der Atmosphäre nur sehr wenige und vereinzelte zahlenmäßige Beobachtungen vorhanden. Die theoretischen Lösungsversuche der Fragen, wie die Höhe des obersten Schattenrandes[3]) von der Sonnendepression abhängt und ob von dieser allein, sind über erste Ansätze nicht hinausgekommen. Es ist dies um so merkwürdiger, als es eine sehr auffällige Erscheinung bildet, daß der Schatten, z. B. des Abends, viel schneller aufsteigt, als die Sonne sinkt. Es liegen dazu Beobachtungen vor, besonders von Hellmann und Heim, die zeigen, daß der Schattenrand bereits bei einem Sonnenstand von 7—8° unter dem Horizont durch den Zenit geht. Ebensowenig ist eine Antwort auf die Frage gefunden worden, wodurch die von Tag zu Tag veränderliche Geschwindigkeit bedingt ist, mit welcher der Schatten des Morgens ab- und des Abends aufsteigt.

Sucht man die Umstände zu erkennen, die sich der Lösung des Problems entgegenstellen, indem man den Ver-

1) Aus den Leipziger Berichten 1919.

2) Dunkles Segment oder Gegendämmerung, zuerst beschrieben von Joh. Casp. Funccius, De Coloribus Coeli, Ulm 1716 und von J. J. de Mairan, Mem. de l'Acad. des Sciences 1731.

3) Erster östlicher oder westlicher Dämmerungsbogen.

such macht, eine rein astronomisch-geometrische Theorie aufzustellen, so sieht man, daß die Hauptursache darin besteht, daß es nicht auf die allgemeine Form des — bisher fast immer vorausgesetzten — schattenauffangenden Schirmes ankommt, sondern nur auf die absolute Entfernung des obersten Schattenrandes vom Beobachter. Ändert sich diese Entfernung, so ändert sich auch bei gleichbleibender Sonnentiefe der Winkel, unter welchem der Schattenrand über dem Horizont gesehen wird. Durch Sonnendepression und diesen Höhenwinkel ist die Entfernung des Schattenrandes geometrisch festgelegt, da die Dimensionen der Erde bekannt sind. Die so errechnete geometrische Beziehung gibt nach Einsetzung der beobachteten Höhe und der Sonnendepression eine zahlenmäßig ausreichende Beschreibugg des Phänomens, aber keine physikalische Erklärung, warum der Schatten gerade die bestimmte beobachtete Höhe besitzt.

Führt man in die geometrische Beziehung die für die einzelnen Sonnendepressionen gemessenen Schattenrandhöhen ein, so erhält man das sehr auffällige Resultat, daß sich der Schattenrand mit wachsender Sonnendepression zuerst vom Beobachter schnell entfernt und später wieder nähert. Nach einer Anmerkung in der „Meteorologischen Optik" von J. Pernter und F. M. Exner hat H. Mohn[1]) eine astronomisch-geometrische Berechnung der Bewegung des Erdschattens gegeben, worin er eine äußerste Schicht lichtreflektierender Teilchen annimmt, welche die Erdoberfläche konzentrisch umgibt. Das Bestehen einer solchen Schicht ist nach allem, was wir über die Verteilung der Helligkeit am Himmel und von der Form des sichtbaren Himmelsgewölbes wissen, nicht wahrscheinlich. Es läßt sich leider aus der kurzen Bemerkung Exners nicht sehen, wie Mohn unter sich vergleichbare Werte für die Entfernung des Schattenrandes vom Beobachter berechnet und auch nicht, wieweit eine Übereinstimmung seiner Theorie mit den Beobachtungen besteht. Eine rein astronomisch-geometrische Theorie kann, weil sie die physikalischen Eigenschaften der Atmosphäre außer acht läßt, nicht mehr leisten als eine Zahlreihe sorgfältiger Beobachtungen des Zusammenhanges zwischen Sonnendepression und Schattenrand-

1) H. Mohn, Hannband der Meteorolog. Z. S. 1906. Das Original ist uns nicht zugänglich.

höhe, zumal eine solche Theorie eine Erklärung der täglichen Variationen hilflos gegenübersteht.

Ein Ansatz zu einer physikalischen Theorie liegt von Felix Exner[1]) vor. Er stellt durch eine Erweiterung der Rayleighschen Theorie vom Blau des Himmels ein Integral für die Himmelshelligkeit H in verschiedenen Höhen über dem Horizont auf. Für einen bestimmten Höhenwinkel φ über dem Horizont muß dann $dH/d\varphi$ einen Sprung erleiden, und zwar an der Grenze des Erdschattens gegen den von den Sonnenstrahlen noch direkt beleuchteten Himmel; denn nach der ursprünglichen Rayleighschen Theorie vom Blau des Himmels ist die Helligkeit im Erdschattenraum gleich Null, da nur das Licht berücksichtigt wird, welches die vom Sonnenlicht direkt getroffenen Luftmolekeln aussenden und nicht dasjenige, welches jeder einzelnen Molekel von allen anderen zugestrahlt wird. In der Betrachtung kommen keine geometrischen Beziehungen vor, welche die Dimensionen der schattenwerfenden Erde selbst einführen, und damit fehlt auch ein Maß für die Entfernung des Schattenrandes vom Beobachter.

Stellt man an die Stelle der nach Rayleigh ausgewerteten Helligkeiten die für die Horizonthelligkeiten gut stimmenden[2]) mit Hilfe der Wienerschen Theorie gerechneten, so wäre diese Theorie für Sonnenstände unter dem Horizont und durch Einführung der Erddimensionen zu erweitern, so daß sich auch die Helligkeit im Erdschattenraum ergibt. Die Gleichungen werden jedoch unhandlich und sie enthalten außerdem eine so große Anzahl von Konstanten, deren Größe in den unteren atmosphärischen Schichten nicht nur unbekannt, sondern auch schwer zu bestimmen ist, daß eine befriedigende Darstellung auf solche Weise vorläufig nicht erreichbar erscheint, zumal auch mit untergehender und untergegangener Sonne eine Verschiebung der hauptsächlich wirksamen Lichtwellenlängen eintritt, worauf die Theorie keine Rücksicht nimmt. Die folgenden Ausführungen werden überdies zeigen, daß von allen mathematischen und experimentellen Schwierigkeiten abgesehen, die von Exner vorgeschlagene Methode

1) Felix M. Exner, Pernter-Exners Meteorolog. Optik, S. 790.

2) Vgl. den 5. dieser Berichte: M. Uibe, Leipziger Inaug.-Diss. 1919. Abhandlungen der math.-phys. Klasse der S. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. 35. Nr. VI. 1918.

den Umstand der variablen absoluten Schattenrandentfernung außer acht läßt und deswegen nicht zum Ziele führen kann.

Ein gangbarer Weg bietet sich in der experimentellen Festlegung der *Entfernung* des Schattenrandes vom Beobachter unter Angabe der physikalischen Gründe für deren Variation und in der Benutzung einer astronomisch-geometrischen Beziehung zwischen der Höhe des Schattenrandes und der Sonnendepression, unter Berücksichtigung der Refraktion der Sonnenstrahlen.

Nach den Ergebnissen vorangehender Berichte[1]) hat sich die Anschauung bewährt, daß die Entfernung der äußersten sichtbaren Grenze des klaren Himmelsgewölbes und damit dessen Form durch die Größe der maximalen Sichtweite in jeder einzelnen Höhe über dem Horizont festgelegt ist. Als Mittel, diese Sichtweiten zu messen, haben wir die Helligkeit der anvisierten Stelle des Himmels — oder besser ausgedrückt der gesamten leuchtenden Luftsäule in einer bestimmten Richtung — angegeben, und zwar besteht für die klare blaue Atmosphäre die einfache Beziehung

$$S = c\sqrt{H}, \tag{1}$$

worin S die maximale Lichtweite, c eine Konstante und H die photometrisch festzustellende Himmelshelligkeit bedeutet. Die Beziehung ist bisher nur für klare Luft als gültig gefunden worden und sie muß ihre Gültigkeit verlieren, wenn die dem Horizont nahen Schichten getrübt sind und wenn sehr große, blendende Helligkeiten in Frage kommen.

Wir wollen als Grundlage der folgenden Entwicklungen die Vorstellung festhalten, *daß der obere Rand des Erdschattens am Endpunkte der maximalen Sichtweite des dem Schattenrande unmittelbar anliegenden Schattenraumes gesehen wird und daß die Helligkeit der in diesem Raum liegenden Luftmasse ein Maß für die Entfernung des Schattenrandes vom Beobachter ist.*

2. In der Fig. 1 sei $ETNP$ ein die Erdkugel TOG in T tangierender, durch die Refraktion gekrümmter Lichtstrahl, der vom obersten Rand der untergegangenen Sonne S kommt.

Der Strahl tritt bei E in die optisch wirksame Atmosphäre EH_2ZPH_1 ein und bei P wieder aus. Die Gesamtrefraktion,

1) Vgl. den 6. und 7. dieser Berichte: Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. **69.** S. 391—509. 1917. Ann. d. Phys. **61.** S. 313 und S. 353. 1920.

welche der Strahl beim Durchgang durch die Atmosphäre von E bis P erleidet, ist gleich der doppelten maximalen Refraktion, die ein Strahl in der Atmosphäre erfahren kann, also gleich der doppelten Horizontalrefraktion $\triangle_0$. Der Winkel, unter dem sich die beiden in E und P an die Bahn, die wir als kreisförmig annehmen wollen, gezogenen Tangenten

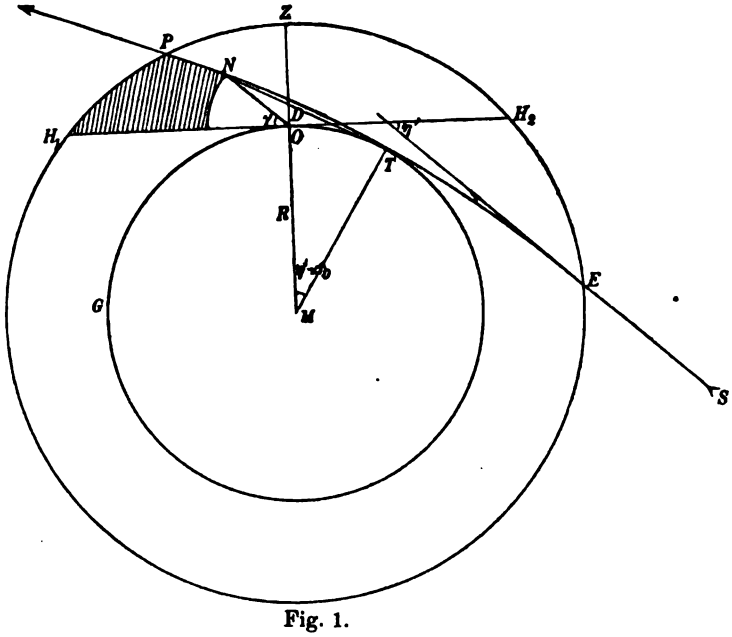


Fig. 1.

schneiden, ist gleich $2\,\triangle_0$. Es sei N der Schattenrand, dessen Erhebung über dem Horizont durch den Winkel $NOH_1 = \gamma$ vom Standpunkt des Beobachters in O gemessen wird. H_1 und H_2 sind die Schnittpunkte des äußersten Randes der optischen Atmosphäre mit der durch O gelegten Horizontalen. Die Refraktion, welche der Lichtstrahl auf der Strecke TN erfährt, sei $\triangle_1$, so daß die Gesamtrefraktion des Strahles von E bis N gleich $\triangle_0 + \triangle_1$ ist.

Ist η' der Depressionswinkel des obersten Sonnenrandes unter dem Horizont, so ist der Winkel $TMO = \eta' - \triangle_0$, wenn M der Mittelpunkt der Erde ist. Die Verbindungslinie $\overline{NT}$ schneidet die Verlängerung $\overline{MO} = R$ des Erdradius im Punkte D. Im Dreieck DTM ist nun der Winkel

$$DTM = 90^0 - \frac{\Delta_1}{2},$$

was man leicht sieht, wenn berücksichtigt wird, daß die Verbindungslinie $\overline{NT}$ mit der Tangente bei T den Winkel $\Delta_1/2$ und die letztere mit der Tangente an den Lichtstrahl im Punkte N den Winkel Δ_1 bildet. Es ist

$$\overline{MD} = R \frac{\cos\frac{\Delta_1}{2}}{\cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}$$

und da

$$\overline{OD} = \overline{MD} - R,$$

so wird

$$\overline{OD} = R \frac{\cos\frac{\Delta_1}{2} - \cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}{\cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

Wir können nun $\overline{OD}$ auch im Dreiecke OND ausdrücken. In diesem ist

$$\overline{OD} = \overline{ON} \frac{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}{\cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

Wird dies dem obigen Ausdruck für $\overline{OD}$ gleich gesetzt, so erhält man für den Abstand des Schattenrandes vom Beobachter

$$\overline{ON} = R \cdot \frac{\cos\frac{\Delta_1}{2} - \cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}. \tag{2}$$

Die Horizontalrefraktion Δ_0 beträgt 35′, so daß $\Delta_1/2$ sicherlich stets kleiner als 17,5′ ist. Den cos 17,5′ können wir mit hinreichender Genauigkeit gleich 1 setzen und es wird

$$\overline{ON} = R \frac{1 - \cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)} = \frac{2R\sin^2\frac{\eta' - \left(\Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}{2}}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}. \tag{3}$$

Hierin ist nun Δ_1 durch das bekannte Δ_0, und η' durch eine astronomische Zeitbestimmung auszudrücken.[1]) Es ist weiter

$$\eta' = \eta - \varrho,$$

1) Von der Refraktion auf der Strecke $\overline{NO}$ sehen wir ab.

worin η die Depression des Sonnenmittelpunktes und η der scheinbare Radius der Sonne ist.

Zur Bestimmung der Abhängigkeit des Winkels Δ_1 von Δ_0 können wir von der Beziehung ausgehen

$$\overline{TN} = 2r \sin\frac{\Delta_1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{TE} = 2r \sin\frac{\Delta_0}{2},$$

worin r der Radius der Kreisbahn des Lichtstrahles $ETNP$ ist. Es folgt

$$\overline{TN} : \overline{TE} = \sin\frac{\Delta_1}{2} : \sin\frac{\Delta_0}{2} . \tag{4}$$

Die Strecke $\overline{TE}$ verhält sich zum Kreisbogen $\overset{\frown}{TE}$ wie

$$2r \sin\frac{\Delta_0}{2} : r\,\Delta_0,$$

daher ist

$$\overline{TE} = \overset{\frown}{TE} \cdot \frac{2\sin\frac{\Delta_0}{2}}{\Delta_0} .$$

Im Dreieck NOT ergibt sich für $\overline{TN}$ der Wert

$$\overline{TN} = 2R \cdot \frac{\sin\frac{\eta' - \Delta_0}{2} \sin\left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)} .$$

Aus den beiden letzten Gleichungen und (4) folgt

$$\frac{\overline{TN}}{\overline{TE}} = \frac{\sin\frac{\Delta_1}{2}}{\sin\frac{\Delta_0}{2}} = R \cdot \frac{\sin\frac{\eta' - \Delta_0}{2} \sin\left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2}\right) \cdot \Delta_0}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right) \cdot \overset{\frown}{TE} \sin\frac{\Delta_0}{2}}$$

und daraus die gesuchte Beziehung

$$\sin\frac{\Delta_1}{2} = \Delta_0 \frac{R}{\overset{\frown}{TE}} \cdot \frac{\sin\frac{\eta' - \Delta_0}{2} \sin\left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)} . \tag{5}$$

Zur Berechnung der Länge des Bogens $\overset{\frown}{TE}$, d. h. der Hälfte des maximalen Lichtweges eines Strahles in der Atmosphäre, benutzen wir die schon von Lambert angewandte Methode der Berechnung der Höhe der optisch wirksamen Atmosphäre aus dem Depressionswinkel der Sonne beim Schluß der astronomischen Dämmerung ($\eta = \sim 18^0$) und man

erhält so für $\widehat{TE}$ einen Wert von rund 1000 km. Der gleiche gleiche Wert folgt, wenn man die Höhe der optischen Atmosphäre zu 70—80 km annimmt nach Beobachtungen, die O. Jesse[1]) an den höchsten leuchtenden Wolken angestellt hat. Diese Höhe entspricht auch der obersten Schicht der Stratosphäre und der Höhe der Atmosphärenschicht, in welcher die Sternschnuppen zuerst aufleuchten. J. Maurer[2]) setzt in seiner Extinktionstheorie das Verhältnis von Atmosphärenhöhe zu Erdradius gleich $^1/_{100}$, nimmt also, mit dem obigen fast übereinstimmend, als Höhe der optisch wirksamen Atmosphäre den Wert 64 km an.

Unter Berücksichtigung der Kleinheit von $\Delta_1/2$ und des Erdradius $R = 6370$ km erhält man bei einem $\Delta_0 = 35'$

$$\Delta_1 = 446' \frac{\sin\frac{\eta' - \Delta_0}{2}\sin\left(\gamma - \frac{\eta' - \Delta_0}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}. \tag{6}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich Δ_1 für je zwei zusammengehörige Werte von η' und γ durch sukzessive Annäherung schnell berechnen. Der so erhaltene Wert ist in die Gleichung (3) einzusetzen. Zur Berechnung von η haben wir mit Hilfe eines Sextanten und eines künstlichen Horizonts, der aus flüssigem Holzteer bestand, die Ortszeit aus Sonnenhöhenmessungen bestimmt. Ist φ die geographische Breite des Beobachtungsortes (Vilaflor liegt in $\varphi = 28^0\,11'$ n., $\lambda = 1^h\,6^m\,28^s$ w.), z die wahre Zenitdistanz der Sonne, δ ihre Deklination, t der Stundenwinkel vom wahren Mittag aus gerechnet, T die mittlere Ortszeit und G die Zeitgleichung, so gelten die bekannten Beziehungen

$$\begin{cases} \cos(90^0 + \eta) = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t \\ \operatorname{tg}\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\sigma - \varphi)\cdot\sin(\sigma - \delta)}{\cos\sigma \cdot \cos(\sigma - z)}};\quad \sigma = \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta + z) \\ t = T - G. \end{cases} \tag{7}$$

Ist der Standort des Beobachters in der Höhe h über der Oberfläche der Erdkugel, z. B. im Luftballon oder auf Bergen,

1) O. Jesse, Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin. **40.** S. 1031. 1890; **26.** S. 467. 1891. Zitiert nach Mascart, Traité d'Optique.

2) Vgl. G. Müller, Photometrie der Gestirne. S. 231. 1897.

so nimmt die Gleichung (3), nach einer analogen Ableitung, die Gestalt an

$$(3a)\quad \overline{ON} = \frac{2R\sin^2\dfrac{\eta' - \left(\Delta_0 + \dfrac{\Delta_1}{2}\right)}{2}}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \dfrac{\Delta_1}{2}\right)} - \frac{h\cdot\cos\left(\eta' - \Delta_0 - \dfrac{\Delta_1}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \dfrac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

Auch hier bleibt vorausgesetzt, daß die Meeresoberfläche und nicht Landerhebungen den Schattenrand werfen. Die Gleichung (6) für Δ_1 behält mit genügender Annäherung ihre Form bei, auch wenn der Beobachter sich in einer Höhe von 1500 m über dem Meere befindet, wie wir in Vilaflor.

Die vorangehenden astronomisch-geometrischen Beziehungen (3, 3a, 6 und 7) beherrschen zahlenmäßig die gesamte Erscheinung des Erdschattens in der Atmosphäre. Es bleibt nun noch übrig, die Entfernung $\overline{ON}$ des Schattenrandes vom Beobachter physikalisch zu deuten und sie der Messung zugänglich zu machen.

3. Nach Sonnenuntergang oder vor Sonnenaufgang befindet sich der Beobachter innerhalb des Erdschattens und er sieht diesen unten am Horizont tief dunkelblau mit scharfem oberen Rande *vor* dem Himmelgewölbe stehen. Mit tiefer sinkender Sonne färbt sich der Schatten, d. h. die Luftmasse vor dem Beobachter, dunkelviolett, dann hellblau[1]), der äußere Rand wird, höher steigend, verwaschen unn schließlich bei etwa 14° Höhe über dem Horizont ist der dann graublaue Schatten in der subtropischen Breite Teneriffas mit bloßem Auge nicht mehr vom übrigen Himmel zu unterscheiden.

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Schatten auf- oder absteigt, ist bedeutend größer als die Geschwindigkeit, mit der die Sonne unter- oder aufgeht. Die Tabelle 1 gibt zusammengehörige Werte von η und γ. Die Werte für γ bei $\eta < 2^0$ sind mit denen anderer Beobachter nicht vergleichbar, da bei unseren Beobachtungen unter diesen Depressionen nicht die Meeresoberfläche, sondern die Gebirge der Insel den Schattenrand werfen.

---

1) Mehrere schöne farbige Darstellungen siehe bei A. Heim, Luftfarben. Zürich 1912.

Das schnelle Aufsteigen wird meist in der Weise erklärt, daß der Erdschatten auf das Himmelsgewölbe wie auf einen festen Projektionsschirm geworfen wird, wodurch sich allerdings qualitativ bei der im Verhältnis zu den Erddimensionen geringen Entfernung des Himmelsgewölbes vom Beobachter ein schnelles Aufsteigen des Schattens folgern läßt. Diese verbreitete Anschauung ist aber ganz besonders aus dem Grunde nicht haltbar, weil sich bei der flachen Form des Himmelsgewölbes[1]) der Schattenrand dem Beobachter ständig nähern müßte und sich nicht anfangs entfernen, wie es die geometrische Beziehung (3) für die Strecke $\overline{ON}$, nach Einsetzung beobachteter zusammengehöriger Werte von η' und γ, für die Beobachtungen in der Nähe des Horizonts fordert.

Der subjektive, bei klarem Wetter zwingende Eindruck, daß der Erdschatten *körperlich vor* dem darüber helleren Himmelsgewölbe steht und sich nicht flächenhaft auf das Gewölbe projiziert, führt dazu, die Sichtweitentheorie[2]) auch auf das Innere des Schattens anzuwenden. Dann folgt ohne weiteres, weil die Helligkeit innerhalb des Schattenraumes geringer ist als außerhalb desselben, daß der Schatten für das Auge vor dem Himmelsgewölbe stehen muß, da wegen der Dunkelheit die Sichtweite im Schattenraum geringer ist als außerhalb in der erleuchteten Luft. *Danach sehen wir, im Schattenraum stehend, in die Tiefe desselben hinein, und zwar gerade so weit, wie es die Helligkeit der Luftmolekeln innerhalb dieses Raumes bedingt und den Schattenrand sehen wir am Ende der maximalen Sichtweite des Schattenraumes.*

Dort, wo der Erdschattenkegel von der Kugelfläche geschnitten wird, die mit der maximalen Sichtweite als Radius um den Standpunkt des Beobachters geschlagen ist, erblicken wir den Schattenrand und dort zeigen ihn auch unsere Meßinstrumente an.

Die Fig. 2 gibt eine schematische Darstellung des Schattens. Die Buchstaben NOZ haben die gleiche Bedeutung wie in der Fig. 1. H_3ZH_4 ist aber hier nicht die Grenze der optischen Atmosphäre, sondern die Begrenzung des vom Beobachter von O aus gesehenen abgeplatteten Himmelsgewölbes.

1) Vgl. den 3., 6. und 7. dieser Berichte a. a. O. **69.** S. 139—148, 391—411 und 485—509. 1907. Ann. d. Phys. **55.** S. 387 u. a. a. O.

2) Vgl. Bericht Nr. 6.

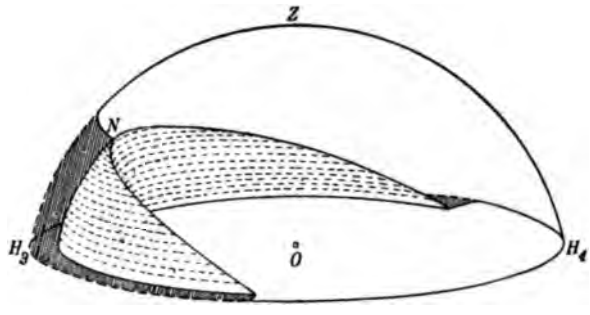


Fig. 2.

Es ist nun die Entfernung vom Beobachter bis zum Schattenrand

$$\overline{ON} = c\sqrt{H}$$

nach Gleichung (1) und daher nach Gleichung (3) bzw. (3a)

$$(8) \qquad c\sqrt{H} = R\frac{2\sin^2\frac{\eta' - \left(\Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}{2}}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}$$

oder für Höhen h über dem Meere

$$(8a) \qquad c\sqrt{H} = R\frac{2\sin^2\frac{\eta' - \left(\Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}{2}}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)} - \frac{h\cos\left(\eta' - \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{2}\right)}{\sin\left(\gamma - \eta' + \Delta_0 + \frac{\Delta_1}{2}\right)}.$$

4. Der aufsteigende Schatten erscheint nicht schwarz, sondern er zeigt selbst dicht über dem Horizont eine dunkelblaue Farbe mit photometrisch gut meßbarer Helligkeit. Die Luft des Schattenraumes zwischen dem Beobachter und der Grenze der optischen Atmosphäre erhält diffuses Licht, vorzüglich blaues und violettes von dem beleuchteten Teil des Himmels und dann Licht, welches vom Erdboden reflektiert wird. Mit sinkender Sonne müßte der Schattenraum dunkler werden, weil die Gesamthelligkeit des Himmels abnimmt, wobei vorausgesetzt ist, daß nur die Ursachen, welche die allgemeine Himmelshelligkeit bedingen, die Schattenhelle beeinflussen. Die absolute Helligkeit des Schattens nimmt jedoch, wie unsere Messungen zeigen, nach Sonnenuntergang anfangs

zu, wie es das Auge auch zur Empfindung bringt, trotzdem andere Stellen des Himmels, z. B. der Zenit, schnell an Helligkeit verlieren. Tab. 1 zeigt einen solchen Helligkeitsabfall

Tabelle 1.

6. Juli 1918.

η	H_z	γ	η	H_z	γ
0° 57,5′		2,0°	2° 48,8′		5,8°
1 21,0	47,0		2 51,8	7,0	
1 32,8	38,0	3,0	2 54,7		7,8
1 52,5	30,0	3,9	3 18,5	4,0	
2 7,7	19,0	4,2	3 53,4	1,2	10,0
2 31,3	12,8				

im Zenit nach Sonnenuntergang, zugleich die Höhe γ, des Erdschattenrandes als Funktion der Sonnendepression η. H_z ist die Helligkeit im Zenit in willkürlichen Einheiten, lichtelektrisch gemessen. Da beim Anwachsen der Helligkeit des Schattenraumes die Sonne untergegangen ist — wenn wir den Schatten abends betrachten — die diffuse Himmelsstrahlung sowie der Bodenreflex dieser Strahlung mit sinkender Sonne abnimmt, so muß eine neue Lichtquelle dem Schattenraum Licht zustrahlen, und zwar eine, die so beschaffen ist, daß ihre Strahlung mit sinkender Sonne, d. h. aufsteigendem Erdschatten, zunimmt. Als derartige Lichtquelle kann nur das „erste Purpurlicht" in Betracht kommen. In den Subtropen ist ein gut sichtbarer Erdschatten regelmäßig von einem hell strahlenden ersten Purpurlicht der Gegenseite begleitet. Wie helleuchtend in den Subtropen das erste Purpurlicht ist, geht auch daraus hervor, daß es, was von Miethe und Lehmann beobachtet wurde, einen zweiten, schwachen Erdschatten hervorrufen kann.

Nach den Beobachtungen, die Miethe und Lehmann[1]) in Ägypten (Assuan) ausgeführt haben, in einer geographischen Breite, die mit derjenigen Teneriffas fast gleich ist und wo sehr ähnliche klimatische Verhältnisse herrschen, nimmt das erste Purpurlicht des Abends bei einer Sonnendepression von 1,8° seinen Anfang, erreicht das Maximum der Helligkeit

1) O. Miethe u. H. Lehmann, Meteorolog. Z. S. S. 97ff. 1909.

bei 3° und ist bei $\eta = 6{,}3°$ zu Ende. Es steht also nach dem Vorangehenden zu erwarten, daß der Erdschatten bei etwa 3° Sonnendepression seine größte Helligkeit und damit — wenn die Theorie richtig ist — seine größte Entfernung erreicht. Unsere Messungen zeigen, daß der geforderte Parallelismus zwischen Entfernung und Helligkeit des Schattens besteht. Vgl. Tab. 2.

Tabelle 2.

11. Oktober 1918, abends

η'	γ	Δ_1	$\overline{ON}$	H
2° 0,55′	3° 18′	7,4′		0,68
2 52,81	6 37	11,1	41,8 km	0,86
3 39,18	10 42	14,1	51,6	1,00
3 55,01	13 12	14,9	48,9	0,72

H ist mit dem lichtelektrischen Photometer 1° unter dem Schattenrand in willkürlichen Einheiten gemessen. Aus den ersten Werten ist $\overline{ON}$ nicht berechnet worden, da die geringe Dicke der Schattenschicht über den Beobachtern (300 m) nicht die Gewähr leistete, daß die Meeresoberfläche und nicht Gebirgskämme der Insel den Schatten warfen.

Beim Abnehmen der Helligkeit des Schattenraumes nähert sich der Schattenrand dem Beobachter wegen der verminderten Sichtweite. Der an ihn schnell heranrückende Schattenrand bekommt infolge seines geringer werdenden Abstandes eine so stark wachsende Winkelgeschwindigkeit, daß es möglich wird, daß der Schattenrand bereits bei einer Sonnendepression von 7° durch den Zenit geht. Es ist hiernach das Dunklerwerden des Schattens und das dadurch bedingte Näherrücken des Randes die direkte Ursache für das schnelle Hochsteigen.

Bei $\gamma = 14$ bis 15° war bei allen unseren Beobachtungen der Erdschattenrand nicht mehr wahrnehmbar. Wohl nur ganz ausnahmsweise und unter hervorragend günstigen Umständen wird der Schatten über 15° beobachtet.[1]) Ein solcher atmosphärischer Umstand braucht nicht etwa besondere Reinheit

1) G. Hellmann, vgl. Pernter-Exner, S. 756. — A. Heim, a. a. O. S. 75.

der Luft zu sein, es scheint vielmehr, daß ein empfindlicher Farbkontrast zwischen Schatten und erleuchtetem Himmel notwendig ist.

Da sich die optischen Eigenschaften der Atmosphäre und damit die Sichtweiten von Tag zu Tag ändern, so erklärt sich auch die verschiedene Geschwindigkeit des Aufsteigens des Schattenrandes aus der täglichen Veränderung der maximalen Sichtweiten.

Vilaflor (Chasna) auf Teneriffa, 13. April 1919.

(Eingegangen 27. Januar 1920.)

3. *Der Strahlungsdruck auf Kreiszylinder aus beliebigem Material; von Günther Thilo.*

(Breslauer Dissertation.)

§ 1. Einleitung.

Das Problem der Beugung ebener, elektromagnetischer, polarisierter Wellen an Kreiszylindern ist behandelt worden von v. Ignatowsky[1]), Seitz[2]) und Schaefer und Großmann.[3]) Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem von einer ebenen, polarisierten, elektromagnetischen Welle auf einen unendlich langen Kreiszylinder ausgeübten Strahlungsdruck, und zwar sei die elektrische Kraft der einfallenden Welle entweder parallel oder senkrecht zur Zylinderachse polarisiert. Die Dielektrizitätskonstante ε, die Permeabilität μ und die Leitfähigkeit σ des Zylinders seien beliebig. Es sei bemerkt, daß die im folgenden abgeleitete Formel für den Strahlungsdruck nicht nur für einen, sondern für beliebig viele koaxiale Zylinder unverändert gilt, nur sind im letzteren Falle die Koeffizienten a_m komplizierter gebaut. Der Strahlungsdruck wird für einen Wasserzylinder von 1 cm Radius als Funktion der Wellenlänge der einfallenden Strahlung in einem größeren Intervall numerisch berechnet, um seinen Zusammenhang mit den Eigenschwingungen des Zylinders zu beleuchten. Im Anhang werden die Formeln für das durch zwei koaxiale Zylinder gestörte Feld abgeleitet.

1. Teil.

Die elektrische Kraft ist parallel der Zylinderachse polarisiert (im folgenden als ∥ Fall bezeichnet).

§ 2. Das Feld im ∥ Falle.

Es wird ein rechtshändiges Koordinatensystem zugrunde gelegt (vgl. Fig. 1). Die Achse des ∞ langen Zylinders falle

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. S. 495. 1905.

2) W. Seitz, Ann. d. Phys. 16. S. 746. 1905; 19. S. 554. 1906.

3) Cl. Schaefer, Archiv d. Math. u. Phys. III. Reihe. XII. Heft 4. S. 349; Cl. Schaefer u. F. Großmann, Ann. d. Phys. 31. S. 455. 1910.

mit der z-Achse zusammen, der Zylinderradius sei ϱ_1. Die einfallende ebene Welle, deren elektrische Kraft $\parallel$ der z-Achse polarisiert sei, schreite in Richtung der abnehmenden x fort.

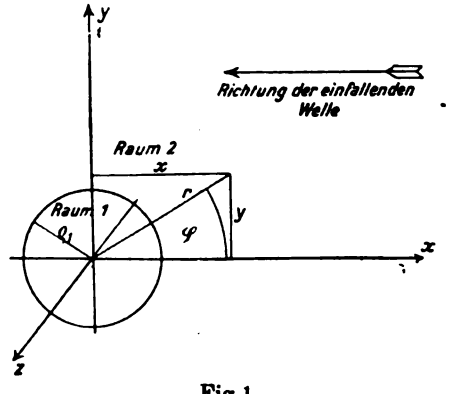


Fig 1.

Die Maxwellschen Gleichungen lauten in Zylinderkoordinaten (r, φ, z):

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\mathfrak{H}_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_\varphi = \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial r}, \\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial z}, \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\mathfrak{E}_\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}, \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

Im vorliegenden Falle wird $\mathfrak{E}_r = 0$, $\mathfrak{E}_\varphi = 0$, $\mathfrak{H}_z = 0$, und es verschwinden alle Ableitungen nach z, da der Zylinder ∞ lang ist. Damit gehen die Gleichungen (1) über in:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\mathfrak{H}_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = +\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r}, \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \varphi}. \end{cases}$$ [1]

1) Der Index z kann als überflüssig weggelassen werden.

Elimination von $\mathfrak{H}_r$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ gibt:

$$(3) \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial\varphi^2}.$$

Um zu einer Integration von (3) zu kommen, setze man

$$(4) \qquad \mathfrak{E} = e^{int}\sum_0^\infty{}_m R_m \cos m\varphi,$$

wo m eine positive, ganze Zahl ist. Dies in (3) eingesetzt gibt:

$$\sum{}_m\left[R_m'' + \frac{1}{r}R_m' + \left\{\frac{\varepsilon\mu n^2}{c^2} - \frac{4\pi i\mu n\sigma}{c^2} - \frac{m^2}{r^2}\right\}R_m\right]\cos m\varphi = 0.$$

Da diese Gleichung für jedes φ gelten muß, muß jeder einzelne Summand 0 werden, also ist, wenn

$$(5) \qquad \frac{\varepsilon\mu n^2}{c^2} - \frac{4\pi i\mu n\sigma}{c^2} = k^2$$

ist,

$$(6) \qquad \frac{d^2R_m}{d(kr)^2} + \frac{1}{kr}\frac{dR_m}{d(kr)} + \left\{1 - \frac{m^2}{k^2r^2}\right\}R_m = 0.$$

Das ist aber die Besselsche Differentialgleichung von der Ordnung m und dem Argument kr. Sie wird gelöst durch die Besselschen Funktionen 1. und 2. Art $J_m(kr)$ und $K_m(kr)$ Das allgemeine Integral von (3) lautet also:

$$(7) \qquad \mathfrak{E} = e^{int}\sum_0^\infty{}_m\{b_m J_m(kr) + a_m K_m(kr)\}\cos m\varphi.$$

Das Innere des Zylinders werde als Innenraum (Raum 1), der übrige Raum als Außenraum (Raum 2) bezeichnet. Die Materialkonstanten im Raume 1 seien ε_1, μ_1, σ_1, die Koeffizienten werden mit a', b', die elektrische Kraft mit $\mathfrak{E}_1$ bezeichnet. Entsprechend im Raume 2: ε_2, μ_2, σ_2, a'', b'', $\mathfrak{E}_2$.[1]) Raum 2 sei das Vakuum, also

$$\varepsilon_2 = \mu_2 = 1, \qquad \sigma_2 = 0, \qquad k_2 = \frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Es ist also:

$$\mathfrak{E}_1 = e^{int}\sum_0^\infty{}_m(b_m' J_m + a_m' K_m)\cos m\varphi.$$

Für $r = 0$ wird $K_m(kr) = \infty$, da aber $(\mathfrak{E}_1)_{r=0}$ endlich bleiben muß, so folgt $a_m' = 0$. Also:

1) Die Bezeichnung der Indizes ist *umgekehrt* wie in der Schaefer-Großmannschen Arbeit (a. a. O.), da bei der Behandlung zweier koaxialer Zylinder später drei Räume auftreten.

$$\mathfrak{E}_1 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m b_m' J_m \cos m\varphi . \tag{8}$$

Die elektrische Kraft $\mathfrak{E}_2$ setzt sich zusammen aus der einfallenden und der vom Zylinder abgebeugten Welle, also $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_b$. $\mathfrak{E}_e$ und $\mathfrak{E}_b$ müssen natürlich der Gleichung (3) gehorchen. Also:

$$\mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{b_m' J_m + a_m^e K_m\} \cos m\varphi + e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{b_m^b J_m + a_m^b K_m\} \cos \varphi$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten dienen folgende Grenzbedingungen:

Die tangentialen Komponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sind bei $r = \varrho_1$ stetig:

$$\begin{cases} (\mathfrak{E}_1)_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{E}_2)_{r=\varrho_1} , \\ (\mathfrak{H}_{\varphi_1})_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{H}_{\varphi_2})_{r=\varrho_1} , \\ \text{oder nach (2):} \\ \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial r}\right)_{r=\varrho_1} = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial r}\right)_{r=\varrho_1} . \end{cases} \tag{9}$$

Ferner muß für $r = \infty$ die vom Zylinder hervorgebrachte Störung verschwunden sein, d. h. es darf dort nur die einfallende Welle vorhanden sein, also:

$$(\mathfrak{E}_2)_{r=\infty} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct+x)} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct+r\cos\varphi)} = e^{int} \cdot e^{ikr\cos\varphi} = (\mathfrak{E}_e)_{r=\infty} .$$

Die Entwickelung von e^{ikr} nach Besselschen Funktionen entnehme ich dem Lehrbuch von Gray-Matthews.[1])

$$e^{ikr\cos\varphi} = J_0(kr) + \sum_1^\infty{}_m 2i^m J_m(kr) \cos m\varphi .$$

Also ist

$$(\mathfrak{E}_e)_{r=\infty} = e^{int}\{J_0(kr) + \sum_1^\infty{}_m 2i^m J_m(kr) \cos m\varphi\},$$

d. h.

$$a_m^e = 0, \quad b_0^e = 1, \quad b_m^e = 2i^m. \tag{10}$$

$\mathfrak{E}_b$ stellt die vom Zylinder nach außen fortschreitende Beugungswelle dar, b_m^b und a_m^b müssen also so bestimmt

1) Gray and Matthews, Treatise on Bessel functions. S. 18. Formel 39.

werden, daß diese Bedingung, d. h. eben nach außen fortschreitende (von $r = 0$ aus divergierende) Zylinderwellen, erfüllt ist. Ich entnehme die Bedingungsgleichung einer Arbeit von A. Sommerfeld.[1]) Ist $\Delta u + k^2 u = 0$ die Schwingungsgleichung, so lautet die Bedingungsgleichung für nach außen fortschreitende Zylinderwellen:

$$\lim_{r=\infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + i k u \right\} = 0. \quad [2]) \tag{11}$$

Setzt man $\mathfrak{E} = e^{i n t} \cdot u(r, \varphi)$ in (3) ein, so ergibt sich: $\Delta u + k^2 u = 0$. Im vorliegenden Falle ist also:

$$u = \sum_0^\infty{}_m \{ b_m{}^b J_m + a_m{}^b K_m \} \cos m \varphi .$$

Dies in (11) eingesetzt gibt:

$$\lim_{r=\infty} \sqrt{r} \{ k b_m{}^b J_m' + k a_m{}^b K_m' + i k b_m{}^b J_m + i k a_m{}^b K_m \} = 0 , \tag{12}$$

denn das Σ fällt wieder weg (vgl. S. 533). Bei großen Werten des Arguments kann man für J_m und K_m folgende asymptotischen Werte benutzen[3]):

$$\left| \begin{array}{l} J_m(k r) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi k r}} \cos \left(\dfrac{2 m + 1}{4} \pi - k r \right) , \\ K_m(k r) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2 k r}} \sin \left(\dfrac{2 m + 1}{4} \pi - k r \right) . \end{array} \right. \tag{13}$$

Setzt man (13) in (12) ein, so erhält man:

$$b_m{}^b = - \frac{i \pi}{2} a_m{}^b .$$

Damit wird

$$\mathfrak{E}_b = e^{i n t} \sum_0^\infty{}_m a_m{}^b \left\{ K_m - \frac{i \pi}{2} J_m \right\} \cos m \varphi = e^{i n} \sum_0^\infty{}_m a_m{}^b Q_m \cos m \varphi ,$$

wenn

$$K_m - \frac{i \pi}{2} J_m = Q_m$$

1) A. Sommerfeld, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jahresbericht der deutschen Mathemat.-Vereinigung. 21. Heft 10/12. S. 309. 1912.

2) Bei Sommerfeld steht in der Klammer $- i k u$; das liegt daran, daß dort der Zeitfaktor $e^{- i n t}$ heißt, während er bei mir $e^{+ i n t}$ ist.

3) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln. 1909. Meine Bezeichnungen schließen sich an Jahnke-Emde an.

ist.[1]) Setze ich noch

(14) $$b_m^{\varepsilon} = b_m'' \quad \text{und} \quad a_m$$

so wird

(15) $$\mathfrak{E}_2 = e^{i n t} \sum_0^{\infty m} \{b_m'' J_m(k_2 r) + a_m$$

Der Ansatz

$$\mathfrak{E}_2 = e^{i n t} \sum_0^{\infty m'} \{b_m J_m +$$

liefert für $r = \infty$ stehende Wellen, v
man für J_m und K_m die Werte (13)

$$b_0'' = 1, \qquad b_m'' =$$

Zur Bestimmung der a_m'' diene

(16)
$$\begin{cases} \sum_0^{\infty m} b_m' J_m(k_1 \varrho_1) \cos m\varphi \\ \qquad = \sum_0^{\infty m} \{b_m'' J_m(k_2 \varrho_1) + \\ \frac{1}{\mu_1} \sum_0^{\infty m} b_m' k_1 J_m'(k_1 \varrho_1) \cos m\varphi \\ \qquad = \sum_0^{\infty m} k_2 (b_m'' J_m'(k_2 \varrho_1) \end{cases}$$

Zur übersichtlicheren Rechnung
nungen eingeführt: Der die Ordnu
wird durchgängig weggelassen. Di
erhalten die Argumentsbezeichnung
stellige Zahl. Die erste Zahl bede
ϱ, also:

---

1) Es ist $Q_m = -\frac{i\pi}{2} H_m^{(2)}$, wo $H_m^{(2)}$
funktion 2. Gattung ist.

2) In den Arbeiten von v. Ignatow
dieser Ansatz für die elektrische Kraft i
aber sein Zusammenhang mit der Aussa
gesprochen. Bei Seitz ist angesetzt b_m
also nicht richtig, da er im ∞ stehende
Arbeit von Seitz ist der Ansatz in $b_m J_m$
einer alten Arbeit von J. J. Thomson ist
(Recent researches on Electricity and Mag

3) $\mu_2 = 1$.

$$J_{11} = J_m(k_1 \varrho_1),$$
$$K_{21}' = K_m'(k_2 \varrho_1) \text{ usw.}$$

Da die Gleichungen (16) für jedes φ gelten müssen, sind die einzelnen Summanden gleich, also:

$$b' J_{11} = b'' J_{21} + a'' Q_{21},$$
$$\frac{1}{\mu_1} b' k_1 J_{11}' = b'' k_2 J_{21}' + a'' k_2 Q_{21}'.$$

Es folgt:

$$(17) \quad a_m'' = 2 i^m \frac{\frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - k_2 J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)}{k_2 J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1)}.$$

Für $m = 0$ heißt der Faktor nicht $2i^m$, sondern 1. Zur numerischen Berechnung ist folgende Form bequemer:

$$(17a) \quad \frac{2 i^m}{a_m''} = \frac{k_2 J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1)}{\frac{k_1}{\mu_1} J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - k_2 J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)} + \frac{i\pi}{2}.$$

Damit ist $\mathfrak{E}_2$ vollständig bestimmt. Die Koeffizienten b_m' haben kein Interesse.

§ 3. Eigenschwingungen im || Felde.

Unter Eigenschwingungen des Zylinders sind zu verstehen die Eigenschwingungen des Systems: Zylinder + umgebendes Vakuum. Die Bedingungsgleichung erhält man, wenn man die äußere Kraft (einfallende Welle) gleich 0 setzt. Also wird

$$\mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m a_m'' Q_m \cos m\varphi,$$
$$\mathfrak{E}_1 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m b_m' J_m \cos m\varphi.$$

Die Grenzbedingungen (9) liefern:

$$(18) \begin{cases} \sum_0^\infty{}_m b_m' J_m(k_1 \varrho_1) \cos m\varphi = \sum_0^\infty{}_m a_m'' Q_m(k_2 \varrho_1) \cos m\varphi, \\ \frac{k_1}{\mu_1} \sum_0^\infty{}_m b_m' J_m'(k_1 \varrho_1) \cos m\varphi = k_2 \sum_0^\infty{}_m a_m'' Q_m'(k_2 \varrho_1) \cos m\varphi. \end{cases}$$

Das Summenzeichen fällt wieder weg. Division der Gleichung (18) durcheinander liefert die Bedingungsgleichung für die in den k_1 und k_2 steckenden Eigenfrequenzen:

(19) $k_2 J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m'$

(19) kann nur durch komplexe Argu
bedeutet aber, daß nur gedämpfte Eig
können. Die Dämpfung ist einmal
zweitens bei endlichem Leitvermöge
durch Entwickelung Joulescher W
Zylindern ist nur Strahlungsdämpfun
plexes $k_1 = p + iq$ (und damit ein
chung (19) erfüllt, so ist:

$$k_1 = p + iq = \frac{\varepsilon \mu n^2}{c^2} -$$

Diese Gleichung kann nur durch
erfüllt werden. α ist dann die Freq
der Eigenschwingung. Physikalisch
Lösung $n = \alpha - i\beta$, wo $\beta > 0$, da
begrenzt zunimmt. Physikalisch rea
Eigenschwingungen nur an dielektris
nämlich die nach außen fortschrei
Dämpfung verursacht, durch einen in
dielektrischen Zylinder umgebende
großer Leitfähigkeit wieder zurückw
an diesem Mantel stehende Wellen.
gedämpften Eigenschwingungen häng
fernung des Mantels von der Zylind
fernung ∞ groß, so erhält man di
die ungedämpften Eigenschwingunge

$$\mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^\infty m a_m'' K_m($$

denn dieser Ansatz liefert im ∞ ste
die gesuchte Bedingungsgleichung:

(20) $k_2 J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) - \frac{k_1}{\mu_1} J_m$

Dies stimmt mit dem reellen T
man dort reelles Argument annimm

1) Zu beachten ist die formale Über
Nenner von (17).

∞ viele Wurzeln hat und m von 0 bis ∞ läuft, existieren ∞^2 viele Eigenfrequenzen.

§ 4. Berechnung der magnetischen Feldkomponenten.

Die Komponenten $(\mathfrak{H}_r)_2$ und $(\mathfrak{H}_\varphi)_2$ findet man aus den Gleichungen (2). Da kein von der Zeit unabhängiges Magnetfeld vorhanden ist, kann man ohne Hinzufügen einer Integrationskonstante direkt integrieren. Es wird:

$$(21)\quad (\mathfrak{H}_\varphi)_2 = -i \cdot e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{b_m'' J_m'(k_2 r) + a_m'' Q_m'(k_2 r)\} \cos m\varphi,$$

$$(22)\quad (\mathfrak{H}_r)_2 = -\frac{i}{r k_2} e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{b_m'' J_m(k_2 r) + a_m'' Q_m(k_2 r)\} m \sin m\varphi.$$

§ 5. Berechnung des Strahlungsdruckes im $\parallel$ Fall.

Es soll berechnet werden das zeitliche Mittel des von der einfallenden Welle auf den Zylinder ausgeübten Strahlungsdruckes. Die Kraft, die von elektromagnetischer Strahlung auf einen materiellen Körper ausgeübt wird, setzt sich zusammen aus den Maxwellschen Spannungen, die über eine beliebige, den Körper umschließende Fläche zu integrieren sind, und aus der Änderung des elektromagnetischen Impulses innerhalb dieser Fläche. Da im vorliegenden Falle nur das zeitliche Mittel des Druckes berechnet werden soll und ein rein periodischer Zustand vorliegt, ist der Druck, der von der Änderung des Impulses herrührt, im Mittel gleich 0; die Integration über die Maxwellschen Spannungen gibt also das zeitliche Strahlungsdruckmittel. Als Integrationsfläche wird ein dem materiellen Zylinder koaxialer Zylindermantel mit dem Radius r, wo $r > \varrho_1$ ist, gewählt. Die Maxwellschen Spannungen sind:[1])

$$(23)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}_x^e = \frac{\varepsilon}{8\pi}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2)\mathfrak{n}_x + \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\mathfrak{n}_y + \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_z\mathfrak{E}_x\mathfrak{n}_z, \\ \mathfrak{T}_x^m = \frac{\mu}{8\pi}(\mathfrak{H}_c^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2)\mathfrak{n}_x + \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y\mathfrak{n}_y + \frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}_z\mathfrak{H}_x\mathfrak{n}_z.\ ^2) \end{cases}$$

Aus Symmetriegründen folgt, daß nur ein Druck $\parallel$ der

1) Vgl. z. B. Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität (Teubner, 5. Aufl.) Bd. I, S. 154—155, Formeln 149, und S. 211, Formeln 177.

2) $\mathfrak{n}$ ist der normale Einheitsvektor.

x-Achse resultieren kann, die $\mathfrak{T}_y$ und $\mathfrak{T}_z$ brauchen also nicht berücksichtigt zu werden. Ist

$$\mathfrak{T}_x^{\,e} + \mathfrak{T}_x^{\,m} = X_{n\|}$$

(X Komponente der Flächenkraft auf ein Flächenstück von der Größe 1 und der Normale n), so ist die x-Komponente der Flächenkraft auf ein Zylinderstück von der Länge 1:

$$X_{\|} = \int X_{n\|}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} X_{n\|}' \cdot r \cdot d\varphi \quad (d\sigma \text{ Oberflächenelement}).$$

Im vorliegenden Falle fällt r mit n zusammen; also ist

$$\begin{aligned} n_x &= \cos(n, x) = \cos\varphi, \\ n_y &= \cos(n, y) = \sin\varphi, \\ n_z &= \cos(n, z) = 0. \end{aligned}$$

Es sei

$$\overline{X}_{\|} = \frac{1}{T}\int_0^T X_{\|}\, dt, \tag{24}$$

worin T die Schwingungsdauer bedeutet, der zeitliche Mittelwert von $X_{\|}$. Es ist:

$$\mathfrak{E}_x = 0, \quad \mathfrak{E}_y = 0, \quad \mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_2, \quad \mathfrak{H}_z = 0.$$

Auf der Integrationsfläche ist $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$, also wird:

$$X_{n\|} = -\frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}_2^{\,2}\cos\varphi + \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{H}_x)_2^{\,2} - (\mathfrak{H}_y)_2^{\,2}\cos\varphi + \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}_x)_2(\mathfrak{H}_y)_2\sin\varphi.$$

Es ist:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{H}_x)_2 &= (\mathfrak{H}_r)_2\cos\varphi - (\mathfrak{H}_\varphi)_2\sin\varphi, \\ (\mathfrak{H}_y)_2 &= (\mathfrak{H}_r)_2\sin\varphi + (\mathfrak{H}_\varphi)_2\cos\varphi. \end{aligned}$$

Damit wird:

$$\left\{ \begin{aligned} X_{n\|} &= \frac{1}{8\pi}\Big\{ -\mathfrak{E}_2^{\,2}\cos\varphi + (\mathfrak{H}_r)_2^{\,2}\cos\varphi - (\mathfrak{H}_\varphi)_2^{\,2}\cos\varphi \\ &\qquad - 2(\mathfrak{H}_r)_2(\mathfrak{H}_\varphi)_2\sin\varphi\Big\}. \end{aligned} \right. \tag{25}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{X}_{\|} &= \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^{2\pi} r\, X_{n\|}\, d\varphi = -\frac{r}{8\pi}\,\frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^{2\pi}\Big\{\mathfrak{E}_2^{\,2}\cos\varphi \\ &\quad - (\mathfrak{H}_r)_2^{\,2}\cos\varphi + (\mathfrak{H}_\varphi)_2^{\,2}\cos\varphi + 2(\mathfrak{H}_r)_2(\mathfrak{H}_\varphi)_2\sin\varphi\Big\} d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Da die Grenzen konstant sind, können die Integrationen

vertauscht werden. Bezeichnen überstrichene Größen zeitliche Mittelwerte über eine Periode, z. B.:

$$\overline{\mathfrak{E}_2^{\,2}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{E}_2^{\,2}\, dt,$$

so wird:

$$(26)\quad \begin{cases} -\overline{X}_{\perp} = \dfrac{r}{8\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{E}_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi - \dfrac{r}{8\pi}\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi \\ \qquad + \dfrac{r}{8\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_\varphi)_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi + \dfrac{r}{4\pi}\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2 \cdot (\mathfrak{H}_\varphi)_2} \sin\varphi\, d\varphi. \end{cases}$$

$-\overline{X}_{\parallel}$ bedeutet eine Kraft in Richtung der einfallenden Welle.

a) Berechnung von $\int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{E}_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi$.

Es war nach (15)

$$\mathfrak{E}_2 = e^{int}\sum_0^\infty{}_m \{b_m'' J_m + a_m'' Q_m\} \cos m\varphi.$$

Man setze:

$$(27)\quad \begin{cases} a_m'' = \alpha_m'' + i\beta_m'', \\ b_m'' = b_m^{(1)} + i b_m^{(2)}.^{1}) \end{cases}$$

Damit wird:

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_2 = e^{int}\displaystyle\sum_0^\infty{}_m \left\{\left(b_m^{(1)} + \frac{\pi}{2}\beta_m''\right) J_m + \alpha_m'' K_m\right\} \cos m\varphi \\ \qquad + i\cdot e^{int}\displaystyle\sum_0^\infty{}_m \left\{\left(b_m^{(2)} - \frac{\pi}{2}\alpha_m''\right) J_m + \beta_m'' K_m\right\} \cos m\varphi. \end{cases}$$

Es sei

$$(28)\quad \begin{cases} A_m = \left(b_m^{(1)} + \dfrac{\pi}{2}\beta_m''\right) J_m(k_2 r) + \alpha_m'' K_m(k_2 r), \\ B_m = \left(b_m^{(2)} - \dfrac{\pi}{2}\alpha_m''\right) J_m(k_2 r) + \beta_m'' K_m(k_2 r). \end{cases}$$

Also wird:

$$(29)\quad \mathfrak{E}_2 = e^{int}\left\{\sum_0^\infty{}_m A_m \cos m\varphi + i\sum_0^\infty{}_m B_m \cos m\varphi.\right\}$$

---

1) Da b_m'' abwechselnd reell oder rein imaginär ist, ist bei gleichem m entweder $b_m^{(1)}$ oder $b_m^{(2)}$ gleich 0.

$\mathfrak{E}_2$ ist gleich dem reellen Teil dieses Ausdruckes.

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{Re}\{e^{int}(a_1 + i a_2)\}$ $\mathfrak{B} = \mathfrak{Re}\{e^{int}(b_1 + i b_2)\}$, so ist der zeitliche Mittelwert des Produktes:

$$\overline{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}} = \tfrac{1}{2}\{a_1 b_1 + a_2 b_2\}.$$

Also folgt aus (29):

$$\overline{\mathfrak{E}_2^2} = \tfrac{1}{2}\left[\left\{\sum_0^\infty{}_m A_m \cos m\varphi\right\}^2 + \left\{\sum_0^\infty{}_m B_m \cos m\varphi\right\}^2\right],$$

oder:

$$\overline{\mathfrak{E}_2^2} = \tfrac{1}{2}\left[\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_p A_m A_p \cos m\varphi \cos p\varphi + \sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_p B_m B_p \cos m\varphi \cos p\varphi\right].$$

$$(30)\quad \left\{\int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{E}_2^2} \cos\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\left[\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_p \{A_m A_p + B_m B_p\} \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi\, d\varphi\right].\right.$$

Das Integral $\int \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi\, d\varphi$ läßt sich durch partielle Integration bestimmen. Man bekommt in bekannter Weise eine Rekursionsformel, in der das vorliegende Integral durch $\int \sin m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi\, d\varphi$ ausgedrückt wird. Behandelt man das letztere Integral ebenso, so bekommt man schließlich:

$$\begin{aligned}\int \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi\, d\varphi &= \frac{1 - m^2 - p^2}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2p^2} \cos m\varphi \cos p\varphi \sin\varphi,\\ &- \frac{2mp}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2p^2} \sin m\varphi \sin p\varphi \sin\varphi\\ &- \frac{p(1 + m^2 - p^2)}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2p^2} \cos m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi,\\ &- \frac{m(1 - m^2 + p^2)}{(1 - m^2 - p^2)^2 - 4m^2p^2} \sin m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi.\end{aligned}$$

Also wird:

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi \, d\varphi \\ &\qquad - \frac{m(1-m^2+p^2)}{(1-m^2-p^2)^2-4m^2p^2} \sin 2m\pi \cos 2p\pi \\ &\qquad - \frac{p(1+m^2-p^2)}{(1-m^2-p^2)^2-4m^2p^2} \cos 2m\pi \sin 2p\pi . \end{aligned} \right.$$

Ist $(1-m^2-p^2)^2-4m^2p^2=0$, so ist $p=\pm(m\pm1)$. Für diese Werte wird der Nenner von (31) Null, gleichzeitig wird aber auch der Zähler Null, wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugt. Man findet also den Wert des Integrals, wenn man Zähler und Nenner der rechten Seite von (31) nach p differenziert und dann $p=m+1$ setzt. Führt man die elementare Rechnung durch und wird m eine positive, ganze Zahl, so findet man:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos(m+1)\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Für $m=0$ nimmt das Integral den Wert π an. Also:

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos(m+1)\varphi \cos\varphi \, d\varphi \\ &\qquad = \pi \text{ für } m=0 \\ &\qquad = +\frac{\pi}{2} \text{ „ } m \geqq 1 \end{aligned} \right\} m \text{ ganze Zahl.}$$

Der Wert des Integrals $\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi \, d\varphi$ verschwindet für ganzzahliges positives m und p also nur dann nicht, wenn $p=m+1$ ist. Ferner wird der Wert unabhängig von m, wenn man den Fall $m=0$, $p=1$ ausschließt. In (30) verschwindet also die rechte Seite nur für folgende Indexkombinationen m, p nicht: 01, 10, 12, 21, 23, 32, ... Die Doppelsumme reduziert sich also auf eine einfache Summe und der Faktor $\frac{1}{2}$ fällt weg, da z. B. $A_{23}=A_{32}$ und also:

$$A_{23}+A_{32}=2A_{23}$$

ist usw. Also wird (30), wenn man noch den Wert des Integrals einsetzt:

$$(33)\quad \int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{E}_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi = \pi\{A_0 A_1 + B_0 B_1\} + \frac{\pi}{2}\sum_1^\infty{}_m \{A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1}\}.$$

Der Wert des Integrals $\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi\, d\varphi$ wird später gebraucht, er möge gleich hier mit angegeben werden. Man findet ebenso:

$$(34)\quad \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{m(1-m^2+p^2)}{(1-m^2-p^2)^2-4m^2p^2} \cos 2m\pi \sin 2p\pi + \frac{p(1+m^2-p^2)}{(1-m^2-p^2)^2-4m^2p^2} \sin 2m\pi \cos 2p\pi,$$

$$(35)\quad \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin(m+1)\varphi \cos\varphi\, d\varphi \left.\begin{array}{l} = 0 \text{ für } m = 0 \\ = +\frac{\pi}{2} \text{ „ } m \gtrless 1 \end{array}\right\} m \text{ ganze Zahl.}$$

b) Berechnung von $\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_{r\vartheta})_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi$.

Nach (22) ist:

$$(\mathfrak{H}_{r\vartheta})_2 = -\frac{i}{r k_2} e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{b_m'' J_m(k_2 r) + a_m'' Q_m(k_2 r)\} m \cdot \sin m\varphi,$$

durch Einsetzen von (27) und (28) findet man:

$$(36)\quad (\mathfrak{H}_{r\vartheta})_2 = \frac{1}{r k_2} e^{int}\left[\sum_0^\infty{}_m m B_m \sin m\varphi - i \sum_0^\infty{}_m' m A_m \sin m\varphi\right].$$

Damit wird ebenso wie früher:

$$(37)\quad \overline{(\mathfrak{H}_{r\vartheta})_2^{\,2}} = \frac{1}{2r^2k_2^2}\left\{\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_p m\cdot p\{A_m A_p + B_m B_p \sin m\varphi \sin p\varphi\right\}.$$

$$\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_{r\vartheta})_2^{\,2}} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2r^2k_2^2}\left\{\sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_p m\cdot p\{A_m A_p + B_m B_e\} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi\, d\varphi.\right.$$

Nach (35) verschwindet das Integral nur für $p = m + 1$, bzw. $m = p + 1$ nicht. Die Doppelsumme reduziert sich also wieder auf eine einfache Summe, die Kombinationen 01, 10 sind Null, die Kombinationen 12, 21, 23, 32 ... sind $= + \pi/2$, also wird (37):

$$(38)\quad \int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_r)_2}^2 \cos\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2 r^2 k_2^2} \sum_1^\infty m\, m(m+1)\{A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1}\}.$$

c) Berechnung von $\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_\varphi)_2}^2 \cos\varphi\, d\varphi$.

Nach (21) ist:

$$(\mathfrak{H}_\varphi)_2 = -i e^{i\eta t} \sum_0^\infty m \{b_m'' J_m'(k_2 r) + a_m'' Q_m'(k_2 r)\} \cos m\varphi.$$

Wende ich wieder Gleichung (27) an und setze ich:

$$(39)\quad \begin{cases} A_m' = \left(b_m^{(1)} + \frac{\pi}{2}\beta_m''\right) J_m' + \alpha_m'' K_m', \\ B_m' = \left(b_m^{(2)} - \frac{\pi}{2}\alpha_m''\right) J_m' + \beta_m'' K_m', \text{[1]} \end{cases}$$

so wird:

$$(40)\quad (\mathfrak{H}_\varphi)_2 = e^{i\eta t}\left\{\sum_0^\infty m B_m' \cos m\varphi - i \sum_0^\infty m A_m' \cos m\varphi\right\}.$$

Daraus folgt wieder:

$$\int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_\varphi)_2}^2 \cos\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2} \sum_0^\infty m \sum_0^\infty p \{A_m' A_p' + B_m' B_p'\} \cdot \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi\, d\varphi,$$

Nach (32) wird:

$$(41)\quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} \overline{(\mathfrak{H}_\varphi)_2}^2 \cos\varphi\, d\varphi = \pi\{A_0' A_1' + B_0' B_1'\} \\ \qquad + \frac{\pi}{2} \sum_1^\infty m \{A_m' A_{m+1}' + B_m' B_{m+1}'\}. \end{cases}$$

1) Gleichungen (39) unterscheiden sich von (28) nur dadurch, daß an Stelle der Funktionen J und K ihre Ableitungen treten.

d) Berechnung von $\int_0^{2\pi} (\overline{\mathfrak{H}_r})_2 \cdot (\mathfrak{H}_\varphi)_2 \sin\varphi \, d\varphi$.

Nach (36), (40) wird:

$$\int_0^{2\pi} (\overline{\mathfrak{H}_r})_2 \cdot (\overline{\mathfrak{H}_\varphi})_2 \sin\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2r\,k_2} \sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_p \{m A_m A_p' + m B_m B_p'\} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos p\varphi \sin\varphi \, d\varphi .$$

Durch partielle Integration des unbestimmten Integrals findet man:

$$(42)\quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos p\varphi \sin\varphi \, d\varphi = m \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos p\varphi \cos\varphi \, d\varphi \\ \qquad\qquad - p \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin p\varphi \cos\varphi \, d\varphi . \end{cases}$$

Da das vorliegende Integral in m und p nicht mehr symmetrisch ist, müssen die Fälle $p = m + 1$ und $m = p + 1$ unterschieden werden. Durch Beachtung von Gleichung (32) u. (35) findet man:

(43)

m	p	$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos p\varphi \sin\varphi \, d\varphi$
0	1	0
$m \geqq 1$	$m+1$	$m\frac{\pi}{2} - (m+1)\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$
1	0	$+\pi$
$m \geqq 2$	$m-1$	$m\frac{\pi}{2} - (m-1)\frac{\pi}{2} = +\frac{\pi}{2}$

Durch (43) findet man also:

$$(44)\quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} (\overline{\mathfrak{H}_r})_2 \cdot (\overline{\mathfrak{H}_\varphi})_2 \sin\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2r\,k_2} \Big[\pi \{A_1 A_0' + B_1 B_0'\} \\ \qquad + \frac{\pi}{2} \sum_2^\infty{}_m m \{A_m A_{m-1}' + B_m B_{m-1}'\} \\ \qquad - \frac{\pi}{2} \sum_1^\infty{}_m m \{A_m A_{m+1}' + B_m B_{m+1}'\} \Big] . \end{cases}$$

e) Berechnung des Strahlungsdruckes.

Gleichung (26) wird durch (33), (38), (41) und (44):

$$(45)\quad \begin{cases} -\bar{X} = \frac{r}{8}\{A_0 A_1 + B_0 B_1\} + \frac{r}{16}\sum_1^\infty{}^m\{A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1}\} \\ \quad - \frac{1}{16 r k_2^2}\sum_1^\infty{}^m m(m+1)\{A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1}\} \\ \quad + \frac{r}{8}\{A_0' A_1' + B_0' B_1'\} + \frac{r}{16}\sum_1^\infty{}^m\{A_m' A_{m+1}' + B_m' B_{m+1}'\} \\ \quad + \frac{1}{8 k_2}\{A_1 A_0' + B_1 B_0'\} + \frac{1}{16 k_2}\sum_2^\infty{}^m m\{A_m A_{m-1}' + B_m B_{m-1}'\} \\ \quad - \frac{1}{16 k_2}\sum_1^\infty{}^m m(A_m A_{m+1}' + B_m B_{m+1}'). \end{cases}$$

Läßt man jetzt den Radius r der Integrationsfläche ∞ werden, so verschwinden die 2. und die 4. und 5. Zeile, denn die Ausdrücke $A \cdot A_{m+1}$ usw. verschwinden einzeln wie $1/r$. Man überzeugt sich davon leicht, indem man die asymptotischen Werte (13) in $A_m \cdot A_{m+1}$ usw. einsetzt. Es wird also:

$$(46)\quad \begin{cases} (\bar{X})_{r=\infty} = \frac{r}{8}\{A_0 A_1 + B_0 B_1 + A_0' A_1' + B_0' B_1'\} \\ \quad + \frac{r}{16}\sum_1^\infty{}^m\{A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} \\ \qquad\qquad + A_m' A_{m+1}' + B_m' B_{m+1}'\}. \end{cases}$$

Beachtet man Gleichung (28), so wird:

$$(47)\quad \begin{cases} A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} \\ \quad = (\alpha_m'' \alpha_{m+1}'' + \beta_m'' \beta_{m+1}'')\left(\frac{\pi^2}{4} J_m J_{m+1} + K_m K_{m+1}\right) \\ \quad + \left(\frac{\pi}{2}\alpha_{m+1}'' \beta_m'' - \frac{\pi}{2}\alpha_m'' \beta_{m+1}''\right)(J_m K_{m+1} - J_{m+1} K_m) \\ \quad + \left(\frac{\pi}{2} b_m^{(1)} \beta_{m+1}'' + \frac{\pi}{2} b_{m+1}^{(1)} \beta_m'' - \frac{\pi}{2}\alpha_{m+1}'' b_m^{(2)} - \frac{\pi}{2}\alpha_m'' b_{m+1}^{(2)}\right) J_m J_{m+1} \\ \quad + (\alpha_{m+1}'' b_m^{(1)} + \beta_{m+1}'' b_m^{(2)}) J_m K_{m+1} \\ \quad + (\alpha_m'' b_{m+1}^{(1)} + \beta_m'' b_{m+1}^{(2)}) J_{m+1} K_m .\ ^1) \end{cases}$$

Die ersten Klammern mögen der Reihe nach mit e_m, f_m, g_m, h_m, j_m bezeichnet werden, also:

---

1) $b_m^{(1)} b_{m+1}^{(1)}$ und $b_m^{(2)} b_{m+1}^{(2)}$ sind 0, da immer der eine Faktor 0 ist, denn b_m'' ist reell oder rein imaginär.

$$(47\,a)\quad \begin{cases} A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} = e_m \left\{ \frac{\pi^2}{4} J_m J_{m+1} + K_m K_{m+1} \right\} \\ \qquad + f_m \{ J_m K_{m+1} - J_{m+1} K_m \} \\ \qquad + g_m J_m J_{m+1} + h_m J_m K_{m+1} \\ \qquad + j_m J_{m+1} K_m . \end{cases}$$

Ebenso wird nach (39):

$$(48)\quad \begin{cases} A'_m A'_{m+1} + B'_m B'_{m+1} = e_m \left\{ \frac{\pi^2}{4} J'_m J_{m+1} + K_m K'_{m+1} \right\} \\ \qquad + f_m \{ J'_m K'_{m+1} - J'_{m+1} K'_m \} \\ \qquad + g_m J'_m J'_{m+1} + h_m J'_m K'_{m+1} \\ \qquad + j_m J'_{m+1} K'_m . \end{cases}$$

Zwischen den Besselschen Funktionen bestehen folgende Rekursionsformeln:

$$(49)\quad \begin{cases} J'_m(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x) = J_{m-1}(x) - \frac{m}{x} J_m(x), \\ J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) - J_{m-1}(x). \end{cases}$$

Dieselben Formeln gelten für $K_m(x)$.

Schließlich gilt noch:

$$(50)\quad \begin{cases} J'_m(x) K_m(x) - J_m(x) K'_m(x) = J_m(x) K_{m+1}(x) \\ \qquad - J_{m+1}(x) K_m(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Für ∞ Argument wird nach 49:

$$(51)\quad \begin{cases} J'_m(k_2 r) = - J_{m+1}(k_2 r) = + J_{m-1}(k_2 r) \quad \text{und} \\ K'_m(k_2 r) = - K_{m+1}(k_2 r) = + K_{m-1}(k_2 r). \end{cases}$$

Für ∞ Argument verschwinden zwar sämtliche Funktionen J_m und K_m, aber $\frac{m}{k_2 r} J_m$ verschwindet von höherer Ordnung als $J_{m+1}(k_2 r)$.

Beachtet man (50) und (51), so wird:

$$(52)\quad \begin{cases} A_m A_{m+1} + B_m B_{m+1} + A'_m A'_{m+1} + B'_m B'_{m+1} \\ \qquad = \{2 f_m + h_m - j_m\} \{ J_m K_{m+1} - J_{m+1} K_m \} \\ \qquad = \frac{1}{k_2 r} \{ 2 f_m + h_m - j_m \}. \end{cases}$$

Und damit wird der Strahlungsdruck unabhängig von der speziellen Wahl der Integrationsfläche.

Es ist

$$2f_m + h_m - j_m = \{\pi\alpha''_{m+1}\beta''_m - \pi\alpha''_m\beta''_{m+1} + \alpha''_{m+1}b^{(1)}_m + \beta''_{m+1}b^{(2)}_m - \alpha''_m b^{(1)}_{m+1} - \beta''_m b^{(2)}_{m+1}\}.$$

Also wird (46)

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} -\bar{X}_{\parallel} &= \frac{1}{8k_2}\{\pi\alpha_1''\beta_0'' - \pi\alpha_0''\beta_1'' + \alpha_1'' - 2\beta_0\} \\ &\quad + \frac{1}{16k_2}\sum_1^x{}^m\{\pi\alpha''_{m+1}\beta''_m - \pi\alpha''_m\beta''_{m+1} + \alpha''_{m+1}b^{(1)}_m \\ &\qquad + \beta''_{m+1}b^{(2)}_m - \alpha''_m b^{(1)}_{m+1} - \beta''_m b^{(2)}_{m+1}\}. \end{aligned}\right.$$

Und damit ist der Strahlungsdruck für den Fall, daß die elektrische Kraft $\parallel$ der Zylinderachse polarisiert ist, exakt berechnet.[1])

2. Teil.

Die elektrische Kraft ist senkrecht zur Zylinderachse polarisiert. ($\perp$ Fall.)

§ 6. Das Feld im $\perp$ Falle.

Ist die elektrische Kraft senkrecht zur Zylinderachse polarisiert, so verschwinden $\mathfrak{H}_r$, $\mathfrak{H}_\varphi$ und $\mathfrak{E}_z$ und die Ableitungen nach z. Gleichungen (1) reduzieren sich also:

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{a)}\quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_\varphi = -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial r}, \\ &\text{b)}\quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}_r}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_r = +\frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\varphi}, \\ &\text{c)}\quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{1}{r}\mathfrak{E}_\varphi - \frac{\partial\mathfrak{E}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{E}_r}{\partial\varphi}. \end{aligned}\right.$$

Man differenziere a, b, c nach resp. r, φ, t und setze in c ein:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left\{\frac{1}{r}\mathfrak{E}_\varphi + \frac{\partial\mathfrak{E}_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{E}_r}{\partial\varphi}\right\} = \frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial\varphi^2}.$$

Die Klammer ist aber gleich $-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}$, also:

$$(55)\quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial\varphi^2}.$$

1) Ist die Amplitude der einfallenden Welle nicht = 1, sondern = A, so ist die rechte Seite von (53) noch mit A^2 zu multiplizieren.

Das ist dieselbe Gleichung wie (3), nur daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ vertauscht sind. Setzt man wieder

$$\frac{\varepsilon\mu n^2}{c^2} - \frac{4\pi i \mu n \sigma}{c^2} = k^2,$$

so wird (55) allgemein integriert durch:

$$(56) \qquad \mathfrak{H} = e^{int} \sum_0^\infty m \{d_m J_m(kr) + c_m K_m(kr)\} \cos m\varphi .$$

Ebenso wie beim I. Fall findet man:

$$(58) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_1 = e^{int} \sum_0^\infty m\, d_m' J_m(k_1 r) \cos m\varphi , \\ \mathfrak{H}_2 = e^{int} \sum_0^\infty m \{d_m'' J_m(k_2 r) + c_m'' Q_m(k_2 r)\} \cos m\varphi . \end{cases}$$

wo $d_0'' = 1$ und $d_m'' = 2 i_I^m$ ist.

Die Koeffizienten d_m' und c_m'' werden durch die Grenzbedingung

$$(59) \quad \begin{cases} (\mathfrak{H}_1)_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{H}_2)_{r=\varrho_1}, \\ (\mathfrak{E}_{\varphi 1})_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{E}_{\varphi 2})_{r=\varrho_1} \end{cases}$$

bestimmt.

Es ist nach (54a) und (56)

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_\varphi = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r} = -k e^{int} \sum_0^\infty m \{d J_m' + c_m K_m'\} \cos m\varphi$$
$$= -k e^{int} F(r, \varphi).$$

Ich setze $\mathfrak{E}_\varphi = C \cdot k \cdot e^{int} \cdot F(r, \varphi)$. Dann folgt

$$C = \frac{ic}{\varepsilon n - 4\pi i \sigma},$$

also:

$$(60) \quad (\mathfrak{E}_\varphi)_1 = -\frac{k_1 i \cdot c}{\varepsilon_1 n - 4\pi i \sigma_1} e^{int} \sum_0^\infty m\, d_m' J_m'(k_1 r) \cos m\varphi ,$$

$$(61) \quad (\mathfrak{E}_\varphi)_2 = +i e^{int} \sum_0^\infty m \{d_m'' J_m'(k_2 r) + c_m'' Q_m'(k_2 r)\} \cos m\varphi ,$$

denn $\varepsilon_2 = 1$, $\sigma_2 = 0$ $k_2 = \frac{n}{c}$.

Also folgt aus (59), wenn nach der bekannten Schlußfolgerung das Summenzeichen weggelassen wird:

$$d' J_{11} = d'' J_{21} + c'' Q_{21}$$

und

$$p_1 d' J_{11}' = d'' J_{21}' + c'' Q_{21}',$$

wenn

$$p_1 = \frac{k_1 c}{\varepsilon_1 n - 4\pi i \sigma_1}$$

ist

Es folgt:

$$(62) \qquad c_m'' = 2 i^m \frac{p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)}{J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) - p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1)}$$

oder

$$(62a) \qquad \frac{2 i^m}{c_m''} = \frac{J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) - p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1)}{p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) J_m(k_2 \varrho_1) - J_m(k_1 \varrho_1) J_m'(k_2 \varrho_1)} + \frac{i\pi}{2}.$$

Für $m = 0$ tritt an Stelle von $2 i^m$ der Faktor 1.

§ 7. Eigenschwingungen im $\perp$ Falle.

Die Bedingungsgleichung für Eigenschwingungen erhält man ebenso wie früher:

$$(63) \qquad p_1 J_m'(k_1 \varrho_1) Q_m(k_2 \varrho_1) - J_m(k_1 \varrho_1) Q_m'(k_2 \varrho_1) = 0.$$

Als Bedingungsgleichung für ungedämpfte Eigenschwingungen erhält man:

$$(64) \qquad k_1 J_m'(k_1 \varrho_1) K_m(k_2 \varrho_1) - \varepsilon_1 k_2 J_m(k_1 \varrho_1) K_m'(k_2 \varrho_1) = 0,$$

da diese nur an dielektrischen Zylindern möglich sind, also $\sigma_1 = 0$ ist.

§ 8. Berechnung des Strahlungsdruckes im $\perp$ Falle.

Man findet ebenso wie früher:

$$(65) \qquad (\mathfrak{E}_r)_2 = + \frac{i}{r k_2} e^{i\omega t} \sum_0^\infty m \{ d_m'' J_m(k_2 r) + c_m'' Q_m(k_2 r) \} \sin m q .$$

Nach (23) wird jetzt:

$$(66) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_{n_\perp} &= \frac{1}{8\pi} \{ \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 \} \mathfrak{n}_x + \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y \mathfrak{n}_y - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \mathfrak{n}_x \\ &= \frac{1}{8\pi} \{ - \mathfrak{H}_2^2 \cos q + (\mathfrak{E}_r)_2^2 \cos q - (\mathfrak{E}_\varphi)_2^2 \cos q \\ &\qquad - 2 (\mathfrak{E}_r)_2 (\mathfrak{E}_\varphi)_2 \sin q \}.^1) \end{aligned} \right.$$

Da $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{E}_\varphi$ im $\perp$ Falle mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}_r$, $\mathfrak{H}_\varphi$ im $\parallel$ Falle formal übereinstimmen ($\mathfrak{E}_{r_\perp}$ und $\mathfrak{E}_{\varphi_\perp}$ haben zwar das umgekehrte Vorzeichen wie $\mathfrak{H}_{r_\parallel}$ und $\mathfrak{H}_{\varphi_\parallel}$, wie man sich aber sofort über-

1) Vgl. Formel (25).

zeugt, ist das gleichgültig), können die Formeln des $\parallel$ Falles sofort auf den $\perp$ Fall übertragen werden. Ist

$$c_m'' = \gamma_m'' + i\,\delta_m''$$

und

$$d_m'' = d_m^{(1)} + i\,d_m^{(2)},$$

so wird der Strahlungsdruck:

$$(67)\left\{\begin{aligned} -\overline{X}_\perp &= \frac{1}{8k_2}\{\pi\,\gamma_1''\,\delta_0'' - \pi\,\gamma_0''\,\delta_1'' + \gamma_1'' - 2\,\delta_0''\} \\ &+ \frac{1}{16\,k_2}\sum_1^\infty m\{\pi\,\gamma_{m+1}''\,\delta_m'' - \pi\,\gamma_m''\,\delta_{m+1}'' + \gamma_{m+1}''\,d_m^{(1)} \\ &+ \delta_{m+1}''\,d_m^{(2)} - \gamma_m''\,d_{m+1}^{(1)} - \delta_m''\,d_{m+1}^{(2)}\}. \end{aligned}\right.$$

3. Teil.

Numerische Rechnungen.

§ 9. Numerische Berechnung des Strahlungsdruckes auf einen Wasserzylinder von 1 cm Radius im Vakuum für den $\parallel$ Fall.

Im folgenden wird der Strahlungsdruck auf einen Wasserzylinder von 1 cm Radius im Vakuum für den $\parallel$ Fall numerisch berechnet. Ich gehe aus von der Formel (53). Man braucht zur Berechnung von $-\overline{X}_\parallel$ nur die Kenntnis der Koeffizienten $a_m'' = \alpha_m'' + i\,\beta_m''$. Für Wasser ist $\varepsilon_1 = 81$, $\mu_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$, also wird Formel (17a):

$$\frac{2\,i^m}{a_m''} = \frac{k_2\,J_{11}\,K_{21}' - k_1\,J_{11}'\,K_{21}}{k_1\,J_{11}'\,J_{21} - k_2\,J_{11}\,J_{21}'} + \frac{i\,\pi}{2}.$$

Da $\varrho_1 = 1$ cm ist, wird $k_2\,\varrho_1 = k_2 = \frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, wo λ die Länge der einfallenden Welle im Vakuum ist. Ferner ist

$$k_1 = \sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{n}{c} = 9\,k_2.$$

$k_1\,\varrho_1$ ist das größte auftretende Argument. Die Funktionen J treten in (17a) von den Argumenten $k_1\,\varrho_1$ und $k_2\,\varrho_1$, die Funktionen K nur vom Argument $k_2\,\varrho_1$ auf. Die Werte für $J_0(x)$ und $J_0'(x) = -J_1(x)$ liegen in den Funktionentafeln von Jahnke-Emde bis zum Argument $x = 15{,}5$ berechnet vor. Ich konnte also den Strahlungsdruck in dem Intervall von 0—1,7 für k_2 (d. h. von 0—15,3 für k_1) berechnen. Die Werte für die $K_0(k_2\,\varrho_1)$ und $K_1(k_2\,\varrho_1)$ wurden dem gleichen Tafelwerk entnommen. In diesem Intervall konnte die Reihe (53) schon bei

$m = 3$ abgebrochen werden, und zwar genügten diese Glieder schon völlig bei $k_2 = 1{,}7$. Bei kleinerem k_2 konnte schon eher abgebrochen werden. Da in (53) als Index $m + 1$ auftritt, mußten die Koeffizienten α_0'' β_0'' bis α_4'' β_4'' berechnet werden. Die Nullstellen des Zählers von (17a) geben die Eigenschwingungen des Zylinders. Es wurden zunächst die Koeffizienten α'' und β''

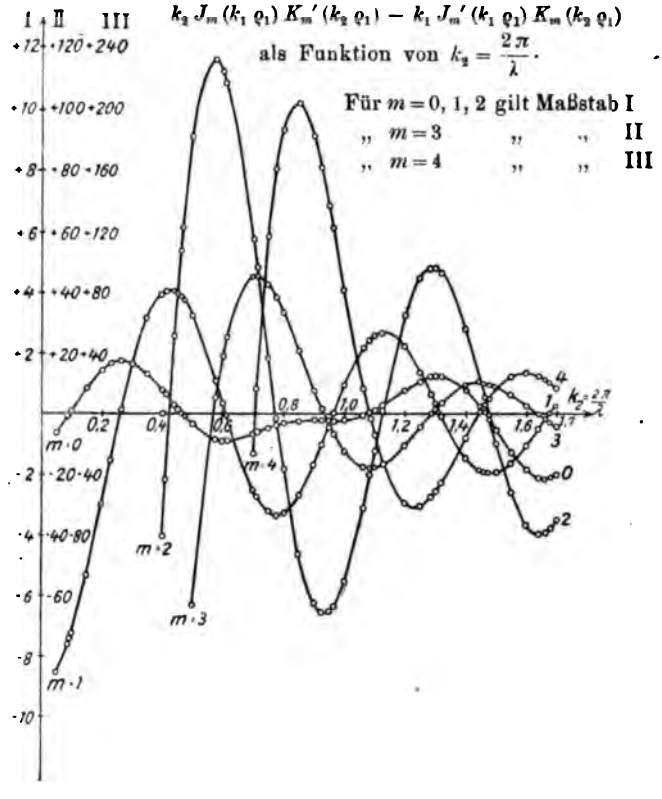


Fig. 2.

($m = 0{,}1 \ldots 4$) derart berechnet, daß $k_2 = 0{,}05$, 0,1 und dann immer um 0,1 wachsend bis 1,7 gesetzt wurde. Daraus wurden annähernd die Eigenschwingungen (für $m = 0{,}1 \ldots 4$) berechnet und nun die Koeffizienten für diese in unmittelbarer Nähe der Eigenschwingungen liegenden Werte von k_2 berechnet. Es ergab sich so die Notwendigkeit, die Koeffizienten für $m = 0{,}1 \ldots 4$

für 50 verschiedene Wellenlängen zu berechnen. — Die nicht in den Tafeln enthaltenen Funktionswerte der höheren Ordnungen wurden entweder mit Hilfe der Rekursionsformeln (49), oder, wo diese Rechnungsart für höhere Ordnungen und kleine Argumente zu ungenau wurde, aus den Reihen für J_m und J_m' teilweise berechnet und dazwischenliegende Argumente aus den Kurven graphisch interpoliert.[1]) Sämtliche numerischen Rechnungen sind mit dem Rechenschieber ausgeführt. In Fig. 2 ist $k_2 J_{11} K_{21}' - k_1 J_{11}' K_{21}$ als Funktion von k_2 aufgetragen. Mit wachsendem m nehmen die Maxima stark zu. Deswegen mußte für $m = 3$ und $m = 4$ je ein kleinerer Maßstab gewählt werden. Die Nullstellen geben die Eigenschwingungen. Merkwürdig ist das Verhalten der Funktion für $m = 0$ zwischen 0,8 und 1,1. Es wird später gezeigt werden, daß sich die Koeffizienten α_0'' und β_0'' so verhalten, als ob bei $k_2 = 0{,}8$ eine Eigenschwingung sei. In der folgenden Tabelle 1 sind die Werte von k_2, die Eigenschwingungen entsprechen, für $m = 0$ bis $m = 4$ zusammengestellt.

Tabelle 1.

Wurzeln von: $k_2 J_m(9k_2) K_m'(k_2) - 9k_2 J_m'(9k_2) K_m(k_2) = 0$.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$k_2 =$	+0,09587*[2])	+0,2631*	+0,4237	+0,5706	+0,7073
	+0,4648*	+0,6102	+0,7752	+0,9324	+1,0825
	+1,0709	+0,9621	+1,1246	+1,2857	+1,4435
	+1,4656	+1,3170	+1,4743	+1,6379	
		+1,6771			

Der Abstand der Wurzeln innerhalb einer Ordnung ist fast konstant. — Fig. 3 enthält den Nenner von (17a): $k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}'$ als Funktion von k_2. Man sieht, wie mit wachsendem m die Kurven sich immer weiter der Abszissenachse anschmiegen. Kurve für $m = 4$ ist in größerem Maßstabe gezeichnet. In den Nullpunkten dieser Funktion für das betreffende m werden α_m'' und β_m'' gleich 0, wie man sich

1) Die durch Kreise bezeichneten Kurvenpunkte sämtlicher Figuren sind berechnet.

2) Die mit * bezeichneten Wurzeln sind schon von Schaefer-Großmann angegeben.

aus (17a) leicht überzeugt. In den Nullpunkten von $k_2 J_{11}' K_{21} - k_1 J_{11}' K_{21}$ [1]) für das betreffende m werden abwechselnd $\alpha_m'' = 0$ und $\beta_m'' = \pm 4/\pi$ (oder eben umgekehrt). Für $m = 0$ wird in den Eigenschwingungen $\alpha_0'' = 0$ und $\beta_0'' = -2/\pi$ (weil $b_0'' = 1$). Man sieht dieses Verhalten der Koeffizienten in den Figg. 4,

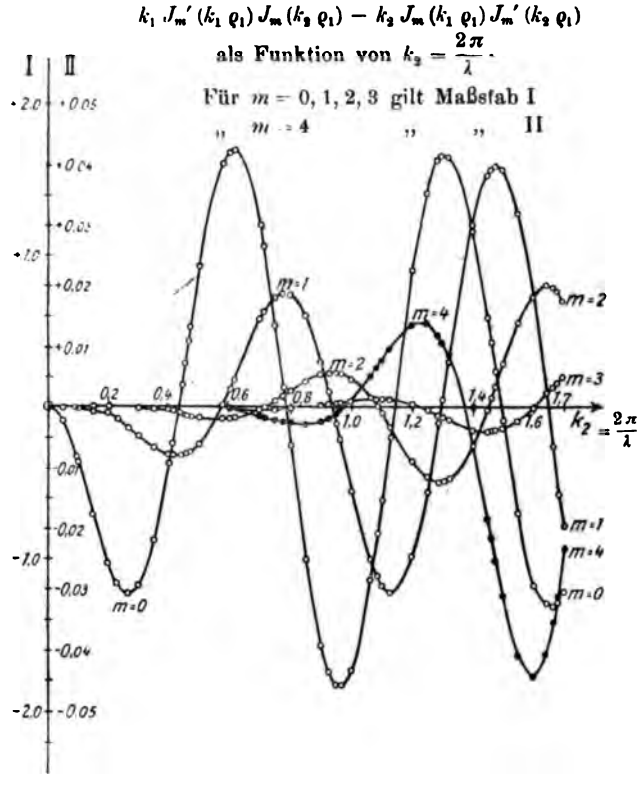


Fig. 3.

5 und 6. Für $m = 3$ und 4 ist der Verlauf der Koeffizienten nicht gezeichnet, weil sie außer an den Stellen der Eigenschwingungen sehr klein bleiben. Man sieht in den Figg. 4 bis 6 deutlich die durch die Eigenschwingungen des Zylinders hervorgerufenen Schwankungen im Verlauf der Koeffizienten. Die Stellen der Eigenschwingungen der betreffenden Ordnung

1) Also in den Eigenschwingungen der betreffenden Ordnung.

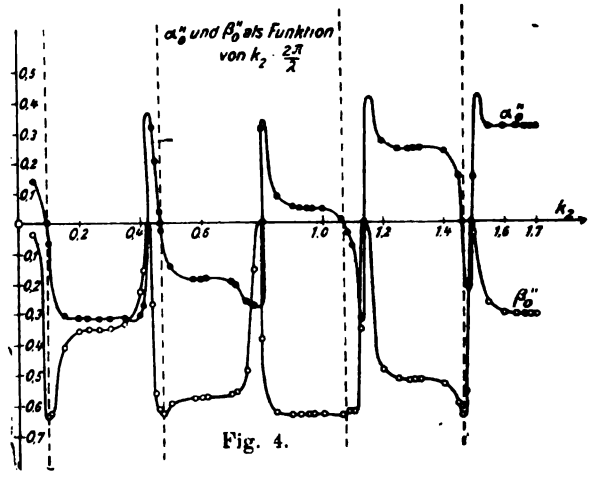


Fig. 4.

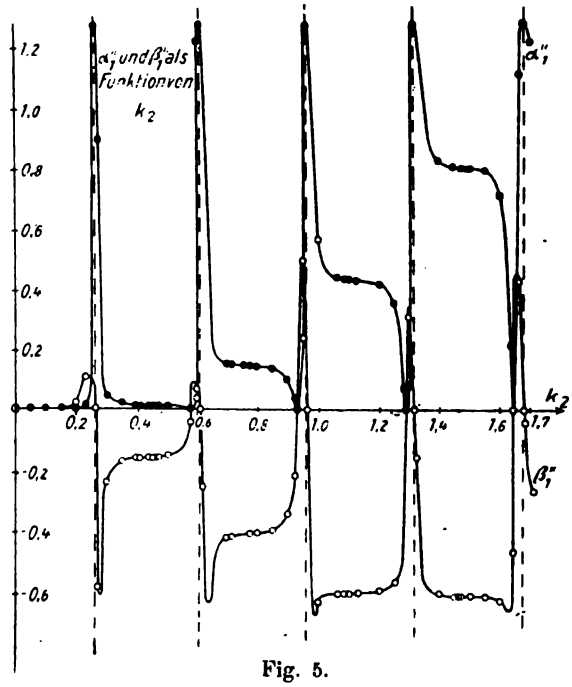


Fig. 5.

sind durch die gestrichelten Geraden bezeichnet. In Fi
sieht man, wie sich bei 0,8 die α_0 und β_0 wie in der N
einer Eigenschwingung verhalten. Ferner sieht man, wie

die Koeffizienten mit wachsendem m immer weiter der Abszissenachse anschmiegen und nur in der Nähe der Eigenschwingungen ein beinahe unstetiges Anwachsen zeigen.[1]) In den folgenden Tabellen werden die Wurzeln des Nenners von (17a) und die Koeffizienten α_m'' und β_m'' gegeben.

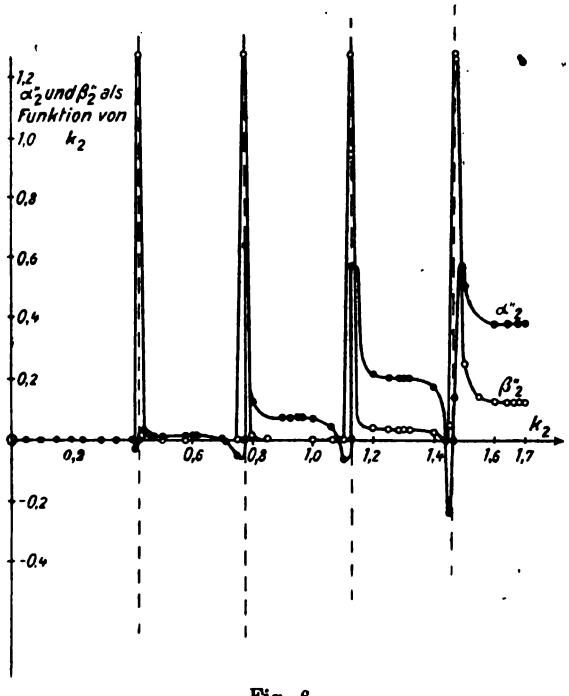


Fig. 6.

Tabelle 2.

Wurzeln von: $9k_2 J_m'(9k_2) J_m(k_2) - k_2 J_m(9k_2) J_m'(k_2) = 0.$

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
	+0,4282	+0,5708	+0,7097	+0,8294	+0,9745
$k_2 =$	+0,7847	+0,9381	+1,0871	+1,2293	+1,3680
	+1,1399	+1,2951	+1,4490	+1,5991	
	+1,4937	+1,6495			

1) Es sei noch bemerkt, daß nur die durch Kreise bezeichneten Kurvenpunkte berechnet sind und Maxima, wie z. B der Kurve für β_1'' in Fig. 5 bei 0,63 nur qualitativ bewertet werden dürfen.

Die Wurzeln dieser Funktion für die Ordnungen 0, 1 fallen nahe mit den Wurzeln von

$$k_2 J_m(9k_2) K_m'(k_2) - 9k_2 J_m'(9k_2) K_m(k_2) = 0$$

der Ordnungen 2, bzw. 3 und 4 zusammen. (Vgl. Tabelle

Tabelle 3.

α_0'' und β_0''.

k_2	α_0''	β_0''	k_2	α_0''	β_0''
0,05	+0,1402	−0,03264	0,712	−0,2068	−0,5600
0,1	−0,0657	−0,6310	0,75	−0,2692	−0,4890
0,2	−0,3130	−0,3566	0,776	−0,2754	−0,1582
0,3	−0,3162	−0,3500	0,925	+0,0475	−0,6330
0,4	−0,3052	−0,2288	0,95	+0,0467	−0,6330
0,5	−0,1453	−0,5990	0,963	+0,0464	−0,6330
0,6	−0,1853	−0,5773	1,063	+0,0126	−0,6350
0,7	−0,1986	−0,5675	1,085	−0,0301	−0,6220
0,8	+0,3110	−0,3862	1,127	−0,3164	−0,3520
0,9	+0,0514	−0,6340	1,25	+0,2494	−0,5160
1,0	+0,0453	−0,6330	1,287	+0,2459	−0,5200
1,1	−0,0766	−0,6270	1,32	+0,2466	−0,5195
1,2	+0,2694	−0,4875	1,449	+0,1532	−0,5980
1,3	+0,2466	−0,5199	1,461	$+6{,}43 \cdot 10^{-3}$	−0,6360
1,4	+0,2354	−0,5325	1,475	−0,2076	−0,5600
1,5	+0,1501	−0,0376	1,641	+0,3180	−0,3054
1,6	+0 3178	−0,3001	1,679	+0,3182	−0,3061
1,7	+0,3180	−0,3058	0,15	−0,3042	−0,4112
0,096	−0,002422	−0,6365	0,35	−0,3176	−0,3334
0,266	−0,3166	−0,3514	0,85	+0,0873	−0,6250
0,45	+0,2038	−0,5655	1,55	+0,3144	−0,2692
0,461	+0.0354	−0,6165	1,665	+0,3179	−0,3052
0,468	−0,0258	−0,6260	0,41	−0,2756	−0,1595
0,577	−0,1849	−0,5775	0,44	+0,3141	−0,2680
0,612	−0,1858	−0,5770	0,28	−0,3168	−0,3526

Tabelle 4.

α_1'' und β_1'.

k_2	α_1''	β_1''	k_2	α_1''	β_1''
0,05	$+3{,}864 \cdot 10^{-9}$	$+7{,}02 \cdot 10^{-5}$	1,1	+0,4299	−0,6020
0,1	$+1{,}151 \cdot 10^{-6}$	$+1{,}211 \cdot 10^{-3}$	1,2	+0,4165	−0,5975
0,2	$+2{,}526 \cdot 10^{-4}$	$+1{,}795 \cdot 10^{-2}$	1,3	+0,0772	+0,3036
0,3	+0,0438	−0,2322	1,4	+0,8240	−0,6080
0,4	+0,0191	−0,1547	1,5	+0,8030	−0,6155
0,5	+0,0171	−0,1467	1,6	+0,7095	−0,6325
0,6	+0,0408	+0,0708	1,7	+1,2120	−0,2740
0,7	+0,1565	−0,4180	0,096	$+7{,}41 \cdot 10^{-7}$	$+9{,}71 \cdot 1$
0,8	+0,1462	−0,4055	0,266	+0,9010	−0,5800
0,9	+0,1001	−0,3432	0,45	+0,01900	−0,1560
1,0	+0,5645	−0,6330	0,461	+0,01890	−0,1538

Tabelle 4 (Fortsetzung).

α_1'' und β_1''.

k_2	α_1''	β_1''	k_2	α_1''	β_1''
0,468	+0,01867	−0,1529	1,32	+1,252	−0,1583
0,577	$+1{,}163\cdot10^{-3}$	+0,03846	1,449	+0,8000	−0,6150
0,612	+1,222	−0,2514	1,461	+0,8030	−0,6150
0,712	+0,1524	−0,4135	1,475	+0,7995	−0,6150
0,75	+0,1468	−0,4065	1,641	+0,2101	−0,4725
0,776	+0,1461	−0,4060	1,679	+1,272	−0,04075
0,925	+0,0375	−0,2154	0,15	$+4{,}15\cdot10^{-5}$	$+7{,}27\cdot10^{-3}$
0,95	+0,2390	+0,4970	0,35	+0,02136	−0,1635
0,963	+1,268	−0,0882	0,85	+0,1398	−0,3984
1,063	+0,4400	−0,6055	1,55	+0,7890	−0,6185
1,085	+0,4335	−0,6025	1,665	+1,111	+0,4240
1,127	+0,4280	−0,6015	0,41	+0,01911	−0,1549
1,25	+0,3526	−0,5700	0,44	+0,01911	−0,1549
1.287	+0,0730	−0,2964	0,23	$+9{,}79\cdot10^{-3}$	+0,1113

Tabelle 5.

α_2'' und β_2''.

k_2	α_2''	β_2''	k_2	α_2''	β_2''
0,05	$-5{,}065\cdot10^{-9}$	$+2{,}016\cdot10^{-17}$	0,712	$-9{,}625\cdot10^{-4}$	$+7{,}280\cdot10^{-7}$
0,1	$-3{,}279\cdot10^{-7}$	$+8{,}45\cdot10^{-14}$	0,75	−0,04945	$+1{,}916\cdot10^{-3}$
0,2	$-3{,}276\cdot10^{-5}$	$+8{,}41\cdot10^{-10}$	0,776	+0,6360	+0,6650
0,3	$-5{,}72\cdot10^{-4}$	$+2{,}572\cdot10^{-7}$	0,925	+0,0700	$+3{,}85\cdot10^{-3}$
0,4	−0,01425	$+1{,}597\cdot10^{-4}$	0,95	+0,0715	$+4{,}01\cdot10^{-3}$
0,5	+0,01285	$+1{,}300\cdot10^{-4}$	0,963	+0,0705	$+3{,}92\cdot10^{-3}$
0,6	+0,01189	$+1{,}114\cdot10^{-4}$	1,063	+0,0436	$+1{,}495\cdot10^{-3}$
0,7	$+3{,}398\cdot10^{-3}$	$+9{,}05\cdot10^{-6}$	1,085	$+6{,}42\cdot10^{-3}$	$+3{,}288\cdot10^{-5}$
0,8	+0,1227	+0,01194	1,127	+0,5605	+0,9385
0,9	+0,07080	$+3{,}96\cdot10^{-3}$	1,25	+0,1989	+0,0318
1,0	+0,06840	$+3{,}67\cdot10^{-3}$	1,287	+0,1971	+0,0312
1,1	−0,0690	$+3{,}22\cdot10^{-3}$	1,32	+0,1970	+0,0313
1,2	+0,2100	+0,03566	1,449	$+4{,}925\cdot10^{-3}$	$+1{,}90\cdot10^{-5}$
1,3	+0,1968	+0,03126	1,461	−0,2424	+0,0479
1,4	+0,1720	+0,02374	1,475	+0,1384	+1,259
1,5	+0,5000	−0,2426	1,641	+0,3758	+0,1222
1,6	+0,3754	+0,1223	1,679	+0,3746	+0,1218
1,7	+0,3712	+0,1192	0,15	$-4{,}975\cdot10^{-6}$	$+1{,}952\cdot10^{-4}$
0,096	$-3{,}248\cdot10^{-7}$	$+8{,}275\cdot10^{-14}$	0,35	$-2{,}19\cdot10^{-3}$	$+3{,}776\cdot10^{-6}$
0,266	$-2{,}236\cdot10^{-4}$	$+3{,}93\cdot10^{-8}$	0,85	+0,0760	$+4{,}54\cdot10^{-3}$
0,45	+0,02164	$+3{,}684\cdot10^{-4}$	1,55	+0,3904	+0,1341
0,461	+0,01718	$-2{,}32\cdot10^{-4}$	1,665	+0,3740	+0,1215
0,468	+0,01598	$+2{,}008\cdot10^{-4}$	0,41	−0,0286	$+6{,}42\cdot10^{-4}$
0,577	+0,01166	$+1{,}070\cdot10^{-4}$	0,44	+0,03038	$+7{,}25\cdot10^{-4}$
0,612	+0,01178	$+1{,}090\cdot10^{-4}$	0,23	$-8{,}425\cdot10^{-5}$	$+5{,}585\cdot10^{-6}$

Tabelle 6.

α_3'' und β_3''.

k_2	α_3''	β_3''	k_2	α_3''	β_3''
0,05	$-2{,}352\cdot10^{-21}$	$-5{,}475\cdot10^{-11}$	0,712	$-2{,}154\cdot10^{-7}$	$+5{,}235\cdot10^{-4}$
0,1	$-2{,}38\cdot10^{-18}$	$-1{,}741\cdot10^{-9}$	0,75	$-2{,}074\cdot10^{-7}$	$+5{,}135\cdot10^{-4}$
0,2	$-9{,}60\cdot10^{-15}$	$-1{,}103\cdot10^{-7}$	0,776	$-1{,}679\cdot10^{-7}$	$+4.625\cdot10^{-4}$
0,3	$-1{,}821\cdot10^{-12}$	$-1{,}520\cdot10^{-6}$	0,925	$-6{,}125\cdot10^{-4}$	$-0{,}02798$
0,4	$-1{,}91\cdot10^{-10}$	$-1{,}557\cdot10^{-5}$	0,95	$-1{,}924\cdot10^{-4}$	$+0.01565$
0,5	$-1{,}603\cdot10^{-8}$	$-1{,}428\cdot10^{-4}$	0,963	$-8{,}895\cdot10^{-5}$	$+0{,}01062$
0,6	$-7{,}36\cdot10^{-6}$	$+9{,}675\cdot10^{-4}$	1,063	$-3{,}448\cdot10^{-5}$	$+6{,}615\cdot10^{-3}$
0,7	$-2{,}16\cdot10^{-7}$	$+5{,}25\cdot10^{-4}$	1,085	$-3{,}406\cdot10^{-5}$	$+6{,}585\cdot10^{-3}$
0,8	$-1{,}099\cdot10^{-7}$	$+3{,}74\cdot10^{-4}$	1,127	$-3{,}321\cdot10^{-5}$	$+6{,}505\cdot10^{-3}$
0,9	$-1{,}191\cdot10^{-5}$	$-3{,}90\cdot10^{-3}$	1,25	$-3{,}826\cdot10^{-5}$	$-6.975\cdot10^{-3}$
1,0	$-4{,}12\cdot10^{-5}$	$+7{,}24\cdot10^{-3}$	1,287	$-0{,}2521$	$+0{,}5077$
1,1	$-3{,}424\cdot10^{-5}$	$+6{,}60\cdot10^{-3}$	1,32	$-1{,}646\cdot10^{-3}$	$+0{,}04575$
1,2	$-1{,}442\cdot10^{-5}$	$+4{,}28\cdot10^{-3}$	1,449	$-7{,}67\cdot10^{-4}$	$+0{,}03124$
1,3	$-5{,}33\cdot10^{-3}$	$+0{,}0822$	1,461	$-7{,}625\cdot10^{-4}$	$+0{,}03118$
1,4	$-7{,}79\cdot10^{-4}$	$+0.03152$	1,475	$-7{,}535\cdot10^{-4}$	$+0{,}03099$
1,5	$-7{,}34\cdot10^{-4}$	$+0{,}03054$	1,641	$-0{,}3168$	$+0{,}5510$
1,6	$-1{,}007\cdot10^{-6}$	$-1.133\cdot10^{-3}$	1,679	$-0{,}01071$	$+0{,}1162$
1,7	$-8{,}10\cdot10^{-3}$	$+0.1013$	0.15	$-2{,}070\cdot10^{-16}$	$-1{,}621\cdot10^{-6}$
0,096	$-2{,}064\cdot10^{-18}$	$-1{,}62\cdot10^{-9}$	0,35	$-2{,}746\cdot10^{-11}$	$-5{,}900\cdot10^{-6}$
0,266	$-3{,}576\cdot10^{-15}$	$-6{,}75\cdot10^{-7}$	0,85	$-4{,}34\cdot10^{-5}$	$-2.348\cdot10^{-4}$
0,45	$-1{,}511\cdot10^{-9}$	$-4{,}380\cdot10^{-5}$	1,55	$-5{,}37\cdot10^{-4}$	$+0\,02614$
0,461	$-2{,}421\cdot10^{-9}$	$-5{,}55\cdot10^{-5}$	1,665	-0.01549	$+0{,}1396$
0,468	$-3{,}258\cdot10^{-9}$	$-6{,}44\cdot10^{-5}$	0,41	$-2{,}996\cdot10^{-10}$	$-1{,}951\cdot10^{-5}$
0,577	$-6{,}365\cdot10^{-6}$	$+2{,}846\cdot10^{-3}$	0,44	$-9{,}97\cdot10^{-10}$	$-3.558\cdot10^{-5}$
0,612	$-4{,}785\cdot10^{-7}$	$+7{,}80\cdot10^{-4}$	0,23	$-4{,}92\cdot10^{-14}$	$-2{,}502\cdot10^{-7}$

Bricht man in Formel (53) hinter $m = 3$ ab, so bekommt man:[1])

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} -\bar{X}_{||} = \frac{1}{16\,k_2}\{&2\pi\alpha_1''\beta_0'' - 2\pi\alpha_0''\beta_1'' + 4\alpha_1'' - 4\beta_0'' \\ &+ \pi\alpha_2''\beta_1'' - \pi\alpha_1''\beta_2'' + 4\beta_2'' + \pi\alpha_3''\beta_2'' - \pi\alpha_2''\beta_3'' \\ &- 4\alpha_3'' + \pi\alpha_4''\beta_3'' - \pi\alpha_3''\beta_4'' - 2\beta_4''\}. \end{aligned}\right.$$

Setzt man darin die Werte aus den Tabb. 3—7 ein, so erhält man für $-\bar{X}$ [2]) folgende Werte der Tab. 8.

1) $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 0$, $b_1^{(1)} = 0$, $b_1^{(2)} = +2$ usw.

2) $-\bar{X}$ ist ein Druck *in* der Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle.

Tabelle 7.

a_4'' und β_4''.

k_2	a_4''	β_4''	k_2	a_4''	β_4''
0,05	$+8{,}355\cdot10^{-17}$	$-5{,}495\cdot10^{-33}$	0,712	$-1{,}872\cdot10^{-4}$	$-2{,}754\cdot10^{-8}$
0,1	$+1{,}089\cdot10^{-14}$	$-9{,}325\cdot10^{-29}$	0,75	$-3{,}401\cdot10^{-5}$	$-9{,}125\cdot10^{-10}$
0,2	$+7{,}84\cdot10^{-13}$	$-4{,}830\cdot10^{-23}$	0,776	$-2{,}772\cdot10^{-5}$	$-6{,}045\cdot10^{-10}$
0,3	$+8{,}165\cdot10^{-10}$	$-5{,}245\cdot10^{-19}$	0,925	$-2{,}074\cdot10^{-5}$	$-3{,}381\cdot10^{-10}$
0,4	$+1{,}562\cdot10^{-8}$	$-1{,}922\cdot10^{-16}$	0,95	$-1{,}426\cdot10^{-5}$	$-1{,}598\cdot10^{-10}$
0,5	$+1{,}876\cdot10^{-7}$	$-2{,}772\cdot10^{-14}$	0,963	$-8{,}435\cdot10^{-6}$	$-5{,}590\cdot10^{-11}$
0,6	$+1{,}929\cdot10^{-6}$	$-2{,}924\cdot10^{-12}$	1,063	$+5{,}975\cdot10^{-4}$	$-2{,}807\cdot10^{-7}$
0,7	$+1{,}103\cdot10^{-4}$	$-9{,}585\cdot10^{-9}$	1,085	$-5{,}950\cdot10^{-3}$	$-2{,}785\cdot10^{-5}$
0 8	$-2{,}584\cdot10^{-5}$	$-5{,}245\cdot10^{-10}$	1,127	$-6{,}115\cdot10^{-4}$	$-2{,}948\cdot10^{-7}$
0,9	$-2{.}390\cdot10^{-5}$	$-4{,}495\cdot10^{-10}$	1,25	$-4{,}625\cdot10^{-4}$	$-1{,}688\cdot10^{-7}$
1,0	$+2{,}782\cdot10^{-5}$	$-6{,}075\cdot10^{-10}$	1,287	$-4{,}420\cdot10^{-4}$	$-1{,}538\cdot10^{-7}$
1,1	$-1{,}108\cdot10^{-3}$	$-9{,}655\cdot10^{-7}$	1,32	$-3{,}914\cdot10^{-4}$	$-1{,}204\cdot10^{-7}$
1,2	$-4{,}670\cdot10^{-4}$	$-1{,}710\cdot10^{-7}$	1,449	$-0{,}01780$	$-2{,}492\cdot10^{-4}$
1,3	$-4{,}295\cdot10^{-4}$	$-1{,}451\cdot10^{-7}$	1,461	$-7{,}215\cdot10^{-3}$	$-4{,}085\cdot10^{-5}$
1,4	$-7{,}455\cdot10^{-4}$	$-4{,}370\cdot10^{-7}$	1,475	$-4{,}885\cdot10^{-3}$	$-1{,}876\cdot10^{-5}$
1,5	$-3{,}768\cdot10^{-3}$	$-1{,}117\cdot10^{-5}$	1,641	$-3{,}198\cdot10^{-3}$	$-8{,}035\cdot10^{-6}$
1,6	$-3{,}222\cdot10^{-3}$	$-8{,}175\cdot10^{-6}$	1,679	$-2{,}976\cdot10^{-3}$	$-6{,}960\cdot10^{-6}$
1,7	$-2{,}608\cdot10^{-3}$	$-5{,}350\cdot10^{-6}$	0,15	$+6{,}380\cdot10^{-13}$	$-3{,}198\cdot10^{-25}$
0,096	$+1{,}237\cdot10^{-14}$	$-1{,}200\cdot10^{-28}$	0,35	$+4{,}080\cdot10^{-9}$	$-1{,}310\cdot10^{-17}$
0,266	$+1{,}322\cdot10^{-10}$	$-1{,}373\cdot10^{-20}$	0,85	$-2{,}554\cdot10^{-5}$	$-5{,}125\cdot10^{-10}$
0,45	$+5{,}535\cdot10^{-9}$	$-2{,}410\cdot10^{-15}$	1,55	$-3{,}262\cdot10^{-3}$	$-8{,}370\cdot10^{-6}$
0,461	$+7{,}280\cdot10^{-8}$	$-4{,}170\cdot10^{-15}$	1,665	$-3{,}092\cdot10^{-3}$	$-7{,}525\cdot10^{-6}$
0,468	$+8{,}740\cdot10^{-8}$	$-5{,}995\cdot10^{-15}$	0,41	$+1{,}873\cdot10^{-8}$	$-2{,}758\cdot10^{-16}$
0,577	$+1{,}119\cdot10^{-6}$	$-9{,}820\cdot10^{-13}$	0,44	$+4{,}075\cdot10^{-8}$	$-1{,}310\cdot10^{-15}$
0,612	$+2{.}608\cdot10^{-6}$	$-5{,}355\cdot10^{-12}$	0,23	$+2{,}166\cdot10^{-11}$	$-3{,}694\cdot10^{-22}$

Tabelle 8.

k_2	$-\bar{X}_{II}$	k_2	$-\bar{X}_{II}$	k_2	$-\bar{X}_{II}$	k_2	$-\bar{X}_{II}$
0,05	+0,1633	1,3	+0,09335	0,75	+0,1229	1,475	+0,1449
0,1	+1,578	1,4	+0,1452	0,776	+0,1541	1,641	+0,1021
0,2	+0,4570	1,5	+0,1294	0,925	+0,1739	1.679	+0,1416
0,3	+0,2119	1,6	+0,1340	0,95	+0,1654	0,15	+0,6915
0,4	+0,1054	1,7	+0,1434	0,963	+0,1663	0,35	+0,1878
0,5	+0,2829	0,096	+1,659	1,063	+0,1476	0,85	+0,1950
0,6	+0.2510	0,266	+0,4385	1,085	+0,1384	1,55	+0,1426
0,7	+0,1616	0,45	+0,3422	1,127	+0,1331	1,665	+0,1179
0,8	+0,1916	0,461	+0,3384	1,25	+0,1484	0,41	+0,06765
0,9	+0,1798	0,468	+0,3308	1,287	+0,1557	0,44	+0,2002
1,0	+0,1620	0,577	+0,2554	1,32	+0,1483	0,23	+0,4485
1,1	+0,1354	0,612	+0,2502	1,449	+0,1368		
1.2	+0,1589	0,712	+0,1562	1,461	+0,1343		

In Fig. 7 ist der Strahlungsdruck als Funktion von $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ graphisch dargestellt. Die über der Abszissenachse gezeichneten gestrichelten Geraden bezeichnen die Stellen der Eigen-

schwingungen, diejenigen unterhalb der Abszissenachse die Nullstellen von $k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}' = 0$, die Länge der Geraden bezeichnet ihre Ordnung m. An den letzteren Nullstellen werden, wie bewiesen, die betreffenden α_m'' und β_m'' gleich 0; ist m klein, so bewirkt dieses Verhalten ein Kleinwerden des Strahlungsdruckes. Man sieht in Fig. 7 deutlich den Einfluß der Eigenschwingungen auf den Strahlungsdruck,

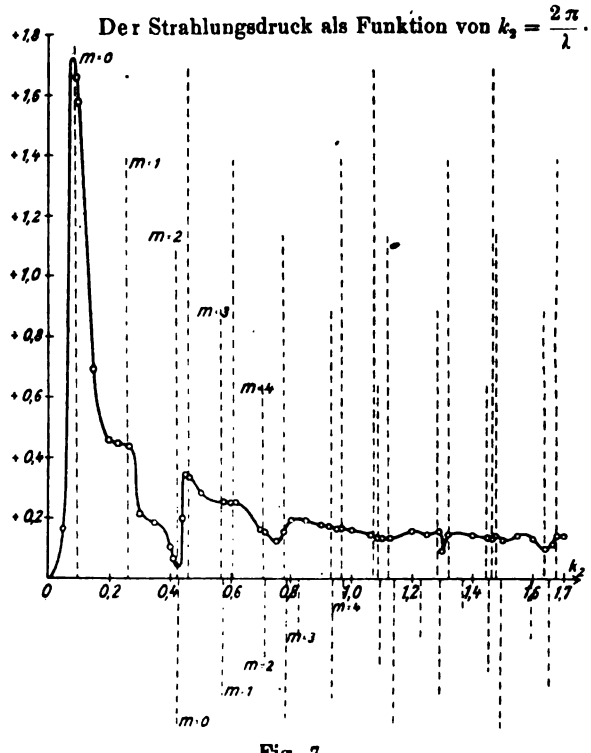


Fig. 7.

z. B. das Anwachsen bei der 1. und 2. Eigenschwingung der Ordnung 0 ($k_2 = 0{,}09587$ und $k_2 = 0{,}4648$) und die Verzögerung des Druckabfalles bei der 1. Eigenschwingung von $m = 1$ ($k_2 = 0{,}2631$). Ebenso sieht man ein deutliches Minimum bei $k_2 = 0{,}4282$ (1. Nullstelle von $k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}' = 0$ für $m = 0$). Im weiteren Verlauf der Kurve verwischt sich der Einfluß dieser Nullstellen und der Eigenschwingungen mehr,

offenbar lagern sich zu viele derartige Einflüsse übereinander. Merkwürdig ist das Minimum bei $k_2 = 1{,}3$. Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich bei Berechnung von noch mehr Kurvenpunkten noch mehr derartige Extrema zeigen.

§ 10. Ergebnisse.

In der vorliegenden Arbeit habe ich exakte Formeln für den Strahlungsdruck abgeleitet, den eine ebene, elektromagnetische Welle auf die Längeneinheit eines Kreiszylinders aus beliebigem Material ausübt, wenn die elektrische Kraft

a) parallel,
b) senkrecht

zur Zylinderachse polarisiert ist. Der Strahlungsdruck wurde dann für einen Wasserzylinder von 1 cm Radius für 50 verschiedene Längen der einfallenden Welle berechnet, und zwar variierte die Wellenlänge von $\lambda = 125{,}6$ cm bis $\lambda = 3{,}7$ cm. Es zeigt sich in diesem Intervall eine starke Beeinflussung des Strahlungsdruckes durch die Eigenschwingungen, der Druck wirkt in der Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle.

Anhang.

Im Anhang soll noch der experimentell wichtige Fall behandelt werden, daß zwei koaxiale Zylinder aus beliebigem

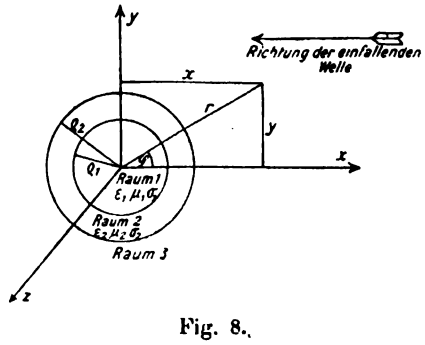


Fig. 8.

Material das Feld stören. Der innerste Raum (Raum 1) habe die Konstanten ε_1, μ_1, σ_1, der Zylinderring (Raum 2) ε_2, μ_2, σ_2, der Außenraum (Raum 3) $\varepsilon_3 = 1$, $\mu_3 = 1$, $\sigma_3 = 0$.

§ 11. Das Feld im ∥ Falle.

Man kann die Integration der Gleichungen unverändert von dem Falle eines Zylinders übernehmen. Im Raum 1 bzw. 2, 3 seien die Konstanten a', b' bzw. a'', b'' und a''', b'''. Allgemeines Integral war nach (7):

$$\mathfrak{E} = e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{ b_m J_m(k r) + a_m K_m(k r) \} \cos m \varphi .$$

Es wird also:

$$(69) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m b_m' J_m(k_1 r) \cos m \varphi , \\ \mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{ b_m'' J_m(k_2 r) + a_m'' K_m(k_2 r) \} \cos m \varphi , \\ \mathfrak{E}_3 = e^{int} \sum_0^\infty{}_m \{ b_m''' J_m(k_3 r) + a_m''' Q_m(k_3 r) \} \cos m \varphi . \end{cases}$$

Bei $\mathfrak{E}_3$ muß wieder wegen der Ausstrahlungsbedingung Q_m für K_m gesetzt werden, bei $\mathfrak{E}_2$ liegt kein Grund vor, die Formel (7) zu ändern. Die Grenzbedingungen lauten:

$$(70) \quad \begin{cases} (\mathfrak{E}_1)_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{E}_2)_{r=\varrho_1}, \quad (\mathfrak{E}_2)_{r=\varrho_2} = (\mathfrak{E}_3)_{r=\varrho_2}, \\ (\mathfrak{H}_{\varphi_1})_{r=\varrho_1} = (\mathfrak{H}_{\varphi_2})_{r=\varrho_1}, \quad (\mathfrak{H}_{\varphi_2})_{r=\varrho_2} = (\mathfrak{H}_{\varphi_3})_{r=\varrho_2}, \\ \text{oder dafür nach Formel (2)} \\ \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial r}\right)_{r=\varrho_1} = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial r}\right)_{r=\varrho_1}, \quad \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial r}\right)_{r=\varrho_2} = \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_3}{\partial r}\right)_{r=\varrho_2} \\ \text{und} \\ \mathfrak{E}_{3_{r=\infty}} = e^{int} e^{ikr\cos\varphi} . \end{cases}$$

Es ist jetzt:

$$k_1^2 = \frac{\varepsilon_1 \mu_1 n^2}{c^2} - \frac{4\pi i \mu_1 n \sigma_1}{c^2} ,$$

$$k_2^2 = \frac{\varepsilon_2 \mu_2 n^2}{c^2} - \frac{4\pi i \mu_2 n \sigma_2}{c^2} ,$$

$$k_3^2 = \frac{n^2}{c^2} .$$

Die Grenzbedingungen (70) liefern (in abgekürzter Bezeichnung):

$$(71)\quad \begin{cases} b' J_{11} = b'' J_{21} + a'' K_{21}, \\ b'' J_{22} + a'' K_{22} = b''' J_{32} + a''' Q_{32}, \\ \frac{k_1}{\mu_1} b' J_{11}' = \frac{k_2}{\mu_2}\{b'' J_{21}' + a'' K_{21}'\}, \\ \frac{k_2}{\mu_2}\{b'' J_{22}' + a'' K_{22}'\} = k_3\{b''' J_{32}' + a''' Q_{32}'\}. \end{cases}$$

Man findet: $b_0''' = 1$, $b_m''' = 2i^m$ und:

$$(72)\quad \frac{2i^m}{a_m'''} = \frac{\left\{\frac{k_2}{\mu_2} J_{22}' K_{32} - k_3 J_{22} K_{32}'\right\}\left\{\frac{k_2}{\mu_2} J_{11} K_{21}' - \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' K_{21}\right\} + \left\{\frac{k_2}{\mu_2} K_{22}' K_{32} - k_3 K_{22} K_{32}'\right\}\left\{\frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' J_{21} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} J_{21}'\right\}}{\left\{k_3 J_{22} J_{32}' - \frac{k_2}{\mu_2} J_{22}' J_{32}\right\}\left\{\frac{k_2}{\mu_2} J_{11} K_{21}' - \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' K_{21}\right\} + \left\{k_3 J_{32}' K_{22} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{32} K_{22}'\right\}\left\{\frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' J_{21} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} J_{21}'\right\}} + \frac{i\pi}{2}.$$ [1]

Für kleine Werte von $\varrho_2 - \varrho_1 = \Delta$, die experimentell vorkommen, wenn man z. B. das Feld untersucht, das durch einen in einer Röhre eingeschlossenen Flüssigkeitszylinder gestört wird, findet man einen Näherungswert für (72), wenn man für das Argument $k_2 \varrho_2 = k_2 \varrho_1 + k_2 \Delta$ nach Taylor entwickelt und die höheren Potenzen von Δ vernachlässigt. Die Rechnung ist elementar, aber ziemlich umständlich. Nach (50) ist:

$$J_m'(x) K_m(x) - J_m(x) K_m'(x) = -\frac{1}{x},$$

Differentiation liefert

$$J_m''(x) K_m(x) - J_m(x) K_m''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Durch Differentiation und Anwendung der Rekursionsformeln läßt sich zeigen, daß

$$J_m''(x) K_m'(x) - J_m'(x) K_m''(x) = \frac{x^2 + 2m - m^2}{x^3}$$

ist. Mit diesen Formeln erhält man die Näherungsformel für kleines Δ:

$$(73)\quad \begin{cases} \frac{2i^m}{a_m'''} = \frac{k_2 J_{11} K_{21}' - k_1 J_{11}' K_{21}}{k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}'} \\ \qquad + \frac{J_{11}^2 (k_2^2 - k^2)}{\varrho_1 (k_1 J_{11}' J_{21} - k_2 J_{11} J_{21}')^2} \cdot \Delta + \frac{i\pi}{2}. \end{cases}$$

1) Für $m = 0$ heißt die linke Seite $\frac{1}{a_0'''}$.

Hier ist $\mu_1 = \mu_2 = 1$ angenomm
natürlich in (17a) über (der Index 3
setzen). Für einen Wasserzylinder
Tab. 3 für $k_2 = 0{,}3$ ($\lambda \sim 20$ cm)

$$\alpha_0'' = -0{,}3162$$

Ist dieser Wasserzylinder in ei
Wandstärke ($\Delta = 0{,}1$), so wird nach

$$\frac{1}{\alpha_0''' + i\beta_0'''} = -1{,}419 + \frac{(-0{,}1424}{-}$$

$$= -1{,}419 - 0{,}000818$$

Das Korrektionsglied ist also
Rechenschiebergenauigkeit). Man si
Koeffizienten der Ordnung 0 nicht

§ 12. Eigenschwingung

Die Bedingungsgleichungen für
hält man wieder durch Nullsetzen
erhält für gedämpfte Eigenschwingu

$$(74)\begin{cases} \left\{\frac{k_2}{\mu_2} K_{22}' Q_{32} - k_3 K_{22} Q_{32}'\right\}\left\{\frac{k_1}{\mu_1} J \right. \\ \qquad - \left\{k_3 J_{22} Q_{32}' - \frac{k_2}{\mu_2}\right. \\ \qquad\qquad - \frac{k_1}{\mu_1}, \end{cases}$$

Wie man sich leicht überzeug
der gleichen Bedingungsgleichung, w
im Raume 2 in der Form $b_m'' J_m +$
ja auch der Fall sein, da sich diese
durch nichts unterscheiden. — Brin
$a_m''' = 2i^m \cdot \frac{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot\cdot\cdot}$, so stimmt der N
Seite von (74) überein. (Vgl. Form

Die Bedingungsgleichung für
gungen in dem schon erläuterten Si

$$(75)\quad \begin{cases} \left\{\frac{k_2}{\mu_2} K_{22}' K_{32} - k_3 K_{22} K_{32}'\right\}\left\{\frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' J_{21} - \frac{k_2}{\mu_2} J_{11} J_{21}'\right\} \\ \quad - \left\{k_3 J_{22} K_{32}' - \frac{k_2}{\mu_2} J_{22}' K_{32}\right\}\left\{\frac{k_2}{\mu_2} J_{11} K_{21}' \right. \\ \quad\quad \left. - \frac{k_1}{\mu_1} J_{11}' K_{21}\right\} = 0. \end{cases}$$

Nach dieser Formel sind die Eigenschwingungen eines Wasserzylinders vom Radius $\varrho_1 = 1$ cm in einem Glasrohr von 0,5 cm Wandstärke ($\varrho_2 = 1{,}5$ cm) für $m = 0$ berechnet ($\varepsilon_2 = 6{,}25$): Tab. 9.

Tabelle 9.

	$m = 0$
$k_3 =$	+0,0929
	+0,4646
	+0,8739
	+1,2288
	+1,5489

Wie man sieht, tritt eine Aufspaltung der Eigenschwingungen für den Fall des Wasser-Glaszylinders nicht ein. Das merkwürdige Verhalten der Kurve *eines* Wasserzylinders (vgl. S. 554 und Fig. 2) zwischen 0,8 und 1,0 zeigt übrigens der Wasser-Glaszylinder *nicht.* Die Eigenschwingungen eines Wasserzylinders vom Radius 1 cm sind in Tab. 1 enthalten, diejenigen für einen Wasserzylinder vom Radius 1,5 cm erhält man daraus durch Division mit 1,5. Aus Formel (19) folgt nämlich: Kennt man die Kurve der Eigenschwingungsbedingung für einen Zylinder vom Radius ϱ', so kann man die Kurve auch sofort für einen Zylinder (aus demselben Material!) vom Radius ϱ'' zeichnen, indem man Ordinaten und Abszissen mit ϱ'/ϱ'' multipliziert. Ein Glaszylinder hat in dem berechneten Intervall (0,05 bis 1,7) nur eine Eigenschwingung, und zwar ist sie für den Radius 1 cm $k_3 = 1{,}275$, für den Radius 1,5 cm $k_3 = 0{,}8435$.

§ 13. Das Feld im ⊥ Falle.

Sind die Konstanten im Raume 1, 2, 3, bzw. $c'\,d'$, $c''\,d''$ $c'''\,d'''$, so erhält man wie früher:

$$d_0''' = 1, \quad d_m''' = 2i^m.$$

Zur Bestimmung der c_m''' dienen die entsprechenden Grenzbedingungen. Es ist (vgl. S. 550):

$$\mathfrak{E}_\varphi = \frac{k\,i\,c}{s\,n - 4\pi i\sigma}\, e^{int} \sum_0^\infty m \{d_m J_m + a_m K_m\} \cos m\varphi .$$

Man erhält aus den Grenzbedingungen formal dieselben Gleichungen wie (71) und kann daher das Resultat direkt übernehmen. Es ist:

$$(76)\left\{ \frac{2\,i^m}{c_m'''} = \frac{\begin{array}{r}\{p_2 J_{22}' K_{22} - J_{22} K_{22}'\}\{p_2 J_{11} K_{21}' - p_1 J_{11}' K_{21}\} \\ + \{p_2 K_{22}' K_{22} - K_{22} K_{22}'\}\{p_1 J_{11}' J_{21} - p_2 J_{11} J_{21}'\}\end{array}}{\begin{array}{l}\{J_{22} J_{22}' - p_2 J_{22}' J_{22}\}\{p_2 J_{11} K_{21}' - p_1 J_{11}' K_{21}\} \\ + \{J_{22}' K_{22} - p_2 J_{22} K_{22}'\}\{p_1 J_{11}' J_{21} - p_2 J_{11} J_{21}'\}\end{array}} + \right.$$

wo

$$p_1 = \frac{k_1 c}{s_1 n - 4\pi i \sigma_1}, \quad p_2 = \frac{k_2 c}{s_2 n - 4\pi i \sigma_2}, \quad p_3 = \frac{k_3 c}{n} = 1 \text{ ist.}$$

Für $m = 0$ heißt die linke Seite von (76) wieder: $1/c_0'''$. Als Eigenschwingungsbedingung erhält man schließlich:

$$(77)\left\{ \begin{array}{r}\{p_2 K_{22}' Q_{32} - K_{22} Q_{32}'\}\{p_1 J_{11}' J_{21} - p_2 J_{11} J_{21}'\} - \{J_{22} Q_{32}' \\ - p_2 J_{22}' Q_{32}\}\{p_2 J_{11} K_{21}' - p_1 J_{11}' K_{21}\} = 0.\end{array}\right.$$

(Vgl. Formel (74)). Die Bedingungsgleichung für ungedämpfte Eigenschwingungen erhält man schließlich, indem man in (77) die Funktion Q durch K ersetzt. Mit diesen Gleichungen ist auch der $\perp$ Fall völlig behandelt.

(Eingegangen 21. Dezember 1919.)

4. *Kinematische und energetische Definition der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen;* *von J. Wallot.*

1. In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) habe ich den Durchgang elektromagnetischer Wellen durch eine Übergangsschicht, in der sich die Dielektrizitätskonstante nach einem ganz bestimmten Gesetze stetig ändert, untersucht und dabei auch die Frage der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in und vor der Schicht behandelt. Aus den für das betrachtete ganz spezielle Problem abgeleiteten Formeln konnte ich u. a. das Ergebnis herauslesen, daß die energetisch definierte Fortpflanzungsgeschwindigkeit V mit den kinematisch definierten mittleren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der elektrischen und der magnetischen Welle $\bar{v}_{el.}$ und $\bar{v}_{magn.}$ in dem durch die folgende Gleichung ausgedrückten Zusammenhange steht:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar{v}_{el.}} + \frac{1}{\bar{v}_{magn.}}\right). \tag{1}$$

Es ist klar, daß die Gültigkeit dieser einfachen Beziehung nicht an die speziellen Voraussetzungen der in der genannten Arbeit durchgeführten Rechnungen geknüpft sein kann. Im folgenden soll genauer untersucht werden, innerhalb welcher Grenzen die Gleichung (1) gilt; im Anschluß daran werde ich noch einige allgemeine Bemerkungen über die verschiedenen Definitionen der Wellengeschwindigkeit machen.

2. Wir betrachten zunächst wie früher den Fall einer einfarbigen geradlinig polarisierten ebenen elektromagnetischen Welle, die sich in der Richtung der z-Achse fortpflanzen möge. Die Abhängigkeit der Feldvektoren von der Koordinate z lassen wir beliebig, die von der Zeit werde durch den Faktor e^{int} gegeben. In dem durchstrahlten Medium seien lediglich die Verschiebungsströme zu berücksichtigen.

1) J. Wallot, Ann. d. Phys. **60**. S. 734. 1919.

Dann gelten, wenn wir für die Feldvektoren die Ansätze

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_{x_0} e^{int} = E_x e^{i(nt+\varphi)}, \\ \mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_{y_0} e^{int} = H_y e^{i(nt+\chi)} \end{cases}$$

machen (E_x, H_y, φ, χ sind Funktionen von z) und die Differentiation nach z durch einen Strich andeuten, die Gleichungen (ε = Dielektrizitätskonstante, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec):

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{in\varepsilon}{c} \mathfrak{E}_{x_0} = -\mathfrak{H}'_{y_0}, \\ \frac{in}{c} \mathfrak{H}_{y_0} = -\mathfrak{E}'_{x_0}. \end{cases}$$

Als „kinematisch definierte Fortpflanzungsgeschwindigkeit" $\bar{v}$ habe ich nun[1]) den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich ein fest angenommener Wert des betreffenden Feldvektors mit der Zeit verschiebt. Hiernach ist $\bar{v}$ z. B. für die elektrische Feldstärke in der folgenden Weise sehr einfach zu berechnen: Man fordert

$$d\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}'_{x_0} e^{int} dz + in \mathfrak{E}_{x_0} e^{int} dt = 0,$$

setzt aus der zweiten Gleichung (3) den Wert für $\mathfrak{E}'_{x_0}$ ein:

$$\mathfrak{H}_{y_0} e^{int} dz = c \mathfrak{E}_{x_0} e^{int} dt,$$

läßt das Imaginäre weg:

$$H_y \cos(nt + \chi)\, dz = c E_x \cos(nt + \varphi)\, dt,$$

$$v_{el.} = \frac{dz}{dt} = c \cdot \frac{E_x \cos(nt+\varphi)}{H_y \cos(nt+\chi)},$$

bildet den zeitlichen Mittelwert für eine Periode[2]) und erhält so schließlich

$$(4)\qquad \bar{v}_{el.} = c \frac{E_x}{H_y} \cos(\varphi - \chi).$$

Entsprechend ergibt sich:

$$(5)\qquad \bar{v}_{magn.} = \frac{c}{\varepsilon} \frac{H_y}{E_x} \cos(\varphi - \chi).$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (1) ein, so folgt für V der Wert:

$$(6)\qquad V = 2c \cdot \frac{E_x H_y \cos(\varphi - \chi)}{\varepsilon E_x^2 + H_y^2}.$$

1) A. a. O. S. 744.
2) Ähnlich wie a. a. O. S. 745.

Das ist aber nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie, wenn man diese als das Verhältnis der mittleren Strahlung zur mittleren Energiedichte definiert.

Die Beziehung (1) folgt also für die einfarbige geradlinig polarisierte ebene Welle mit Notwendigkeit und in sehr einfacher Weise aus den Definitionen und den Maxwellschen Gleichungen.

3. Es fragt sich nun, ob diese Betrachtung noch verallgemeinert werden kann.

Die nächstliegende Verallgemeinerung wäre die, die Voraussetzung der geradlinigen Polarisation fallen zu lassen, also eine nach wie vor eindimensionale, aber beliebig elliptisch polarisierte Welle der Rechnung zugrunde zu legen. Da sich die kinematische Definition der Geschwindigkeit auf diesen Fall ohne weiteres übertragen läßt, möchte man es auf den ersten Blick für sehr wahrscheinlich halten, daß sich auch unter diesen allgemeineren Voraussetzungen die Gleichung (1) beweisen lassen müsse.

Diese Vermutung bestätigt sich jedoch nicht. Die Durchrechnung, deren Einzelheiten ich nicht wiedergebe, zeigt, daß auf der rechten Seite der Gleichung (1) im Nenner nur dann die mittlere Strahlung und im Zähler nur dann die mittlere Energiedichte auftritt, wenn die elektrische und die magnetische Welle geradlinig und senkrecht zueinander polarisiert sind. Mit dieser Einschränkung kommen wir aber wieder zu unserer einfachen Ableitung in Nr. 2 zurück.

4. Hiernach wäre es zwecklos, eine Erweiterung unserer Betrachtungen auf das dreidimensionale allgemeine Wechselfeld zu versuchen. Das verbietet sich auch deshalb, weil dann zur kinematischen Definition der Geschwindigkeit der in Nr. 2 benutzte allgemeine Grundsatz nicht mehr ausreichen würde. Gerade darin aber, daß sich die Gleichung (1) aus einem so einfachen und unmittelbar einleuchtenden Grundsatz ableiten läßt, sehe ich den Hauptwert der ganzen Betrachtung.

5. Die kinematische Definition der Geschwindigkeit kann natürlich nicht nur auf Einzelwellen, sondern auch auf beliebige Übereinanderlagerungen von Einzelwellen gleicher Schwingungszahl angewandt werden. So habe ich die Ge-

schwindigkeit $\bar{v}$ beispielsweise berechnet[1]) für die „Wellengruppe", die bei der Reflexion einer Welle an einer Übergangsschicht durch die Übereinanderlagerung der durchgehenden und der reflektierten Einzelwellen entsteht; für die sich so ergebende Geschwindigkeit habe ich die Bezeichnung „Gruppengeschwindigkeit" eingeführt. Bekanntlich haben zuerst Reynolds und Rayleigh bei Untersuchung der Fortpflanzung von Wellen in einem dispergierenden Medium zwischen Einzelwellengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit unterschieden. Die Übertragung des Ausdrucks Gruppengeschwindigkeit auf das von mir untersuchte Problem ist m. E. berechtigt, obgleich das Wort „Gruppe" in beiden Fällen in etwas verschiedenem Sinne gebraucht wird; denn beide Gruppengeschwindigkeiten treten rein kinematisch bei Übereinanderlagerung zweier Wellen *neben* den Einzelwellengeschwindigkeiten neu auf, und beide stehen in einem nahen Zusammenhang mit der Energiegeschwindigkeit.[2])

Weniger brauchbar ist, wie schon früher[3]) bemerkt, der Begriff der Phasengeschwindigkeit, d. h. der Geschwindigkeit, mit der sich eine fest angenommene Phase mit der Zeit verschiebt. Sie hat nur für solche Wellen Bedeutung, die sich in der komplexen Ebene nahezu durch Kreisbahnen darstellen lassen.[4]) Da sie aber für diese mit unserer Geschwindigkeit v zusammenfällt, ist ihre Einführung nicht nötig.

Clausthal im Harz, Physik. Institut der Bergakademie,
Januar 1920.

1) A. a. O. S. 752.

2) Vgl. z. B. Lord Rayleigh, Proc. of the Lond. Math. Soc. 9. S. 21. 1877 (Scientific Papers, Cambridge 1899. 1. S. 322.)

3) A. a. O. S. 737. Anm.

4) Vgl. a. a. O. S. 744ff.

(Eingegangen 29. Januar 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

1920. № 15.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Experimentaluntersuchungen an trüben Medien*[1]; *von Teófilo Isnardi.*

(Übersetzt und mitgeteilt von R. Gans.)

Herr Prof. Gans schlug mir vor, einige Experimentaluntersuchungen an trüben Medien anzustellen, um gegebenenfalls die Resultate auf die Formbestimmung der Partikeln anzuwenden. Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit habe ich mich mit nichtmetallischen Teilchen beschäftigt, während der zweite metallischen Partikeln gewidmet ist.

1. Teil. Nichtmetallische Teilchen.

Ich entschied mich dafür, mit Harzen zu arbeiten, besonders mit Gummigutt und Mastix.

Da ihre optischen Konstanten nicht bekannt waren, mußte ich dieselben zunächst bestimmen.

Um Brechungsindex und Absorptionskoeffizienten des Gummigutt zu messen, habe ich mir planparallele Platten verschiedener Dicke aus dieser Substanz gemacht, und zwar in folgender Weise. Das Handelsprodukt wurde mit Alkohol behandelt, welcher das Harz löst, während der farblose und in heißem Wasser lösliche Gummi auf dem Filter zurückbleibt. (Gummigutt besteht nämlich aus einem Harz und einem Gummi). Nachdem der Gummi auf diese Weise entfernt war, wurde die alkoholische Lösung bei 100° in einem Trockenschrank eingedampft. Nachdem die kalt gewordene Substanz glasiges Aussehen angenommen hatte, wurde sie pulverisiert und mehrmals im Vakuum geschmolzen, um die letzten Reste Alkohol und die Luftblasen zu entfernen. Schließlich wurde die flüssige Substanz auf einen Zelluloidfilm gegossen, um die Platte zu erhalten, die sich ohne Schwierigkeit vom Zelluloid abtrennen läßt.

1) Vgl. Contribución al estudio de las ciencias Univ. Nacional de La Plata **2**. S. 287. 1918; S. 377. 1919.

Es sei bemerkt, daß viele zeitraubende Versuche, die Gummiguttplatten auf Glas zu gießen, nicht glückten, da beim Abkühlen der Gummigutt stets sprang, was bei Zelluloid niemals vorkam.

Der Brechungsindex wurde mit dem Abbeschen Halbkugelrefraktometer gemessen, indem der optische Kontakt mit Monobromnaphthalin hergestellt wurde. Da die Substanz in dieser Flüssigkeit etwas löslich ist, mußte man schnell arbeiten. An drei Stellen des Spektrums wurde beobachtet, und zwar mittels der roten H-Linie, der gelben Na-Linie und der grünen Tl-Linie. Mit den erhaltenen Werten berechneten sich die Konstanten der Hartmannschen Formel:

$$n = n_0 + \frac{C}{\lambda - \lambda_0}, \tag{1}$$

und es ergab sich

$$n_0 = 1{,}5642; \quad C = 20{,}201; \quad \lambda_0 = 249{,}2\,\mu\mu.$$

So erhält man die folgenden Werte von n für verschiedene Wellenlängen.

Tabelle 1.

λ in $\mu\mu$	667,8	587,6	501,6	492,2	471,3	447,2
n	1,6125	1,6239	1,6442	1,6473	1,6552	1,6664

An denselben Platten wurden die Absorptionsmessungen mit dem König-Martensschen Spektralphotometer angestellt. Für die verschiedenen Spektralbezirke mußten Platten verschiedener Dicke verwendet werden. Mit zwei nacheinander benutzten Platten wurden relative Messungen an wenigstens einer gemeinsamen Stelle des Spektrums ausgeführt: so konnte man die relative Absorption im ganzen Spektrum ermitteln. Die absoluten Werte wurden bestimmt, indem man die Dicke der dickeren Platten maß, die im roten Teile des Spektrums verwendet wurden. Die folgende Tabelle enthält die Resultate unserer Beobachtungen gemäß der Formel

$$I = I_0 e^{-hx}, \tag{2}$$

wo x die Dicke des Plättchens in Zentimetern, I_0 die Intensität des einfallenden, I die des austretenden Strahls bedeutet.

Tabelle 2.

λ	667,8	587,9	501,6	492,2	471,3	447,2
h	6,567	15,84	344,6	524,4	1277	3065

Mit den so erhaltenen Werten von n und h berechneten wir die Absorption kolloidaler Gummiguttlösungen nach den von Gans entwickelten Formeln für drei Grenzfälle: Scheiben, Kugeln und Stäbchen.[1])

Bekanntlich ergibt sich die Absorption einer kolloidalen Lösung im allgemeinen als Überlagerung zweier Phänomene, erstens der eigentlichen Absorption der Teilchen (Verwandlung des Lichts in Wärme) und zweitens der seitlichen Ausstrahlung (Zerstreuung des Lichts ohne Änderung der Wellenlänge).

Die Formeln der bisher entwickelten Theorie sind anwendbar, wenn das Beersche Gesetz gilt, d. h. wenn die Absorption h der Konzentration c proportional ist. Dann kann der Absorptionskoeffizient h in der Form

$$h = k\,c \tag{3}$$

geschrieben werden, wo k unabhängig von c ist. Das wird stets gültig sein, solange die Konzentration einen bestimmten Betrag nicht überschreitet.

Die eigentliche Absorption h_1 kleiner Teilchen ist dem Teilchenvolumen v proportional, während die Absorption durch Ausstrahlung h_2 dem Quadrat des Volumens proportional ist. Bei sehr kleinen Teilchen muß also der erste Einfluß maßgebend sein, doch setzt das voraus, daß der komplexe Brechungsexponent $m = n\,(1 - i\,k)$ einen imaginären Teil besitzt, der groß genug ist.

Welcher Einfluß die Absorption bedingt, läßt sich also nicht von vornherein sagen, da das von $\varkappa$ und v abhängt. Wir wollen deshalb die Beobachtungen mit der Theorie vergleichen und zunächst die in Betracht kommenden Formeln angeben.

a) Eigentliche Absorption der Teilchen.

Es gilt[2])

$$h_1 = k_1\,c = -\frac{6\pi}{\lambda'} N v\, \mathfrak{Im}\left(\tfrac{1}{3}\,a_1 + \tfrac{2}{3}\,a_1'\right). \tag{4}$$

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **37**. S. 881. 1912. Formeln (3) bis (6). (19) und (21).

2) R Gans, Ann. d. Phys. **37**. S. 886. 1912.

In dieser Formel bedeutet $c = Nv$ das Gesamtvolumen der in 1 cm³ enthaltenen Teilchen, das Symbol $\mathfrak{Im}$ den imaginären Teil des Klammerausdrucks, $\lambda' = \frac{\lambda_n}{m_0}$ die Wellenlänge im Wasser (m_0 Brechungsexponent des Wassers).

Die Werte a_1 und a_1' berechnen sich mittels der Formeln

$$(5) \qquad a_1 = \frac{m_1^2 - 1}{3 + (m_1^2 - 1)\frac{3}{4\pi}P}; \qquad a_1' = \frac{m_1^2 - 1}{3 + (m_1^2 - 1)\frac{3}{4\pi}P'},$$

wo

$$(6) \qquad m_1 = \frac{n(1 - ik)}{m_0}; \qquad k = \frac{h}{4\pi n}\lambda$$

bedeutet. P und P' sind Faktoren, die von der Teilchenform abhängen, und zwar ist

für	P	P'
Kugeln	$4\pi 3$	$4\pi/3$
Stäbchen	0	2π
Scheiben	4π	0

Die folgende Tabelle gibt die nach obigen Formeln berechneten Werte von k_1 für die drei Teilchenformen und verschiedene Wellenlängen.

Tabelle 3.

λ	k_1 Stäbchen	Kugeln	Scheiben
667,8	6,138	5,962	6,532
587,6	14,78	14,31	15,78
501,6	320,1	308,6	344,5
492,2	486,7	468,9	524,7
471,3	1117	1138	1279
447,2	2769	2720	3076

Nebenbei bemerkt ist übrigens der Verlauf dieser für kolloidale Gummiguttlösungen äußerst kleiner Teilchen gültigen Kurven dem der Absorptionskurve für Gummiguttplättchen sehr ähnlich.

b) Seitliche Ausstrahlung.

Diese berechnet sich nach den folgenden Formeln[1]):

1) Die folgenden Formeln sind alle drei in der allgemeineren enthalten:

$$h_2 = \frac{A}{\lambda'^4}\left\{\tfrac{1}{3}a_1^2 + \tfrac{2}{3}a_1'^2\right\}.$$

$$(7)\quad \begin{cases} \text{Kugeln:} & h_2 = \dfrac{A}{\lambda'^4}\left(\dfrac{m_1^2-1}{m_2^2+2}\right)^2 \\ \text{Stäbchen:} & h_2 = \dfrac{A}{\lambda'^4}\left\{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{m_1^2-1}{3}\right)^2 + \dfrac{8}{27}\left(\dfrac{m_1^2-1}{m_1^2+1}\right)^2\right\} \\ \text{Scheiben:} & h_2 = \dfrac{A}{\lambda'^4}\,\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{m_1^2-1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{2m_1^4}+1\right). \end{cases}$$

Hier ist A eine Abkürzung für

$$(8)\qquad A = 24\,N\,v^2\,\pi^3,$$

und in m_1 ist nur der reelle Teil dieser durch (6) definierten Größe zu nehmen, da wir ja annehmen wollen, daß die Absorption sich lediglich durch Ausstrahlung erklärt.

In der folgenden Tabelle haben wir die Werte h_2/A für die drei behandelten Körperformen und verschiedene Wellenlängen zusammengestellt.

Tabelle 4.

λ	$\frac{h_2}{A}\cdot 10^{-15}$ Kugeln	Stäbchen	Scheiben
667,8	2,82	2,93	3,11
587,6	5,11	5,28	5,63
501,6	10,92	11,33	12,19
492,2	12,01	12,47	13,44
471,3	14,98	15,58	16,86
447,2	19,42	20,23	21,96

Man sieht aus den Tabellen 3 und 4, daß man in keinem der beiden Fälle die Teilchenform durch die Absorption der Lösung ermitteln kann, weil diese zu wenig von ihr abhängt, ganz im Gegensatz zu metallischen Kolloidlösungen, wo dies ja mit bestem Erfolg geschehen ist. Der Grund ist die Kleinheit des Absorptionskoeffizienten $\varkappa$ bei nichtmetallischen Lösungen.

Die Absorption.

Trotzdem schien es uns von Interesse, die Absorption kolloidaler Gummiguttlösungen zu messen. Zunächst sollte das Beersche Gesetz studiert werden. Hierzu dienten folgende vier Lösungen.

		cm³
Lösung A:	5promill. alkoholische Gummiguttlösung	100
	Wasser	100
		200
Lösung B:	Lösung A	20,0
	Wasser	30.0
		50.0
Lösung C:	Lösung A	16.7
	Wasser	83,3
		100.0
Lösung D:	Lösung A	16,0
	Wasser	184,0
		200.0

Die Messungen wurden so angestellt, daß die Lösungen bzw. in Rohre der vier Längen $l = 2.0$ cm; 5.0 cm; 12,0 cm; 25,0 cm gefüllt wurden. Auf diese Weise war in den vier Fällen $cl = \text{const}$. Die Resultate dieser Messungen für Na-Licht finden sich in der folgenden Tabelle.

Tabelle 5.

Lösung	$k = h.c$
A	2603
B	2629
C	2668
D	2620

Nach 8 Tagen wurden die Messungen an denselben Lösungen wiederholt und ergaben praktisch die gleichen Werte. Das Beersche Gesetz gilt also, denn die Abweichungen liegen innerhalb der Fehlergrenze.

Dann untersuchten wir die Absorption in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge, um zu entscheiden, ob sie durch eigentliche Absorption der Teilchen oder seitliche Ausstrahlung veranlaßt war. Es ergab sich die folgende Tabelle.

Tabelle 6.

λ	Lösung	k	Bemerkungen
667.8	A	1741	$cl = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ gr/cm² $l = 1$ cm
587.6	A	2665	
501.6	A	4989	
471.3	A	7072	
471.3	B	6828	$cl = 10^{-4}$ gr/cm² $l = 1$ cm
447.2	B	8704	

Im Diagramm Fig. 1 sind die beobachteten Werte von k durch kleine Kreise und in willkürlichen Einheiten die berechneten Werte von h_2/A für Kugeln (vgl. Tab. 4), sowie in einer anderen Kurve die berechneten Werte von k_1 für Kugeln (vgl. Tab. 3) dargestellt. Die h_2/A-Kurve fällt fast vollständig mit der der Beobachtungen zusammen. Die eigentliche Absorption der Teilchen ist also im Vergleich mit der seitlichen Ausstrahlung zu vernachlässigen; letzterer ist demnach die Absorption der Gummiguttlösungen fast ausschließlich zuzuschreiben.

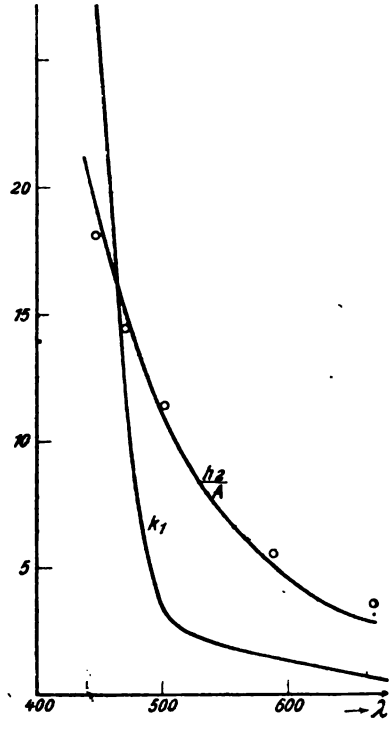


Fig. 1.

Dies Ergebnis gestattet uns, die Theorie quantitativ zu prüfen, indem wir den Radius der als kugelförmig angenommenen Teilchen berechnen.

Aus Tab. 6 entnehmen wir für $\lambda = 501{,}5\,\mu\mu$ den beobachteten Wert $k = 4989$; nach Tab. 4 ist

$$\frac{h_2}{A} = 10{,}92 \cdot 10^{15}, \tag{9}$$

wo A den in Gleichung (8) angegebenen Wert

$$A = 24\,(N v)\,v\,\pi^3 = \frac{32\pi^4 c\,r^3}{\delta} \tag{10}$$

hat. Hier bedeutet r den Teilchenradius, δ die Dichtigkeit des Gummigutt, die nach Perrin[1]) den Wert $\delta = 1{,}195$ hat. Also ist nach Gleichung (10)

1) J. Perrin, Conseil Solvay 1911, deutsch von A. Eucken, S. 142, Halle 1914.

$$k = \frac{h_s}{c} = \frac{32 \cdot \pi^4 r^3}{\delta} \cdot 10{,}92 \cdot 10^{15}.$$

Daraus ergibt sich der Durchmesser $2r = 112\,\mu\mu$.

Läßt man einen Tropfen der Lösung auf einem Objektträger eintrocknen, kann man mit dem Mikroskop Teilchen sehen, doch stimmt ihre Größenordnung mit obigem Wert nicht überein, da viele Partikeln Durchmesser hatten, die bis zu 10mal so groß waren wie der berechnete Wert.

Die Depolarisation.

Sodann haben wir die von der Lösung hervorgerufene Depolarisation des seitlich ausgestrahlten Lichts gemessen. Die Versuchsanordnung war die folgende.[1]) Vor die ziemlich weit geöffnete Spalte des König-Martensschen Spektralphotometers wurde ein Leyboldscher Trog T (vgl. Fig. 2) mit der trüben Lösung gesetzt, der von parallelen Lichtstrahlen durchsetzt wurde. Diese kamen entweder von der Bogenlampe L_1 oder von der Bogenlampe L_2. Man maß mit Licht das von rechts und mit solchem, das von links einfiel, um den Fehler zu vermeiden, der in der Absorption der Lösung seine Ursache hat. Bekanntlich sieht man im Königschen Photometer die Hälfte des Gesichtsfeldes von Licht erleuchtet, das von dem Spalte S_1 kommt und vertikal polarisiert ist, während das Licht der anderen Hälfte des Gesichtsfeldes von S_2 kommt und horizontal polarisiert ist. Nennt man die beiden Halbschattenablesungen, die den Beleuchtungen von links und rechts entsprechen, φ_1 bzw. φ_2, und setzt man

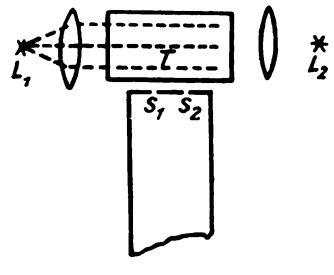


Fig. 2.

$$\Delta = \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}^2\varphi,$$

so ist der Depolarisationsgrad, wie ihn Gans[2]) in seiner Theorie definiert,

$$\Theta = \frac{\Delta}{1-\Delta} = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

1) Vgl. W. Steubing, Ann. d. Phys. **26**. S. 343. 1908.
2) R. Gans, Ann. d. Phys. **62**. S. 331. 1920. Formel (43).

Schon bei den ersten Messungen fiel mir auf, daß die Depolarisation von der Konzentration abhängt. Diese Erscheinung veranlaßte Hrn. Gans, die Wechselwirkung der Teilchen bei der theoretischen Ableitung mit zu berücksichtigen.[1]) Wir haben deshalb die Depolarisation in ihrer Abhängigkeit von der Konzentration beobachtet und zwar für natürliches und für linear polarisiertes einfallendes Licht (Polarisationsebene horizontal).

Die folgende Tabelle und das Diagramm Fig. 3 enthalten die Resultate für $\lambda = 501\,\mu\mu$.

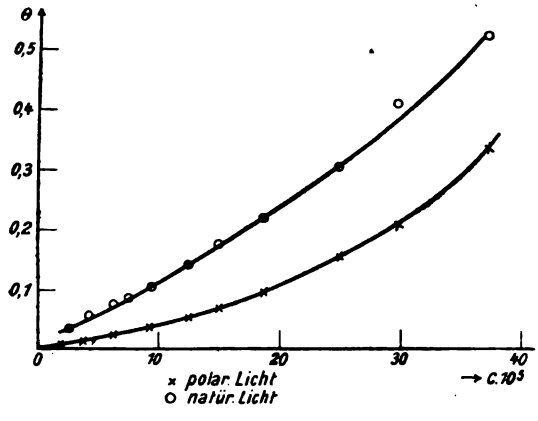


Fig. 3

Tabelle 7.

$c \cdot 10^5$	Θ polar. Licht	Θ natürl. Licht	$c \cdot 10^5$	Θ polar. Licht	Θ natürl. Licht
37,5	0,332	0,517	4,69	0,0164	–
30,0	0,206	0,406	4,17	—	0,0575
25,0	0,153	0,304	3,75	0,0140	—
18,7	0,0935	0,218	3,12	—	0,0438
15,0	0,0682	0,175	2,50	—	0,0376
12,5	0,0541	0,139	2,35	0,0100	—
9,37	0,0378	0,105	2,08	—	0,0350
7,50	0,0273	0,085	1,89	0,0091	–
6,25	0,0237	0,0746			

Man sieht, daß die Kurven für sehr große Verdünnungen auf den Nullpunkt zustreben. Die kleine Depolarisation, die

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **62**. S. 331. 1920

man im Falle natürlichen Lichts beobachtet, liegt innerhalb der Fehler, die durch die Unvollkommenheiten des Apparats bedingt werden. Vergleichen wir diese Resultate mit der Theorie, die Hr. Gans nachträglich entwickelt hat. Er findet für die Depolarisation bei polarisiertem Licht[1])

$$\frac{\Theta - \Theta_0}{1 + \frac{10}{3}\Theta} = a\,C \tag{11}$$

und bei natürlichem Licht[2])

$$\frac{\Theta' - \Theta_0'}{1 + \frac{5}{3}\Theta'} = b\,C, \tag{12}$$

wo $b = 2a$ und $\Theta_0' = 2\Theta_0$ sein muß. Hier bedeuten Θ_0 und a bzw. Θ_0' und b Konstanten, C die Konzentration.

Für natürliches Licht bestimmte ich die Konstanten mittels der Methode der kleinsten Quadrate zu $\Theta_0' = 0{,}026$; $b = 723$, und es ergab sich

Tabelle 8.

Θ'	$C \cdot 10^5$ beob.	$C \cdot 10^5$ berechn.	Θ'	$C \cdot 10^5$ beob.	$C \cdot 10^5$ berechn.
0,517	37,5	36,5	0,085	7,50	7,15
0,406	30,0	31,4	0,075	6,25	6,02
0,304	25,0	25,5	0,058	4,17	4,03
0,218	18,7	19,5	0,044	3,12	2,32
0,175	15,0	15,9	0,038	2,50	1,56
0,139	12,5	12,7	0,035	2,08	1,18
0,105	9,37	9,30			

Die Resultate sind graphisch in Fig. 4 dargestellt. Die Übereinstimmung ist über Erwarten gut, weil die Theorie für subultramikroskopische Teilchen entwickelt ist, die Gummiguttpartikeln aber mikroskopisch sind.

Für polarisiertes Licht folgte

$$\Theta_0 = -0{,}0049; \quad a = 420{,}6.$$

Der negative Wert von Θ_0 ist theoretisch unmöglich, denn Θ_0 bedeutet die Depolarisation für unendlich kleine Konzentration, doch ist der erhaltene Zahlenwert so klein,

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **62**. S. 331. 1920. Formel (50).
2) R. Gans, ebenda Formel (60).

daß er praktisch Null ist. Tab. 9 und Fig. 5 enthalten die Resultate.

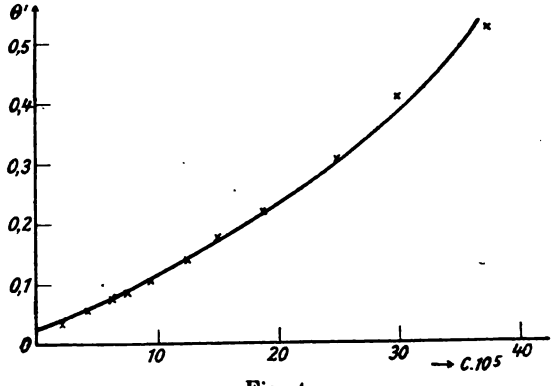


Fig. 4.

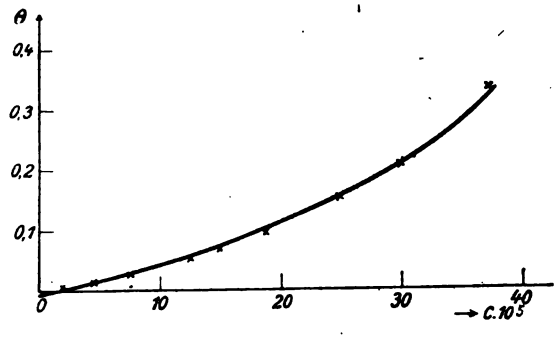


Fig. 5.

Tabelle 9.

Θ	$C \cdot 10^5$ beob.	$C \cdot 10^5$ berechn.	Θ	$C \cdot 10^5$ beob.	$C \cdot 10^5$ berechn.
0,332	37,5	38,0	0,027	7,50	6,96
0,206	30,0	29,7	0,024	6,25	6,36
0,153	25,0	24,9	0,016	4,59	4,72
0,094	18,7	17,9	0,014	3,75	4,29
0,068	15,0	14,2	0,010	2,35	3,43
0,054	12,5	11,9	0,009	1,89	3,21
0,038	9,37	9,05			

Die Übereinstimmung betrifft jedoch, wie das bei so großen Teilchen kaum anders erwartet werden kann, nur die

Form der Kurve. Denn berechnet man nach der Gansschen Theorie den Wert r/s, wo r den Teilchenradius, s den Minimalabstand zweier Dipole bedeutet, nach der für Kugeln gültigen Formel bei Beleuchtung mit polarisiertem Licht[1])

$$\frac{\Theta}{1+\frac{10}{3}\Theta} = \frac{3}{5}\left(\frac{m_1^2-1}{m_1^2+2}\right)^2 c\cdot\left(\frac{r}{s}\right)^3, \tag{13}$$

so ergibt sich

$r/s = 35{,}1$ für natürliches Licht,

$r/s = 33{,}2$ für polarisiertes Licht.

Beide Resultate sind sinnlos, da $2r < s$ sein muß.

Schließlich maßen wir an derselben Lösung die Depolarisation in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge, wobei sich folgende Tabelle ergab.

Tabelle 10.

$C = 4\cdot10^{-5}$ gr/cm³

λ	466	486	511	541	578	626
$\Theta\cdot10^2$	5,89(?)	5,18	4,97	4,71	4,55	4,36

Mastixlösungen zeigen ähnliche Erscheinungen, wie man aus der folgenden Tabelle ersieht.

Tabelle 11.

Natürl. Licht Relative Konzentration	$\Theta\cdot10^2$	Polaris. Licht Relative Konzentration	$\Theta\cdot10^2$
18,0	3,46	18,0	1,89
12,0	2,63	12,0	1,43
9,0	2,22	9,0	1,26
7,2	1,92	7,2	1,13
5,0	1,78	5,0	1,02
4,0	1,71	3,0	0,89
3,0	1,53		
2,4	1,46		
2,0	1,40		
1,5	1,34		

Aus diesen Beobachtungen erhellt ein deutlicher wechselseitiger Einfluß der Partikeln auf die Depolarisation. Will man aus dieser also einen Schluß auf die Teilchenform ziehen,

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 62. S. 331. 1920. Formeln (11). (18) u. (50).

so muß man sich zunächst überzeugen, ob sie auch nicht von der Konzentration abhängt, und sollte das der Fall sein, hat man diese Abhängigkeit zu beobachten und auf unendliche Verdünnung zu extrapolieren.

2. Teil. Metallische Teilchen.

In den folgenden Versuchen habe ich den Einfluß der Herstellungsmethode und Ultrafiltration kolloidaler Silberlösungen auf die Teilchenform studiert und letztere sowohl mittels der Absorption als auch der Depolarisation bestimmt.

Ich begann mit der Ultrafiltration von Kollargollösungen. Im Laufe dieser Beobachtungen konnte ich feststellen, daß die Durchlässigkeit der Kollodiumfilter nicht nur von der Menge zugesetzten Eisessigs, sondern auch vom Alter der Kollodiumlösung, oder besser gesagt von der Zeit abhängt, die nach dem Zusatz von Essigsäure verstrichen ist. So gibt eine Kollodiumlösung, der man bis 6 Proz. Essigsäure zusetzt, vollkommen undurchlässige Filter, wenn man die Lösung sofort verwendet. Häufig haben diese Filter äußerst kleine Löcher, die zwar die Flüssigkeit nur unter Druck hindurchlassen, aber doch nicht als Poren angesehen werden können. Solche vereinzelte Löcher lassen eine Lösung hindurch, welche völlig wie eine ultrafiltrierte aussieht, besonders nachdem zunächst ein Teil der Lösung durchs Filter gegangen ist und mittels seiner größeren Teilchen die Löcher teilweise verstopft hat. So erhaltene Filtrate zeigen keinen merklichen Unterschied ihrer Depolarisation gegenüber den Ausgangslösungen, wenn ihr Aussehen infolge der Verminderung der Konzentration und des Fehlens ganz großer Teilchen auch von diesen verschieden ist.

Um die Möglichkeit solcher falschen Resultate auszuschalten, legte ich zwei Ultrafilter übereinander. Die Ultrafiltration wurde mit dem Gansschen Ultrafiltrierapparat[1]) bewerkstelligt. Indem ich so vorging, konnte ich feststellen, daß die Kollodiumlösungen, denen man Eisessig frisch zugesetzt hat, undurchlässige Filter geben, die leicht an ihrer völligen Durchsichtigkeit kenntlich sind, während die durchlässigen Filter schwach opaleszierend aussehen.

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **62**. S. 327. 1920.

Erst nach zwei Wochen waren die Filter vollkommen homogen und mehr oder weniger durchlässig, je nach der zugesetzten Essigsäuremenge.

Ich stellte dann Versuche an alten und frischen Kollargollösungen an. Die alten Kollargollösungen verlieren durch Verdünnen nicht ihren rötlichen Schein, dagegen sind frische sehr verdünnte Lösungen rein gelb. Sicher rührt dieser Unterschied von der Konglomeration der Partikeln in den alten Lösungen her, und deshalb war zu erwarten, daß man auch durch Ultrafiltration keine befriedigenden Resultate mit diesen erhalten könne. Tatsächlich waren die Filtrate derselben mittels wenig durchlässiger Filter (1 Proz. Essigsäure) vollkommen farblos und zeigten praktisch keine seitliche Ausstrahlung. Mit viel poröseren Filtern (bis 6 Proz. Essigsäure) erhielt man schwach gefärbte Filtrate, deren Depolarisation des Tyndall-Lichtes größer war als die frischer, nicht ultrafiltrierter Lösungen.

Als ich mit frischen Lösungen arbeitete, die durch wenig durchlässige Filter filtriert waren (0,5—1 Proz. Essigsäure), erhielt ich schwach gelb gefärbte Lösungen, deren seitliche Ausstrahlung blaugrün war, und deren mit dem König-Martensschen Spektralphotometer gemessene Depolarisation im Grünen ($\lambda = 500\,\mu\mu$) nur 16° betrug, während die Ausgangslösungen 23° Depolarisation aufwiesen. (Die Angabe der Depolarisation in Graden bezieht sich auf die Einstellung des Okularnikols, die den Wert von Δ nach der Formel $\mathrm{tg}^2\varrho = \Delta$ berechnen läßt).[1])

Dies Ergebnis ließ vermuten, daß vielleicht mittels vervollkommneter Ultrafiltration oder anderer Herstellungsweise Lösungen mit noch geringerer Depolarisation gewonnen werden könnten, d. h. mit Teilchen, die sich der Kugelform noch mehr näherten.

Das war auch tatsächlich so. Frische Kollargollösungen, die mehrmals durch dasselbe Ultrafilter gepreßt waren, gaben ein merklich farbloses Filtrat, dessen seitlich ausgestrahltes Licht bei Beleuchtung mit einer Bogenlampe jedoch noch deutlich sichtbar war. Die Depolarisation betrug für $\lambda = 500\,\mu\mu$ nur noch 12,5°, was nach den Gansschen Berechnungen[2])

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **62**. S. 331. 1920. § 3.
2) R. Gans, ebenda. Fig. 3.

einem Achsenverhältnis $B/A = 0{,}75$ der als verlängerte Rotationsellipsoide aufgefaßten Teilchen entspricht.

Die Resultate dieser Messungen führen zu dem Schluß, daß die kolloidalen Silberteilchen sich um so mehr der Kugelform nähern, je kleiner sie sind.

Dann stellte ich mir Lösungen nach dem Verfahren von The Svedberg[1]) her mittels eines Funkeninduktors, der mit Wehnelt-Unterbrecher betrieben wurde. Der Schwingungskreis enthielt Leidener Flaschen und Selbstinduktion. Der Funke sprang zwischen Elektroden aus Silberdraht in Wasser über. Es ist aber notwendig, daß das Wasser sehr rein ist, damit sich satt gelbe, völlig reine Lösungen bilden können.

Diese zeigen ohne Ultrafiltration eine seitliche Ausstrahlung, die blaugrün ist, und Depolarisationswinkel von 18—20°. Treibt man sie mehrfach durchs Ultrafilter, so verlieren sie merklich ihre Färbung, zeigen aber deutliche seitliche Ausstrahlung, die rein blau ist, und der Depolarisationswinkel nimmt im Grünen ($\lambda = 500\,\mu\mu$) bis 8,5° ab. Die Teilchen nähern sich hier also noch mehr der Kugelform als bei den Kollargollösungen, und das Achsenverhältnis ergibt sich nach Gans zu $B/A = 0{,}85$.

Der so beobachtete Winkel ist noch etwas zu groß infolge von Fehlerquellen, die dem Spektralphotometer anhaften (falsche Reflektionen im Innern). Dies ließ sich feststellen durch Beobachtungen mit gekreuzten Nikols, die immer noch 2—3° anstatt 0° gaben.

In Fig. 6 ist der Meridianschnitt des Ellipsoids zur Veranschaulichung in natürlichen Verhältnissen gezeichnet worden.

Es blieb noch übrig, die Resultate der beiden Methoden miteinander zu vergleichen, die zur Bestimmung der Form subultramikroskopischer Partikeln dienen können, nämlich mittels Depolarisation des Tyndall-Lichts, sowie durch Beobachtung der Absorption in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge.

Die Ultrafiltrate der bei den oben angegebenen Messungen benutzten Lösungen zeigten eine so schwache Absorption, daß sie praktisch nicht gemessen werden konnte.

1) The Svedberg, Nova acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis (4) **2.** 1907.

2. *Über die Anregung des kontinuierlichen, Serien- und Bandenspektrums des Wasserstoffs durch die langsamen Kanal- und Kathodenstrahlen des positiven Spitzenstroms;*

von Max Weth.

(Greifswalder Dissertation.)

1. Einleitung.

a) *Problemstellung.* Die Frage nach den Trägern der verschiedenen Spektren eines Elements ist von Bedeutung sowohl für die Theorie der Spektren wie die der Atome. Besonders wichtig ist in dieser Beziehung der Wasserstoff; für seine Linien wurde zuerst durch Balmer eine Serienbeziehung aufgefunden, die neuerdings N. Bohr schon aus der einfachsten Form seiner Atomtheorie deuten konnte. Anderseits sind über die Emission der Balmerschen Serie zahlreiche Experimentaluntersuchungen angestellt worden, die aber noch keineswegs zu einer allgemein angenommenen Ansicht über ihren Ursprung geführt haben. Von der einen Seite wird als Träger das neutrale Atom hingestellt, wie es die Bohrsche Theorie verlangt. Danach wäre der eigentliche Erreger der Linien das den positiven Kern umkreisende Elektron; Emission findet statt, wenn es aus einer der äußeren „statischen" Bahnen in eine bestimmte innere springt. Die Radien der Kreisbahnen und die Frequenz des Lichts sind durch Quantenbedingungen bestimmt. Demgegenüber ist J. Stark bei seiner alten Ansicht geblieben, der Träger der Wasserstoffserie sei das Atom, von dem das äußere Elektron ganz oder wenigstens soweit entfernt sei, daß es keinen Einfluß mehr auf das innere Atomfeld habe; von dessen Schwingungen soll die Lichterregung ausgehen, und diese werden durch die Entfernung des Außenelektrons selbstverständlich andere als im neutralen Atom.

Auch in den Erklärungen der beiden neuerdings von Stark bei Gasentladungen nachgewiesenen kontinuierlichen Spektren

gehen die Ansichten auseinander. Stark[1]) ließ sich bei der Suche nach ihnen von der theoretischen Folgerung leiten, während der Anlagerung eines Elektrons an ein positives Atom- oder Molekülion müsse das innere Atomfeld kontinuierlich aus dem einen stabilen Zustand in den anderen übergehen, demnach die Eigenfrequenzen sich ebenfalls kontinuierlich ändern und die emittierten Linien sich über einen gewissen Spektralbereich verschieben, um so langsamer, je allmählicher das Elektron auf seiner Spiralbahn sich dem Kern nähert. Für Auge und Spektrograph, die erstens über die verschiedenen Übergangsphasen und zweitens über die Emission vieler Träger integrieren, entsteht so ein kontinuierliches Spektrum; seinen Träger, das im Übergang vom positiven zum neutralen Zustand begriffene Atom oder Molekül bezeichnet Stark als Quantenpaar. Auch Bohr[2]) bringt das kontinuierliche Wasserstoffspektrum in Zusammenhang mit der Entfernung eines Elektrons vom Kern bzw. seiner Wiederanlagerung, zieht aber erstens nur das Atom in Betracht und stellt sich zweitens den Mechanismus der Emission anders vor; nach seiner Auffassung sind viele verschiedene kontinuierliche Spektra möglich.

Über das Bandenspektrum hat sich bisher nur Stark bestimmt geäußert; er schreibt es dem Molekülion (H_2^+) zu. Bohr äußert a. a. O. beiläufig, wegen seiner Kompliziertheit werde es dem Molekül zuzueignen sein, und stellt eine eingehendere Theorie für später in Aussicht.

Am lebhaftesten ist der Streit um den Träger der Balmerserie gewesen. Ihm lagen in der Hauptsache Beobachtungen an Kanalstrahlen zugrunde. Unter der ursprünglichen Annahme, daß diese aus bewegten positiven Atomen bestünden, schienen 1905 nach Starks Entdeckung des Kanalstrahlendopplereffekts der Serienlinien nur diese Ionen als Träger in Frage zu kommen; Zweifel konnten wieder aufkommen, als in den nächsten Jahren besonders durch W. Wiens Arbeiten ans Licht trat, daß wegen der Umladungsvorgänge die Kanalstrahlen auch schnell bewegte neutrale Partikel enthalten und zwar u. a. einen sehr erheblichen Anteil.

1) J. Stark, Ann. d. Phys. **52**. S. 255. 1917.

2) N. Bohr, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter. Naturv. og Math. Afd. 8. Raekke IV. 1. S. 98.

Um neues Material zu dieser Frage zu liefern, schien es deswegen erwünscht, unter Umständen zu beobachten, wo Umladungen ausgeschlossen waren. Eine Möglichkeit hierzu bieten Kanalstrahlen, deren Geschwindigkeit unter der zur Ionisation durch Stoß nötigen liegt, denn wenn keine Elektronen aus neutralen Molekülen freigemacht und auch nicht anderweitig zugeführt werden, müssen die Ionen ihren Ladungszustand beibehalten. Strahlen solch kleiner Geschwindigkeit werden nach Starks Theorie weiter zahlreiche Fälle unvollständiger Ionisation liefern, also Quantenpaare, und damit ein kräftiges kontinuierliches Spektrum erregen.

Langsame Kanalstrahlen in elektronenarmen bis -freiem Gas sind nun anzunehmen an der Anode des positiven Spitzenstroms, es bietet sich also die Aufgabe, die Lichtemission an dieser Stelle zu untersuchen. Dabei ist noch die Theorie des Spitzenstroms experimentell zu prüfen. Daß er spektralanalytisch bis jetzt überhaupt noch nicht untersucht worden ist, gibt dieser Aufgabe ein weiteres Interesse.

b) *Wesen des negativen und positiven Spitzenstroms.* Als Spitzenstrom bezeichnen wir allgemein die Entladung zwischen einer Spitze und einer verhältnismäßig großen Platte als Elektroden, mit den Zusätzen positiv oder negativ, je nachdem die Spitze Anode oder Kathode ist. Der negative Spitzenstrom ist stets ein Glimmstrom. Stark[1]) wies dies für kleine Gasdrucke an der Ausbildung der charakteristischen Glimmstromkathodenschichten an der Spitze nach, die dann Warburg mit dem Mikroskop auch bei Atmosphärendruck unterscheiden konnte. Auch mit positiver Spitze kann sich ein Glimmstrom bilden; das Kennzeichen ist das Kathodenlicht an der Platte. Daneben ist unter bestimmten Umständen mit letzterer Anordnung aber auch eine Entladung möglich, bei der an der Kathode keinerlei Leuchten auftritt und wobei das Lichtbüschel an der Anode ganz anders aussieht. Sie wurde von Stark a. a. O. im engeren Sinne „positiver Spitzenstrom" genannt und kann nach seiner Theorie bestimmt werden als eine selbständige Entladung, bei der sich infolge der Form der Elektroden Potentialabfall und Ionisierung an der kleinen Anode konzentrieren, derart, daß an der Kathode nur langsam heranströmende positive Ionen

1) J. Stark, Verh. Phys. Ges. **6**. S. 113. 1904.

auftreten, die weder Leuchten noch Ionisation hervorrufen; von der Anode aus laufen positive Ionen mit zunächst wachsender Geschwindigkeit ins Gas und ionisieren dieses, sobald ihre Geschwindigkeit hierzu ausreicht. Durch Ionisierungsarbeit und Zusammenstöße mit den Gasmolekeln nimmt ihre Geschwindigkeit in dem schwächer werdenden Feld danach wieder ab, so daß sie zunächst nur noch Licht erregen können und weiterhin ganz, ohne sich bemerkbar zu machen, zur Kathode wandern. Die im Gase freigewordenen Elektronen erzeugen durch Oberflächenionisation an der Anode die ersterwähnten positiven Ionen. So zu deutende Lichterscheinungen an positiven Spitzen hat Stark in Luft und Stickstoff bei Drucken bis herab zu 1 mm beobachtet. Es handelt sich offensichtlich um eine ganz andere Entladungsform als Glimmstrom, in den sie aber besonders bei niedrigem Druck und größerer Stromstärke leicht übergeht. Dieser plötzliche Umschlag ist unverkennbar wegen des Auftretens des Kathodenleuchtens und der Umwandlung des Anodenlichtbüschels in das des Glimmstroms. Der Spannungsabfall an der Anode sinkt dabei von mehreren hundert Volt auf den kleinen Wert des Glimmstromanodenabfalls. Im allgemeinen ist der Glimmstrom die stabilere Entladungsform; zum Bestehen des Spitzenstroms ist erforderlich, daß die Stromstärke unterhalb, Kathodengröße und -abstand oberhalb gewisser Werte bleiben. Der Grenzwert für einen Faktor hängt dabei mit ab von der Größe der anderen Faktoren. Stets bildet sich Glimmstrom aus, wenn die Kathode klein, z. B. auch eine Spitze ist. Mit dieser Anordnung hat v. Dechend[1]) nach Vorarbeiten von Himstedt die Spektren der Spitzenentladung in mehreren Gasen untersucht, also Glimmstrom, nicht positiven Spitzenstrom in engerem Sinn gehabt, der, wie bereits gesagt, noch nicht spektroskopisch untersucht worden ist; v. Dechends Arbeit ist nämlich neben einer beiläufig ausgeführten Aufnahme Warburgs[2]) meines Wissens die einzige derartige über Spitzenentladung.

c) *Die Kanalstrahlen im positiven Spitzenstrom.* Gemäß der damaligen Kenntnisse der Gasionisation nahm Stark an, daß von der Anode rein positive Strahlen ausgingen. Diese Auffassung müssen wir heute ergänzen. Wir wissen aus der elektro-

1) H. v. Dechend, Diss. Freiburg i. B. 1909. Ann. d. Phys. **30.** S. 719. 1909.

2) E. Warburg, Ann. d. Phys. **10.** S. 180. 1903.

magnetischen Analyse der Kanalstrahlen, daß sich positive Ionen desto schneller umladen, in je dichterem Gas sie verlaufen. Nun ist beim Spitzenstrom der Druck viel höher, als in einer Kanalstrahlenröhre, es ist also lebhafte Neutralisation zu erwarten, wenigstens wo hierzu Elektronen frei sind oder frei gemacht werden können, und die resultierende von der Spitzenstromanode ausgehende Strahlung wird qualitativ die Zusammensetzung der Glimmstromkanalstrahlen haben, mit welcher Bezeichnung man heute ja das ganze Gemisch aus Ionen, neutralen Partikeln und Quantenpaaren meint. Es sei deshalb erlaubt, der Kürze halber auch von den „Kanalstrahlen" des positiven Spitzenstroms zu sprechen, deren Existenz allerdings noch nachzuweisen ist. Für den vorliegenden Zweck ist die Wahrscheinlichkeit wesentlich, daß sich in einer gewissen Entfernung von der Anode, nach Verlangsamung durch Zusammenstöße mit den Gasmolekeln, nur noch die positiven Teilchen zur Lichtemission erregen können, und daß wir hier also bewegte Emissionszentren mit Geschwindigkeiten bis zu den kleinsten herab haben werden, die ihren Ladungszustand nicht mehr ändern können.

2. Methoden.

a) *Stromröhre.* Für den vorliegenden Zweck ist es erwünscht, die verschiedenen Teile des Anodenlichtbüschels einzeln mit dem Spektrographen zu erfassen. Die übliche Anordnung, den Spitzenstrom von einer wirklichen Spitze ausgehen zu lassen, gestattet dies nicht sauber genug, da sich bei der Projektion auf den Spalt des Spektrographen das Licht aus äußeren und inneren Schichten überlagert. Dazu ist das Büschel in seinen Ausläufern wegen der starken Ausbreitung sehr lichtschwach, und weiter das Feld an der Spitze wenig übersichtlich. Die Ausdehnung der Erscheinung an der Anode brachte mich auf den Gedanken, daß bei den niedrigen Drucken, die zum deutlichen Auseinanderziehen des Lichtbüschels allein in Betracht kommen, wegen der größeren freien Weglänge auch ohne scharfe Spitze mit einer kleinen ebenen Anode ein hinreichender Spannungsabfall zu erzielen sein werde. Ein Versuch mit einem 1,5 mm dicken Messingstift, der in ein Glasröhrchen eingeschmolzen und mit diesem zusammen glatt abgeschliffen wurde, ähnlich wie Fig. 1 b (S. 594) es zeigt, bestätigte dies, und ich habe weiterhin derartige Elektroden bis zu 5 mm Durchmesser benutzt; vielleicht kann man

auch an noch größeren Anoden Spitzenstrom herstellen. Bei seitlicher Betrachtung heben sich an einer solchen Anode die ziemlich ebenen Schichten des Anodenbüschels deutlich voneinander ab; wegen ihrer Tiefe in der Sehrichtung sind sie lichtstärker als die an einer Spitze; dies ist wichtig, da die Lichtschwäche der Erscheinung eine der Hauptschwierigkeiten dieser Untersuchung ist. Die dritte Möglichkeit, einen dünnen Draht in der Achse eines Hohlzylinders zu verwenden, habe ich nicht versucht, da kein besseres Resultat abzusehen ist. Es ist vielleicht von Interesse, daß bis herunter zu Drucken von 1,8 mm Hg in Wasserstoff, 1 mm in Stickstoff eine Scheibe von 15 mm Durchmesser in 13 mm Abstand von der Anode als Kathode ausreichte. Viel bequemer und sicherer läßt sich allerdings der Spitzenstrom in Wasserstoff mit größeren Kathoden in größerem Abstand unterhalten. Bei engen Glasgefäßen können Wandladungen stark stören; Berühren oder nur Anblasen der Röhre ruft dann Umschlag des Spitzenstroms in Glimmstrom und umgekehrt hervor. Wegen beider Umstände erhielt die Röhre schließlich die Gestalt nach Fig. 1a. Die untere Kalotte eines 1 l-Kolbens wurde samt dem oberen Teil eines Ansatzrohres durch chemischen Niederschlag mehrfach versilbert; dieser Silberspiegel diente als Kathode. Ein in den Kolbenhals eingekittetes Glasrohr trug am unteren verjüngten Ende einen

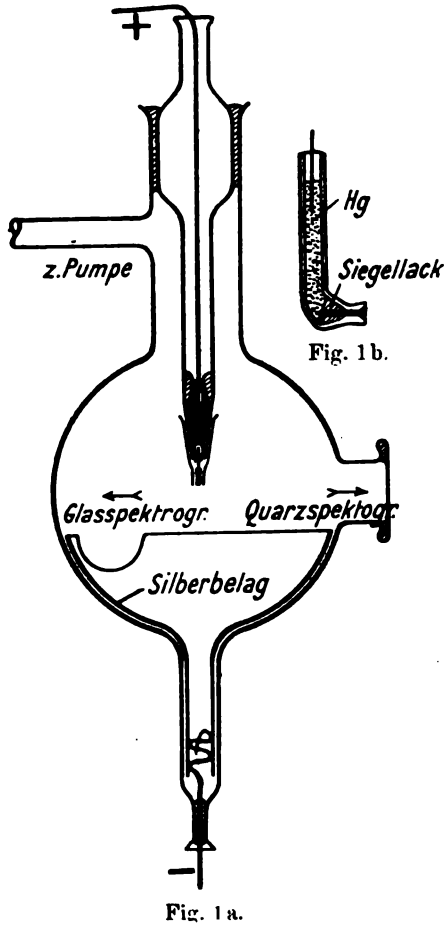


Fig. 1b.

Fig. 1a.

Messingzapfen eingekittet, an den die eigentlichen, zylindrischen Anoden angeschraubt wurden. Ein genau um den Ansatz passendes Glasröhrchen schloß ihn bis auf die untere Grundfläche ab. Die Anode wurde soweit aus dem Mittelpunkt der Kugel gerückt, daß die starken Reflexe an der Kolbenwand nicht störten. Ein Tubus mit Quarzfenster ließ das ultraviolette Licht austreten.

b) *Stromquelle und Schaltung.* Den Strom lieferte eine Dynamomaschine von 3500 Volt Höchstspannung. Sie wurde passend erregt und durch ein U-Rohr mit destilliertem Wasser von einigen Millionen Ohm Widerstand geschlossen. Mit zwei in die Schenkel tauchenden Sonden ließ sich dann jede gebrauchte niedrigere Spannung abnehmen. Diese Abzweigvorrichtung war sehr bequem, sowohl zum schnellen Spannungswechsel wie zum Ausgleich von Spannungsschwankungen der Maschine, die von solchen des Stadtnetzes herrührten. Die Maschine läßt sich auf diese Art auch gleichzeitig für andere Zwecke benutzen. Vor der Röhre lag ein Widerstand von 10^7 -$4 \cdot 10^8$ Ohm in Form von Wassersäulen oder Bleistiftstrichen auf Trockenplatten. Das Galvanometer war vor die Anode geschaltet und geerdet.

c) *Gas.* Den Wasserstoff ließ ich durch ein Palladiumröhrchen rein in die Röhre eindiffundieren, was recht schnell geht: beim Erhitzen mit einer $1^1/_2$ mm hohen Wasserstofflamme trat in 3 Minuten etwa 1 l Gas von 2 mm Druck durch das Metall; gereinigt wurde die Röhre durch wiederholtes Auspumpen auf Hochvakuum und Spülen mit Wasserstoff unter Erhitzen der Wand mit einer Bunsenflamme. Zur Entgasung der Elektroden wurden beim Weiterspülen kräftige Ströme durchgeschickt, wenn das Gas als einigermaßen rein angenommen werden konnte. Durch Stehenlassen der evakuierten Röhre überzeugte ich mich von ihrer Dichtheit. Auf den danach erhaltenen Spektrogrammen waren keine Verunreinigungen mehr angedeutet. Ich möchte hier einschalten, daß für diese Methode der Reinigung Rohgas aus einem Kippschen Apparat mit Vorsicht zu gebrauchen ist, da Arsen und wahrscheinlich auch andere Verunreinigungen in wenigen Minuten das Palladium verderben.

d) *Spektrographen.* Die Lichtemission beim positiven Spitzenstrom ist so gering, daß sie nur mit Prismenapparaten unter-

sucht werden kann. Das sichtbare Spektrum wurde mit einem lichtstarken, von Zeiss gebauten Glasspektrographen aufgenommen. Sein Kollimator ist ein Achromat von 32 cm B. W. und 5 cm Öffnung, das Kameraobjektiv ein Tessar von 30 cm B.W. und der Öffnung $f/3{,}5$. Sein Prisma ist aus 2 + 3 Einzelprismen zusammengekittet. Für das Ultraviolett stand ein Quarzspektrograph von Steinheil zur Verfügung: Kollimator und Kameraobjektiv haben etwa 40 cm B. W. und 4 cm Öffnung; das Cornusche Prisma hat 60° brechenden Winkel. Das ganze Gebiet von H_β bis ins äußerste zugängliche Ultraviolett ließ sich mit einer Plattenstellung für den vorliegenden Zweck ausreichend scharf aufnehmen. Das vertikale Lichtbüschel wurde durch die Kolbenwand mit einem Tessar von 5 cm B. W. und der Öffnung $f/3{,}5$ scharf auf den Spalt des Glasspektrographen, durch das Quarzfenster mit einem Quarz-Flußspatachromaten auf den des Quarzspektrographen abgebildet, so daß die Schwärzung längs einer Linie ihrer Intensität in den verschiedenen Abständen von der Anode entsprach. Das Verhältnis Linienlänge zu Höhe des Emissionsgebiets war für den Glasapparat 0,8, für den Quarzapparat 0,6. Beide Aufnahmen wurden gleichzeitig gemacht; wegen der größeren Lichtstärke war die mit dem Glasspektrographen natürlich früher fertig.

3. Beobachtungen.

a) *Aussehen des positiven Spitzenstroms in Wasserstoff.* Bei mehr als 10 mm Hg-Druck geht bei der gewählten Anordnung der Spitzenstrom nur von einem Teil der freien Anodenfläche, meist dem Rande, aus. In der räumlich sehr beschränkten Lichterscheinung sind dann kaum verschiedene Teile zu unterscheiden. Mit sinkendem Druck dehnt sich das Leuchten über die ganze Anode und weiter ins Gas hinein aus. Es bietet sich dann folgendes Bild (vgl. Fig. 2 – die Zahlenangaben beziehen sich auf 2 mm Druck). Die Anode ist überzogen von einer dünnen, ziemlich hellen, weißblauen Lichthaut *a*. Ihr folgt eine 0,3 mm dicke dunkelblaue Schicht *b*, die fast den Eindruck eines Dunkelraums macht; ihr Durchmesser scheint etwas geringer als der von *a*. Auf ihr sitzt mit der Grundfläche ein weißlicher Kegel *c*.

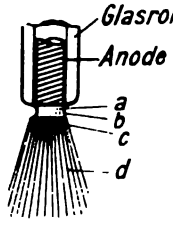


Fig. 2.

der ganz allmählich in einen ihn umhüllenden braunrötlichen Lichtpinsel d von etwa 12 mm Länge übergeht, der diffus im Gasraum ausläuft. Bei ganz niedrigen Drucken wurde das Büschel bis 25 mm lang; leider sinkt dabei die Lichtstärke so sehr, daß keine Spektrogramme mehr zu erhalten sind. Bei gleichem Druck wächst die Länge des wahrnehmbaren Pinsels mit der Stromstärke. Wegen der Lichtschwäche sind diese Angaben über Farbtöne und Masse unsicher. Die größte mögliche Stromstärke des Spitzenstroms sinkt schnell mit abnehmendem Druck und ist auch bei anscheinend gleichen Verhältnissen nicht immer dieselbe. Bei $p = 3$ mm betrug sie bis zu 50 μA, bei $p = 1$ mm nur noch einige μA. Bei noch niedrigeren Drucken läßt sich der Spitzenstrom nicht mehr sicher zünden; um ihn zu erhalten, muß man ihn bei höheren Drucken herstellen und dann vorsichtig Gas abpumpen.

b) *Spektren.* Die Spektrogramme zeigen, daß alle drei Wasserstoffspektren, die eingangs besprochen wurden, in allen Teilen des Anodenbüschels auftreten, aber in verschiedenem Intensitätsverhältnis. Das nähere zeigen die mit einem Hartmannschen Mikrophotometer aufgenommenen Schwärzungskurven (Fig. 3). Am auffallendsten ist das kontinuierliche

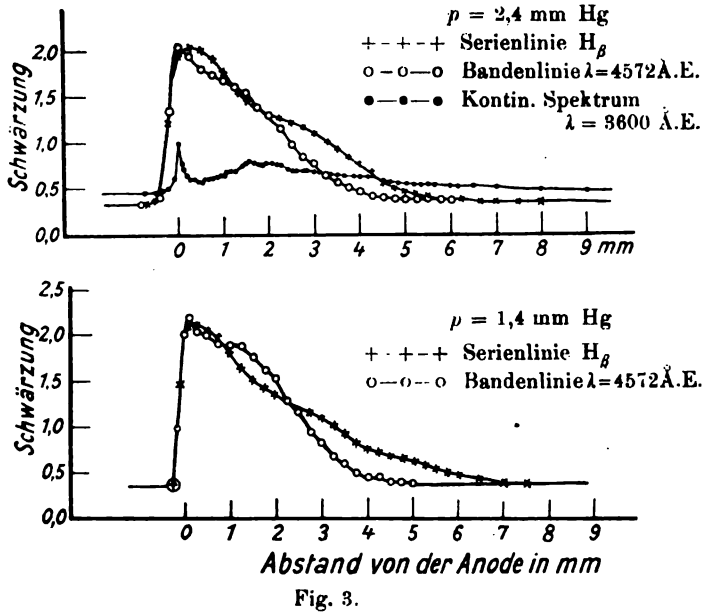


Fig. 3.

Spektrum, das sich vom Blaugrün bis jenseits $\lambda = 2300$ Å.E., erstreckt und den größten Teil der photographisch wirksamen Lichtemission darstellt. Es ist, wie die beiden anderen Spektren, am stärksten in der Anodenhaut, hat ein tiefes Minimum in der Gegend des Dunkelraums, steigt in dem weißlichen Kegel ziemlich plötzlich wieder zu großer Intensität an und klingt dann langsamer ab. Die Intensität der Serienlinien nimmt ständig mit wachsendem Abstand von der Anode ab; charakteristisch ist die plötzliche Verlangsamung der Abnahme an der Stelle, wo das kontinuierliche Spektrum sein zweites Maximum eben überschritten hat; die Schwärzungskurve zeigt hier einen leichten Buckel. Im Gegensatz hierzu nimmt an dieser Stelle die Helligkeit der Bandenlinien rascher ab. Besonders deutlich tritt das verschiedene Verhalten von Serien- und Bandenlinien auf der Aufnahme bei 1,4 mm Druck hervor; bei direkter Betrachtung sieht man hier erstere fast doppelt so lang als die stärksten Bandenlinien. Für den Quarzspektrographen ist bei diesem Druck das Büschel schon zu lichtschwach, über das kontinuierliche Spektrum läßt sich deshalb nichts bestimmtes sagen; nach den Spuren seines Anfangs auf der Aufnahme mit dem Glasapparat zu urteilen scheint es etwas zurückgetreten zu sein.

4. Kanalstrahlendoppeleffekt.

Die oben angeführte Ansicht, daß von der Anode des positiven Spitzenstroms Kanalstrahlen ausgingen, ist zwar ganz plausibel und wird auch durch das Aussehen des Anodenbüschels gestützt, doch scheint immerhin noch ein besonderer Nachweis erwünscht. Es lag nahe, ihn in der gleichen Weise zu führen, wie seinerzeit Stark die Bewegung der Träger des Kanalstrahlenlichts zeigte, nämlich durch Nachweis des Dopplereffekts. Die sonst unveränderte Röhre erhielt dazu Anoden nach Fig. 1b. Der Messing- oder Kupferstift ist in das Glasrohr eingeschmolzen, und dies unten rechtwinklig abgebogen, so daß die vermuteten Strahlen auf den Spalt zu laufen mußten. Den luftdichten Abschluß am Anodenstift besorgten Siegelack und Quecksilber. Das Anodenbüschel zeigte dasselbe Aussehen wie früher, ein seitliches Abbiegen zur Kathode hin war nicht festzustellen. Die Anodenfläche wurde in halber Größe auf den Spalt projiziert. Wegen der Erweiterung des Büschels von der Anode weg zeigten dann die äußersten Enden der Spektrallinien nur

das Licht des äußeren Mantels des Pinselendes, während sich in der Spalt- und Linienmitte die Emission aller Schichten überlagert. Die Dispersion des Glasspektrographen wurde durch Einschaltung eines zweiten Verbundprismas auf 22 Å.E./mm für H_β. 10 Å.E./mm für H_γ gebracht. Durch entsprechende Prismenstellung hätte sie sich noch vergrößern lassen, doch reichte dann die Lichtstärke nicht mehr aus; H_γ kam so schon nur ganz schwach heraus. Auf den derart gewonnenen Spektrogrammen zeigt sich H_β wie schematisch in Fig. 4 angegeben. Neben der kurzen intensiven ruhenden Linie, die nach außen allmählich abklingt, liegt auf der Seite des Violett ein bewegter Streifen, der nach außen erheblich über die ruhende Linie hinausragt. Auf einzelnen Aufnahmen biegt sein äußerstes Ende etwas nach Rot zurück. Seine Grenze entspricht unter Berücksichtigung der Spaltbreite einer Verschiebung um 3 Å.E., also einer Geschwindigkeit von 180 Volt. Bemerkenswerterweise ist weder bei direkter Betrachtung noch mit dem Photometer die Spur eines Intensitätsminimums neben der ruhenden Linie zu entdecken, auch dort nicht, wo die ruhende Linie nach außen hin schwach ausläuft, also jedenfalls ein Minimum nicht restlos überstrahlen kann. An H_γ ist nur der bewegte Streifen festzustellen. Das Auftreten des bewegten Streifens beweist, daß von der Anode Kanalstrahlen von bis zu 180 Volt Geschwindigkeit ausgehen, das Fehlen eines Intensitätsminimums in ihm, daß auch die ganz langsamen Strahlen leuchten. Allerdings muß man hier auch die Möglichkeit in Betracht ziehen, daß die den kleinen Verschiebungen entsprechenden Geschwindigkeiten nur kleine Komponenten sehr stark gegen die Blickrichtung geneigter größerer Geschwindigkeiten sein können. In dem verhältnismäßig dichten Gas sind ja starke Ablenkungen eines Partikels aus seiner Richtung anzunehmen. Wegen der großen Intensität des wenig verschobenen Streifens glaube ich aber nicht, daß die Zerstreuung allein zur Erklärung ausreicht. Dies zugegeben, scheint daraus für die Glimmstromkanalstrahlen zu folgen, daß ganz langsame Träger der Serienlinien in ihnen sehr

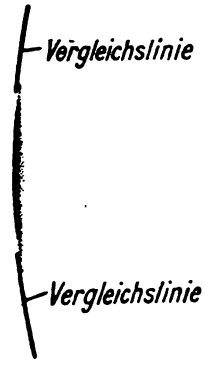


Fig. 4.

selten vorkommen, da ihr Licht nicht auftritt und die Anregungsbedingungen ähnliche wie beim Spitzenstrom sein dürften. In den äußersten Schichten des rötlichen Pinsels haben wir nur Serienlinien in bewegter Intensität, das Licht geht also nur von den Strahlteilchen aus, nicht von den angestoßenen Gasmolekeln.

5. Theoretische Auswertung.

a) *Träger der Balmerserie.* Auf Grund der letzten Tatsache allein kann noch nicht entschieden werden, ob die Serienlinien vom neutralen oder geladenen Atom ausgestrahlt werden. Nun hat aber Dempster[1]) gefunden, daß die positiven Teilchen der Kanalstrahlen bis zu den kleinsten Geschwindigkeiten Licht aussenden, die neutralen nur bei Geschwindigkeiten oberhalb 50 Volt. Bei Vereinigung dieses Befunds mit der obigen Tatsache folgt, daß das Licht langsamster Kanalstrahlen von den positiv geladenen Atomen stammt, diese also die Träger der Balmer'linien sind.

b) *Vorgänge im Spitzenstrom.* Die festgestellten Tatsachen entsprechen dem, was nach der Theorie des Spitzenstroms zu erwarten war. Auf die Anode treffen Elektronen von einigen hundert Volt Geschwindigkeit. Am Metall lösen sie langsame sekundäre Kathodenstrahlen aus, und werden teilweise mit kleiner Geschwindigkeit reflektiert. Diese langsamen Elektronen werden vom Feld zurückgeholt und möglicherweise nochmals reflektiert usw. Dicht an der Anode haben wir also einen dichten Schwarm von Elektronen der verschiedensten Geschwindigkeiten und damit starke Ionisation. Die hier entstehenden Atom- und Molekülionen erhalten bei der Ionisation den ersten Anstoß zur Emission des Serien- bzw. Bandenspektrums, die deshalb in der Anodenlichthaut stark auftreten. Die langsamsten Elektronen, die keine vollständige Ionisation mehr bewirken können, bilden Quantenpaare, womit das kontinuierliche Spektrum erklärt ist. Da das Quantenpaar vom Feld nicht fortgeführt wird, haben wir sein Licht nur an der Anode in großer Stärke. Eine zweite Stelle intensiver Ionisierung ist der weißliche Kegel hinter dem Dunkelraum; hier haben die von der Anode kommenden Kanalstrahlen die zur Ionisation nötige Geschwindigkeit erlangt und bilden aus dem Gas neue H^+-Ionen. Berück-

1) A. J. Dempster, Phys. Rev. 8 (2). S. 651. 1916.

sichtigt man, daß der Querschnitt des Strahlenbündels in der Strahlenrichtung größer wird, so ist aus der plötzlichen Verringerung des Intensitätsabfalls an dieser Stelle wohl auf eine Zunahme der Zahl ihrer Träger im Gesamtquerschnitt zu schließen. Etwas näher der Anode können die Kanalstrahlen noch nicht ionen, wohl aber schon Quantenpaare bilden; diesen haben wir das hier ziemlich plötzlich einsetzende kontinuierliche Spektrum des Gasraums zuzuordnen.

In dem dichten Gas verlieren die bewegten Partikel an Geschwindigkeit, sobald die Feldstärke unter einen gewissen Betrag sinkt, von dem zweiten Ionisationsherd weiter ins Gas hinein haben wir deshalb immer langsamer werdende Kanalstrahlen, die nicht mehr ionisieren, wohl aber zunächst noch Quantenpaare bilden und sich selbst zur Lichtemission anregen können. Umladungen sind an dieser Stelle nicht mehr möglich, da keine Elektronen freigemacht werden. Damit stimmt überein, daß sich kontinuierliches und Serienspektrum am weitesten in den Gasraum hinein erstrecken.

Vom Bandenspektrum ist bekannt, daß es vorzugsweise von langsamen Kathodenstrahlen angeregt wird; wirklich finden wir es in großer Intensität in dem Gebiet, das die aus dem Gas freigemachten Elektronen auf dem Weg zur Anode durchlaufen, und der plötzliche Anstieg seiner Intensität im Ionisationsgebiet entgegen der Richtung der Kanalstrahlen ist zwanglos zu erklären durch die Zunahme der Elektronendichte auf dieser Strecke.

Die einzelnen Schichten beim positiven Spitzenstrom sind nicht so scharf begrenzt wie die Kathodenschichten des Glimmstroms, weil beim Spitzenstrom die Vorgänge an der Anode in erster Linie von der räumlichen Geschwindigkeitsverteilung der Kanalstrahlen abhängt, materielle Strahlen aber bei dem verhältnismäßig hohem Druck wegen der Zusammenstöße trotz gleichen durchlaufenden Feldes keine einheitliche Geschwindigkeit annehmen. Die schnellsten Teilchen finden sich nicht sehr weit von der Anode, daher ist der Dopplerstreifen in der Mitte der Linie am breitesten; das auf einigen Spektrogrammen bemerkbare Umbiegen der Linienenden zur ruhenden Linie hin rührt vielleicht mehr davon her, daß die bewegten Teilchen im äußersten Pinselmantel radial nach

Fig. 5.

außen abbiegen, als von der Geschwindigkeitsverringerung. Ich schließe das daraus, daß bei höheren Drucken und Stromstärken der Pinsel ein Bild nach Fig. 5 bildet; das Ende stellt sich als leuchtender Hohlkegel dar; eine Erklärung für die Erscheinung habe ich noch nicht gefunden.

Zusammenfassung.

1. Durch Untersuchung der Lichtemission der hypothetischen langsamen Kanalstrahlen des positiven Spitzenstroms sollte Material zur Frage nach den Trägern der Wasserstoffspektren gewonnen werden.

2. Der positive Spitzenstrom wurde mit einer neuen Anodenform erzeugt; seine spektralanalytische Untersuchung bestätigte die nach heutigen Anschauungen ergänzte Starksche Theorie des Spitzenstroms, insbesondere die Existenz der Kanalstrahlen durch Nachweis ihres Dopplereffekts; das kontinuierliche Wasserstoffspektrum tritt in großer Intensität auf.

3. Aus den Ergebnissen in Verbindung mit Beobachtungen Dempsters wird geschlossen, daß die Balmerserie vom positiv geladenen Wasserstoffatom emittiert wird.

Die vorstehende Untersuchung ist im Physikalischen Institut der Universität Greifswald angestellt worden; für die Anregung zu ihr und die Förderung bei ihrer Durchführung bin ich Herrn Professor Dr. Stark zu großem Dank verpflichtet.

Greifswald, Phys. Inst. d. Univ., 12. Sept. 1919.

(Eingegangen 29. Januar 1920.)

3. *Theorie der Pigmente von größter Leuchtkraft; von Erwin Schrödinger.*

§ 1. Problemstellung.

Die Farbe des Lichtes, das von einem Pigmentaufstrich zurückgeworfen wird, erreicht bekanntlich niemals jenen Grad von *Sättigung*, den reine Spektrallichter besitzen, sondern erscheint neben dem reinen Licht gleichen Farbtons stets mehr oder weniger weißlich. Sie läßt sich aus ihm und einer gewissen Menge weißen Lichtes ermischen. Die Unmöglichkeit, Farben von spektraler Sättigung durch Pigmente zu verwirklichen, ist nicht eine technische, sondern bis zu einem gewissen Grade eine prinzipielle. Sie ist dadurch bedingt, daß die Mischung zweier Spektrallichter, die im Spektrum nicht zu weit voneinander entfernt liegen, einem bestimmten zwischen ihnen gelegenen Licht zwar im Farbton gleicht, aber im allgemeinen weißlicher ist als es. Um die volle Sättigung eines Spektrallichtes zu erreichen, müßte also das Pigment wirklich nur einen infinitesimalen Wellenlängenbereich remittieren, alle anderen vollständig verschlucken. Dann würde es uns aber natürlich — wie schon Helmholtz bemerkt hat — außerordentlich dunkel, im Grenzfall schwarz erscheinen.

Pigmente von spektraler Sättigung lassen sich im allgemeinen (auf die notwendige Einschränkung kommen wir sogleich zurück) *nur in verschwindender Lichtstärke herstellen.* —

Anschaulicher wird der Grund für die Weißlichkeit aller Pigmentfarben durch Betrachtung der Newton-Königschen Farbentafel. Er liegt in der Konvexität der Spektralkurve $R\,G\,V$ (vgl. Fig. 1). Die Farbe des Pigments wird dargestellt durch den Schwerpunkt einer gewissen linearen Massenverteilung entlang der Spektralkurve, welche Massenverteilung durch die Remissionsfunktion (Remissionskoeffizient als Funktion der Wellenlänge) und durch die Beleuchtung bestimmt ist. Dieser Schwerpunkt P wird im allgemeinen ins Innere des

reellen Farbensegments (begrenzt von der Spektralkurve und der „Purpurgeraden" $R\,V$) fallen, demnach aus einem gewissen Spektrallicht S und weißem Licht W oder eventuell aus W und einem bestimmten Purpurgemisch) ermischbar sein.

Eine Ausnahme erleidet dieser Sachverhalt nur dann, wenn die Remission ganz auf das kurzwellige oder ganz auf das langwellige Ende des Spektrums beschränkt ist, derart, daß die Massenverteilung entweder nur von V bis J (λ ca. 475 $\mu\mu$) oder nur von R bis O (λ ca. 630 $\mu\mu$) reicht. Diese Endstücke der Spektralkurve, deren angegebene Grenzen übrigens naturgemäß unscharf sind, sind nach König streng geradlinig. Die Schwerpunkte solcher Pigmente würden also *auf* die Spektralkurve fallen, sie würden den betreffenden Spektrallichtern an Sättigung nicht nachstehen.

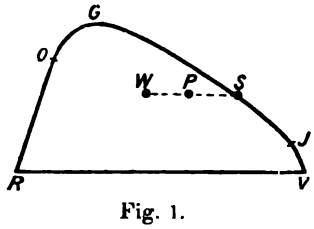


Fig. 1.

Rot-orange und indigo-violette Pigmente lassen sich in endlicher (wenn auch sicher nicht sehr erheblicher) Lichtstärke und vollkommen spektraler Sättigung herstellen.

Zu erinnern ist noch, daß die Punkte R und V je einem *endlichen* Wellenlängenbereich, nämlich den beiden *monochromatischen* Endstücken des Spektrums (bis $\lambda = 655$ bzw. $\lambda = 430$) entsprechen, daher je eine *endliche* Punktmasse aufnehmen (nicht bloß eine Liniendichte), wenn in dem betreffenden Endstück Remission stattfindet.

Man kann nun für irgendeinen Punkt der Rot-orange oder der Indigo-violett-Strecke, und ganz ebenso für einen Punkt der Purpurgeraden die Frage aufwerfen, in *welcher* maximalen Lichtstärke er sich durch ein Pigment verwirklichen läßt. Man kann weiterhin — auf die äußerste, mit reinen Lichtern erreichbare Sättigung zugunsten der Lichtstärke verzichtend — dieselbe Frage stellen für Punkte, welche der Berandung des Segments mindestens *nahe* liegen. Und so wird man dazu geführt, schließlich für einen beliebigen Punkt der reellen Farbfläche zu fragen:

In welcher maximalen Lichtstärke läßt sich dieser Punkt durch ein Pigment verwirklichen und wie müssen die Pigmente, d. h. ihre Remissionsfunktionen beschaffen sein, welche das leisten?

Die Beantwortung dieser Frage ist Gegenstand der vorliegenden Notiz.

Denkt man sich in der Farbenebene irgend drei nicht auf einer Geraden liegende Bezugspunkte gewählt, mögen es nun die Königschen Grundempfindungspunkte sein oder Punkte, die drei reellen Eichlichtern entsprechen, oder sonst irgend drei Punkte im Innern oder außerhalb des reellen Farbensegments, und denkt man sich die Einheitsquanta für diese Punkte irgendwie festgesetzt, so pflegt man bekanntlich jede Farbe durch ein Zahlentripel zu definieren, nämlich durch die Quanta der drei gewählten Grundfarben, aus denen sie im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne[1]), zu mischen ist. Als Verhältniszahlen betrachtet, bilden die drei Eichwerte die projektiven baryzentrischen Dreieckskoordinaten[2]) des die Farbe darstellenden Punktes bezogen auf das Grunddreieck als Koordinatendreieck. Die Summe der Eichwerte ist die Masse des darstellenden Punktes und wird als Quantum oder Quantität der Farbe bezeichnet. Sie ist zwischen Farben von verschiedener *Lage* des darstellenden Punktes (Farben verschiedener „*Reizart*", wie von Kries treffend sagt) keineswegs ein Maß ihres *Helligkeits*verhältnisses, außer — vielleicht — bei ganz bestimmter Wahl der Einheitsquanta der gewählten Grundfarben; eine noch unentschiedene Frage, die hier aber gar nicht angeschnitten zu werden braucht.

Für Farben *gleicher* Reizart (die in denselben Punkt fallen, durch bloße Änderung der objektiven Intensität gleich gemacht werden können) ist die Quantität der objektiven Intensität proportional, demnach sicherlich — ceteris paribus — ein monotones Maß der Helligkeit. Ergänzen wir also unsere räumlich zweidimensionale Darstellung des Farbengebietes zu einer dreidimensionalen dadurch, daß wir in jedem reellen

1) Im uneigentlichen Sinne mischbar nenne ich eine Farbe, die außerhalb des gewählten Grunddreiecks liegt, für die daher ein oder zwei Eichwerte negativ ausfallen. Die konkrete Bedeutung hiervon ist bekannt.

2) Als „*baryzentrisch*" bezeichne ich ein Dreieckskoordinatensystem, dessen „Einheitspunkt" in den Schwerpunkt des Koordinatendreiecks fällt. Diese Tatsache ist nicht zu verwechseln mit der willkürlichen, aber bequemen und daher meistens durchgeführten Verlegung des *Weißpunktes* in den Schwerpunkt.

Farbpunkt sein Quantum senkrecht zur Farbentafel als Ordinate errichten, so werden die Pigmentfarben größter Quantität oder größter Lichtstärke oder von — ceteris paribus — größter Helligkeit, nach denen wir gefragt haben, eine *Fläche* über dem reellen Farbensegment bilden, die in der Mitte irgendwie verläuft und entlang dem *gekrümmten* Teil der Berandung zum Ordinatenwert Null, entlang den drei *geradlinigen* Randstücken zu kleinen, in stetigem Kurvenzug aneinanderschließenden Ordinatenwerten herabsinkt. Diese Fläche, zusammen mit den drei von den Randordinaten gebildeten vertikalen Wänden und der gewöhnlichen, Fig. 1 dargestellten, reellen Farbenfläche als Basis *begrenzt das Gebiet der durch Pigmente darstellbaren Farben* in unserer dreidimensionalen Darstellung, die wir übrigens nur für den Augenblick zur Veranschaulichung gewählt haben und auf die weiter kein Gewicht gelegt wird (sie ist unpraktisch, weil dem Fehlen objektiven Lichtes nicht *ein* Punkt, sondern die ganze Basisfläche entspricht).

Alles bisher Gesagte gilt für jede beliebige *Beleuchtung* der Pigmente, nur muß dieselbe von vornherein ihrer genauen *physikalischen* Zusammensetzung und Intensität nach bestimmt gewählt und bei allen Überlegungen festgehalten werden. Mit der Beleuchtung ändert sich natürlich die Lage der Fläche, die in unserer Darstellung das Gebiet der Pigmente nach oben hin begrenzt. Nicht nur wachsen alle ihre Ordinaten proportional der *Intensität* der Beleuchtung, sondern mit der *Zusammensetzung* der letzteren variiert auch die *Gestalt* der Fläche. Z. B. werden für bläuliche Beleuchtung blaue Töne relativ leichter in beträchtlicher Sättigung und Lichtstärke hergestellt werden können als für weiße oder rötliche Beleuchtung, welch letztere dagegen die Herstellung gesättigter, lichtstarker roter Pigmentfarben erleichtern wird usw. Das Resultat, zu dem wir gelangen werden hinsichtlich der Pigmente von — bei gegebener Reizart — größter Leuchtkraft, der *optimalen* Pigmente, wie ich sie kurz nennen will, das Resultat, sage ich, wird gleichwohl in gewissem Sinn von der Beleuchtung ganz unabhängig sein. Es wird sich nämlich herausstellen, daß es *dieselben* Pigmente sind, die für eine ganz beliebige Beleuchtung stets optimalen Charakter tragen; oder mindestens, daß sich eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit von Pigmenten, d. h.

von Remissionsfunktionen, angeben läßt, welche unabhängig vom Beleuchtungslicht, ja selbst unabhängig von der genauen Gestalt der Spektralkurve der Fig. 1 definiert sind, und bei jeder beliebigen Beleuchtung gerade die Mannigfaltigkeit der für diese Beleuchtung optimalen Pigmentfarben darstellen.

§ 2. Aufsuchung einer, die Grenzfläche realisierenden Pigmentmannigfaltigkeit.

Um die Vorstellungen zu fixieren, wählen wir folgende spezielle Koordinatenstellung für Pigmente. Als Bezugspunkte wählen wir die Königschen Grundempfindungspunkte Das Beleuchtungslicht sei beliebig bestimmt, nur soll es, vorderhand, alle sichtbaren Wellenlängen überhaupt enthalten; wir mögen uns immerhin Sonnenlicht darunter denken. In den Schwerpunkt des Dreiecks verlegen wir die Farbe der ideal weißen und aller neutral grauen Pigmente in diesem Licht, d. h. aller Pigmente mit *konstanter* Remissionsfunktion; und zwar soll das ideal weiße Pigment mit der Remission 1 die Koordinaten 1, 1, 1 erhalten. Sind dann

$$x_1(\lambda) \qquad x_2(\lambda) \qquad x_3(\lambda)$$

die Königschen Grundempfindungskurven für das Interferenzspektrum des Beleuchtungslichtes und zwar in solchem Maßstab, daß

$$(1) \qquad \int x_1(\lambda)\, d\lambda = \int x_2(\lambda)\, d\lambda = \int x_3(\lambda)\, d\lambda = 1,$$

so sind die Koordinaten eines Pigments mit der Remissionsfunktion $r(\lambda)$

$$(2) \quad p_1 = \int x_1(\lambda) r(\lambda)\, d\lambda, \quad p_2 = \int x_2(\lambda) r(\lambda)\, d\lambda, \quad p_3 = \int x_3(\lambda) r(\lambda)\, d\lambda,$$

seine Quantität ist

$$(3) \qquad q = p_1 + p_2 + p_3 = \int (x_1 + x_2 + x_3) r\, d\lambda.$$

Für r lassen wir natürlich nur Werte zwischen 0 und 1 einschließlich der Grenzen zu. Den gleichen Spielraum haben dann die p, während q zwischen 0 und 3 liegt. Von der *Intensität* des Beleuchtungslichtes ist die Koordinatendarstellung unabhängig, da zufolge der Festsetzung über die Koordinaten des weißen Pigments die „Einheitsquanta der Grundempfindungen" automatisch mitvariieren.

Die möglichen Gestalten der Remissionsfunktion optimaler Pigmente schränken wir nun zunächst durch folgenden, für unsere kleine Untersuchung fundamentalen Satz ein:

Wenn ein Pigment in der Umgebung dreier Stellen des Spektrums, die im Farbendreieck nicht auf einer Geraden liegen, eine von 0 und von 1 verschiedene, also zwischen 0 und 1 liegende Remission hat, so läßt sich die Remission an diesen drei Stellen so abändern, daß ein lichtstärkeres Pigment derselben Reizart entsteht.

Denn aus jenen drei reinen Lichtern läßt sich dann ein *positives* Quantum der Farbe, die das Pigment besitzt, jedenfalls im uneigentlichen Sinn ermischen, d. h. eventuell mit 1 oder 2 negativen Mischungskoeffizienten. Liegt nun die Remission an den drei Stellen *zwischen* 0 und 1, so kann ich, sie um kleine Beträge abändern (vermehren oder vermindern), derart, daß die hinzutretenden Farbquanta im richtigen Verhältnis stehen und ein lichtstärkeres Pigment derselben Reizart entsteht. — In Zeichen: seien

$$\lambda = a, \qquad \lambda = b, \qquad \lambda = c$$

die drei Stellen im Spektrum. Dann liegt in der Voraussetzung, daß

$$\begin{vmatrix} x_1(a) & x_2(a) & x_3(a) \\ x_1(b) & x_2(b) & x_3(b) \\ x_1(c) & x_2(c) & x_3(c) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} x_1(a)\,\delta_a + x_1(b)\,\delta_b + x_1(c)\,\delta_c &= p_1\,\delta \\ x_2(a)\,\delta_a + x_2(b)\,\delta_b + x_2(c)\,\delta_c &= p_2\,\delta \\ x_3(a)\,\delta_a + x_3(b)\,\delta_b + x_3(c)\,\delta_c &= p_3\,\delta \end{aligned}\right. \tag{5}$$

haben dann, für ein vorgegebenes kleines $\delta > 0$, Lösungen in δ_a, δ_b, δ_c. Ändert man nun auf den kleinen Strecken ($\varepsilon > 0$)

$$a \leqslant \lambda \leqslant a + \varepsilon, \qquad b \leqslant \lambda \leqslant b + \varepsilon, \qquad c \leqslant \lambda \leqslant c + \varepsilon, \tag{6}$$

die Remission $r(\lambda)$ ab auf beziehungsweise

$$r(a) + \delta_a, \qquad r(b) + \delta_b, \qquad r(c) + \delta_c \tag{7}$$

so ändern sich die Pigmentkoordinaten nach (2) um die mit ε multiplizierten linken Seiten von (5), die Reizart also, *wegen*

(5) *nicht*, das Quantum nach (3) um die positive Größe

$$\varepsilon\,\delta(p_1 + p_2 + p_3) = \varepsilon\,\delta q\,,$$

was zu beweisen war.

Es folgt, daß die Remission eines optimalen Pigments auf keinem *endlichen* Stück des gekrümmten Teils der Spektralkurve und ebensowenig auf endlichen Stücken *beider* geradlinigen Endteile von Null und von Eins verschieden sein kann, sondern sicherlich auf dem gekrümmten und einem der geradlinigen Stücke nur einen dieser beiden Grenzwerte besitzt.

Der Kürze wegen will ich ein Pigment *zweiwertig* nennen in einem Wellenlängengebiet, wo seine Remission durchwegs Null oder Eins ist, und als zweiwertige Pigmente schlechthin solche bezeichnen, deren Remission im ganzen Spektrum nur einen dieser beiden Werte annimmt.

Für eine der beiden geradlinigen („dichromatischen") Spektralstrecken versagt der obige Beweis wegen des Verschwindens der Determinante (4). Ferner ist zu bedenken, daß die Endpunkte R und V der Spektralkurve je einem endlichen („monochromatischen") Wellenlängenbereich entsprechen. Unser Beweis schließt also auch *den* Fall nicht aus, daß in *beiden* monochromatischen Bereichen gleichzeitig — dann aber auch sonst nirgends — Abweichungen von der Zweiwertigkeit auftreten. Solche Abweichungen erscheinen also noch möglich entweder

a) in *einem* dichromatischen einschließlich des angrenzenden monochromatischen Bereiches oder

b) in beiden monochromatischen Beweisen gleichzeitig.

Trotzdem dürfen wir unsere Betrachtungen *auf zweiwertige Pigmente beschränken*, wenn wir nur *darauf* Wert legen, jede optimale Pigmentfarbe wenigstens in *einem* ihrer Vertreter kennen zu lernen und uns nichts daran liegt, *physiologische Duplikate* auszuscheiden. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß die Zweiwertigkeit in den Fällen a) und b) durch sukzessive Abänderung der Remissionsfunktion *ohne Änderung im Aussehen des Pigments* herbeigeführt werden kann.

Liegen nämlich die 3 Punkte a, b, c in der Farbentafel auf einer Geraden, so verschwindet die Determinante (4) und die Gleichungen (5) haben nichtverschwindende Lösungen

in δ_a, δ_b, δ_c für $\delta = 0$. Die entsprechende Abänderung (7) ändert das Aussehen des Pigments *nicht* und kann solange in demselben Sinne fortgesetzt (oder auch von Haus aus endlich und *so* groß gewählt) werden, bis eine der drei Zahlen $r(a)$, $r(b)$, $r(c)$ auf Null oder Eins gebracht ist. Das Verfahren läßt sich fortsetzen, solange $r(\lambda)$ noch an drei Stellen gegen die Zweiwertigkeit verstößt, d. h. das Pigment kann durch ein zweiwertiges ersetzt werden ohne Änderung seines Aussehens. Was zu beweisen war.

Wir beschränken unsere Betrachtung also jetzt auf zweiwertige Pigmente und haben unter ihnen die optimalen herauszusuchen. Die Remission eines zweiwertigen Pigments ist eine unstetige Funktion von λ, sie springt an einer oder mehreren Stellen von Null auf Eins oder von Eins auf Null. Eine solche Stelle nenne ich eine *Sprungstelle* $(1 \rightarrow 0)$ oder $(0 \rightarrow 1)$, die Pfeile natürlich im Sinne wachsender Wellenlänge verstanden. Man überlegt nun leicht, daß die *Zahl der Sprungstellen überhaupt* für optimale Pigmente *nicht größer als zwei* sein kann — wobei allerdings wieder Duplikate ausgeschieden werden. Zunächst gilt folgender, dem ersten in vieler Beziehung analoge Satz:

Besitzt ein Pigment drei auf der Farbentafel nicht in einer Geraden liegende Sprungstellen, so läßt sich seine Remission durch Verschiebung der Sprungstellen so abändern, daß ein lichtstärkeres Pigment derselben Reizart entsteht. Es kann also nicht optimal sein.

Der Beweis verläuft völlig analog wie früher und braucht darum wohl nicht in extenso durchgeführt zu werden. Er beruht darauf, daß die Farbe des Pigments aus den drei Sprungfarben mindestens in uneigentlichem Sinne mischbar ist, so daß eine nach Sinn und Größe geeignet gewählte Verschiebung der Sprungstellen die gewünschte Verstärkung der Leuchtkraft ohne Änderung der Reizart herbeiführt.

Drei und mehr *kollineare* Sprungstellen erscheinen wieder möglich. Aber solange ihrer noch mindestens drei vorhanden sind, lassen sie sich ohne Änderung im Aussehen des Pigments verschieben, bis sie zusammenschließen, so daß schließlich höchstens noch zwei vorhanden sind. Besser noch als durch eine der früheren analoge Rechnung läßt sich dies auf folgende Art direkt einsehen, z. B. für das langwellige Stück RO.

Vorgelegt sei ein im übrigen Spektrum zweiwertiges Pigment, dessen Remission aber auf der Spektralstrecke *R O* (einschließlich der Grenzen) ganz beliebig beschaffen sein mag. (Vergleiche die etwas eigenartige, aber wohl leicht verständliche Fig. 2, in welcher der Remissionskoeffizient auf den Normalen der Spektralkurve nach außen aufgetragen ist.) Die Aufgabe ist, daß vorgelegte Pigment durch ein auch auf *R O* zweiwertiges mit möglichst wenig Sprungstellen auf dieser Strecke zu ersetzen, das ihm physiologisch gleich ist.

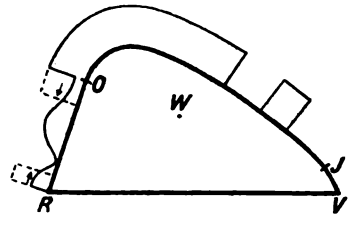


Fig. 2.

Damit letzteres der Fall sei, muß — nach dem Graßmannschen Satze, daß gleichaussehende Lichter gemischt gleichaussehende Lichter ergeben — die von der Remission auf *R O* allein erzeugte „Teilfarbe" für das abgeänderte Pigment dieselbe sein, wie für das vorgegebene. Der Punkt, der dieser Teilfarbe entspricht, liegt jedenfalls irgendwo auf *R O*. Um zum Schluß möglichst wenig Sprungstellen zu haben, „erzeugen" wir die Teilfarbe auf verschiedene Weise, je nachdem das vorgelegte Pigment auf dem bei *O* violettwärts anschließenden Stück vollständig remittiert oder vollständig absorbiert.

In *beiden* Fällen gehen wir aus von vollständiger Absorption auf *R O*. Dann schieben wir im *ersten* Fall (dem die Zeichnung entspricht) eine Sprungstelle ($0 \rightarrow 1$) vom roten Ende des Spektrums violettwärts und gleichzeitig die Sprungstelle ($1 \rightarrow 0$) von *O* rotwärts vor, in solchem relativen Tempo, daß die im Gebiet *R O* auf diese Weise entstehende Remission immer die *Reizart* der Teilfarbe trifft, was offenbar möglich ist und sich solange fortsetzen läßt, bis auch das *Quantum* der Teilfarbe erreicht ist. Die Fortsetzung des Prozesses könnte nur dadurch vereitelt werden, daß eine der Sprungstellen den Ort der Teilfarbe überschreitet. Das kann aber nicht eintreten, bevor das Quantum der Teilfarbe erreicht ist, denn dann würden „unverwendet" zwischen den Sprungstellen nur Spektrallichter übrig bleiben, die entweder durchweg röter oder durchweg gelber wären als die Teilfarbe, aus denen sich also über-

haupt kein Quantum der Teilfarbe mehr ermischen läßt; letztere wäre also aus dem zur Verfügung stehenden Licht überhaupt nicht in hinreichender Quantität ermischbar, was den Annahmen widerspricht. —

Im zweiten Fall, wo von O violettwärts ein *Absorptionsgebiet* anschließt, erzeugen wir die Teilfarbe in wachsender Stärke durch ein einziges Remissionsgebiet, das den Punkt der Teilfarbe in seinem Innern enthält. Wir schieben, wieder von identisch verschwindendem r in RO ausgehend, eine Sprungstelle $(1 \rightarrow 0)$ von der Teilfarbe rotwärts und gleichzeitig eine Sprungstelle $(0 \rightarrow 1)$ von der Teilfarbe violettwärts vor, in solchem relativen Tempo, daß die Reizart der Teilfarbe getroffen wird. Aus ähnlichem Grunde wie früher muß auf diese Weise auch ihr Quantum erreicht werden, bevor oder schlimmstenfalls in eben dem Augenblick, wo die Fortsetzung des Prozesses dadurch vereitelt wird, daß die erste Sprungstelle das rote Ende des Spektrums oder die zweite den Punkt O erreicht. —

Damit ist unsere Aufgabe gelöst.

Wird man auf dem geschilderten Wege nur zu *einer* Sprungstelle geführt, was ausnahmsweise vorkommen kann, so ist noch eine zweite irgendwie im Spektrum möglich; resultieren aber zwei, so müssen es die einzigen sein, wenn das Pigment ein optimales sein soll.

Nur das eine kann passieren, daß die zwei Sprungstellen, auf die man geführt wird, beide in der monochromatischen Endstrecke liegen. Sie fallen dann in denselben Punkt R der Farbentafel und es ist noch eine dritte Sprungstelle irgendwo im Spektrum möglich. Aber man erkennt sofort, daß das isolierte monochromatische Remissions- oder Absorptionsgebiet, um das es sich diesfalls handelt, ganz an das Ende des Spektrums geschoben werden kann, so daß nur mehr *eine* monochromatische Sprungstelle vorliegt. —

Überschauen wir das Gesagte, *so behalten wir also schließlich*, nach Ausscheidung vieler Duplikate, *für die optimalen Pigmente nur die zweidimensionale Mannigfaltigkeit der zweiwertigen Pigmente mit ein oder zwei Sprungstellen übrig.* Unter ihnen muß jede optimale Pigmentfarbe mindestens einen Vertreter haben. Wir haben nun nur noch einige kleinere Gruppen,

die sicher nicht optimal sind, auszuscheiden. Von dem Rest wird sich zeigen lassen, daß darunter keine zwei Pigmente gleicher Reizart mehr vorkommen. Damit wird bewiesen sein, daß diese Pigmente auch wirklich alle optimal sind, und daß sie genau die eingangs erwähnte Grenzmannigfaltigkeit und zwar in je *einem* Exemplar, ohne Duplikate, darstellen.

Zunächst ordnen wir die ein- und zweisprüngigen zweiwertigen Pigmente in folgende Gruppen, die durch die beigefügte Fig. 3 wohl ohne weiteres verständlich sind. Die abgegrenzte Strecke ist das sichtbare Spektrum, als Ordinate ist die Remission aufgetragen.

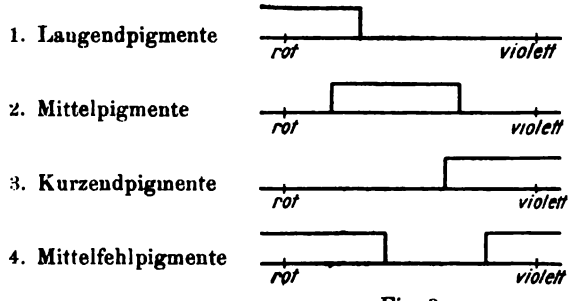


Fig. 3.

Als sicher nichtoptimal scheiden nun noch aus:

a) von den Langendpigmenten jene, deren Remission nicht bis an die kurzwellige Grenze des monochromatischen Rot reicht;

b) von den Mittelpigmenten jene, deren Sprungstellen beide entweder *zwischen* dem roten Spektralende und *O*, oder *beide zwischen J* und dem kurzwelligen Ende liegen. Für solche ist offenbar eine Vermehrung der Lichtstärke durch Ausdehnung des Remissionsgebietes möglich;

c) von den Kurzendpigmenten jene, deren Remission nicht bis an die langwellige Grenze des monochromatischen Violett reicht;

d) von den Mittelfehlpigmenten jene, welche *eine* Sprungstelle im *Inneren* des monochromatischen Rot, die *andere* im *Inneren* des monochromatischen Violett haben; denn das betreffende Purpur läßt sich durch Ausdehnung der beiden Remissionsgebiete verstärken, solange bis eine der beiden Sprung-

stellen die Grenze des monochromatischen Bereiches erreicht. (Die mit *zwei gleichfarbigen* monochromatischen Sprungstellen wurden schon früher als Duplikate ausgeschieden und durch Endpigmente ersetzt.)

Es ist nun noch der Nachweis zu führen, daß die nach den Ausscheidungen a) bis d) übrig behaltenen Pigmente alle untereinander von verschiedener Reizart sind.

Bei dieser Überlegung nehmen wir vorweg jene drei Untergruppen, deren darstellende Punkte auf eines der drei geradlinigen Berandungsstücke fallen. Sie treten nur je unter sich in Konkurrenz. Für sie ist die Richtigkeit der Behauptung ohne weiteres klar und wurde eben durch die Ausscheidungen a) bis d) herbeigeführt.

Für die übrigen muß der Nachweis — wenig elegant — partienweise geführt werden, d. h. es muß zunächst jede der vier Gruppen unter sich und dann mit jeder anderen verglichen und alle möglichen Lagenkombinationen der Sprungstellen in Betracht gezogen werden. Immerhin dürfen wir uns dabei gestatten, von den Endpigmenten abzusehen, da sie ja schließlich als Ausartungen sowohl der Mittelpigmente als der Mittelfehlpigmente mit berücksichtigt sind. Wir vergleichen also zunächst:

A. Mittelpigmente unter sich.

Bei ganz getrennter Lage der Remissionsgebiete ist Konizidenz der Schwerpunkte offenbar unmöglich. Ebenso bei umschließender Lage. Denn da (nach obiger Vorwegnahme der spektral gesättigten Pigmente) die Remissionsgebiete auch gekrümmte Teile der Spektralkurve enthalten müssen, fällt der Schwerpunkt der nichtgemeinsamen Außenteile des umfangreicheren Remissionsgebietes außerhalb des zu dem kleineren Remissionsgebiete gehörigen Segments und muß den Schwerpunkt des letzteren verlagern. Ebenso wenn die Remissionsgebiete nur übergreifen. Der gemeinsame Mittelteil, mit je einem nichtgemeinsamen Außenteil kombiniert, kann nicht beidemale auf denselben Punkt führen.

B. Mittelfehlpigmente unter sich.

Hier ist stets von einem Pigment auszugehen, daß beide Absorptionsgebiete zusammen besitzt, und zu überdenken, daß

durch die entsprechenden Ergänzungen der Schwerpunkt dieses „Differenzpigments“ in verschiedener Weise verlagert wird.

C. Mittelpigmente mit Mittelfehlpigmenten.

α) Das Remissionsgebiet des ersten und das Absorptionsgebiet des zweiten Pigments liegen ganz getrennt. Das Mittelfehlpigment entsteht dann aus dem Mittelpigment durch Hinzufügung von Remissionen, die seinen Schwerpunkt unmöglich ungeändert lassen können.

β) Das Remissionsgebiet liegt innerhalb des Absorptionsgebietes. Dieser Fall bedarf keines Wortes.

γ) Das Absorptionsgebiet liegt innerhalb des Remissionsgebietes (s. Fig. 4). Das ganze Farbengebiet zerfällt dann in

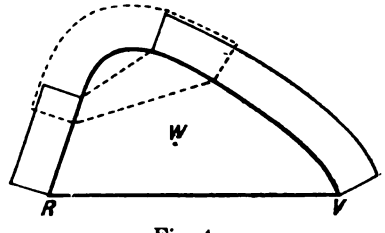


Fig. 4.

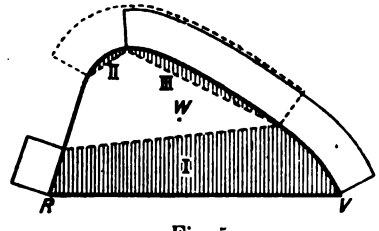


Fig. 5.

drei Streifen, deren Schwerpunkte (d. h. die der sie begrenzenden Teile der Spektralkurven), wenn die Pigmente von gleicher Reizart sein sollten, *so* auf einer Geraden liegen müßten, daß der Schwerpunkt des mittleren Streifens *nicht* in der Mitte liegt; was offenbar unmöglich ist.

δ) Absorptionsgebiet und Remissionsgebiet übergreifen (siehe Fig. 5). Es müßte im Innern der schraffierten Gebiete I, II, III je ein Punkt namhaft gemacht werden können, derart, daß die drei Punkte auf einer Geraden liegen, und zwar der Punkt III *nicht* in der Mitte zwischen I und II. Denn es müßte ja die Hinzufügung des Bogens II zu III den Schwerpunkt von III in denselben Punkt bringen wie die Hinzufügung des Bogenpaares I. Das ist offenbar unmöglich. — — —

Die zweidimensionale Pigmentmannigfaltigkeit, auf die wir geführt wurden, stellt also die optimalen Pigmentfarben vollständig und in je *einem* Exemplare dar. Und zwar, wie vorausgreifend bemerkt war, *für ein ganz beliebiges Beleuchtungs-*

licht, das nur alle Wellenlängen überhaupt enthält. Denn weder enthält die Definition unserer Pigmente irgendeine Beziehung auf das Beleuchtungslicht, noch haben wir im Verlauf unserer Untersuchung irgendeine andere Eigenschaft desselben benützt, als stillschweigend die, daß keine homogene Lichtart darin gänzlich fehlen sollte.

Daß unsere Pigmente ihren optimalen Charakter nicht verlieren, auch wenn das Beleuchtungslicht spektrale Lücken aufweist, erkennt man übrigens sofort durch Grenzübergang von einer nur wenig verschiedenen Beleuchtung, in der die Lücken mit kleinen Ordinatenwerten ausgefüllt sind, die man nach irgendeinem Gesetz gegen Null abnehmen läßt. Dabei ändert zwar ein Pigment im allgemeinen seinen Ort in der Farbentafel, aber nicht seine physische Beschaffenheit, bleibt also optimal auch im Grenzfall. Die eindeutige Zuordnung zwischen der Pigmentmannigfaltigkeit und den Optimalfarben bleibt aber natürlich nicht erhalten, weil große Gruppen von Pigmenten farbengleich werden, nämlich alle jene, deren Sprungstelle in eine spektrale Lücke des Beleuchtungslichtes fällt; wie ja überhaupt in diesem Fall der Verlauf der Remission innerhalb einer solchen Lücke völlig ohne Einfluß auf das Aussehen des Pigments ist.

Für eine kurze, von den eingeführten Kunstausdrücken freie Zusammenfassung des nunmehr festgestellten Hauptergebnisses unserer Untersuchung verweise ich an das Ende dieser Note (Zusammenfassung S. 621 u. 622).

§ 3. Über die Beantwortung der Fragen nach der größten erreichbaren Lichtstärke, nach der höchsten errreichbaren Sättigung und nach den notwendigen Bedingungen für lichtstärkste Pigmente.

Es ist klar, wie man rechnerisch vorzugehen hätte, um nun *den ersten Teil der auf S. 604 gestellten Frage* in irgendeinem speziellen Fall zu beantworten: *in welcher maximalen Lichtstärke läßt sich ein bestimmter Punkt der Farbentafel durch ein Pigment verwirklichen?*

Diese Frage hat natürlich nur bei vorgegebenem Beleuchtungslicht einen Sinn. Man wird sich dann als Vorarbeit aus den auf das Interferenzspektrum dieses Lichtes umgerechneten

Grundempfindungskurven eine Tafel der drei Integrale berechnen

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} x_1(\lambda)\,d\lambda, \qquad \int_{\lambda_0}^{\lambda} x_2(\lambda)\,d\lambda, \qquad \int_{\lambda_0}^{\lambda} x_3(\lambda)\,d\lambda,$$

wo λ_0 die kurzwellige Grenze des sichtbaren Spektrums ist, während die obere Integralgrenze von λ_0 bis an das langwellige Ende variiert. Aus dieser Tafel lassen sich die Koordinaten der optimalen Farben mit leichter Mühe ablesen, bei häufigerem Gebrauch wird man sie in einer Tafel mit zwei Eingängen vereinigen. Durch vernünftiges Probieren — ich sehe keinen einfacheren Weg — am besten vielleicht graphisch, indem man immer *ein* Integral als Funktion des anderen aufträgt und auf den entstehenden Kurven Sehnen von richtiger Neigung aufsucht — auf solche Art also wird man *jene* Sprungstellen (Integrationsgrenzen) ermitteln, für welche die drei Koordinaten des Pigments das durch den Punkt in der Tafel vorgegebene Verhältnis aufweisen. Diese drei Koordinaten geben dann an, welche Bruchteile der durch ein ideal weißes Pigment bei dieser Beleuchtung erregten Rot-, Grün-, Blauempfindung durch ein Pigment, das bei dieser Beleuchtung die vorgegebene Reizart realisiert, maximal erregt werden können.

Natürlich läßt sich ganz dieselbe Überlegung und Rechnung auch unter Benutzung irgendwelcher anderer, etwa auf drei reelle Eichlichter bezogener Eichkurven an Stelle der Grundempfindungskurven durchführen; wobei dann die optimalen Koordinaten eine noch konkretere, von jeder Hypothese über das Zustandekommen der Farbempfindung auch äußerlich freie Bedeutung bekommen.

Die geschilderten rechnerischen Vorarbeiten hier wirklich zu leisten, würde ich *deshalb* für fast verlorene Mühe halten, weil es so sehr unsicher ist, ob der erste, der die vorstehenden Resultate etwa praktisch zu verwerten wünscht, dies gerade für Tageslicht und für die Königschen Eichkurven in ihrer heute vorliegenden Form wird tun wollen. —

Eine der eben behandelten verwandte, dem Praktiker vielleicht näherliegende Frage möchte ich hier nur kurz streifen, nämlich diese: in welcher maximalen *Sättigung* läßt sich ein

bestimmter *Farbton* durch ein Pigment herstellen, wenn eine bestimmte *Helligkeit* nicht unterschritten werden soll?

Ohne Zweifel ist das nachgefragte Pigment in unserer Grenzmannigfaltigkeit zu suchen und zwar auf einem Halbstrahl durch den Weißpunkt[1]) möglichst weit außen, *so* weit, daß die gewünschte Helligkeit eben noch nicht unterschritten wird. Man müßte sich also in derselben Art wie früher die „Quantitätsfläche", jetzt eine „Helligkeitsfläche" über dem Farbensegment errichten, deren Ordinaten in jedem Punkt die *Helligkeit* der optimalen Farbe darstellen. Diese muß sich, wenn ihre Begriffsbestimmung nur überhaupt eindeutig sein soll, aus den gefundenen drei Koordinaten, die ja die Pigmentfarbe eindeutig definieren, eindeutig berechnen lassen. Aber die Ansichten, *wie* das zu geschehen hat, gehen heute noch weit auseinander. Einige halten die Helligkeit für eine lineare Funktion der Koordinaten mit konstanten Koeffizienten, den „spezifischen Helligkeiten" der Grundempfindungen; andere, darunter Helmholtz in seinen Abhandlungen über die Übertragung des Fechnerschen Gesetzes auf das Farbensystem, glauben, daß nicht einfache additive Verknüpfung vorliegt.

Die Frage nach der richtigen Fassung des Begriffes der heterochromen Helligkeit ist eine ungemein wichtige und von sehr viel größerer Tragweite als die vorliegende Untersuchung; ich werde demnächst in anderem Zusammenhang viel ausführlicher darauf eingehen. Für uns hier spielt sie aber offenbar nur eine Nebenrolle. Würde man die optimalen Lichtgemische des herzustellenden Farbtons in zunehmender Sättigung nach den gegebenen Vorschriften wirklich herstellen, so würde sich aus ihnen dasjenige sogleich herausfinden lassen, das der Forderung eben noch genügt, wofern diese überhaupt vernünftig gestellt und nicht eine bloße Verbalforderung ist.

Was nun *den zweiten Teil der auf S. 604 gestellten Frage* betrifft: *wie müssen die optimalen Pigmente, d. h. ihre Remissionsfunktionen, beschaffen sein?* — so wird sie durch unsere zwei-

1) Man beachte, daß in der Farbentafel, die wir für unsere Pigmente angelegt haben, nicht Sonnenweiß, sondern die Farbe der ideal remittierenden Fläche, also die Farbe des Beleuchtungslichtes im Schwerpunkt liegt. *Hier* ist natürlich mit „Weißpunkt" nicht dieser Schwerpunkt, sondern der Ort des Sonnenweiß gemeint.

dimensionale Pigmentmannigfaltigkeit natürlich durchaus nicht erschöpfend beantwortet. Alle ausgeschiedenen Duplikate sind ja gleichfalls optimal. Ein optimales Pigment braucht also durchaus nicht zweiwertig zu sein, es kann mehr als zwei Sprünge besitzen usw.

Die Unbestimmtheiten, die auftreten, haben alle ihren Grund in der Existenz dichromatischer und monochromatischer Bezirke im Spektrum; in diesen Bezirken ist die Remissionsfunktion unter Umständen in weitestem Maße willkürlich. Was da gestattet ist und was nicht, läßt sich aber an Hand unserer früheren Überlegungen in jedem Falle leicht übersehen und ich halte eine lückenlose Aufzählung aller möglichen Fälle für uninteressant und überflüssig. Die Frage ist immer die, ob sich der Remissionsfunktion durch geeignete Abänderung eine der ausgezeichneten Formen geben läßt oder nicht.

So wird beispielsweise ein Pigment, das vom kurzwelligen Ende bis zum Punkt *O* (Grenze des Orange), vollständig remittiert, optimal sein, wie immer auch seine Remission im langwelligen Teil verlaufen mag. Denn es läßt sich in ein Mittelfehlpigment verwandeln.

Dagegen sind bei Pigmenten, deren Remission auf das langwellige Ende bis zum Punkt *O* beschränkt ist, Abweichungen von der Zweiwertigkeit im dichromatischen Teil unzulässig, im monochromatischen nur dann zulässig, wenn der dichromatische vollständig remittiert. Sonst würde das Pigment bei der Verwandlung auf ein verbotenes Mittelpigment führen (s. oben S. 613 b).

Ganz entsprechendes gilt natürlich für die analogen Fälle am kurzwelligen Ende.

§ 4. Vergleich mit der Erfahrung.

Wilhelm Ostwald hat aus seinen umfangreichen Experimentaluntersuchungen über Pigmente rein empirisch die Folgerung gezogen, daß zur Erzielung größter *Farbenreinheit* bei einem Pigment möglichst nur die Remissionen Null und Eins, mit tunlichst schroffem Übergang, vorkommen sollen, ferner nur entweder *ein* geschlossenes Remissionsgebiet oder *ein* geschlossenes Absorptionsgebiet.[1])

1) W. Ostwald, Königl. Sächs. Ges. d. Wiss., Abh. d. Math.-Phys. Kl. 34. Nr. 3. S. 471 ff. 1917; Phys. Zeitschr. 17. S. 328 ff. 1916.

Soweit trifft Ostwalds empirische Feststellung mit der von uns für optimale Pigmente theoretisch aufgestellten Bedingungen der Hauptsache nach völlig zusammen.

Ostwald fordert weiter zur Erzielung größter Reinheit, daß die Absorption bzw. die Remission genau ein „Farbenhalb" umfassen, d. h. genau von einer Spektralfarbe bis zu ihrer Komplementärfarbe reichen soll. Um für diese Forderung wenigstens ein qualitatives Verständnis zu gewinnen, erinnern wir daran, daß Ostwald unter *Reinheit* den *Bruchteil reiner Farbe* verstanden wissen will, der in dem Gesamteindruck, den das Gemisch hervorruft, enthalten sein soll und aus ihm begrifflich sich soll abtrennen lassen; zu diesem Bruchteil reiner Farbe treten dann noch gewisse Bruchteile *Weiß* und *Schwarz* als Verunreinigungen oder Trübungen.

Nun läßt sich nach Ostwald der Schwarzgehalt einer Farbe z. B. dadurch erhöhen, daß man sie auf dem Farbenkreisel mit einem ideal schwarzen, d. h. nicht remittierenden Pigment oder am sichersten mit einem schwarzen Loch mischt. Daraus läßt sich mit Rücksicht auf das Talbotsche Gesetz schließen, daß — wie immer man über die Natur des Schwarz als Empfindung urteilen mag — jedenfalls *das objektive Korrelat* dessen, was Ostwald den Schwarzgehalt nennt, *eine relativ geringe Lichtstärke* ist.

Nun ist klar, daß jene optimalen Pigmente, deren Remission auf einen allzu *kleinen* Teil des Spektrums beschränkt ist, sehr lichtschwach sein, d. h. nach Ostwald einen hohen Schwarzgehalt und aus diesem Grunde geringe Reinheit zeigen werden. — Anderseits werden Pigmente, deren Remission einen allzu *großen* Teil des Spektrums umfaßt, zwar sehr lichtstark sein, daher wenig Schwarz, dafür aber sehr viel Weiß enthalten — letzteres nach den bekannten allgemeinen Gesetzen der Lichtmischung. — Daß überhaupt die Ostwaldschen Pigmente größter Reinheit nur unter unseren optimalen zu suchen sind, folgt natürlich aus der Überlegung, daß ein Pigment geringerer Lichtstärke und gleicher Reizart gleichen Weißgehalt, aber höheren Schwarzgehalt besitzt, also geringere Reinheit.

Die Beschränkung des Remissionsgebietes auf das Gebiet zwischen zwei Komplementärfarben ist offenbar ein praktisch bewährtes Kompromiß zwischen der Scylla der weißlichen und

der Charybdis der schwärzlichen Trübung; oder in der, Helmholtz folgenden, mehr auf die objektive Beschaffenheit des Strahlengemisches gerichteten Ausdrucksform: ein Mittel zur Erzielung möglichst hoher Farbensättigung ohne allzu große Lichtverluste durch Absorption.

Wegen dieses Kompromißcharakters wäre zu erwarten, daß die Qualität der, den besten von Ostwald hergestellten Pigmentfarben noch anhaftenden Trübung, die eines mittleren Grau ist, aus nicht gar zu sehr verschiedenen Anteilen Weiß und Schwarz gemischt. Für einen Teil derselben trifft das nach Ostwalds Reinheitsbestimmungen (a. a. O. S. 560) recht angenähert zu. Für viele, namentlich für die blauen und grünen, ist allerdings der Schwarzanteil erheblich größer als der Weißanteil.

Ich kann übrigens nicht unterlassen, zu bemerken, daß ich die ganze Ostwaldsche Terminologie hier nur benutzt habe, um die von ihm gefundenen *Tatsachen* mit meinen theoretischen Ergebnissen einigermaßen vergleichen zu können; nicht als ob ich schon überzeugt wäre, daß den Begriffsbildungen, wie „Reinheit", „Schwarzgehalt", „Grau" dieselbe quantitative Bestimmtheit zukommt, wie etwa denen der Helmholtz-Königschen physiologischen Farbenmetrik. Bei aller Hochachtung vor Ostwalds wertvollen und mühsam erarbeiteten Erfolgen halte ich doch z. B. seine Absolutbestimmungen von „Reinheit" und „Grau" aus dem Werte der Remission an nur *zwei*, wenn auch ausgezeichneten Stellen des Spektrums (Maximum und Minimum), für nichts mehr als bestenfalls eine gute Faustregel, keineswegs geeignet zur exakten Definition dieser Begriffe.

Zusammenfassung.

1. Die größte Lichtstärke bei vorgegebener Reizart haben die Pigmente von folgender Beschaffenheit:

a) Sie besitzen an keiner Stelle des Spektrums einen anderen Remissionskoeffizienten als nur Null oder Eins.

b) Ihre Remission zeigt nur höchstens zwei Unstetigkeitsstellen („Sprünge" von 0 auf 1 oder von 1 auf 0) und ist nicht durchweg Null.

c) Beschränkt sich die Remission auf einen der beiden dichromatischen Spektralbezirke, einschließlich des angrenzenden monochromatischen, so reicht sie mindestens bis an das eine Ende dieses Gebietes.

d) Beschränkt sich die Remission auf die monochromatischen Bezirke, so umfaßt sie mindestens einen von beiden ganz.

e) Beschränkt sich die *Absorption* auf *einen* monochromatischen Bezirk, so beginnt sie am Spektralende.

2. Die beschriebenen Pigmente besitzen die angegebene Eigenschaft für jede beliebige Beleuchtung; d. h. bei einer ganz beliebigen Beleuchtung wird keines von ihnen an Lichtstärke übertroffen von irgendeinem Pigment, das mit ihm *bei eben dieser Beleuchtung* Licht von gleicher Reizart remittiert.

3. Weist das Beleuchtungslicht keine spektralen Lücken auf, so sind die Pigmente alle untereinander physiologisch verschieden und überdecken das reelle Farbensegment einschließlich der Berandung genau einfach.

4. Außer den unter 1. genannten Pigmenten gibt es noch andere lichtstärkste Vertreter ihrer Reizart. Diese Eigenschaft kommt beispielsweise *allen* jenen Pigmenten zu, deren *Absorption* auf *ein* mono- und dichromatisches Ende des Spektrums beschränkt ist, sie mag dort im übrigen ganz beliebig verlaufen. Überhaupt beziehen sich die erlaubten Abweichungen von den unter 1. aufgeführten Eigenschaften durchweg auf die mono- und dichromatischen Bezirke. Natürlich wird jedes solche abweichend beschaffene Pigment *einem* Pigment der erstgenannten Mannigfaltigkeit völlig gleichen — *welchem*, hängt allerdings im allgemeinen von der Beleuchtung ab.

5. Diese theoretischen Ergebnisse treffen mit einigen empirischen Feststellungen Wilhelm Ostwalds zusammen.

Wien, im Dezember 1919, II. physik. Inst. d. Universität.

(Eingegangen 22. Dezember 1919.)

4. *Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kranzerscheinungen im homogenen Nebel;* von *Reinhard Mecke.*

(Fortsetzung.)

II. Teil: Theoretische Untersuchungen (Beugungstheorie kleiner Kugellinsen).

(Marburger Inaugural-Dissertation 1919.)

Inhalt: § 1. Beugungserscheinungen an undurchsichtigen Kugeln. — § 2. Beugung und Interferenz an durchsichtigen Kugeln. — § 3. Berechnung der Phasenverschiebung δ und der Amplitude b. — § 4. Einfluß des an der Oberfläche vom Tropfen reflektierten Lichts auf die Beugungserscheinung. — § 5. Anwendung der Beugungsformel kleiner Kugellinsen zur Erklärung der Beugungserscheinungen im homogenen Nebel. — Zusammenfassung.

In der folgenden theoretischen Untersuchung soll nun eine Theorie gegeben werden, welche die im vorhergehenden experimentellen Teile[1]) gefundenen Kranzerscheinungen und ihre Abweichungen von der Beugungstheorie kreisförmiger Scheibchen erklärt.

Der Versuch einer solchen ist nämlich, soweit die Erscheinungen schon bekannt waren, meines Wissens noch nicht gemacht worden. Kiessling[2]) stellt zwar die Vermutung auf, daß außer eines geringen Anteils der Dispersion an der Farbenentwicklung neben der Lichtbeugung am Rande der Nebelkörperchen auch *Interferenz* im Innern derselben zur Entstehung der Farben beiträgt. Näheren Aufschluß darüber könnte aber erst eine experimentell zu prüfende analytische Behandlung des Problems gewähren. Und Barus[3]) findet, daß für die Färbung der Lichtquelle (axial colours) diese Erklärung durch einfache Interferenzfarben dünner Blättchen nicht genügt, da die Tropfen ungefähr sechsmal größer sind, als sie für

1) I. Teil vgl. Ann. d. Phys. **61.** S. 471—500. 1920.

2) Meteorol. Zeitschr. **1.** S. 117f. 1884; J. Kiessling, Die Dämmerungserscheinungen. Hamburg 1885. S. 141.

3) C. Barus, Sill. Journ. **25.** S. 224—226. 1908

Interferenzfarben in Betracht kommen. An der Hand der theoretischen Abhandlung von Verdet über lamellare Gittererscheinungen kommt er zu dem Schlusse, daß die Farben der Lichtquelle gleich denen dünner Blättchen sein könnten, deren Dicke $2\,r\sigma$ (1) beträgt.[1] Eine Verallgemeinerung dieser Annahme für die Erklärung der Farbenfolge im *zentralen Felde* und in den *Kränzen* sei jedoch nicht ohne weiteres angängig, da man hier auf unüberwindbare Schwierigkeiten stoßen würde, insbesondere seien dies die zur Lichtquelle *komplementäre* Färbung des zentralen Feldes und seine satten Farbtöne.

§ 1. Beugungserscheinungen an undurchsichtigen Kugeln.

Zum besseren Verständnisse der nun folgenden Theorie muß ich jedoch zuerst noch einmal kurz die Gleichungen, die die Beugung an undurchsichtigen kreisförmigen Scheibchen oder kleinen Kugeln ableiten, um so mehr als in den bisherigen Ableitungen meistens nur die Intensität der Erscheinung berücksichtigt worden ist, während die *Phasenänderung* der Lichterregung, auf die es bei Interferenzerscheinungen besonders ankommt, unerwähnt geblieben ist.

Deshalb muß ich auch von dem Huygensschen Prinzip in der strengeren mathematischen Fassung von Kirchhoff[2] ausgehen, da nur dieses, entgegen der einfacheren Fresnelschen Fassung, die Phase richtig ergibt.

In den großen Entfernungen R_1 bzw. R_2 zwischen Lichtquelle und Beobachtungspunkt P befindet sich *ein* Tropfchen mit dem Radius r. Gehorcht dann die Lichtausbreitung dem Gesetze

$$1) \qquad s = a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{R}{\lambda}\right),$$

so ist die Lichterregung im Beobachtungspunkte gegeben durch

$$2) \qquad s_P = -\frac{a\cos\alpha R_2 + \cos(\alpha R_1)}{2\,R_2}\int \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{R_1 + R_2 + \delta}{\lambda}\right) d\sigma,$$

wo αR_1 und αR_2 die Richtungswinkel gegen die Normale der Beugungsebene bedeuten. Bei senkrecht zur Beugungs-

1) Diese Folgerung ist nach meiner Theorie nicht zutreffend. Vgl. S. 629 und 647.

2) G. Kirchhoff, Optik, S. 27; P. Drude, Lehrbuch der Optik, S. 170 und 175.

ebene einfallendem parallelen Lichte ist nun $\cos(n R_1) = 1$ und $\cos(n R_2) = -\cos\varphi$[1]), wenn man unter φ den Beugungswinkel versteht, somit

$$\cos(n R_2) - \cos(n R_1) = -2\cos^2\frac{\varphi}{2} \cdot \tag{2a}$$

Setze ich noch

$$\frac{t}{T} - \frac{R_1}{\lambda} = \frac{t'}{T},$$

was nur einer Verlegung des Zeitanfangspunktes gleichkommt, ferner zur Abkürzung

$$\begin{cases} \text{a)} \quad C = \int \cos\frac{2\pi}{\lambda}\,\delta\,d\sigma, \\ \text{b)} \quad S = \int \sin\frac{2\pi}{\lambda}\,\delta\,d\sigma, \end{cases} \tag{3}$$

so ist der Schwingungszustand im Punkte P gegeben durch

$$s_P = \frac{-a\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\lambda R}\left[C\sin 2\pi\left(\frac{t'}{T} - \frac{R}{\lambda}\right) - S\cos 2\pi\left(\frac{t'}{T} - \frac{R}{\lambda}\right)\right]. \tag{4}$$

Die Lichtstärke ist

$$M = \left(\frac{-a\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\lambda R}\right)^2 [C^2 + S^2]. \tag{5}$$

Nach Einführung von Polarkoordinaten mit dem Mittelpunkt des Tropfens als Ursprung und nach der für kleine Tropfen erlaubten Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung $\pi r^2 \lambda R$ führt die Lösung des Integrales (3a) für die untere Grenze r bekanntlich[2]) auf eine Besselsche Funktion erster Ordnung, welche sich in die konvergente unendliche Reihe

$$J_1(z) = \frac{z}{2}\left(1 - \frac{z^2}{2\cdot 4} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6} - \frac{z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdots\right) \tag{6}$$

entwickeln läßt. Hier bedeutet

$$z = \frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi. \tag{7}$$

Die Funktion ist periodisch; Nullstellen sind vorhanden bei

$$z_1 = 1{,}22\,\pi, \quad z_2 = 2{,}233\,\pi, \quad z_3 = 3{,}238\,\pi \text{ usw.}$$

1) Richtungssinn der Normalen ist zu beachten!

2) Vgl. z. B. G. Kirchhoff, Optik S. 91ff. oder Verdet, Wellentheorie I. S. 203ff.

Maxima mit den rasch abnehmenden Funktionswerten

$$1 \qquad 0{,}0175 \qquad 0{,}00416 \qquad 0{,}00160$$

liegen bei

$$z_0 = 0 \qquad z_1 = 1{,}63\,\pi \qquad z_2 = 2{,}65\,\pi \qquad z_3 = 3{,}70\,\pi \text{ usw.}$$

Für die obere Grenze verschwindet der Wert für das Integral, ebenso ist das Integral (3b) Null, da $\sin 2\,\pi/\lambda\,\delta$ eine ungerade Funktion ist. Man erhält somit für die Lichterregung im Punkte P den Ausdruck

$$(8) \qquad s_P = \frac{a\,\pi\,r^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\lambda\,R} \left[\frac{2}{z} J_1(z)\right] \sin 2\,\pi \left(\frac{t'}{T} - \frac{R}{\lambda}\right)$$

und für die Intensität das Amplitudenquadrat davon.

Die gebeugten Strahlen erleiden also neben einer erheblichen, periodisch schwankenden Schwächung ihrer Lichtstärke noch eine *Phasenverschiebung* von $\pi/2$ gegenüber der ungehinderten Fortpflanzung.

Für die Verallgemeinerung der Formeln auf eine große Anzahl unregelmäßig verteilter Tröpfchen kann ich auf die Lehrbücher[1]) verweisen. Durch Einführung von neuen Koordinaten in bezug auf ein in der Beugungsebene beliebig gelegenes Koordinatensystem und Summierung über die vorhandene Anzahl von Tröpfchen findet man, daß die Intensität proportional dieser Anzahl wächst. Allerdings liegen beim Nebel die Tropfen nicht alle in einer Ebene und die Summierung ist auch über die Tiefendimension zu erstrecken, doch wird bei nicht zu großer Dichte des Nebels hierdurch das Resultat[2]) nicht geändert. Für die Lichtquelle selbst, wo ja auch das Babinetsche Theorem von der Gleichheit der Erscheinung komplementärer Beugungsschirme versagt, gilt dieses Gesetz nicht. Eine Berechnung der Intensität ist hier aber sehr erschwert und würde auch an dieser Stelle zu weit führen, da diese Überlegungen nur für die ev. Erklärung der Färbung der Lichtquelle selbst (axial colours) in Betracht kommen, worauf aber nicht näher eingegangen werden soll.

1) P. Drude, Lehrbuch d. Optik, S. 206; G. Kirchhoff, Optik S. 98ff.; Verdet, Wellentheorie, S. 200 u. 210.

2) Der Beweis wird ganz analog wie bei einer Beugungsebene durchgeführt.

(vgl. S. 629 u. 647). Im allgemeinen muß sie sich für diesen zentralen Fleck in die zu (16) analoge Form

$$M_0' = a^2 + n_1 a^2 \left(\frac{\pi r^2}{\lambda R}\right)^2 \tag{9}$$

bringen lassen, wobei n_1 mit wachsender Dicke und Dichte der Nebelschicht abnehmen und sogar bei sehr großer Anzahl der vorhandenen Nebeltröpfchen infolge der damit verbundenen Intensitätsabnahme erhebliche negative Werte annehmen muß. Die Beugungserscheinung besteht im monochromatischen Lichte also aus einem hellen Fleck in der Mitte von der Intensität M_0 umgeben von konzentrischen Ringen, deren Lage und relative Helligkeit (8) ergibt. Im weißen Lichte setzt sich die Erscheinung aus farbigen Ringen zusammen, welche in einer bestimmten Anordnung aufeinander folgen, und zwar ist diese Reihenfolge *unabhängig von der Tropfengröße*. Für das zentrale Feld, d. h. für den dem hellen zentralen Fleck sich unmittelbar anschließenden Teil des inneren Beugungsbildes, muß dieser Farbenton infolge der geringen Abhängigkeit[1]) von der Wellenlänge nahezu weiß mit einem *bläulichen* Tone sein, alles in Übereinstimmung mit den Beobachtungen bei den Kränzen um Sonne und Mond[2]) und den Versuchen an undurchsichtigen oder nur durchscheinenden, d. h. diffuses Licht durchlassenden Teilchen von beliebiger Größe. Nur bei Nebeltröpfchen von etwa $1-5\,\mu$ Radius zeigen sich gefärbte zentrale Felder und Abweichungen in der Farbenfolge, die abhängig sind von der Tropfengröße und dem Brechungsexponenten. Die *Durchsichtigkeit* muß also einen Einfluß auf die Beugungserscheinung haben, den ich nun untersuchen will.

§ 2. Beugung und Interferenz an durchsichtigen Kugeln.

Die Tropfen des Nebels wirken nämlich als Kugellinsen, welche das auffallende Licht durch zweimalige Brechung ablenken und stark divergent machen. Infolge der dadurch bedingten großen Abnahme der Lichtstärke wurde ein Einfluß der den Tropfen durchsetzenden Strahlen auf die Beugungserscheinung

1) Die Intensität ist nahezu durch den Ausdruck $1/\lambda^2$ gegeben, da dort $2/z\, I_1(z) \sim 1$ ist, so daß blaue Töne eine größere Intensität haben als die roten.

2) Vgl. J. Pernter, Meteorol. Optik, S. 406—413.

oft abgesprochen.[1]) Dies scheint nun bei großen Tropfen wirklich der Fall zu sein; bei Tropfen, deren Radius nur ein geringes Vielfache der Wellenlänge ist, dürfte die Helligkeit jedoch noch hinreichend sein, um jene großen Veränderungen der Erscheinungen hervorzurufen. Da das Licht beim Durchgange durch den Tropfen eine Gangverzögerung erfährt, und die Strahlen kohärent, also interferenzfähig, sind, so muß es sich um eine Interferenzerscheinung der den Tropfen durchsetzenden Strahlen mit den gebeugten handeln.[2])

Die Lichterregung aber, welche von den durch einen Tropfen gegangenen Strahlen im Punkte P hervorgerufen wird, läßt sich stets in die Form

$$s = b\cos\left[2\pi\left(\frac{t'}{T} - \frac{R}{\lambda}\right) - \delta\right] \tag{10}$$

bringen, während die der gebeugten Strahlen durch (8) gegeben war. Hierbei sind b und δ zunächst noch unbestimmt, ihre Berechnung erfolgt erst im nächsten Paragraphen. Um die Gleichungen jedoch übersichtlicher zu gestalten, führe ich vorher folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

$$\begin{cases} A = \dfrac{a\pi r^2}{R^2}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}, \\ K = \dfrac{b}{A} = \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{R}{\pi r^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}, \\ J = \dfrac{2}{z}J_1(z). \end{cases} \tag{11}$$

Nach dem Prinzip der Superposition der Lichterregungen folgt dann analog zu (3) und (4) aus (11) und (10)

$$\begin{cases} C = \dfrac{J}{\lambda} + K\sin\delta, \\ S = K\cos\delta \end{cases} \tag{12}$$

und die Intensität entsprechend zu (5).

Bei einer Vermehrung der Tropfen wächst auch hier die Helligkeit proportional ihrer Anzahl. Für die *axialen* Strahlen),

1) Vgl. J. Pernter, Meteorol. Optik S. 434.

2) Vgl. eine Bemerkung von R. v. Helmholtz in Ann. d. Phys. 27. S. 503–543. 1886.

bei denen noch *ungebeugtes* Licht interferieren kann, kommt außerdem der Anteil

$$+ n_2 \cdot 2ab \cos \delta$$

mit einer gewissen Stärke n_2 hinzu, welche von der Dicke der Nebelschicht abhängt. Die Intensitätsgleichung für diesen Teil der Erscheinung läßt sich dann in der Form

$$(13) \qquad \begin{cases} M_0 = a^2 + n_1 A^2 \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2K}{\lambda} \sin \delta + K^2\right] \\ \qquad + 2 n_2 ab \cos \delta \end{cases}$$

schreiben, wobei n_1 wieder sinken n uß, n_2 aber mit wachsender Dichte und Dicke des Nebels zunimmt. Eine Berechnung der Größenverhältnisse von n_1 und n_2 zueinander ist jedoch ohne weiteres nicht durchführbar, da hier die Vorgänge noch komplizierterer Art sind als bei undurchsichtigen Scheibchen.

§ 3. Berechnung der Phasenverschiebung δ und der Amplitude b.

Den Strahlengang des Lichtes durch den Tropfen zeigt nun Fig. 1. Bedeutet α der Einfallswinkel, β der Brechungs-

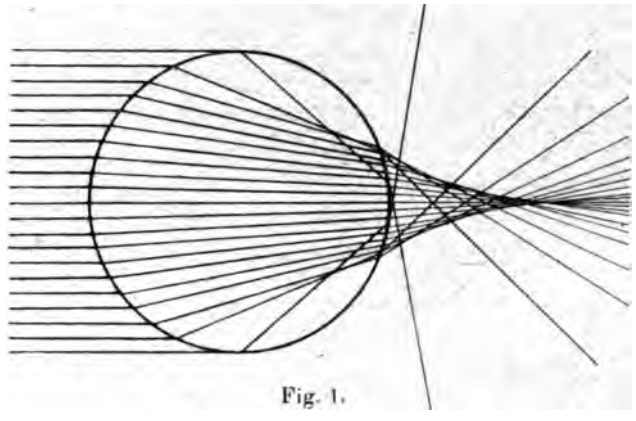


Fig. 1.

winkel, so beträgt die Ablenkung des aus dem Tropfen austretenden Strahles

$$(14) \qquad \varphi = 2(\alpha - \beta)$$

oder nach dem Brechungsgesetz $\sin \alpha / \sin \beta = n$ bei kleinen Winkeln angenähert

$$(14a) \qquad \varphi = 2\alpha \frac{n-1}{n} .$$

Für Wasser mit einem mittleren Brechungsexponenten von 4/3 wäre φ ungefähr die Hälfte des Einfallswinkels.

Da der Strahl ein optisch dichteres Medium durchsetzt, so erfährt er zur gleichen Zeit eine Gangverzögerung, deren Größe durch die Differenz $CABD - EOF$ (Fig. 2) gegeben

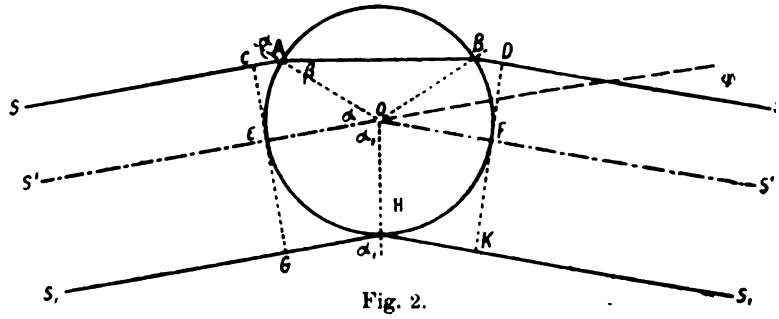


Fig. 2.

ist, wobei aber unter $CABD$ die optische Länge zu verstehen ist. Aus der Figur läßt sich dieser Wegunterschied leicht berechnen zu

$$\Delta = 2r(n\cos\beta - \cos\alpha), \tag{15}$$

so daß zunächst einmal eine Phasenverschiebung von

$$\delta_1 = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{4\pi r}{\lambda}(n\cos\beta - \cos\alpha) \tag{15a}$$

auftritt. Eine weitere Phasenänderung könnte durch eventuelle Beugung entstehen. Beugung des durch eine Linse gegangenen Lichtes findet aber nur in der Nähe ihres Brennpunktes statt, d. h. längs der Brennlinie.[1]) Im Beobachtungspunkte, der sich stets in großer Entfernung vom Brennpunkte befindet, kann eine solche Phasenänderung nie eintreten. Es muß aber die Tatsache berücksichtigt werden, daß die Schwingung in der Wellenfläche nach Durchgang durch einen Brennpunkt sich umkehrt, d. h. um eine halbe Periode beschleunigt schwingt. Diese Phasenanomalie, welche experimentell von Gouy[2]) Zeemann und Sagnac[3]) aus der Umkehr von Interferenz-

1) Verdet, Wellentheorie I. S. 98.
2) Gouy, Compt. rend. **110**. S. 1251—1253. 1890.
3) Sagnac, Journ. d. Phys. **2**. S. 721—722. 1903.

erscheinungen geschlossen wurde, ist von Debye[1]) und F. Reiche[2]) theoretisch begründet worden. Reiche zeigt, daß sie in großer Entfernung vor und hinter dem Brennpunkte 0 bzw. π beträgt. In seiner Nähe führt sie, eben infolge von Beugung, Schwankungen aus; im Brennpunkte selbst hat die Phasenanomalie den Wert $\pi/2$, dort haben wir es dann mit einem besonderen Falle von Fraunhoferschen Beugungserscheinungen[3]) zu tun.

Die gesamte Phasenänderung in (18) beträgt somit

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta + \pi . \tag{16}$$

Zur Berechnung der Amplitude b schlage ich ein von F. Richarz[4]) und von Roth[5]) benutztes Verfahren ein, das gestattet, die Intensität des den Tropfen durchsetzenden Lichtes zu berechnen. Diese Intensität, welche durch b^2 gegeben ist, ist proportional dem Quadrate der Amplitude des einfallenden Lichts und umgekehrt proportional der Divergenz, d. h. proportional der in die Raumwinkeleinheit gestrahlten Lichtmenge. Die Amplitude erfährt durch zweimalige Brechung nach den Fresnelschen Reflexionsformeln eine Abnahme, deren Komponente senkrecht zur Einfallsebene

$$a_s = a \frac{4\left(n \cos\frac{\varphi}{2} - 1\right)^2}{(n^2-1)^2} \tag{17}$$

und parallel dazu

$$a_p = \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} a_s$$

beträgt. Aus dem Mittelwert dieser Intensitäten folgt für nicht zu große Winkel (bis ca. $\varphi = 30^0$) genähert

$$a' = \varepsilon a = a \left(\frac{2}{n+1}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{n+1}{n-1} \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) . \tag{18}$$

Die Divergenz des Lichtes ist nun proportional der Fläche, auf der sich eine gegebene Lichtmenge ausbreitet. Eine solche

---

1) Debye, Ann. d. Phys. **30.** S. 755ff. 1909.
2) F. Reiche, Ann. d. Phys. **29.** S. 65—93 u. 401—440. 1909.
3) Vgl. E. Lommel, Abhdl. d. Bayr. Akad. **15.** S. 257. 1886.
4) F. Richarz, Deutsche Meteorol. Ztschr. S. 23. 1908.
5) F. Roth, Deutsche Meteorol. Ztschr. **2.** S. 52. 1885.

kleine Lichtmenge (Fig. 3) des parallelen Strahlenbündels von der Intensität a^2 sei, bevor es zum Tropfen gelangt, auf dem ringförmigen Querschnitt $df = 2\pi\varrho\, d\varrho$ verteilt. Nach dem Durchgang durch den Tropfen erstreckt sich dieselbe Menge,

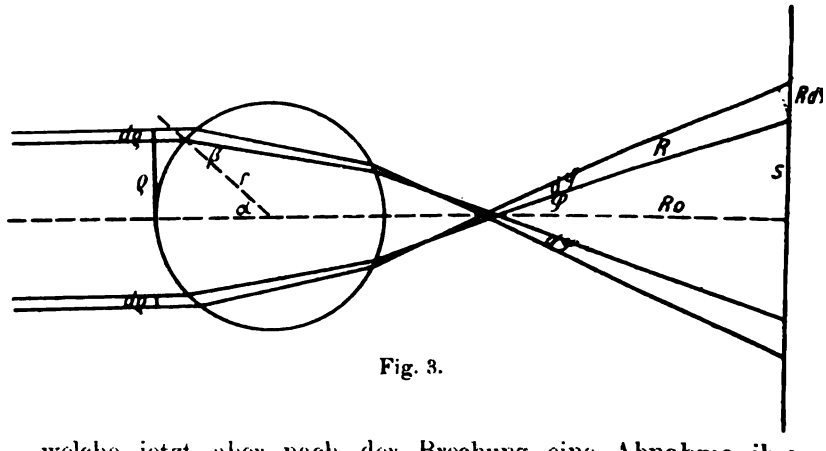


Fig. 3.

welche jetzt aber nach der Brechung eine Abnahme ihrer Helligkeit gemäß (18) auf a'^2 erfahren hat, über die Fläche $dF = 2\pi s \cdot R\, d\varphi$ des Raumwinkels $2\pi \sin\varphi\, d\varphi$. Die Lichtintensität im Beobachtungspunkte ist also:

$$b^2 = a'^2 \frac{df}{dF} = \varepsilon^2 a^2 \frac{\varrho\, d\varrho}{R s\, d\varphi}. \tag{19}$$

Nun bestehen folgende Beziehungen zum Einfalls- und Ablenkungswinkel:

$$\varrho = r \sin\alpha \quad d\varrho = r\cos\alpha\, d\alpha \quad s = R\sin\varphi. \tag{20}$$

Streng genommen müßte R zwar vom Schnittpunkte der Strahlen φ und $\varphi + d\varphi$ ausgerechnet werden, bei der Kleinheit des Tropfens kann dies aber von seinem Mittelpunkt aus geschehen.

Nach Einführung dieser Werte in (19) und einigen Umformungen unter Berücksichtigung des Brechungsgesetzes ergibt sich schließlich für die Größe K nach (11) der Wert

$$K = \frac{\varepsilon \cdot n}{A \cdot \pi \cos^2\frac{\varphi}{2}} \sqrt{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\frac{\varphi}{2}}}, \tag{21}$$

für $\varphi = 0$ strebt K dem Grenzwerte

$$K_0 = \frac{2}{(n+1)^2(n-1)} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{zu.} \tag{22}$$

Um später die Untersuchungen nicht unterbrechen zu müssen, ist es angebracht, gleich hier die numerischen Werte von Δ und K anschließen zu lassen, die die Tab. 1 für Wasser mit dem mittleren Brechungsexponenten 1,3333 bei verschiedenen Einfallswinkeln wiedergibt. Spalte 3 und 4 enthalten die Zunahme von Δ gegenüber $\Delta_0 = r \cdot 2\,(n-1) = 0{,}666 \cdot r$ (für $\varphi = 0$) im absoluten und im Winkelmaß.

Diese Zunahme ist besonders bei größeren Tropfenradien beträchtlich und strebt für $\alpha = 90^0$ dem maximalen Werte von $2\sqrt{n^2-1} = 1{,}7638$ zu.

Tabelle 1.

α	φ	$\Delta - \Delta_0$	$180\cdot(\Delta-\Delta_0)$	ε	$\frac{n}{\Delta}\sqrt{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\varphi/2}}$	K
0°	0°			0,735	2,000·1/r	0,468·1/r
5°	2° 30′	0,0020·r	0,36°·r	0,733	1,989	0,465
10°	5° 2′	0,0074	1,33°	0,730	1,956	0,456
15°	7° 37′	0,0178	3,20°	0,725	1,897	0,440
20°	10° 16′	0,0316	5,69°	0,713	1,822	0,418
30°	15° 57′	0,0734	13,21°	0,686	1,623	0,362
40°	22° 22′	0,1376	24,77°	0,639	1,376	0,291
50°	29° 52′	0,2302	41,44°	0,568	1,101	0,214
60°	39°	0,3610	64,98°	0,463	0,822	0,136

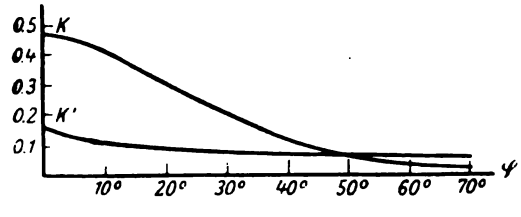


Fig. 4.

Die infolge der stärkeren Schwächung der Amplitude und des Anwachsens der Divergenz bedingte Abnahme von K ist bei kleinen Winkeln zuerst gering, um dann aber ziemlich beträchtlich zu werden. Die Kurve K in Fig. 4 bringt die Verhältnisse noch besser zum Ausdruck. Infolge der Dispersion des Lichtes beim Durchgang durch den Tropfen besteht auch noch eine geringe Abhängigkeit von Δ und K von der Wellenlänge, welche Tab. 2 für 4 verschiedene Fraunhofersche Linien zeigt.

Tabelle 2.

L	λ	n	Δ_0'	$180(\Delta_0' - \Delta_0)$	K_0
B	0,687 μ	1,3306	$0{,}6612 \cdot r$	$-0{,}10 \cdot r$	$0{,}473 \cdot 1/r$
D	0,589	1,3332	0,6664	−0,04	0,468
E	0,527	1,3354	0,6708	+0,07	0,464
G	0,431	1,3406	0,6812	+0,26	0,453

Doch sind die Abweichungen vom Mittelwerte nicht erheblich. Ein Vergleich der Konstanten Δ_0 und K_0 ($\varphi = 0$) mit denen der andern im experimentellen Teile benutzten Flüssigkeiten gibt die folgende Tabelle.

Tabelle 3.

	n	Δ_0	$\Delta - \Delta_w$	K_0	K/K_w
Wasser	1,333	$0{,}666\,r$	1,0	0,468 $1/r$	1,0
Äther	1,354	0,708	1,062	0,439	0,937
Alkohol	1,362	0,725	1,087	0,428	0,915
Chloroform	1,446	0,892	1,338	0,345	0,737
Toluol	1,499	0,998	1,497	0,306	0,653
Benzol	1,504	1,008	1,512	0,302	0,646
Anilin	1,586	1,172	1,758	0,258	0,550

Die erhebliche Zunahme von Δ_0 bzw. Abnahme von K_0 bei Flüssigkeiten mit hohem Brechungsexponenten (z. B. Anilin) kommt besonders deutlich bei den zu Wasser relativen Werten der 3. und 5. Spalte zum Ausdruck.

§ 4. Einfluß des an der Oberfläche vom Tropfen reflektierten Lichtes auf die Beugungserscheinung.

Es ist jetzt die Frage zu untersuchen, ob noch andere Strahlen vorhanden sind, welche mit dem gebeugten Lichte merkbare Interferenzerscheinungen hervorzurufen vermögen. Von dem einfallenden Lichte durchsetzt nämlich nur ein Teil den Tropfen mit zweimaliger Brechung. Das übrige Licht wird teils an der Oberfläche gleich, teils aber auch mehrmals innen reflektiert, um dann erst den Tropfen zu verlassen. Innere Reflexionen kommen nun für Interferenzen mit gebeugtem Licht nicht in Betracht. Der einmal innen zurückgeworfene Strahl tritt auf der Rückseite des Tropfens aus und gelangt somit nicht in das Auge des Beobachters; bei mehrmaligen inneren Reflexionen ist aber der Gangunterschied zu groß und die Intensität zu gering geworden, um noch

einen merklichen Einfluß auf die Gesamterscheinung ausüben zu können. So sind bereits schon bei dem zweimal reflektierten Strahl für Wasser und $\varphi = 0$, die Werte $\Delta = 2r(3n - 1) = 9\Delta_\omega$ und $K = 0{,}004\,K_\omega$, und noch ungünstiger ist es bei drei inneren Reflexionen. Besser liegen die Verhältnisse aber bei dem an der Oberfläche reflektierten Lichte, da hier die streifend, d. h. unter einem Einfallswinkel von nahezu 90° auffallenden Strahlen so kleine Ablenkungswinkel und Phasenänderungen erleiden, daß sie sichtliche Interferenzen hervorrufen können; auch ist die Intensität eine bedeutend größere als bei den inneren Reflexionen, allerdings reicht sie nicht an die Helligkeit des durchgehenden Lichtes heran.

Aus Fig. 2 ist leicht ersichtlich, daß hier die Wegdifferenz $GHK - EOF$ gleich

$$\Delta_1 = -2r\sin\frac{\varphi}{2}, \tag{23}$$

also negativ ist. Zwischen Einfallswinkel und Beugungswinkel besteht noch die Beziehung

$$\varphi = \pi - 2\alpha_1, \tag{24}$$

woraus dann bei kleinen Winkeln angenähert

$$-\frac{2\pi\Delta_1}{\lambda} = z \quad \text{folgt.} \tag{23a}$$

Für die Berechnung der Amplitude des reflektierten Lichtes gelten dieselben Überlegungen wie bei den durch den Tropfen gehenden Strahlen. Das einfallende Licht erleidet durch Reflexion die Schwächung

$$a''^2 = (-\varepsilon_1 a)^2 = (-a)^2 \cdot \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\cos\left(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\beta_1 - \frac{\varphi}{2}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{cotg}\left(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{cotg}\left(\beta_1 - \frac{\varphi}{2}\right)}\right)^2\right]. \tag{25}$$

Da nun

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = -\frac{1}{2} \tag{26}$$

und der Einfallswinkel negativ zu nehmen ist, so erhält man für die Amplitude c des reflektierten Strahles mit Rücksicht auf (26) aus (19) den genauen Wert

$$c = -\frac{\varepsilon_1 a}{2}\,\frac{r}{R}. \tag{27}$$

Hieraus geht hervor, daß die Divergenz des Lichtes stets k stant[1]) ist, daß es also, abgesehen von der Abnahme sei Amplitude a, überallhin gleich stark reflektiert wird. Ich füh nun wieder die zu (11) analoge Abkürzung

$$K_1 = x K = \frac{\varepsilon_1}{2 a r \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \tag{28}$$

ein, wobei mir x^2 das Verhältnis der Intensitäten vom reflektierten und durchgegangenen Lichte anzeigt. Die folgen Tabelle enthält dann wieder für dieselben Beugungswinkel Tab. 1 die entsprechenden Werte von J_1, ε_1, K_1 und x. Fig zeigt in einer Kurve K' die Abnahme von K_1 graphisch.

Tabelle 4.

φ	J_1	$180 \cdot J_1$	ε_1	K_1	x
0°	0,0	0,0	1,000	0,159 1 r	0,340
2° 30′	0,0437 · r	7,87° · r	0,934	0,149	0,320
5° 2′	0,0878	15,80°	0,872	0,139	0,305
7° 37′	0,1332	23,98°	0,814	0,130	0,296
10° 16′	0,1790	32,22°	0,759	0,122	0,291
15° 57′	0,2776	49,97°	0,654	0,106	0,294
22° 22′	0,3880	69,84°	0,556	0,092	0,316
29° 52′	0,5154	92,77°	0,463	0,079	0,369
39°	0,6676	120,17°	0,374	0,067	0,490

Ein Vergleich mit Substanzen von anderen Brechungsexponenten erübrigt sich, da nur ε_1 von n abhängig ist. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, beträgt der Wert von x im Durchschnitt $^1/_3$; daß aber die Intensitäten des reflektierten und des durchgehenden Lichts nicht, wie sonst angenommen wird, unerheblich sind, zeigt folgende Überlegung: Senkrecht zur Richtung des Strahlenbündels können nur die an der Oberfläche der Tropfen reflektierten Strahlen ins Auge des Beobachters gelangen. Dieses Licht, welches bei den Versuchen sehr deutlich bemerkbar ist, besitzt nun eine Intensität von $c^2 = 0{,}007\, (r \cdot R)^2$, d. h. also nur 0,027 der Intensität des reflektierten bzw. 0,0031 des durchgegangenen Lichts für $\varphi = 0$. Wenn man die Blickrichtung von $\varphi = 90°$ bis $\varphi = 0$ ändert, kann man auch deutlich die beträchtliche Helligkeitszunahme beobachten.

Zu dem gebeugten und dem durch den Tropfen gegangenen Strahle, welche durch die Gleichungen (8) und (10) gegeben

1) Vgl. F. Richarz, Meteorol. Ztschr. **25**, S. 23, 1908.

sind, kommt nun also als dritter und letzter Strahl, der Interferenz hervorrufen könnte, der an der Oberfläche reflektierte hinzu. Sein Schwingungszustand im Punkte P ist durch

$$s_2 = -\frac{s_1 a}{2}\,\frac{r}{R}\cos 2\pi\left(\frac{t'}{T} - \frac{R-\Delta_1}{\lambda}\right) \tag{29}$$

darstellbar, wo Amplitude und Phase sich aus (27) bzw. (23) berechnen lassen. Da der Strahl den Brennpunkt, welcher auf der Rückseite des Tropfens liegt, nicht passiert, so findet hier keine Phasenverschiebung um π statt. Aber bei der Reflexion an einem optisch dichteren Medium wird nach den Fresnelschen Reflexionsformeln die Amplitude, wie in (25) ersichtlich, negativ. Mit Rücksicht auf (16), (21) und (23), (28) erhält jetzt Gleichung (12) das Aussehen

$$\left\{\begin{aligned} C &= \frac{J}{\lambda} - K\sin\frac{2\pi}{\lambda}\Delta + K_1\sin\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_1\,,\\ S &= -K\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta - K_1\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_1 \end{aligned}\right. \tag{30}$$

und die Intensitätsgleichung erweitert sich dann auf die komplizierte Form

$$\left\{\begin{aligned} M_1 = A^2\Big|&\frac{J^2}{\lambda^2} - \frac{2JK}{\lambda}\left(\sin\frac{2\pi\Delta}{\lambda} - x\sin\frac{2\pi\Delta_1}{\lambda}\right)\\ &+ K^2\left(1 + 2x\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta+\Delta_1) + x^2\right)\Big|\,. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Selbstverständlich wächst auch hier die Intensität proportional der Anzahl der unregelmäßig verteilten Tropfen. Für die axialen Strahlen kann die Reflexion nicht in Betracht kommen und es bleibt die frühere Gleichung (13) unverändert bestehen.

§ 5. Anwendung der Beugungsformel kleiner Kugellinsen zur Erklärung der Beugungserscheinungen im homogenen Nebel.

In dem vorigen Paragraphen habe ich also bis jetzt gezeigt, daß an Stelle der Beugungsformeln kreisförmiger, undurchsichtiger Scheibchen (8), (9) für kleine Kugellinsen die dort abgeleiteten Gleichungen (31) und (13) zu setzen sind. Ist nun diese Theorie auch imstande, die im experimentellen Teil[1]) nachgewiesenen eigenartigen Beugungserscheinungen des homogenen Nebels zu erklären? Nach Bejahung dieser Frage, und

1) Ann. d. Phys. **61.** S. 471—500. 1920.

zwar sowohl für monochromatisches als auch für weißes Lic
wird es noch von Wichtigkeit sein, zu wissen, inwieweit
aufgestellten Gleichungen eine Bestimmung der Tropfengrö
zulassen.

a) Monochromatisches Licht.

Die Intensität in einem beliebigen Punkte des Beugun
bildes hängt nun von dem Tropfenradius, von der Wellenlän
und vom Beugungswinkel ab. An Stelle von φ ist es jedoch
zweckmäßiger $z = 2\pi r/\lambda \sin\varphi$ zu setzen, außerdem treten
und λ nur in der Verbindung r/λ auf, so daß die Helligkeit
verteilung des Beugungsbildes im Grunde genommen ei
Funktion der beiden unabhängigen Variabeln[1]) z und r/λ i
Die Lage der Maxima und Minima im monochromatischen Lic
würde sich aus dem ersten Differentialquotienten von (3
nach φ berechnen. Da aber die direkte Auswertung dieser Gl
chung praktisch wohl unmöglich sein dürfte, so blieb mir
ihrer Bestimmung nur die graphische Methode übrig. Zur Da
stellung brachte ich vorläufig auch nur den Intensitätsverlauf d
Beugungsbildes im Natriumlicht ($\lambda = 0{,}589\,\mu$) für die Tropfe
radien $2\,\mu$, $2{,}25\,\mu$ und $2{,}5\,\mu$; der Wert der Variablen r/λ b
trug also stets 3,39 bzw. 3,82 und 4,25. Die Werte von I und
wurden der der Lommelschen Abhandlung[2]) beigefügten, au
führlichen Tabelle Besselscher Funktionen entnommen, z
Bestimmung aller anderen Größen dienten die diesbezüglich
(erweiterten) Tabellen dieser Arbeit. Außer für die Winkelwer
von $2\pi\,\Delta/\lambda$, welche logarithmisch berechnet wurden, genügt
für die Rechnungen ein Rechenschieber; ihre Genauigkeit un
Richtigkeit wurde außerdem noch durch den stetigen Verla
der Kurven erwiesen. Auf diese Weise entstanden aus u
gefähr je 30 Punkten die in Fig. 5 dargestellten Intensität
kurven, denen gleichzeitig die Kurve für undurchsichtig
Tropfen beigefügt worden ist. Der Unterschied ist erheblic
und in die Augen fallend. Während für letztere die Minim
stets bei $z = 3{,}83$ und 7,01 liegen, verschieben sie sich b
einem Tropfenradius von $2\,\mu$ nach $z = 3{,}35$ und $z = 6{,}5$
was Beugungswinkeln von 9^0 und $17^0\,42'$ entsprechen würd
Die Maxima sind stark ausgeprägt und haben eine bedeuten

1) Abgesehen von der geringen Veränderlichkeit des Brechung
exponenten mit der Wellenlänge.

2) E. Lommel, Abhdlg. d. Bayr. Akad. 15. S. 224—328. 188

größere Helligkeit als bei undurchsichtigen Tropfen. Sehr charakteristisch ist nun der Intensitätsverlauf beim Tropfenradius 2,25 μ. Hier wird nämlich gerade die in den Versuchen so auffallende Erscheinung, daß die beiden ersten Minima

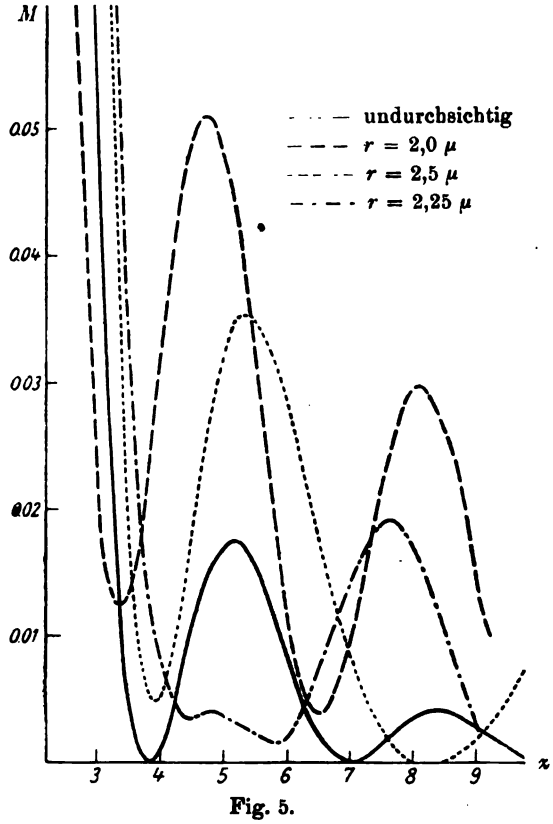


Fig. 5.

sich unter Umständen zu einem breiten, dunklen Ring vereinigen können, durch eine aus der *Theorie* folgende Kurve dargestellt. In Fig. 5 zeigt das bei $z = 4{,}8$ liegende, sehr kleine Maximum, daß das sehr breite Minimum zwischen $z = 4$ und $z = 6$ wirklich aus 2 Minima bei $z = 4{,}6$ und $z = 5{,}9$ besteht, die sich nahezu vereinigt haben. Für den Radius 2,5 μ ergeben sich die Minima bei $z = 3{,}90$ und 8,1, gleichbedeutend mit den Winkeln 8° 22′ und 17° 36′. Besonders bemerkenswert ist hier noch die beträchtliche Abweichung des zweiten Minimums

von der normalen Lage und seine Breite, während der ge dunkle Ring ziemlich schmal bleibt. Da ferner auch Helligkeit der Minima Schwankungen unterworfen ist, so weisen die obigen Beispiele wohl schon zur Genüge, daß Beugungstheorie kleiner Kugellinsen imstande ist, das mann faltige, in § 3[1]) beschriebene Aussehen in allen Einzelheiten erklären. Auch der Beobachtungskurve (Fig. 2)[1]) passen si die Werte der beiden ersten Minima von 2μ und $2{,}5\mu$, d. 9^0 und $17^0\,42'$ bzw. $8^0\,22'$ und $17^0\,36'$, nebst der im folgend Paragraphen berechneten Färbung[2]) des zentralen Feldes den Punkten C und D ziemlich gut an. Infolge der e gegengesetzten Abweichung der Minima liegen die Werte die beisammen, so daß das Aussehen des Beugungsbildes fast r durch die etwas verschiedene Breite der Ringe charakterisi wäre. Nach dieser Beobachtungskurve müßten sich dann au für einen ziemlich in der Mitte zwischen 2μ und $2{,}5\mu$ lieg den Tropfenradius die beiden Minima vereinigen, was r $2{,}25\mu$ ja tatsächlich erfüllt ist, also auch hier Übereinstimmu zwischen Beobachtung und Theorie. Berechnet man nun r jede einzelne Tropfengröße die dazugehörende Intensitätsve teilung, so muß sich schließlich eine der Beobachtung (Fig. 2 entsprechende Kurve ergeben. Man erkennt deutlich, daß d Abweichungen immer geringer werden müssen, da K so lan ungekehrt proportional dem Radius abnimmt und der Gan unterschied mit größer werdenden Tropfen wächst, bis schließlic die diesbezüglichen Glieder in (31) vernachlässigt werden kön und — nach den Beobachtungen von etwa 5μ ab — nur noc das normale Beugungsbild I^2/λ^2 übrig bleibt. (Beschleuni konnte dieser Vorgang noch durch eine gewisse Inhomogenit des Nebels und durch die Ausdehnung der Lichtquelle werden Aus diesen Gründen mußten dann auch Versuche, welche ich a dünn ausgezogenen Glasfäden anstellte, fehlschlagen, denn die besaßen schon einen Radius von mindestens 30μ, auch w. der Brechungsexponent[3]) ein größerer als bei Wasser.

1) A. a. O. S. 493.

2) Da die Werte 3.39 und 4,25 von r/λ der Berechnung zugrun liegen, so sind bei der Beobachtung im *roten* Licht ($\lambda = 0{,}65\,\mu$) d Tropfen, welche diesen Beugungsbildern entsprechen würden, tatsächlic größer, nämlich $2{,}2\,\mu$ bzw. $2{,}76\,\mu$. Für $r = 2{,}2\,\mu$ ist das zentrale Fe grünlichgelb gefärbt (vgl. Fig. 7).

3) Vgl. unten.

Ferner ist ersichtlich, daß im monochromatischen Licht Tropfengrößen $< 5\,\mu$ nicht ohne weiteres berechnet werden können, denn jedem Tropfenradius entspricht ja ein gänzlich anderer und deshalb unbekannter Wert der für die Berechnung erforderlichen Größe z; es kann sogar, wie obiges Beispiel andeutet, in der Nähe der Spitzen A und B (Fig. 2)[1]) der Fall eintreten, daß zwei verschiedene Tropfenradien fast genau dieselben Beugungsbilder in bezug auf den Ringdurchmesser der Minima haben, da die beiden Äste der Kurve fast zusammenfallen, besonders bei B.

b) Weißes Licht.

Im weißen Licht beschränkte ich mich auf die Berechnung des Farbentones im zentralen Feld, da nach den Beobachtungen nur für dieses (im Gegensatz zu den komplizierteren Gesetzmäßigkeiten in den Ringen) ein regelmäßiger Farbenwechsel besteht. Diese Berechnung kann bekanntlich mit der Farbengleichung und dem Farbendreiecke von Maxwell[2]) ausgeführt werden. Als Grundfarben wählte Maxwell ein Rot von der Wellenlänge $0{,}630\,\mu$, ein Grün bei $\lambda = 0{,}528\,\mu$ und ein Indigo bei $\lambda = 0{,}457\,\mu$, von denen nach seinen Messungen 24,0 Proz. Rot, 38,3 Proz. Grün und 37,7 Proz. Indigo zusammen Weiß ergaben. Für die Farbenbestimmung ist es nun noch notwendig, den Anteil jeder Spektralfarbe in diesen drei Grundfarben zu wissen, um durch die Aufteilung in einzelne Komponenten die verschiedenen Farben addieren zu können. Wie aber Exner in seiner Theorie des Regenbogens gezeigt hat, genügt es im allgemeinen, die Rechnung für acht verschiedene Wellenlängen durchzuführen, nämlich für die Spektrallinien B, C, D, E, x, F, y, G, welche auch ich deshalb auswählte. Man muß dann nur auch das von Exner benutzte Farbendreieck nehmen, welches gegenüber dem Dreieck von Maxwell eine kleine Verschiebung der drei zugrunde gelegten Fixpunkte, besonders des für Blau nach Violett zu, aufweist, da Maxwell seine Farbberechnungen mit 22 Wellenlängen ausführte. In dem Farbendreieck von Exner ist jedoch noch m. E. eine kleine Änderung in der Farbenbenennung anzubringen, indem an Stelle

1) A. a. O. S. 493.

2) J. C. Maxwell, Phil. Trans. L. R. S. S. 52. 1860; vgl. auch Mascart, Traité d'Optique I.

von Rosa, welches nur ein mit Weiß gemengtes Rot aber *kei reine* Farbe sein kann, die Bezeichnung „Rötlich-Violet einzuführen ist (vgl. Fig. 6 u. 7). Folgende der Exnersch Arbeit[1]) entnommene Tab. 5 zeigt die Auflösung dies 8 Farben in die 3 Komponenten der Grundfarben und zw in Prozenten der Intensität des weißen Sonnenlichts.

Tabelle 5.

	λ	Rot	Grün	Violett	Weiß
B	0,687 μ	2,3	0,0	0,0	2,3
C	0,656	8,5	0,1	0,8	9,4
D	0,589	14,6	11,7	− 0,1	26,2
E	0,527	− 0,1	15,2	0,2	15,3
x	0,494	− 0,8	7,1	5,5	11,8
F	0,486	− 0,8	4,5	9,3	13,0
y	0,449	0,3	0,1	14,8	15,2
G	0,431	0,0	− 0,4	7,2	6,8
	Weiß	24,0	+ 38,3	+ 37,7	= 100,0%

Durch Addition erhält man dann die Farbgleichung fü weißes Licht, und auf dieselbe Weise läßt sich auch bei ander Intensitätsverteilung der Anteil der einzelnen Farben a Farbton feststellen. Diesen kann man sich aber entstande denken aus einer Mischung reiner Spektralfarbe mit eine bestimmten Anteil Weiß; so lautet z. B. die für $z = 2{,}8$ (d. für $\lambda = 0{,}589\,\mu$ ist $\sin\varphi = 1{,}65 \cdot 1/r\,\mu$) im Beugungsbild u durchsichtiger Tropfen durch Addition der Komponenten e haltene und auf Prozente der Gesamtsumme umgerechne Farbengleichung

$$53{,}47\,R + 38{,}28\,G + 8{,}25\,V = 100{,}0\,,$$

worin die violette Grundfarbe am wenigsten enthalten is Reduziert man nun die Weißgleichung (Tab. 5) auf dies Anteil Violett, also auf $5{,}25\,R + 8{,}37\,G + 8{,}25\,V = 21{,}8$ so erhält man sofort den Prozentgehalt von Weiß in der Misch farbe zu 21,87 Proz.; Spektralfarbe ist also mit 78,13 Pro vertreten und zwar sind davon, wie eine einfache Rechnu zeigt, 48,22 Proz. Rot und 29,91 Proz. Grün. Die Bestimmu der Farbe geschieht nun mittels eines gleichseitigen Dreieck dessen Ecken die drei Grundfarben einnehmen, während d

1) J. Pernter, Metereol. Optik. S. 530. 1910.

übrigen Farben längs der Seiten ausgebreitet gedacht sind. Die ungefähren Grenzen sind durch die punktierten Linien angedeutet (Fig. 6), außerdem ist jede Dreiecksseite noch in 10 gleiche Teile geteilt, so daß jede Farbe durch eine Zahl angebbar ist. Im obigen Beispiel besteht die Farbe aus 0,38 Teilen Grün und 0,62 Teilen Rot, welches dem Punkte 3,8 des Farbendreiecks entspricht, da sich die Abstände von den

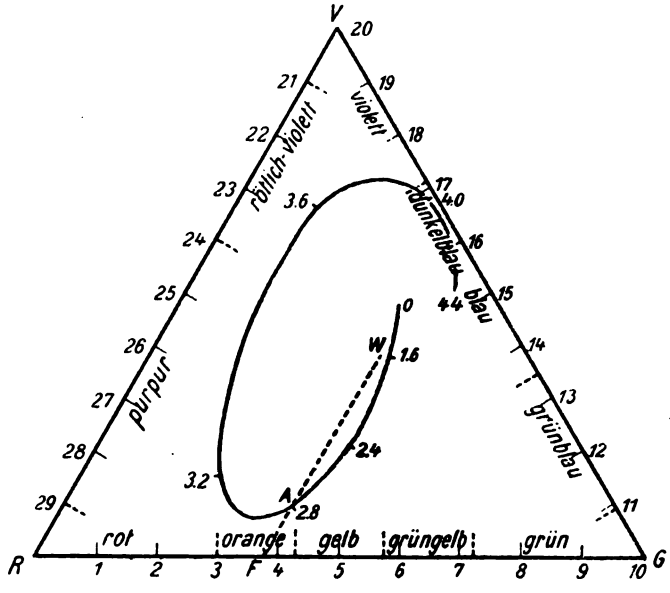


Fig. 6.

Dreiecksecken umgekehrt proportional den Anteilen an Grundfarben verhalten. Der Farbton für $z = 2{,}8$ ist also ein tiefes Dunkelorange mit wenig Weiß. Trägt man nun den durch die Farbengleichung in Dreieckskoordinaten gegebenen Wert in das Farbendreieck ein und verbindet den entsprechenden Punkt A mit dem Weißpunkt W, so gibt der Schnittpunkt der über A hinaus verlängerten Geraden mit der Dreiecksseite direkt die Spektralfarbe, während der Punkt A selbst die Strecke im Verhältnis des Weiß- und Farbgehaltes teilt; d. h. es ist $WA : WF = 78{,}13$ und $AF : WF = 21{,}87$.

Auf diese oben nur kurz angedeutete Weise bestimmte ich nun zunächst die Farbenfolge in der Beugungserscheinung un-

durchsichtiger Tropfen und erhielt so im Farbendreieck die in Fig. 6 dargestellte Kurve, während Tab. 6 die Farbgleichungen und die aus ihnen berechneten Farbtöne wiedergibt.

Tabelle 6.

z	Rot	Grün	Viol.	Int.	Weiß Proz.	Farbe Proz.	L[1])	Farbton (ber.)
0,0	21,23	46,81	61,15	129,19	68,5	31,5	16,8	weißlichblau
1.6	11,78	19,89	19,10	50,77	96,6	3,4	13,5	weiß
2.4	4,97	5,51	2,72	13,20	54,6	45,4	4,6	hellgelb
2,8	2,606	1,866	0,402	4,874	21,9	78,1	3,8	dunkelorange
3,2	1,041	0,381	0,266	1,688	41,8	58,2	1,1	tiefrot
3,6	0,241	0,168	0,771	1,180	37,1	62,9	21,8	schwarzviolett
4,0	0,025	0,445	0,996	1,466	7,1	92,9	17,0	dunkelblau
4,4	0,093	0,691	0,784	1,568	24,7	75,3	15,4	dunkelblau

Wie man sieht, entspricht die Farbenfolge vollauf den Beobachtungen an Staubplatten und homogenen Nebel großer Tropfen. Besonders bemerkenswert ist der schroffe Farbenwechsel zwischen Rot und Violett, verbunden mit einer beträchtlichen Abnahme der Gesamtintensität (Spalte 5), so daß das Minimum des weißen Lichts bei $z = 3.7$ (bzw. 3.83 und λ 0,571) eine zur Messung gut geeignete scharfe Grenze ergibt. Für $z = 1.6$ berührt die Kurve nahezu den Weißpunkt, infolgedessen dürfte dort der Gesamteindruck bei dem geringen Farbgehalt an Blau (3.4 Proz.), welcher unter Berücksichtigung der Ausdehnung der Lichtquelle noch mehr herabgesetzt[2]) wird, reines Weiß sein. Deshalb benutzte ich für die Berechnung der Färbung des zentralen Feldes aus Gleichung (31) auch diesen Wert von z, umsomehr als in dieser Entfernung von der Lichtquelle die diesbezüglichen Beobachtungen in Tab. 1 bis 4[3]) auch erst ausgeführt werden konnten. Die Resultate gibt Tab. 7 und Fig. 7. Die Reflexion an der Oberfläche kommt hier nicht so in Betracht, den Hauptanteil an der Farbenentwicklung haben vielmehr die Strahlen, welche den Tropfen durchsetzen. Die Interferenzerscheinung ist jedoch nicht identisch mit den Farben dünner Blättchen, denn diese gehorchen nicht dem

1) Lage der reinen Spektralfarbe im Farbendreieck vgl. Fig. 6.
2) Vgl. Mascart, Traité d'Optique III.
3) A. a. O. S. 485.

sin-Gesetz (31), sondern werden durch $\pm \cos 2\pi/\lambda \cdot \Delta$ dargestellt. Eine große Ähnlichkeit besteht allerdings mit ihnen, wie die Resultate zeigen. Nach diesen Werten, welche gerade die beiden ersten Perioden des Farbenwechsels umfassen, bestimmte ich nun aus der jeweiligen beobachteten

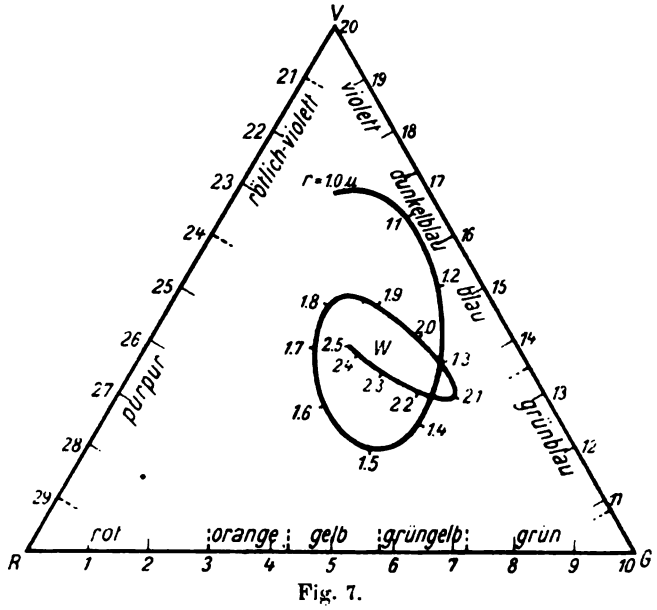


Fig. 7.

Färbung des zentralen Feldes die Tropfengröße in den Tab. 1 und 2.[1]) Für die dritte Periode, d. h. für Tropfenradien größer als $2{,}5\,\mu$, glaubte ich jedoch die Farbberechnung in der angegebenen Weise nicht mehr durchführen zu können, da dann infolge des großen Gangunterschieds und dem dadurch bedingten schnellen Wechsels von $\sin 2\pi\Delta/\lambda$ bzw. $\cos 2\pi(\Delta - \Delta_1)/\lambda$ 8 Wellenlängen für die Farbengleichung nicht mehr genügen dürften.

Die Berechnungen würden aber immer hellere Farbentöne ergeben, bis schließlich (bei etwa $4-5\,\mu$) kein Unterschied in der Färbung des zentralen Feldes mehr zu erkennen ist, so daß auch hier recht gute Übereinstimmung mit der Beobachtung besteht. Die Fig. 7 läßt z. B. noch deutlich erkennen, daß infolge der starken Krümmung der Kurve

1) A. a. O. S. 485.

Tabelle 7.

r	Rot	Grün	Viol.	Int.	Weiß Proz.	Farbe Proz.	$L^1)$	Farbton
1,00 μ	20,6	25,6	71,5	117,7	56,8	43,2	20,9	hellviolett
1,125	8,1	53,3	96,8	158,2	21,3	78,7	16,7	dunkelblau
1,25	16,6	81,8	78,9	177,3	39,0	61,0	14,9	hellblau
1,375	34,3	85,7	44,1	164,1	71,0	29,0	8,7	hellgrün
1,5	48,3	67,5	28,8	144,6	52,8	47,2	5,6	grünlich gelb
1,625	51,4	45,7	42,9	140,0	81,2	18,8	0,8	rot
1,75	42,0	37,0	62,4	141,4	68,3	31,7	24,2	purpur
1,875	27,9	43,9	65,6	137,4	83,3	16,7	20,2	violett
2,00	18,7	55,9	51,3	125,9	62,0	38,0	14,6	blau
2,125	19,3	58,8	36,2	114,3	70,2	29,8	11,8	grün(bläulich)
2,25	26,6	54,1	38,2	118,9	85,2	14,8	8,7	grün
2,375	34,2	46,6	47,5	128,3	94,8	5,2	27,5	hellpurpur
2,5	36,4	43,9	52,4	132,7	86,4	13,6	24,9	purpur
undurchs.	23,2	39,2	37,6	100,0	96,6	3,4	13,5	weiß (blau)

bei 2,1 μ die grüne Farbe der zweiten Periode besonders gut ausgeprägt und beständig sein muß. Ein Vergleich aber der so berechneten Färbungen mit denen des Ostwaldschen Farbenatlasses, wie ich ihn bei den Beobachtungen versucht habe, läßt sich hier nicht durchführen, denn die obige Berechnung beruht auf der dem Auge verschiedenen, rein subjektiven Helligkeitswahrnehmung der einzelnen Farben, während im Atlas alle Farben (objektiv) dieselbe Helligkeit besitzen, außerdem ist ihm auch ein für die Praxis bestimmtes Farbendreieck, dessen drei Ecken nämlich die *betreffende Spektralfarbe, Weiß und Schwarz* einnehmen, zugrunde gelegt.

Aus Gleichung (31) ist jetzt auch die Abhängigkeit der eigenartigen Beugungserscheinungen im homogenen Nebel vom Brechungsexponenten und die Erklärung der Beobachtungen an anderen Flüssigkeiten leicht ersichtlich. Da nämlich die Durchsichtigkeit der Tropfen (wenigstens für das zentrale Feld) den größten Anteil an der anomalen Farbenentwicklung hat, so muß, um dieselbe Phasendifferenz $2\pi\Delta/\lambda$ und somit auch dieselbe Farbenerscheinung im Beugungsbild zu bekommen, die Beziehung bestehen (15a)

$$r : r_1 = (n_1 \cdot \cos\beta_1 - \cos\alpha_1) : (n \cdot \cos\beta - \cos\alpha) ,$$

d. h. die Tropfenradien müssen sich annähernd für kleine α und β umgekehrt proportional den um eins verminderten

1) Vgl. Fig. 7.

Brechungsexponenten verhalten. Allerdings besteht zwischen den Intensitätsgrößen K nicht dasselbe, reziproke Verhältnis (vgl. Tab. 3), und dazu kommt außerdem noch die nicht zu vernachlässigende Reflexion an der Oberfläche des Tropfens. Infolgedessen können sehr wohl kleine Verschiedenheiten an den Erscheinungen in den *Ringen*, besonders bei monochromatischem Licht, auftreten, so daß hierin die Messungen der Ringdurchmesser im Anilinnebel[1]), welche nicht genau diesem Verhältnisse entsprechen, ihre Erklärung finden. Auf jeden Fall können dieselben Beugungserscheinungen erst an um so kleineren Tropfengrößen auftreten, je größer der Brechungsexponent ist, wie ja auch einwandsfrei aus den Versuchen hervorgeht. Ist aber der Brechungsexponent bekannt, so gestattet dann auch die jeweilige Färbung des zentralen Feldes die Tropfengröße schnell und bequem bis auf wenige Prozente genau zu bestimmen, während dies im monochromatischen Licht aus den Beugungswinkeln der Minima ja nicht ohne weiteres möglich war. Die Grenze, bis zu der die obige Methode anwendbar ist, beträgt bei Wasser ungefähr $3-4\,\mu$.

Es bleibt jetzt noch übrig, die zum zentralen Feld *meistens komplementäre* Färbung der Lichtquelle zu erklären, deren Intensität durch die Formel (13) gegeben war. Da ich auf die Ableitung dieser Gleichung nicht näher eingehen konnte, die Erscheinung auch weniger charakteristisch und überhaupt schwer wahrzunehmen ist, so kann ich mich hier kurz fassen. Besonders zu bemerken ist, daß die Färbung erst bei sehr dichtem Nebel auftritt, wo also die Helligkeit der Lichtquelle schon beträchtlich abgenommen hat. Diese Intensitätsabnahme drückt sich in der Formel durch einen großen negativen Wert von n_1 aus, und dieser Zeichenwechsel hat nun zur Folge, daß die Färbung ins Komplementäre umschlägt. Dazu kommt noch das Glied

$$2n_2\, a \cdot A \cdot K \cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta$$

mit einer gewissen Stärke n_2, demzufolge die Lichtquelle, wie auch aus den Beobachtungen hervorgeht, *nicht immer genau komplementär* zum zentralen Feld gefärbt erscheint. Die Verhältnisse liegen hier also durchaus nicht so einfach, wie sie etwa Barus für seine Erklärung annahm, besonders ist die

1) A. a. O. S. 498.

Schichtdicke des Nebels von nicht geringem Einfluß auf die Sichtbarkeit der Erscheinung. Näheren Aufschluß darüber kann aber erst eine eingehende theoretische Untersuchung über die Lichtdurchlässigkeit von *dichtem* Nebel geben.

Zusammenfassung.

Die Hauptergebnisse der vorliegenden Untersuchungen lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

Die im ersten Teil dieser Arbeit [vgl. die Zusammenfassung[1])] näher beschriebenen eigenartigen Farbenerscheinungen und Intensitätsverteilungen im Beugungsbild des künstlichen homogenen Nebels lassen sich durch die Beugungstheorie kleiner Kugellinsen erklären.

An Stelle der einfachen Beugungsformel undurchsichtiger, kreisförmiger Scheibchen tritt hier eine bedeutend komplizierte Gleichung (31), welche dadurch entsteht, daß auch das den Tropfen durchsetzende und das an seiner Oberfläche reflektierte Licht mit dem gebeugten interferiert. Infolgedessen kann auch die Tropfengröße aus den Durchmessern der Ringe nicht mehr berechnet werden; nur die Färbung des zentralen Feldes, welche den Farben dünner Blättchen *ähnelt*, gestattet bei kleinen Tropfen durch seine Gesetzmäßigkeit in der Farbenfolge diese Bestimmung mit einiger Genauigkeit auszuführen.

Bei größeren Tropfen, wie sie bei den Versuchen von F. Mierdel und *ausschließlich* im natürlichen Nebel vorkommen, läßt sich allerdings auch fernerhin die alte Beugungsformel für die Berechnung der Tropfenradien aus den Ringdurchmessern anwenden, da dann der Einfluß der Durchsichtigkeit des Tropfens und der Reflexion an seiner Oberfläche nicht mehr zu beobachten ist und die Tropfen sich ganz wie undurchsichtige, kreisförmige Scheibchen verhalten.

Vorstehende Dissertation wurde im Physikalischen Institut der Universität Marburg ausgeführt. Hrn. Geheimrat Prof. Dr. F. Richarz und Hrn. Prof. Dr. F. A. Schulze möchte ich auch an dieser Stelle für die freundliche Anregung und Unterstützung meinen besten Dank aussprechen.

1) A. a. O. S. 499.

(Eingegangen 2. Februar 1920.)

5. *Zungenpfeife und Röhrensender; von H. Vogel und M. Wien.*

In einer kürzlich in diesen Annalen erschienenen Untersuchung[1]) hat einer von uns die Zungenpfeife als gekoppeltes System behandelt und gezeigt, daß die charakteristischen Änderungen des Tones der Zungenpfeife bei allmählicher Verlängerung der Ansatzröhre sich aus der Theorie der gekoppelten Schwingungen herleiten lassen.

Zunge und Ansatzrohr sind die beiden gekoppelten Systeme. Von den beiden freien Koppelungsschwingungen der beiden Systeme ist im allgemeinen die stärkere und weniger gedämpfte die „tonangebende", indem der die Schwingungen unterhaltende Luftstrom durch die Zunge in der Periode dieser Schwingung reguliert wird. In der Nähe der Resonanz der beiden Systeme besitzen die beiden Koppelungsschwingungen annähernd die gleiche Amplitude und Dämpfung, es müssen also hier labile Zustände bezüglich der Tonhöhe auftreten, die sich in einer schnellen Änderung der Tonhöhe an der Resonanzstelle bei Verlängerung der Ansatzröhre äußern, oder bei enger Koppelung sogar in einem eigentümlichen, plötzlichen Umspringen des Tones. Diese Tonänderung wiederholt sich jedesmal beim Verlängern des Rohres, so oft einer der Obertöne der Röhre mit dem Ton der Zunge in Resonanz tritt. Der Verlauf der Tonkurve an einer Resonanzstelle in seiner Abhängigkeit von der Koppelung wird durch die Kurven der Figg. 1a, 2a u. 3a charakterisiert, die an der von H. Vogel in seiner oben genannten Arbeit untersuchten Zungenpfeife gewonnen wurden.

Bei loser Koppelung verläuft die Tonkurve verhältnismäßig weich und stetig (Fig. 1a). Mit zunehmender Koppelung wird die Tonänderung größer und steiler. Aus der steilen Tonänderung wird schließlich ein Umspringen des Tones, jedoch

1) H. Vogel, Ann. d. Phys. 62. S. 247. 1920.

erfolgt dies nicht genau an der Resonanzstelle, sondern, je nachdem die Röhre verlängert oder verkürzt wird, hinter oder vor der Resonanzstelle. Es tritt ein „Ziehen“ des Tones ein und dabei entsteht beim Hin- und Hergehen die in Fig. 2a dargestellte „Ziehschleife“.

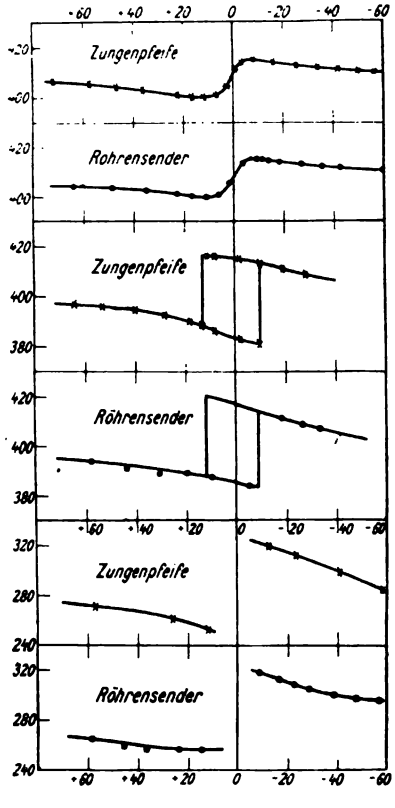


Fig. 1a. Fig. 1b. Fig. 2a. Fig. 2b. Fig. 3a. Fig. 3b.

Bei ungenügender Rückkoppelung und stärkerer Dämpfung setzt der Ton an der Resonanzstelle aus, so daß eine mehr oder weniger große Tonlücke entsteht (Fig. 3a).

Als im Laufe des Krieges der Röhrensender und der Audionempfang aufkamen und dabei gekoppelte Schwingungskreise angewandt wurden, zeigte es sich, daß hier die gleichen Erscheinungen auftraten, wie sie uns schon vor dem Kriege aus den Versuchen an Zungenpfeifen bekannt waren.

Im folgenden soll nun diese Übereinstimmung zwischen Röhrensender und Zungenpfeife eingehend dargelegt werden, wobei zuerst die grundsätzliche Übereinstimmung nachgewiesen und dann gezeigt werden soll, daß die Ergebnisse der Versuche an der Zungenpfeife sogar zahlenmäßig durch elektrische Systeme wiedergegeben werden können. Gewisse Abweichungen der Zungenpfeife von der Theorie der gekoppelten Schwingungen, die schon bei den Versuchen von Weber hervortraten und sich auch bei unseren Versuchen wiederholten, ließen sich ebenfalls mit elektrischen Schwingungskreisen durch eine be-

sondere Form der Rückkoppelung hervorrufen. Diese besondere Rückkoppelung verspricht wieder für den Röhrensender und Audionempfang Vorteile, so daß hier, wie so häufig, die gegenseitige Befruchtung akustischer und elektrischer Schwingungsversuche deutlich in die Erscheinung tritt.

Normale Koppelungsschwingungen beim Röhrensender.

Jedem, der mit Röhrensendern oder Audionempfang zu tun gehabt hat, ist die gegenseitige Beeinflussung zwischen Antenne und Zwischenkreis beim Sender, zwischen Antenne und Audionkreis beim Empfänger wohl bekannt, und man findet dabei sogleich die charakteristischen Merkmale der gekoppelten Schwingung wieder. Als Beispiel sei hier die Änderung der Wellenlänge eines Audion-Zwischenkreis-Empfängers von Telefunken mit der Abstimmung der Antenne angeführt.

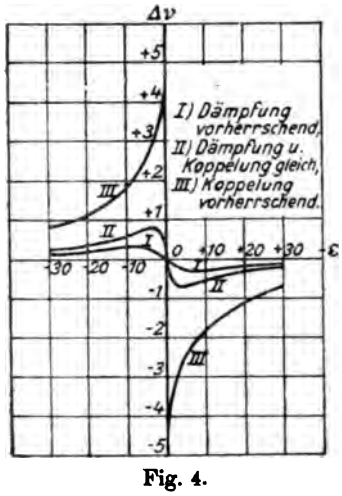


Fig. 4.

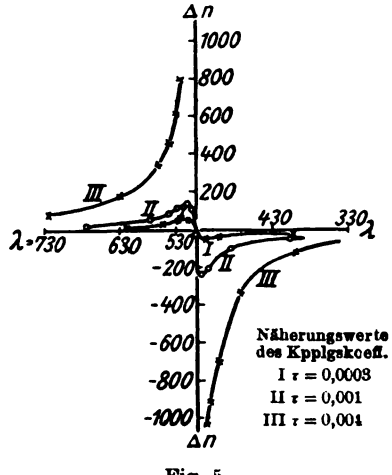


Fig. 5.

Fig. 4 ist einer früheren Arbeit[1]) entnommen und stellt die aus der Theorie berechnete Änderung der Schwingungszahl eines gekoppelten Systems in der Nähe der Resonanz für drei verschiedene Koppelungsgrade dar. In Fig. 5 sind die beobachteten Änderungen der Schwingungszahl eines Audions wiedergegeben in ihrer Abhängigkeit von der Abstimmung einer mit ihm gekoppelten künstlichen Antenne mittlerer Dämpfung, und

1) M. Wien, Wied. Ann. 61. S. 151. 1897.

zwar ebenfalls für drei verschiedene Koppelungsgrade (τ an nähernd $= 3 \cdot 10^{-4}$, 10^{-3}, $4 \cdot 10^{-3}$). Als Abszisse ist die Wellenlänge der Antenne, als Ordinate die Änderung der Schwingungszahl des Empfängers aufgetragen. Die Übereinstimmung der Figg. 4 u. 5 ist offensichtlich; bemerkenswert ist, daß der Einfluß der resonierenden Antenne trotz der sehr losen Koppelung bei dem Schwebungsempfang deutlich hervortritt. Es ergibt sich daraus, wie schwierig bei kurzen Wellenlängen eine Entkoppelung elektrischer Schwingungskreise ist, besonders wenn sie auf engem Raum nebeneinander untergebracht werden müssen.

Die weitere Untersuchung erfolgte nicht bei Hochfrequenz, sondern bei langsamen elektrischen Schwingungen mit Frequenzen von der gleichen Größe wie die der Zungenpfeife.

Einfluß der Koppelung, Dämpfung, Rückkoppelung, Heizung, Anodenspannung.

Die Versuchsanordnung war die übliche (Fig. 6). Als Induktionsspulen im Schwingungskreis und im Sekundärkreis wurden große Spulen benutzt, die für Untersuchung langsamer elektrischer Schwingungen von H. Birnbaum[1] in dem hiesigen Institut hergestellt und verwandt waren. Sie waren unterteilt, so daß ein Teil der Spulen zur Rückkoppelung benutzt werden konnte. Der Widerstand war verhältnismäßig gering, besonders derjenige der im Sekundärkreis verwandten Spule, die aus verdrillter Litze bestand. Als Kapazitäten dienten Glimmer- und gute Papierkondensatoren, als Senderröhre wurde für die meisten Versuche eine *K*-Röhre von Schott & Gen., gelegentlich auch eine Röhre der A.-E.-G. verwandt. Der Ton wurde mittels eines Telephons, das lose mit der Spule des Schwingungskreises gekoppelt war, beobachtet, und die Tonhöhe mit einem Tonometer von Max Kohl in Chemnitz gemessen. Es wurde systematisch unter sonst gleichbleibenden Verhältnissen der Einfluß der Koppelung

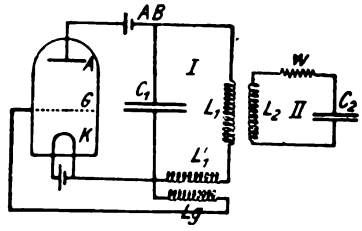


Fig. 6.

1) H. Birnbaum, Ann. d. Phys. **49**. S. 201. 1916.

zwischen Schwingungskreis und Sekundärkreis beobachtet, dann wurde durch Einschaltung von Widerstand in den Sekundärkreis die Änderung der Tonkurven mit der Dämpfung bei gleichbleibender enger Koppelung studiert, schließlich bei gleichbleibender Koppelung und Dämpfung der Einfluß der Rückkoppelung, der Heizung der Glühkathode und der Anodenspannung.

Bei sämtlichen Versuchen blieb der Primärkreis unverändert. $L_1 = 7{,}1 \cdot 10^8$ cm, $C_1 = 0{,}22$ M.F., ebenso die Selbstinduktion des Sekundärkreises, $L_2 = 3{,}75 \cdot 10^7$ cm. C_2 wurde, um die Tonkurve zu erhalten, zwischen $C_2 = 2{,}6$ M.F. und $C_2 = 6{,}0$ M.F. abgeändert. Der Ohmsche Widerstand der Sekundärspule betrug ca. 3 Ohm.

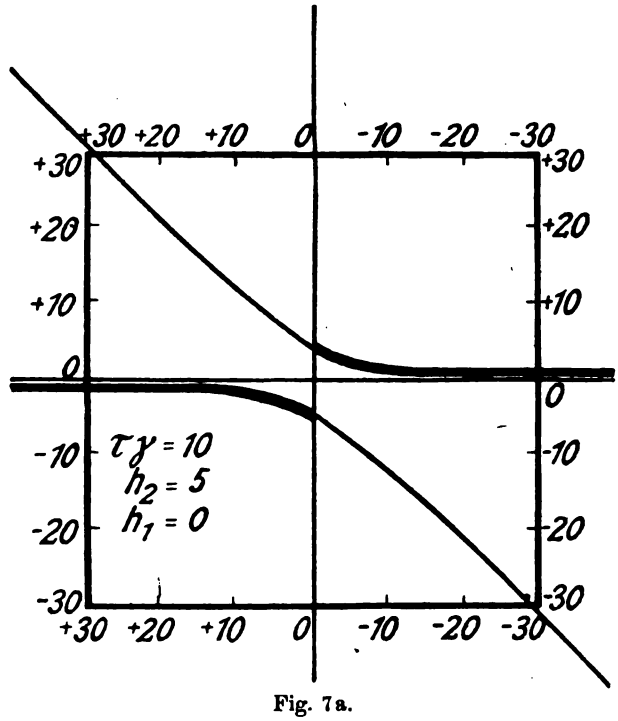


Fig. 7a.

Änderung der Koppelung. Bei der engsten angewandten Koppelung $\tau = 0{,}15$ wurde die Fig. 7 (S. 654) erhalten. Die Erscheinung baut sich auf der Fig. 7a auf, in der die theoretischen

Koppelungsschwingungen für mittlere Koppelung dargestellt sind.[1]) Die verstärkten Kurvenstücke sind die Teile der beiden theoretischen Kurven, bei denen die Dämpfung die geringere ist, die unverstärkten die mit größerer Dämpfung. Es müßten also, wenn die Dämpfung allein maßgebend wäre, genau an der Resonanzstelle die eine Tonkurve in die andere überspringen, ohne daß ein „Ziehen" auftritt. Es bleibt jedoch die einmal vorhandene Schwingung noch ein Stück über den Resonanzpunkt hinaus bestehen, so daß beim Hin- und Hergang die Ziehschleife entsteht. Manchmal kommt es dabei vor, daß in der Nähe der Resonanz beide Töne gleichzeitig, aber schwach und unsicher auftreten, was wir bei den Zungenpfeifen nicht beobachtet haben.

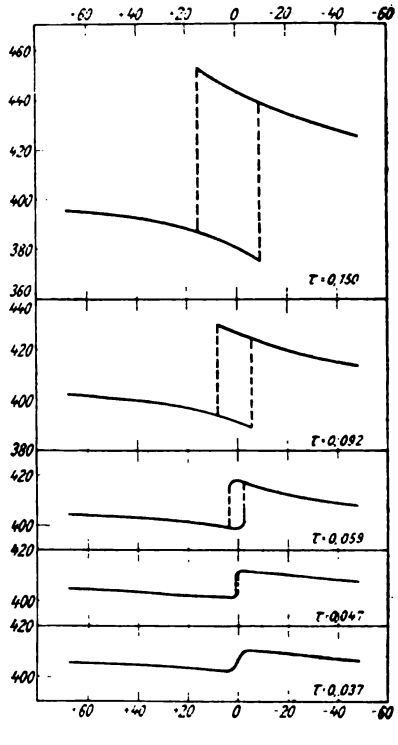


Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Je loser die Koppelung ist, um so geringer ist der Tonsprung, gleichzeitig wird auch das Ziehen schwächer. In der Fig. 9 ist der Sprung nur noch sehr klein, kurz vor demselben biegt die Tonkurve von der theoretischen Kurve ab; das Ziehen ist in Fig. 10 kaum mehr merklich. Schließlich erhalten wir bei noch loserer Koppelung in Fig. 11 den sprung- und schleifenlosen Verlauf der Tonkurve, wie er den Koppelungsschwingungen mit vorherrschender Dämpfung (Fig. 1a) entspricht.

1) Vgl. M. Wien, a. a. O. Fig. 4.

Veränderung der Dämpfung (Fig. 12 bis 16). Vergrößern wir die Dämpfung bei gleichbleibender Koppelung (0,15) durch Einschalten von 5 Ohm Widerstand in den Sekundärkreis, so wird das Ziehen geringer (Fig. 13) und auch der Sprung etwas

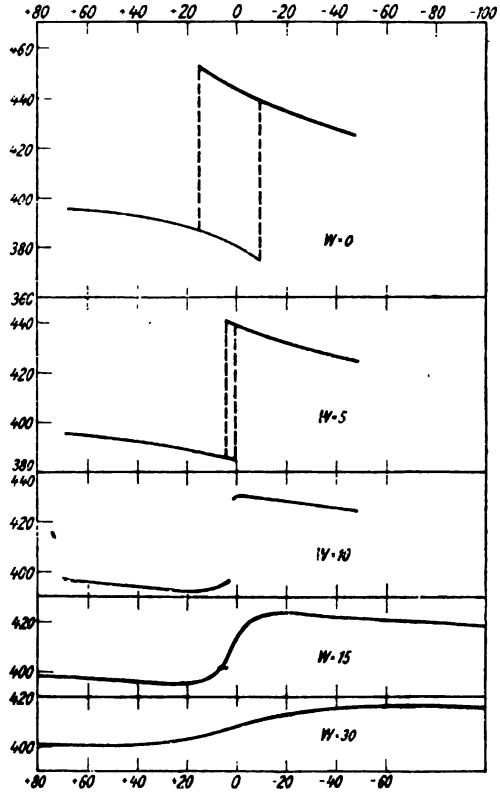


Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 16.

kleiner als ohne Zusatzwiderstand ($W = 0$, Fig. 12). Bei weiterer Vermehrung der Dämpfung (10 Ohm) setzt der Ton in der Umgebung der Resonanz aus, weil dem Primärsystem zu viel Energie entzogen wird (Fig. 14). Schalten wir noch mehr Widerstand (15 Ohm) ein, so wird die Energieentziehung wieder geringer, wir erhalten eine kontinuierliche, aber sprunglose Tonkurve mit noch immer ziemlich großer Tonänderung (Fig. 15), bei noch größerer Dämpfung (30 Ohm) wird die Kurve immer flacher (Fig. 16), bis schließlich die Wirkung des Sekundärsystems überhaupt verschwindet.

In Fig. 17 sind Versuche wiedergegeben, bei denen die *Rückkoppelung* gegenüber dem bisherigen Wert (ausgezogene Kurve, Sprungstellen 2, 2) erheblich vermehrt und erheblich vermindert wurde. Die Vermehrung (gestrichelte Kurve, Sprungstellen 3, 3) verstärkt das Ziehen bei annähernd gleich großem Tonsprung und geringer Änderung der Tonkurve. Bei der loseren Rückkoppelung (punktierte Kurven) setzt der Ton in einem ziemlich großen Gebiet um die Resonanzstelle herum aus (bei den

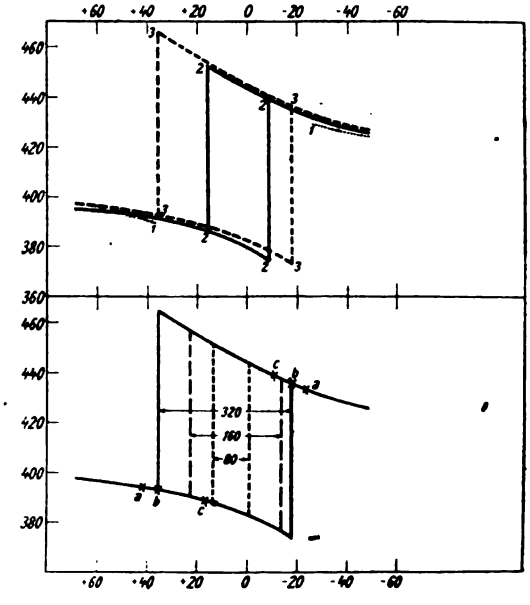


Fig. 17.

Fig. 18.

mit 1 bezeichneten Stellen). Die Tonkurve zeigt auch hier nur eine geringe Abweichung von der theoretischen Kurve.

Ähnlich wie die Vermehrung der Rückkoppelung wirken die *Erhöhung der Anodenspannung* (80, 160, 320 Volt, Fig. 18) und die *Verstärkung des Heizstromes* der Glühkathode (Sprungstellen *a* bei einem Heizstrom von 1,35 Amp., *b* bei 1,25, *c* bei 1,05 Amp.). Beides vermehrt das Ziehen, übt aber nur einen geringen Einfluß auf die Größe des Tonsprunges und die Tonkurve aus.

Die Verstärkung der Rückkoppelung, der Anodenspannung und der Heizung bewirken ferner alle drei ein Herabdrücken des Einflusses der Dämpfung in dem Sinne, daß das Aussetzen

weniger leicht auftritt und sich auf einen kleineren Bereich beschränkt.

Wir sehen aus dem Vorstehenden, daß die Form der Tonkurven durch die Wahl der Konstanten der elektrischen Schwingungskreise in weiten Grenzen abgeändert werden kann. Es ist deshalb leicht möglich, die Tonkurven der Zungenpfeifen durch passende elektrische Anordnungen nachzubilden. In den Figg. 1b, 2b und 3b (S. 650) sind die Ergebnisse solcher Versuche dargestellt, wobei zum bequemen Vergleich die elektrische Tonkurve jedesmal unter der entsprechenden akustischen Tonkurve zum Abdruck gelangt ist. Die noch vorhandenen geringen Abweichungen der Figuren sind meistens auf den Umstand zurückzuführen, daß bei der Zungenpfeife bei größerer Verstimmung schon der Einfluß des nächstfolgenden Obertones der Ansatzröhre merklich ist.

In anderen Fällen weichen jedoch die Tonkurven der Zungenpfeife von den normalen Koppelungskurven mehr ab. Hierauf soll im folgenden näher eingegangen und der Versuch gemacht werden, auch diese Abweichungen durch elektrische Systeme nachzubilden.

Abweichungen der Zungenpfeife von der Koppelungstheorie.

Es wurde schon in der Arbeit von H. Vogel mehrfach darauf hingewiesen, daß die Tonkurven der Zungenpfeife oft nicht genau der Theorie entsprechen, sondern vor allem bei engerer Koppelung die tiefere Koppelungsschwingung gegenüber der höheren bevorzugt ist, so daß also die Vertiefung des Koppelungstones gegenüber dem Eigenton der Zunge größer ist als die entsprechende Erhöhung. Ganz besonders stark tritt dies bei den Versuchen von Weber hervor, der sogar nur von einer Vertiefung des Tones gegenüber dem Ton ohne Ansatzrohr spricht und auch seine Theorie in diesem Sinne aufbaut. Bei loserer Koppelung ist diese Bevorzugung der tiefen Töne geringer und schließlich kaum mehr merklich; so waren bei den Versuchen von Willis[1]) und den meisten Versuchen von H. Vogel die Erhöhungen und Vertiefungen des Pfeifentones gegenüber dem Ton der Zunge annähernd gleich groß.

1) O. Willis, Pogg. Ann. 24. S. 397. 1882.

In den Ziehschleifen der Zungenpfeife ist diese Bevorzugung der tieferen Töne mehrfach an der Unsymmetrie der Schleifen erkennbar, vgl. z. B. Vogel (Fig. 28 u. 29.)

Eine sehr deutliche derartige unsymmetrische Tonkurve der Zungenpfeife ist in Fig. 19a wiedergegeben. Sie wurde bei enger, aber nicht allzu enger Koppelung erhalten. Bei allzu enger Koppelung tritt Absorption ein, so daß ein mehr oder weniger großer Teil der Tonkurve gerade in der Umgebung der Resonanz ausfällt und schließlich nur Kurvenstücke, ähnlich wie sie Weber erhielt, übrig bleiben.

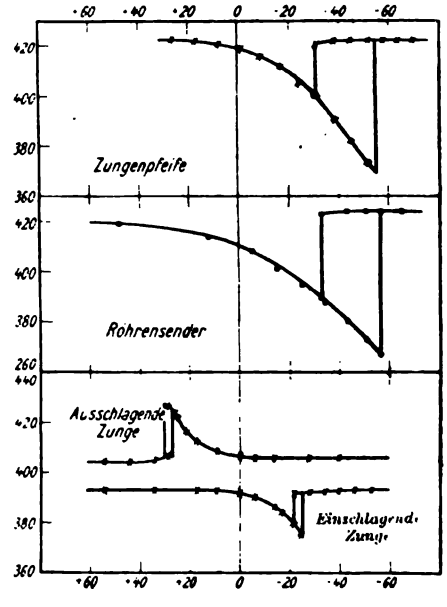


Fig. 19a.

Fig. 19b.

Fig. 21.

Innerhalb der Ziehschleife der Fig. 19a verläuft die Tonkurve der höheren Koppelungsschwingung nahezu parallel der Abszissenachse, die Tonänderung ist demnach gering; anders bei der tieferen Koppelungsschwingung, bei dieser ist die Tonänderung innerhalb der Ziehschleife groß, so daß die untere Seite der Ziehschleife stark geneigt ist, und infolgedessen die untere rechte Ecke der Schleife besonders stark ausgebildet erscheint.

Gleichzeitig mit der Unsymmetrie tritt oft auch eine Verschiebung der Ziehschleife nach den tieferen Tönen hin

ein, so daß die Schleife nicht genau an dem Ort der Resonanz liegt. Bei der Zungenpfeife lassen sich jedoch alle diese Erscheinungen schwer messend verfolgen, weil die Tonhöhe der Zunge nicht konstant ist, und auch die Eigenschwingungen der Ansatzröhre sich nicht mit Sicherheit bestimmen lassen (vgl. Vogel, S. 255 f.). Die wichtigste Frage ist nun: Kommt auch eine Bevorzugung der höheren Töne vor? Weber gibt an, daß bei Betrieb seiner Zungenpfeife durch Saugen anstatt durch Druckluft die Erscheinung sich umkehrt, und der Ton an der Resonanzstelle der Ansatzröhre nach oben umspringt. Weber hat jedoch nur wenige Versuche mit Saugluft gemacht, aus denen sich nichts sicheres über die Vorgänge entnehmen läßt. Auch uns gelang es bei dem Betrieb der Zungenpfeife mit Saugluft nicht, regelmäßige Tonkurven zu erhalten; der Ton versagte in weiten Gebieten ganz und ist auch sonst nur schwach und schwankend. Besser und deutlicher tritt die Erscheinung bei einer etwas anderen Anordnung hervor, die auf folgender Überlegung beruht: der Unterschied zwischen dem Betrieb der Zungenpfeife mit Druck- und Saugluft ist im Grunde genommen der, daß die Zunge bei Druckluft als einschlagende, bei Saugluft als ausschlagende Zunge arbeitet. Dieser Unterschied kann aber auch dadurch erzielt werden, daß man nach wie vor Druckluft verwendet, aber einen Einsatz mit einer senkrecht gegen den Luftstrom gerichteten

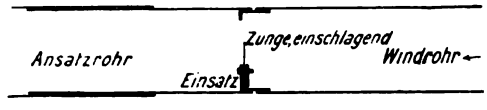


Fig. 20.

Zunge benutzt (vgl. Fig. 20), der auch umgekehrt eingesetzt werden kann, so daß die Zunge einmal als einschlagende, das andere Mal als ausschlagende wirkt. Hiermit ließen sich einigermaßen sichere Tonkurven erzielen; die Ergebnisse sind in Fig. 21 dargestellt. Die starke Verschiebung der Ziehschleife bei der ausschlagenden Zunge nach den hohen Tönen, bei der einschlagenden Zunge nach den tiefen tritt deutlich hervor, und die Unsymmetrie ist sicher erkennbar, obgleich die Ziehschleifen nur schmal sind.

Diese Bevorzugung einmal der tiefen das andere Mal der hohen Koppelungsschwingung hängt offenbar mit der Art und Wirkung der Rückkoppelung zusammen. Außer der Zunge wirkt bei der Rückkoppelung auch das sekundäre System: die schwingende Luftsäule mit. Leider kann die Rückkoppelung bei der Zungenpfeife nicht willkürlich verändert werden, und die Eigentöne der ungekoppelten Systeme sind, wie gesagt, nicht sicher meßbar, infolge dessen ist eine systematische Untersuchung der ganzen Erscheinung bei der Zungenpfeife nicht möglich und kann nur bei den analogen elektrischen Systemen erfolgen.

Rückkoppelung durch das Sekundärsystem bei Röhrensendern.

Es gelang, die Erscheinung, welche soeben bei den Zungenpfeifen erläutert wurde, mittels der Röhrensender nachzumachen, dadurch, das neben der gewöhnlichen Rückkoppelung durch den Primärkreis eine zweite Rückkoppelung durch den Sekundärkreis eingeführt wurde. Dazu wird eine Spule L'_2 in den Sekundärkreis eingeschaltet, die induzierend auf eine in den Gitterkreis eingeschaltete Spule Lg' wirkt (vgl. Fig. 22). Die ursprüngliche Rückkoppelung mit dem Gitter durch L'_1 — primäre Rückkoppelung — wird durch diese „sekundäre Rückkoppelung" vermehrt oder vermindert, je nach der Phasendifferenz der durch sie bewirkten Gitterspannungen. Diese Phasendifferenz kann durch Umschalten der Zuleitungen von L'_2 um 180° verändert werden. Je nach der Größe der gegenseitigen Induktionen L'_1 gegen Lg und L'_2 gegen Lg' kann die primäre oder sekundäre Rückkoppelung vermehrt oder vermindert werden, so daß die eine oder die andere überwiegt. In den Figuren 23—25 sind eine Reihe von Versuchsergebnissen wiedergegeben bei sonst gleicher Anordnung wie früher in Fig. 7, wobei die sekundäre Rückkoppelung allmählich verstärkt wurde.

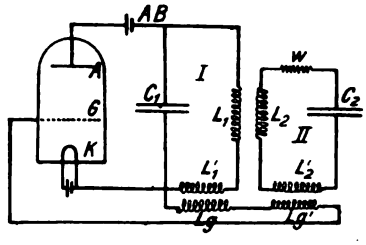


Fig. 22.

Die Wirkung dieser zusätzlichen sekundären Rückkoppelung ist die, daß die Ziehschleife nicht mehr symmetrisch um die

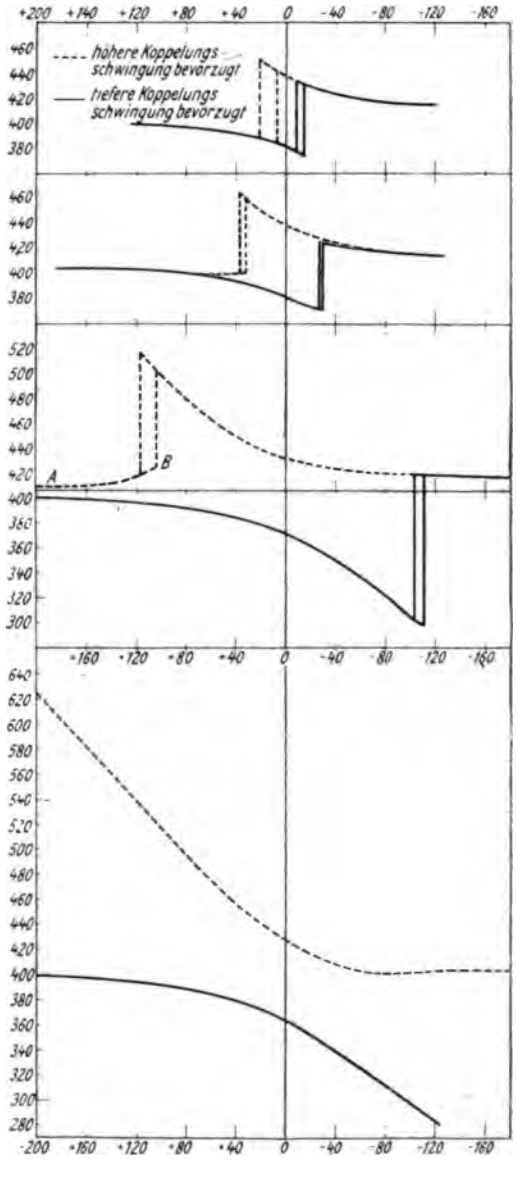


Fig. 23.

Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 26.

Resonanzstelle herumliegt, sondern es bleibt die betreffende Koppelungsschwingung weit über die Stelle der Resonanz hinaus

erhalten, die Ziehschleife ist nach rechts oder links von der Resonanzstelle fort verschoben; und zwar kann man durch Umtauschen der Zuleitungen der Spule L'_2 je nach Wunsch sowohl die höhere wie die tiefere Koppelungsschwingung bevorzugen, so daß die Verschiebung nach rechts oder nach links erfolgt. Bei starker sekundärer Rückkoppelung kann die Verschiebung der Ziehschleifen sehr groß werden. In dem Beispiel der Fig. 25 erfolgen die Tonsprünge statt an der Resonanzstelle (405 Schwingungen) bei dem Ton 295 bzw. 510. Die ganze Form der Kurven entspricht dem Bilde der Fig. 21, das mit der einschlagenden und ausschlagenden Zunge gewonnen wurde.

Das Ziehen ist in diesen Beispielen ziemlich klein. Man kann durch Wahl einer Röhre mit steilerer Charakteristik — A.-E.-G.-Röhre — auch breitere Ziehschleifen erreichen. In Fig. 19b (S. 658) ist der Versuch gemacht worden, durch passende Rückkoppelung, Koppelung, Dämpfung usw. das Bild der unsymmetrischen Ziehschleife der Zungenpfeife (Fig. 19a) möglichst genau nachzubilden.

Um die Vorgänge zu erklären, soll nun noch der extreme Fall untersucht werden, bei dem die Gitterkoppelung mit dem

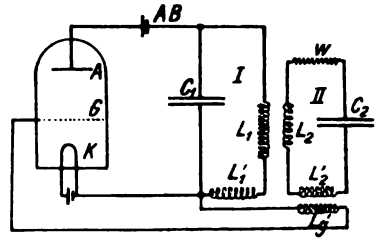


Fig. 27.

primären Kreis ganz aufgehoben ist und nur noch der Sekundärkreis mit dem Gitter gekoppelt ist. Diese Anordnung läßt sich bei Röhrensendern ohne weiteres realisieren (Fig. 27), während der analoge Fall bei der Zungenpfeife natürlich nicht herstellbar ist.

Der Vorgang ist bei reiner sekundärer Rückkoppelung folgender: Die Gitterspannung unterstützt bei richtiger Phase die Schwingungen im Primärkreis, bei entgegengesetzter Phase

unterdrückt sie eine etwa vorhandene Schwingung.[1]) Bei primärer Rückkoppelung werden beide Koppelungsschwingungen entweder unterstützt oder unterdrückt: sie sind um die Resonanz herum gleichberechtigt. Anders bei sekundärer Rückkoppelung. Hier kommt es auf die Phasendifferenz der Schwingung im primären und sekundären Kreis an: bei der tieferen Koppelungsschwingung ist die Phase im Sekundär- und Primärkreis gleich, bei der höheren entgegengesetzt. Demnach ist auch die durch die sekundäre Rückkoppelung bewirkte Gitterspannung bei den beiden Koppelungsschwingungen entgegengesetzt gerichtet: wird im Primärkreis die eine durch die Gitterspannung unterstützt, so wird die andere unterdrückt und umgekehrt. Es kann mithin immer nur eine der beiden Koppelungsschwingungen auftreten. Durch Umschalten der Spule L'_2 wird die Phase der Gitterspannung um 180° geändert, man kann also durch Umschalten entweder die eine oder die andere Koppelungsschwingung erhalten.

In Fig. 26 (S. 661) sind die Ergebnisse an dem Röhrensender mit rein sekundärer Rückkoppelung wiedergegeben. Es tritt entsprechend dem eben Gesagten immer nur eine der beiden möglichen Koppelungsschwingungen auf, ein Umspringen und Ziehen findet nicht statt. Die beiden Tonkurven entsprechen im allgemeinen den theoretischen Koppelungsschwingungen der Fig. 7a. Die Abweichungen dürften damit zusammenhängen, daß, um die zur Unterhaltung der Schwingung in dem weiten Tonbereich notwendige Rückkoppelung zu erzielen, ein Eisenkern in der Koppelungsspule verwandt wurde.

Da diese Methode zur Vermeidung des unbequemen Ziehens und der Labilität der Wellenlänge für die drahtlose Telegraphie von Bedeutung sein dürfte, so bedarf es noch einer näheren Untersuchung der Vorgänge bei Hochfrequenz, über die in Kürze von anderer Seite berichtet werden soll.

Ist, wie bei den vorhergehenden Versuchen, gleichzeitig primäre und sekundäre Rückkoppelung vorhanden, so ist diejenige der beiden Koppelungsschwingungen, bei der die beiden Rückkoppelungen sich unterstützen, bevorzugt, die andere, bei

1) Vgl. z. B. M. Vos und R. Ziegler, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **14**. S. 585. 1920.

der sie gegeneinander arbeiten, benachteiligt. Demnach wird auch der Umsprung nicht in der Umgebung der Resonanz erfolgen, sondern, je nachdem die bestehende Schwingung die benachteiligte oder bevorzugte Koppelungsschwingung ist, vor oder nach der Resonanz. Betrachten wir z. B. die Fig. 25 und nehmen an, es sei die tiefere Koppelungsschwingung — ausgezogene Kurve — die bevorzugte, so erfolgt der Umsprung bei allmählichem Vertiefen des sekundären Systems nicht für den Ton 406 in der Umgebung der Resonanz, sondern erst, nachdem man das Sekundärsystem noch über 100 Schwingungen tiefer gestimmt hat, bei dem Ton ca. 295. Erhöht man nun bei der gleichen Anordnung den Ton des sekundären Systems, so wird die gleiche Kurve rückwärts zurückgelegt, nur erfolgt der Umsprung von der hohen auf die tiefe Koppelungskurve infolge des Ziehens etwa 7 Schwingungen später. Schaltet man L'_2 um, so wird die höhere Koppelungsschwingung bevorzugt — gestrichelte Kurve —, und die Ziehschleife liegt bei ca. 500 Schwingungen. Eigentümlich ist hier die starke Abweichung des kurzen Stücks AB der tiefen Schwingung von der theoretischen Koppelungskurve.

Das Ganze kann man sich so vorstellen, als ob die die beiden Koppelungskurven verbindende Ziehschleife infolge der sekundären Rückkoppelung auf den beiden Koppelungskurven nach rechts oder links verschoben würde. Der Tonsprung wird dabei vergrößert, weil er nicht mehr an der Resonanzstelle erfolgt, wo die beiden Koppelungskurven sich am meisten nähern. Da der auf der „benachteiligten" Koppelungskurve liegende Teil der Ziehschleife annähernd parallel der Abszissenachse verläuft, der der „bevorzugten" Koppelungskurve angehörende Teil der Ziehschleife schon in das steilere Kurvenstück der Koppelungskurve fällt, so erklärt sich hieraus ohne weiteres die oben besprochene „Unsymmetrie" der Ziehschleife, die besonders bei breiten Ziehschleifen (z. B. Fig. 19b) deutlich hervortritt.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß die Erscheinungen an der Zungenpfeife, die kürzlich von einem von uns unter dem Gesichtspunkt der gekoppelten Schwingungen untersucht worden sind,

genau in der gleichen Weise an gekoppelten Röhrensendern auftreten. Es lassen sich mit elektrischen Systemen sogar zahlenmäßig die Tonkurven der Zungenpfeife nachmachen. Auch die Bevorzugung der höheren oder der tieferen Koppelungsschwingung bei der Zungenpfeife und die damit verbundene Unsymmetrie der Ziehschleife lassen sich bei elektrischen Systemen unter Zuhilfenahme „sekundärer Rückkoppelung" reproduzieren. Bei ausschließlich sekundärer Rückkoppelung tritt nur eine der beiden Koppelungsschwingungen auf, so daß kein Umspringen und Ziehen des Tones erfolgt.

Jena, Physikal. Institut d. Universität,
5. April 1920.

(Eingegangen 6. April 1920.)

6. *Die Magnetisierbarkeit von Kupfer-Zinklegierungen;* *von Rudolf H. Weber.*

(Nach Messungen von Konrad Greulich † berichtet.)

1. Herr K. Greulich[1]) hat im Jahre 1914 auf meine Veranlassung eine große Anzahl von Kupfer-Zinklegierungen verschiedenen Prozentgehaltes hergestellt und ihre Magnetisierbarkeit untersucht. Ein Nebenzweck dieser Untersuchungen war es, festzustellen, ob sich aus der Kurve Suszeptibilität – Prozentgehalt vielleicht, ähnlich wie bei der Leitfähigkeitskurve[2]), ein Anhalt ergäbe für die Existenz chemisch bevorzugter Mischungsverhältnisse, wie sie etwa bei chemischen Verbindungen — z. B. Cu Zn — zu erwarten sein würde.

2. Die Legierungen wurden im Rößlerschen Schmelzofen und zwar nach zwei verschiedenen Methoden hergestellt. Einmal wurde das Zink bis zum Schmelzen erhitzt, und dann in kleinen Portionen fein verteiltes Kupfer mit Salmiak gemischt, hinzugegeben, wobei allmählich die Temperatur gesteigert wurde (Tab. I). Diese Methode gestattet, zur Herstellung die Temperatur so niedrig zu halten, wie es der jeweiligen Legierung entspricht. Andererseits wurde Kupfer unter Borax geschmolzen und das Zink hinzugegeben (Tab. II). Hier ist also die Herstellungstemperatur anfänglich stets höher, als die Schmelztemperatur. Ein Übelstand dieser Methode ist es, daß die Herstellung infolge Verbrennens und Verdampfens mit nicht unbeträchtlichem Zinkverlust verbunden ist.

Da Schamotte- und Graphittiegel eisenhaltig sind und Eisen in geringen Mengen an das Schmelzgut abgeben — die Folge

1) K. Greulich, Rostocker Dissertation 1915 und Sitzungsberichte und Abhandl. d. naturforschenden Gesellschaft zu Rostock, N. F. VI, S. 227, 1915. Herr K. Greulich ist im Kriege gefallen, deshalb habe ich die Bearbeitung seiner Untersuchungen für die Annalen übernommen.

2) Vgl. R. H. Weber, Wied. Ann. 86. S. 705. 1899.

hiervon war seinerzeit die Auffindung der „Metamagnetischen Legierungen" durch K. Overbeck[1]) —, was für unsere Zwecke natürlich streng vermieden werden mußte, so wurden zum Herstellen der Schmelzen jetzt Berliner Porzellantiegel von 7,5 cm Höhe und 5,5 cm oberem Durchmesser verwendet, die bequem in den Schmelzraum des Rößlerschen Ofens passen.

Als Grundmetalle wurden gekörntes elektrolytisches Kupfer und granuliertes Zink I der Firma Kahlbaum verwendet. Verkleinerung mittels Eiseninstrumenten war bei diesen unnötig.

3. Der Guß erfolgte in Formen aus Formsand, deren Hohlraum mit aufgeschlämmter Chilekleie überzogen war, teils um die Oberfläche glatter zu gestalten, teils um den direkten Kontakt des noch flüssigen Gusses mit dem etwas eisenhaltigen Formsand zu vermeiden. Die fertigen Legierungen erwiesen sich nach diesen Vorsichtsmaßregeln in der Tat völlig eisenfrei.

Die Formen hatten parallelepipedischen Gußraum $4 \times 15 \times 80$ mm. Die gegossenen Stücke wurden dann etwas kürzer geschnitten (rund 60 mm lang) und die Abfallstücke zur Analyse verwendet. Die weitere Bearbeitung geschah mittels Feilens und Schleifens. Die Legierungen von 60 bis 70 Proz. Zn sind so spröde, daß die Bearbeitung sehr schwierig ist und sich im wesentlichen auf Schleifen beschränken muß, da sie nicht einmal das Einschrauben in einen Schraubstock gestatten.

4. Die Analysen wurden elektrolytisch in der Platinschale aus salpetersaurer Lösung vorgenommen. Außerdem wurden die Dichten im Pyknometer bestimmt, die aber teilweise einen unregelmäßigen Gang aufwiesen (siehe Tabellen), wohl infolge von Gußfehlern. Auf die magnetischen Messungen haben solche Fehler keinen Einfluß, wenn sie nicht zufällig gerade an die Stelle des stärksten Abfalles des magnetischen Feldes zu liegen kommen.

5. Die magnetische Meßmethode war die folgende. Die zylindrischen Polschuhe eines du Boisschen Halbringelektromagneten hatten einen Durchmesser von 4 cm und standen

1) K. Overbeck, Rostocker Dissertation 1914. Sitzungsberichte und Abhandl. d. naturforschenden Gesellschaft zu Rostock, VI, S. 141. 1914. In den Dissertationen von K. Overbeck und K. Greulich findet sich eine ausführlichere Besprechung der Herstellungsmethoden.

sich im Abstand von 6 mm gegenüber. Zwei kleine Messingklötzchen hielten diesen Abstand auch bei Erregung des Magneten konstant. Über den Polschuhen, etwas seitlich von ihnen, endete ein vertikales, von der Zimmerwand aus getragenes, $2^1/_4$ m langes, 5 cm weites Rohr, anfangs aus Glas, später aus Messing, oben und unten mit Glasansätzen (Gaslichtzylindern), in dem zwei parallele Seidenfäden abwärts liefen. An diesen wurden mittels geeigneter Aufhängevorrichtung die Legierungen horizontal befestigt, so daß sie mit einem Ende zwischen die Polschuhe des Magneten ragten. Am anderen Ende der Legierungen waren Glimmerblättchen angeklebt, auf denen ein vertikaler Nadelstrich eingekratzt war. Auf diesen wird ein Ablesemikroskop mit auswechselbarer Vergrößerung eingestellt. Legierung und Aufhängevorrichtung war von einem geeignet gebauten Glasgehäuse umgeben, um Luftströmungen zu vermeiden.[1])

6. Die Suszeptibilität berechnet sich aus der durch Erregung des Magnetfeldes H erfolgenden Verschiebung s^{cm} der Legierung, deren Querschnitt q ist, nach der Formel

$$\varkappa = \frac{2Mgs}{H^2 q l}, \tag{1}$$

worin g die Erdbeschleunigung, l die Länge der Aufhängefäden und M die Masse der Legierung, vermehrt um die Massen der Aufhängevorrichtung, des angeklebten Glimmerblättchens und der Hälfte der Aufhängefäden ist. Das Magnetfeld war durch Vergleich mit einem Gansschen magnetischen Etalon (Firma Edelmann) für verschiedene Stromstärken im Elektromagneten ermittelt worden. Im folgenden wurde durchweg ein Feld von 9000 Gauss verwendet. Das Rückstandfeld war nachgewiesenermaßen zu vernachlässigen. Die Messungen sind der Formel (1) gemäß absolute, worauf aber kein besonderer Wert zu legen ist.

7. Die folgenden zwei Tabellen sowie die Figur auf S. 671 geben die Meßresultate von K. Greulich wieder.

Überraschend ist der abnorm hohe Diamagnetismus der Legierungen um 30 Proz. Kupfer, für die $-\varkappa \cdot 10^6$ über 5 Ein-

1) Eine ausführlichere Besprechung der Methode findet sich in der Dissertation von Overbeck.

heiten erreicht. Es ist das nächst dem des Wismuts (15 Einheiten) der höchste bekannte Wert. An dritter Stelle kommt Antimon mit 4,6 Einheiten.

In der Figur sind die Daten der Tab. I als kleine Kreise, die der Tab. II als Kreuze eingetragen. Die beiden Serien fügen sich, mit geringen Abweichungen, gut ineinander ein. Die Herstellungsweise hat also keinen Einfluß auf die Suszeptibilität.[1])

I. Tabelle für die Legierungen ausgehend vom reinen Zink.

Nr.	% Cu	Dichte	Ablenkung	Vergröß.	Querschnitt	Gewicht + Glimmerblättchen	$-\varkappa \cdot 10^6$
Zn	0,0	7,101	63	41,3 ×	0,373·1,43	26,7940	0,877
I 1	1,996	7,178	68	41,3	0,380·1,435	28,0017	0,964
I 2	4,160	7,294	77	41,3	0,384·1,435	28,1044	1,084
I 3	5,801	7,361	83	41,3	0,380·1,43	27,9575	1,175
I 4	7,346	7,422	88	41,3	0,380·1,43	27,9069	1,229
I 5	7,77	7,423	88	41,3	0,380·1,50	27,6173	1,244
I 6	9,849	7,437	97	41,3	0,400·1,46	29,7547	1,36
I 7	14,18	6,846	67	26 ×	0,380·1,48	27,6474	1,54
I 8	15,25	6,816	76	26	0,400·1,46	27,7189	1,584
I 9	18,24	7,099	84	26	0,410·1,465	29,1942	1,787
I 10	20,07	7,237	87	26	0,350·1,37	23,9622	1,926
I 11	23,77	7,656	94	26	0,380·1,40	29,4667	2,39
I 12	25,25	7,565	70	14 ×	0,320·1,39	28,0586	3,005
I 13	25,66	7,718	71	14	0,320·1,39	28,8791	3,152
I 14	28,15	7,643	90	14	0,380·1,40	27,8055	3,868
I 15	30,03	7,944	106	14	0,390·1,47	31,9112	4,77
I 16	35,65	7,90	99	14	0,380·1,42	32,0578	4,371
I 17	40,60	8,015	40	14	0,420·1,45	33,1005	1,756
I 18	44,95	8,145	36	14	0,360·1,47	29,4038	1,628
I 19	52,52	8,278	31	14	0,360·1,40	29,4559	1,475
I 20	59,63	8,465	26	14	0,350·1,43	28,9304	1,224
I 21	61,47	8,468	25	14	0,380·1,41	31,2996	1,18

8. Die Kurve der Figur macht den Eindruck, als ob sie aus mehreren geradlinigen, durch stetige Übergänge verbundenen Ästen zusammengesetzt sei, doch fallen, abgesehen von einer Stelle, keine ausgezeichneten Punkte an Orte einfacher chemischer Verbindungsmöglichkeiten, besonders auch nicht an die Stelle einer Verbindung CuZn, wo ein solches Zusammentreffen erwartet werden könnte.

Besonders auffallend ist der geradlinige Verlauf der zwei

1) Vgl. K. Overbeck, Ann. d. Phys. **46**. S. 680. 1915.

steil ansteigenden Äste der Punkte 1, 2, 3, 4, 5 und 6, 7, 8, 9. 10. Setzt man den Prozentgehalt und die Suszeptibilität

$$p\,^0/_0 = x; \quad -\varkappa \cdot 10^{-6} = y,$$

so genügen diese Geraden den Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} (1 \text{ bis } 5) & y = 0{,}3639\,x - 6{,}233, \\ (7 \text{ bis } 10) & y = -0{,}4069\,x + 18{,}878, \end{cases}$$

worin die Koeffizienten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet sind. Bei letzterer ist der Punkt 6 nicht

II. Tabelle für die Legierungen ausgehend vom reinen Kupfer.

Nr.	% Cu	Dichte	Ablenkung	Vergröß.	Querschnitt	Gewicht + Glimmerblättchen	$-\varkappa \cdot 10^6$
II 1	96,78	7,095	40	41,3×	0,390·1,425	36,0729	0,706
II 2	86,05	8,627	45	41,3	0,335·1.40	28,7338	0,759
II 3	64,08	8,365	70	41,3	0,365·1,40	30,1856	1,136
II 4	63,47	8,396	49	26×	0,375·1,40	28,3469	1,160
II 5	55,95	8,369	79	41,3×	0,370·1,43	31,9756	1,307
II 6	54,78	8,278	55	26×	0,335·1,43	28,1543	1,321
II 7	52,52	8,283	56	26	0,355·1,44	30,5732	1,391
II 8	52,22	8,087	63	26	0,365·1,44	29,3918	1,440
II 9	52,03	8,227	60	26	0,360·1,40	29,6678	1,443
II 10	50,89	8,136	70	26	0,345·1,44	23,8797	1,494
II 11	50,20	9,169	60	26	0,340·1,44	28,5435	1,507
II 12	45,32	8,156	35	14×	0,390·1,44	33,9672	1,705
II 13	42,58	8,012	53	14	0,420·1,395	24,7928	1,844
II 14	41.16	8,016	47	14	0,415·1,47	32,0708	1,996
II 15	38,95	7,938	69	14	0,400·1,43	32,1059	3,129
II 16	37,82	7,928	77	14	0,410·1,45	33,7200	3,600
II 17	33,29	7,714	112	14	0,385·1.47	32,9667	5,262
II 18	19,22	7,236	87	26×	0,370·1,465	25,5852	1,812
II 19	17,91	7,301	90	26	0,390·1,445	25,9722	1,789
II 20	16,93	7,299	72	26	0,365·1,46	27,7300	1,642
II 21	12,70	7,111	58	26	0,370·1,445	27,4286	1.336
II 22	9,271	7,221	56	26	0,360·1,45	28,3209	1,169
II 23	5,346	7,187	50	26	0,340·1.445	24,9542	1,122

mit berücksichtigt, weil er möglicherweise schon auf einem stetigen Übergang zwischen beiden Ästen liegt, was übrigens auf die Schlußfolgerung keinen wesentlichen Einfluß hat. Diesen Gleichungen entsprechend sind die beiden Geraden in die Kurve eingezeichnet. Die übrigen geradlinigen Stücke der Kurve sind nach Gutdünken gezogen. Aus ihnen soll auch nichts gefolgert werden.

9. Ob ein solcher stetiger Übergang zwischen diesen zwei Hauptästen überhaupt stattfindet, oder ob sie geradlinig bis zu

ihrem Schnitt weiter verlaufen, läßt sich zurzeit nicht entscheiden. Sicher aber kann man aus diesem Schnittpunkt sehr genau die x-Koordinate, also den Prozentgehalt des Scheitelpunktes ermitteln. Der Schnittpunkt liegt bei

$$\bar{x} = 32{,}776 \text{ Proz.}; \quad \bar{y} = 5{,}694.$$

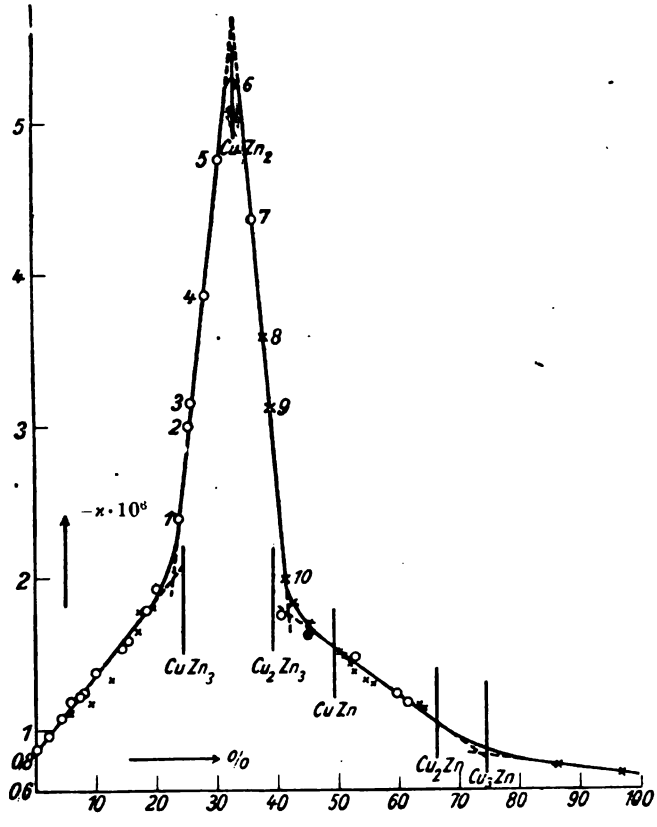


Fig. 1.

Die chemische Verbindung $CuZn_2$ würde einen Kupfergehalt von

$$p = 32{,}716 \text{ Proz.}$$

erfordern. Das stimmt mit obigem Werte $\bar{x}$ so gut überein, daß es schwer wird, an einen reinen Zufall zu glauben.

Nimmt man übrigens den Punkt 6 mit in die Berechnung der Koeffizienten der zweiten Gleichung (2) auf, so wird

$$\bar{x} = 32{,}578; \quad \bar{y} = 5{,}622.$$

Auch dieser Wert $\bar{x}$ gibt noch innerhalb der Beobachtungsfehler eine vollkommene Übereinstimmung mit p.

10. Die Legierung $CuZn_2$ (32,716 Proz. Cu) hat ein eigenartiges Aussehen. Man könnte sie eher für ein Mineral (Erz) halten, als für ein Metall. Sie ist sehr spröde und kann mit einem Hammerschlag zertrümmert werden. An Zink erinnert sie gar nicht, ist aber noch rein weiß bzw. metallisch grau, während eine 35 prozentige Legierung schon deutlich gelblich ist. Bei 40 Proz. sind die Legierungen auch noch sehr spröde und können mit dem Hammer zerspalten werden. Der Bruch ist glatter als bei $CuZn_2$, sehr schön goldgelb gefärbt und bleibt glänzend, ohne, wie Messing, anzulaufen. CuZn (49,302 Proz. Cu) ist richtiges Messing.

11. Zusammenfassung: Während bisherige Leitfähigkeitsbestimmungen an CuZn-Legierungen für eine Bevorzugung der Legierung CuZn sprechen, lassen die Untersuchungen der Magnetisierbarkeit eher eine Besonderheit für das Mischungsverhältnis $Cu\text{-}Zn_2$ vermuten, dem ein sehr großer Diamagnetismus (mindestens $\varkappa = -5{,}3 \cdot 10^{-6}$) zukommt. Weitere Untersuchungen zur Klärung dieser Frage werden hier vorgenommen.

Rostock, 8. Februar 1920.

(Eingegangen 13. Februar 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1920. № 16.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Theorie der Schneidentöne; von F. Krüger.*

(Hierzu Tafel I.)

Die Entstehungsweise der Schneidentöne ist trotz erheblicher Fortschritte in ihrer Erkenntnis noch keineswegs völlig geklärt. R. Wachsmuth[1]) faßt das Resultat seiner und seiner Schüler[2]) Arbeiten über Schneidentöne folgendermaßen zusammen: „Nach alledem wären also die Schneidentöne Töne, welche aus der Störung des Gleichgewichts einer frei ausströmenden Luftlamelle durch eine Einlage entstehen. Durch Stauung des Luftstromes an der (stumpfen) Kante, welche demselben entgegensteht, wird eine Pendelung um die Gleichgewichtslage eingeleitet, bei welcher die Lamelle ihrer ganzen Länge nach um die Einlage hin- und herpendelt oder — bei größerem Abstande — in Unterabteilungen (einzelne Bände) zerfällt und sich in diesen gegen die Einlage bewegt.“ Wie schon W. König[3]) betont, ist hiermit ein klarer Einblick in den Mechanismus dieser Tonerzeugung noch nicht gewonnen: Die Ursache der Pendelung ist nicht aufgeklärt, ferner steht die Deutung der empirisch gefundenen Tatsache der Konstanz des Produktes aus der Tonhöhe und Schneidenabstand noch aus, ebenso die des mehrfachen plötzlichen Springens der Tonhöhe in die höhere Oktave bei Vergrößerung des Schneidenabstandes. König[3]) selbst hat dann eine Theorie dieser letzteren Erscheinung zu entwickeln gesucht, die auf der Rückwirkung der Stauung der Lamelle an der Schneide auf den Austritt der Flüssigkeit aus dem Spalt beruht; aber er gibt selbst zu, daß diese Theorie die Tatsache nicht erklärt, daß

1) R. Wachsmuth, Ann. d. Phys. (4) **14**. S. 469. 1904.

2) Literatur vgl. R. Göller, Dissertation Gießen 1912, und bei J. Rieht, Dissertation Gießen 1917.

3) W. König, Physikal. Zeitschr. **13**. S. 1053. 1912.

die Tonbildung erst von einem bestimmten, nicht zu kleinen Schneidenabstande an erfolgt, und ferner die Ursache der Oktavensprünge im Dunkeln läßt. Der Erklärung der Schneidentöne durch Wirbelbildung, die schon durch die photographischen Schlierenaufnahmen der Schneidentöne durch Wachsmuth nahegelegt war und auf die in der Diskussion zu dem Königschen Vortrage mehrfach hingewiesen wurde, glaubte sich König unter Hinweis auf die Schwierigkeiten der Deutung der Gesetzmäßigkeiten der Schneidentöne auf dieser Grundlage nicht anschließen zu können.

Die von E. Schmidtke[1]) im hiesigen Institut an einer ausströmenden Wasserlamelle angestellten Messungen haben die völlige Analogie der Pendelungen der Wasserlamelle beim Auftreffen auf eine Schneide mit den Schneidentönen einer Luftlamelle erwiesen und den Zusammenhang der Pendelungen mit der Wirbelablösung sichergestellt. Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich auf dieser Basis eine klare Theorie der Schneidentöne geben läßt.

Wie früher[2]) gezeigt wurde, besitzt eine frei ausströmende Flüssigkeitslamelle infolge der abwechselnd rechts und links am Spalt erfolgenden Wirbelablösung eine pendelnde Bewegung, die die Ursache der sogenannten Spalttöne bildet. Die von W. Kohlrausch[3]) gemessene Tonhöhe der Spalttöne ließ sich aus den Konstanten der an der Wasserlamelle beobachteten Wirbelbildung berechnen.

Bezeichnet u die Wanderungsgeschwindigkeit des Wirbelsystems, l den Abstand zweier aufeinander folgender Wirbel, so gilt für die Tonhöhe N, falls sie eben der Anzahl der in der Zeiteinheit abgelösten Wirbel gleichgesetzt wird,

$$N = \frac{u}{l},$$

eine Formel, die übrigens formal mit der bekannten Wellengleichung $N = \frac{v}{\lambda}$ (λ = Wellenlänge, v = Fortpflanzungsgeschwindigkeit) übereinstimmt. Da das Verhältnis der Wirbelgeschwin-

1) E. Schmidtke, Ann. d. Phys. 60. S. 715. 1919.
2) F. Krüger u. E. Schmidtke, Ann. d. Phys. 60. S. 701. 1919.
3) W. Kohlrausch, Pogg. Ann. d. Phys. u. Chem. 13. S. 545. 1881.

digkeit u zur Strömungsgeschwindigkeit U konstant ist und sich experimentell zu 0,23 ergab, da ferner das ebenfalls konstante Verhältnis des Abstandes l zweier aufeinander folgender Wirbel zu der Spaltbreite D gleich 4,9 bestimmt wurde, so ergab sich in guter Übereinstimmung mit den akustisch bestimmten Werten

$$\frac{N \cdot D}{U} \cong 0{,}05 \qquad \text{oder} \qquad N \cong 0{,}05 \cdot \frac{U}{D}.$$

Wird der frei ausströmenden Flüssigkeitslamelle ein Keil oder eine Schneide gegenübergestellt, so erfolgt, falls der Schneidenabstand nicht zu klein ist, ein Pendeln der Lamelle von der einen auf die andere Seite der Schneide, wobei die, wie bei der freien Lamelle, abwechselnd rechts und links am Spalt abgelösten, wenn auch erst in einiger Entfernung vom Spalt, meistens erst nahe an der Schneide deutlich sichtbar werdenden rechts- bzw. linksdrehenden Wirbel sich durch dies eben durch sie bewirkte Pendeln an der Schneide so teilen, daß alle rechts drehenden Wirbel an der rechten Seite der Schneide, alle links drehenden Wirbel an der linken Seite der Schneide entlang wandern, wie das in der Arbeit von E. Schmidtke eingehend beschrieben ist. Bei diesem Vorbeipendeln der Lamelle an der Schneide werden aber, wie in der genannten Arbeit weitergefunden ist, an der Schneide neue Wirbel gebildet, ganz analog wie die Wirbel an einem Stabhindernis und bei den sog. Hiebtönen gebildet werden. Diese Wirbel haben jeweils entgegengesetzten Drehungssinn wie die vor der Schneide durch die Wirkung des Spalts entstandenen. Sie ergänzen die einseitig drehenden Spaltwirbel auf jeder Seite der Schneide zu einem dem v. Kármánschen ähnlichen Wirbelsystem abwechselnd rechts- und linksdrehender Wirbel. Treten diese an der Schneide entstandenen Wirbel wegen der Reibung an der Keilfläche auch schwächer in Erscheinung, so sind sie doch bei stärkerem Strömen der Lamelle deutlich zu erkennen.

Die Rückwirkung dieser mit dem Auftreffen eines Spaltwirbels auf die Schneide verbundenen Stauung führt nun zu einer resonanzartigen Beeinflussung der Frequenz der Wirbelablösung. Ein Anlaß zur Bildung eines neuen Wirbelkeimes am Spalt wird jedesmal gegeben sein, wenn die Stauung des vorhergehenden Spaltwirbels mit gleichem Drehungssinn an der

Schneide rücklaufend am Spalt angelangt ist, eine Stauung, die ja auch mit einer Seitwärtsablenkung der Flüssigkeitslamelle und also einer Knickung derselben am Spalt verbunden ist. Die Dauer der Periode dieses erregenden Vorganges oder der damit identischen Periode der erzwungenen Schwingung ist durch die Summe der Laufzeiten gegeben, welche einerseits ein Wirbel braucht, um die Strecke vom Spalt zur Schneide zu durcheilen, und welche andererseits die Stauungswelle zum Durchlaufen derselben Strecke, aber in umgekehrter Richtung, von der Schneide zum Spalt, benötigt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stauungswelle erfolgt mit der für die jeweilige Flüssigkeit charakteristischen Schallgeschwindigkeit c, welche natürlich groß gegenüber der Wanderungsgeschwindigkeit u des Wirbelsystems ist. Bedeutet also f den Schneidenabstand, so ist die Dauer T der genannten Periode

$$T = \frac{f}{c} + \frac{f}{u} = f \cdot \frac{u + c}{u \cdot c} = \frac{f}{u},$$

da u, wie erwähnt, gegen c zu vernachlässigen ist. Die Frequenz N der Wirbelablösung oder die damit identische Höhe des Schneidentones ist also durch die Beziehung

$$N = \frac{1}{T} = \frac{u}{f}$$

gegeben.

Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Spaltwirbel mit gleichem Drehungssinn ist hiernach also stets einfach gleich dem Schneidenabstand f; er ist unabhängig sowohl von der Wirbelgeschwindigkeit u wie von der Spaltbreite D. Bei der frei ausströmenden Lamelle ohne entgegenstehende Schneide ist der Abstand l zweier aufeinander folgender Wirbel mit gleichem Drehungssinn zwar auch unabhängig von der Wirbelgeschwindigkeit u, aber abhängig von der Spaltbreite D, und zwar dieser direkt proportional ($l = 4{,}9\ D$). Hier aber ist der Wirbelabstand von der Spaltbreite unabhängig und wird durch den Schneidenabstand bedingt; hier ist also $l = f$. Zu bemerken ist noch, daß, damit die Frequenz N eines Schneidetones und eines Spalttones gleich ist, nicht nur der Schneidenabstand gleich dem Wirbelabstand bei der frei ausströmenden Lamelle ($l = 4{,}9\ D$), sondern daß auch die Wirbelgeschwindigkeit in beiden Fällen dieselbe sein muß. Dies bedeutet aber

nicht etwa auch Gleichheit der Ausströmungsgeschwindigkeit U, da das Verhältnis der Wirbelgeschwindigkeit u zur Ausströmungsgeschwindigkeit U, wie noch des weiteren besprochen werden wird, nicht dasselbe ist, sondern im ersten Falle etwa gleich 0,4, im letzteren etwa gleich 0,2 ist.

Die Vorstellung einer ähnlichen Rückwirkung der Stauung auf den Ausströmungsvorgang am Spalt ist wohl zuerst bei Lord Rayleigh[1]) angedeutet. Unabhängig davon und in quantitativer Form ist sie jedoch von W. König entwickelt.

Der wesentliche Unterschied der hier gegebenen Analyse des Vorgangs gegenüber der von König und Lord Rayleigh besteht jedoch einmal darin, daß hier die Wirbelgeschwindigkeit u als maßgebender Faktor auftritt, während bei jenen die Strömungsgeschwindigkeit U der Lamelle selbst an deren Stelle steht; diese beiden Geschwindigkeiten sind aber durchaus verschieden, die Wirbelgeschwindigkeit ist immer sehr viel kleiner als die Strömungsgeschwindigkeit und beträgt, wie unten gezeigt, weniger als die Hälfte der letzteren.

Der zweite, ebenso wichtige Unterschied ist darin zu erblicken, daß nach der hier gegebenen Theorie der durch die Laufzeiten bedingte Wirbelabstand f' sich nach Analogie des Vorganges der erzwungenen Schwingungen an die Stelle des natürlichen Wirbelabstandes l der frei ausströmenden Lamelle setzt, dieser also ihren eigenen Wirbelabstand aufzwingt. Der Fall der Resonanz oder des stärksten Pendelns wird also vorhanden sein, wenn der natürliche Wirbelabstand l gleich dem Schneidenabstand f ist. Wegen der starken Dämpfung der Eigenschwingung der frei ausströmenden Lamelle wird die Resonanzkurve jedoch sehr flach und breit sein, also auch bei erheblicher Differenz von l und f wird noch ein starkes Mitschwingen stattfinden. Mit zunehmender Differenz von beiden wird die erzwungene Schwingung schwächer und schwächer. Wird mit wachsenden Schneidenabstand f der Wirbelabstand der erzwungenen Pendelung immer größer und nähert sich dem Doppelten des Wirbelabstandes bei der frei strömenden Lamelle, so wird der „Zwang“ für den erzwungenen Wirbelabstand viel geringer, wenn dieser Wirbelabstand dadurch auf die Hälfte

1) Lord Rayleigh. Theory of sound, vol. II, p. 412. London 1896.

und damit wieder nahe auf den Wert des Wirbelabstandes der frei pendelnden Lamelle gebracht wird, daß in der Mitte zwischen dem Wirbel an der Schneide und dem Spalt ein neuer Spaltwirbel auftritt, so daß jetzt $l = \frac{f}{2}$ wird und somit $N = \frac{2}{f} \cdot u$. Die Tonhöhe ist damit plötzlich um eine Oktave gesprungen. In Übereinstimmung mit dieser Resonanztheorie des Oktavensprunges steht die Tatsache, daß der Schneidenton nach dem Oktavensprunge erheblich lauter ist als vor demselben, eben wegen der besseren Resonanz mit dem Spaltton, und mit wachsendem Schneidenabstand und sinkender Tonhöhe stetig in seiner Intensität abnimmt. Mit zunehmendem Schneidenabstand tritt dann wieder eine „erzwungene" Vergrößerung des Wirbelabstandes und damit umgekehrt proportional ein Sinken der Tonhöhe ein. Wegen der erwähnten starken Dämpfung der Eigenschwingung der frei ausströmenden Lamelle und der damit verbundenen flachen Resonanzkurve findet aber ein teilweises Überdecken der Schwingungsintervalle I und II statt; d. h. es gibt gewisse Werte des Schneidenabstandes, in denen sowohl der Grundton wie seine Oktave auftreten, dies Intervall des Schneidenabstandes erstreckte sich z. B. bei einem Versuch von R. H. Göller (a. a. O.) von 0,554 bis 0,616 cm (Spaltdicke D: 1 mm). Man erhält den einen oder den anderen Ton, je nachdem man die Tonhöhe durch Vergrößerung im I. Intervall oder durch Verkleinerung des Schneidenabstandes im II. Intervall ändert. Dieser Oktavensprung wird sich wiederholen, so oft ein ganzzahliger Bruchteil des Schneidenabstandes angenähert gleich dem Wirbelabstand bei der frei ausströmenden Lamelle geworden ist. Die Erklärung der Oktavensprünge ergibt sich hier also als unmittelbare Konsequenz der theoretischen Grundvorstellungen.

Es ist hiernach ferner verständlich, weshalb der Schneidenabstand nicht unter einen gewissen Minimalwert f_m sinken darf, damit noch ein Ton entstehen kann. Der natürliche Wirbelabstand der frei ausströmenden Lamelle läßt sich eben durch den Zwang der regulierenden Wirkung der Stauung der Schneide nicht unter einen gewissen Wert herabdrücken, dann versagt die Wirbelbildung. Wie Versuche von Göller (a. a. O.) lehren,

ist diese untere Grenze des Scheidenabstandes etwa gleich dem halben Abstand zweier aufeinander folgender Wirbel mit gleichem Drehungssinn bei der frei ausströmenden Lamelle, also etwa $f_m = \frac{l}{2}$; für einen Spalt von der Breite 1 mm findet Göller nämlich diesen Minimalwert zu 2,86 mm, während $\frac{l}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}9\, D$ = 2,45 mm ist. Aus den Versuchen von J. Rieth ergibt sich jedoch, daß der Minimalabstand f_m für den Beginn der Tonentstehung näher bei l, dem Wirbelabstand der frei ausströmenden Lamelle selbst liegt. Wegen der Stauungsrückwirkung der Schneide kann der für die Ausbildung der ersten Wirbel erforderliche Raum bei der freien Lamelle nur ein angenähertes Maß für den für die Wirbelbildung erforderlichen Minimalraum bei den Schneidentönen bilden.

Aus der Gleichung $N = \frac{u}{f}$ würde sich nun sogleich die Abhängigkeit der Tonhöhe N der Schneidentöne oder der Frequenz der Wirbelablösung von der Strömungsgeschwindigkeit U ergeben, wenn die Beziehung zwischen der Wirbelgeschwindigkeit u und der Strömungsgeschwindigkeit U bekannt wäre. Für die Wirbelablösung hinter stabförmigen Hindernissen ist nach den Beobachtungen von Bènard[1]) und nach den theoretischen Betrachtungen von v. Kármán[2]) das Verhältnis $\frac{u}{U} = a$ eine Konstante; dasselbe gilt mit einem etwas anderen Wert der Konstanten für die Wirbelbildung an Spalten.[3]) Es erscheint daher berechtigt, die Konstanz des Verhältnisses $\frac{u}{U}$ auch hier für die Schneidentöne anzunehmen; die unten folgenden direkten Messungen von u und U werden diese Annahme experimentell bestätigen. Wir setzen daher $u = a' \cdot U$. So ergibt sich für die Frequenz der Schneidentöne

$$N = \frac{u}{f} = \frac{a' \cdot U}{f} \quad \text{oder} \quad \frac{N \cdot f}{U} = a'.$$

1) H. Bènard, Compt. Rend. **147**. S. 839. 1908.

2) Th. v. Kármán, Göttinger Nachricht. S. 541. 1912; Th. v. Kármán u. A. Rubach, Phys. Zeitschr. **13**. S. 49. 1912.

3) F. Krüger u. E. Schmidtke, Ann. d. Phys. **60**. S. 701. 1920.

Diese Konstante a' hat also physikalisch die Bedeutung des Verhältnisses der Wirbelgeschwindigkeit zur Strömungsgeschwindigkeit, sie ist nach den Beobachtungen ungefähr gleich 0,4. Der genaue Wert 0,50, wie ihn die Königsche Theorie verlangt, ist hiernach für die Konstante a' jedenfalls nicht zu erwarten.

Im zweiten Intervall ist analog

$$N = \frac{u}{\frac{f}{2}} = \frac{2u}{f} = \frac{2U \cdot a'}{f} \quad \text{oder} \quad \frac{N \cdot f}{2U} = a';$$

entsprechend ergibt sich für das dritte Intervall $\frac{Nf}{3U} = a'$ usw.

Über den Wert der Konstanten $a' = \frac{u}{U}$ läßt sich theoretisch zurzeit nichts irgendwie Sicheres voraussagen. Experimentell findet sich ein Wert, der etwa bei 0,4 liegt; er ist ungefähr das Doppelte des entsprechenden Wertes, der bei freier Strömung an einer Platte zu 0,20, an einem Stabe zu 0,14, an einem Spalt zu 0,23 bestimmt ist. Darf man die v. Kármánsche Formel $u = \frac{\Gamma}{l\sqrt{8}}$ (Γ = Wirbelstärke), auch hier heranziehen, so liegt die Deutung nahe, daß die Verdoppelung von $\frac{u}{U}$ durch eine Verminderung des l auf seinen halben Wert verursacht wird. Denn infolge der geschilderten Neubildung von Wirbeln am Keil wird die Gesamtzahl der Wirbel pro Längeneinheit verdoppelt. Übrigens beträgt in der noch nicht aufgerollten Grenzschicht, in welcher sich ein kontinuierliches System linearer Elementarwirbel mit der Geschwindigkeit u fortbewegt, der Wert von $\frac{u}{U}$ 0,5.

Von der Veränderung des Wirbelabstandes durch Änderung des Schneidenabstandes darf jedoch das Verhältnis $\frac{u}{U}$ nicht abhängen, wenn man annehmen darf, daß bei sonst ungeänderten Verhältnissen pro Längeneinheit der Trennungsfläche der Lamelle und ruhender Flüssigkeit dieselbe Wirbelstärke gebildet wird. Dann wächst eben die Wirbelstärke Γ in demselben Verhältnis wie der Wirbelabstand l, und die Ge-

schwindigkeit des Wirbelsystems $u = \frac{\Gamma}{l\sqrt{8}}$ bleibt konstant, also auch das Verhältnis $\frac{u}{U}$. Die Messungen, die natürlich auch hier letzten Endes allein entscheidend sein können, bestätigen in der Tat die Unabhängigkeit des Verhältnisses $\frac{u}{U}$ von dem Wirbelabstand l bei den Schneidentönen. Dies gilt auch noch, wenn bei dem Oktavensprung plötzlich pro Längeneinheit doppelt so viel Wirbel gebildet werden. Dann bleibt das Verhältnis $\frac{u}{U}$ konstant, da mit dem Wirbelabstand l auch die Wirbelstärke Γ auf die Hälfte sinkt, so daß wieder die Wirbelgeschwindigkeit $u = \frac{\Gamma}{l\sqrt{8}}$ und damit das Verhältnis $\frac{u}{U}$ konstant bleibt. Diese Konstanz des Verhältnisses beim Oktavensprung, also beim Übergang vom I. in das II. Intervall ist auch durch direkte, unten wiedergegebene Messungen festgestellt.

Die Richtigkeit dieser Theorie ist zuerst durch den Nachweis zu erbringen, daß im I. Intervall der Wirbelabstand gleich dem Schneidenabstand, im zweiten gleich der Hälfte des Schneidenabstandes ist usw. Es wurden zu diesem Zweck mit dem in der Arbeit von E. Schmidtke beschriebenen Strömungsapparat neue Aufnahmen gemacht, um recht deutliche Wirbelbilder des Vorganges zu erhalten. Nach mehrfachen Versuchen gelang es, gegenüber den früheren wesentlich schönere Wirbelbilder zu erhalten dadurch, daß zunächst statt Lykopodiumpulver gewöhnliche, nicht entfettete, also auf der Oberfläche schwimmende Aluminiumbronze verwandt wurde. Ferner wurde das Wasser mit Kaliumpermanganat tief rot gefärbt; auf diesem dunklen Untergrund hebt sich das glänzende Aluminiumpulver leichter ab und läßt die Wirbel mit großer Deutlichkeit hervortreten. Man streut das Pulver entweder in den Ausströmungskasten oder in die Nähe des Spaltes in das Wasser im großen Reservoir, es braucht dann lange Zeit nicht erneuert zu werden. Der Spalt und der Keil wurden dann soweit abgeschnitten, daß sie nur wenige Millimeter aus dem Wasser herausragten, so daß ihre Umrisse in der Photographie sehr scharf wurden. Eine so für das I. Intervall er-

haltene Photographie, die mit dem gleichen Apparat in der selben Weise durch Belichtung mit Blitzlichtpulver in de Arbeit von E. Schmidtke aufgenommen wurde, zeigt Fig. 1 (vgl. Taf. I).

Man sieht auf beiden Seiten des Keils, der einen Winke von 52° und eine Seitenlänge von 7 cm hat, je drei Wirbel Der Abstand je zweier dieser Wirbel ist gleich 13,8, 13,1 11,5 und (10,1) mm, im Mittel also, wenn man den letzter offenbar infolge einer Störung herausfallenden Wert fortläßt gleich 12,8 mm. Der Schneidenabstand der Figur ist gleich 13 mm; also ist in der Tat recht genau der Wirbelabstand gleich dem Schneidenabstand. Die erst an der Schneide gebildeten neuen Wirbel sind in der Figur kaum zu sehen, sie sind, wie schon erwähnt, natürlich durch die Reibung an der Wand stark gedämpft. Man kann sie jedoch bei direkter Beobachtung mit dem Auge gut erkennen, wenn man die Flüssigkeit mit großer Geschwindigkeit ausströmen läßt, so daß starke Wirbelbildung auftritt; für die Photographie ist aber solche schnelle Strömung weniger geeignet.

Fig. 2 und 3 (vgl. Taf. I) zeigen die analogen Aufnahmen für das II. Strömungsintervall. Man sieht, besonders gut bei der direkten Beobachtung mit dem Auge, aber auch recht gut auf der Aufnahme 2, daß hier ein Wirbel schon in der Mitte zwischen Spalt und Schneide vorhanden ist. Die Wirbel erhalten sich nicht lange, doch sind auf jeder der beiden Aufnahmen wenigstens zwei deutlich erkennbar, deren Abstand gemessen werden kann. Es ergibt sich so für den Wirbelabstand auf der Fig. 2 (vgl. Taf. I) der Wert 10 mm, auf der Fig. 3 (vgl. Taf. I) der Wert 9,2 mm, im Mittel also 9,6 mm. Der Schneidenabstand beträgt 20 mm. Hier ist also in der Tat der Wirbelabstand sehr nahe gleich dem halben Schneidenabstand.

Zur weiteren Bestätigung der Theorie müssen nun die oben abgeleiteten Beziehungen zwischen der Wirbelfrequenz (Tonhöhe) N, dem Schneidenabstand f und der Wirbelgeschwindigkeit u bzw. der Strömungsgeschwindigkeit U abgeleiteten Beziehungen geprüft werden; d. h. also, die Gleichungen $N \cdot f = u$ und $\frac{N \cdot f}{U} = a' = \frac{u}{U}$.

Zur Messung der in diesen Gleichungen vorkommenden Größen diente die schon von E. Schmidtke benutzte und beschriebene Apparatur. Die Pendelungsfrequenz N der Flüssigkeitslamelle wurde mit der Stoppuhr gemessen, indem etwa sechsmal oder öfters die Zeit für 20 Pendelungen bestimmt wurde. Zur Messung der Wirbelgeschwindigkeit u waren an der einen Seite des als Schneide dienenden Keils über der Wasseroberfläche in etwa 1 cm Abstand voneinander zwei Drähte befestigt, über die quer in Abständen von je 1 cm dünne Drähte gelötet waren. Dann wurde die Zeit, bei diesem Versuch zunächst mit der Stoppuhr, gemessen, die ein Wirbel zum Durchlaufen der durch diese Querdrähte fixierten Strecke von 5 cm gebrauchte. Die Spaltbreite des wie bei Schmidtke aus zwei Blechen unter einer Neigung von 70° bestehenden Spaltes betrug 1,9 mm; der hier benutzte Keil hatte, wie schon erwähnt, einen Winkel von 52° und eine Seitenlänge von 7 cm.

Die Strömungsgeschwindigkeit wurde zunächst wie bei E. Schmidtke indirekt bestimmt, indem die Geschwindigkeit U' im Ausströmungskasten gemessen wurde, aus der sich durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Kastenbreite zur Spaltbreite die Ausströmungsgeschwindigkeit U im Spalt selbst berechnet. Es war jedoch sehr schwierig und unsicher, U' durch Messen der Geschwindigkeit suspendierter Aluminiumteilchen zu bestimmen, da diese Teilchen doch ziemlich schnell zu Boden sanken. Messungen an auf der Flüssigkeitsoberfläche schwimmenden Teilchen etwa von Lykopodium oder nicht entfettetem Aluminiumpulver waren, wie schon Schmidtke betont, ganz unmöglich, da die Oberflächenschicht in dem Kasten bisweilen völlig stagniert. Es wurden daher besondere Schwimmer konstruiert, zunächst aus einer kleinen Glühlampe, wie sie für Taschenlampenbatterien dienen, dann aus einer größeren geblasenen Glaskugel von etwa 2 cm Durchmesser. Sie wurden durch unten angehängte Gewichte aus dünnen Draht beschwert, so daß sie möglichst ganz unter Wasser schwammen. Es gelang jedoch bei der geringen Wassertiefe von etwa 7 cm nicht, sie gerade ganz unter Wasser zum Schwimmen zu bringen. Um aber den störenden Einfluß der Wasseroberfläche auf ein Minimum zu bringen, wurden auf der oberen Seite der Schwimmer ganz dünne Drähte von 0,1 mm Durchmesser und etwa

1 cm Länge befestigt; diese berührten dann mit ihrer Sp
eben die Wasseroberfläche und hielten den Schwimmer se
in stabiler Lage ganz unter Wasser. So wurde aus 19 Ein
messungen der Zeit die der Schwimmer gebrauchte um
bzw. 1 cm zurückzulegen, das Mittel genommen. Es ergab
$l' = \frac{1}{11,7}$ cm/sec für die Strömungsgeschwindigkeit im Kas
Durch Multiplikation mit $\frac{12,9}{0,19}$, dem Verhältnis der Kastenbr
zur Spaltbreite, ergab sich hieraus die Ausströmungsgesch
digkeit im Spalt zu $l = 5,80$ cm/sec. Beim Schneidenabst
$f = 2,2$ cm ergab sich die Pendelungsfrequenz zu $N = 1,0$
Das Produkt aus Pendelungsfrequenz mal Schneidenabst.
beträgt hier also $N \cdot f = 2,37$. Für die Wirbelgeschwin
keit ergab sich als Mittel aus 43 Einzelmessungen der W
2,41 cm/sec. Die oben abgeleitete Beziehung $N \cdot f = a$
hier in der Tat gut erfüllt. Aus dem eben angegebenen We
von l' berechnet sich

$$\frac{Nf}{l'} = a = 0,41.$$

Die Konstante a' ist nun in der Tat gleich dem Verhältnis
Wirbelgeschwindigkeit zur Strömungsgeschwindigkeit, denn hi
für berechnet sich in sehr guter Übereinstimmung $\frac{2,41}{5,80} = 0,$
Diese Gleichung muß natürlich erfüllt sein, da ja schon
vorhergehende Gleichung $N \cdot f = a$ durch die Versuche
stätigt ist.

Der hier gefundene Wert 0,41 für den Ausdruck $\frac{a}{f}$, stim
nun zwar gut mit dem von Göller (a. a. O.) erhaltenen,
als Mittel von fünf bei verschiedenen Schneidenabständen
fundenen Zahlen den Wert 0,42 angibt, weniger gut jed
mit den Zahlen von J. Rieth, der als Mittelwert 0,50 fin
und mit den an der Wasserlamelle erhaltenen Zahlen
Schmidtke, der im Mittel auch etwa 0,50 erhielt. Um
meine Beobachtungen mit denen Schmidtkes besser
gleichen zu können, wurde der von letzterem benutzte Keil
3,7 cm Seitenlänge und einem Schneidenwinkel von 52° anst
des oben benutzten eingesetzt. Da ferner bei den Spalttö
die Proportionalität der Tonhöhe mit der Ausströmungsgeschw
digkeit nur für nicht zu enge Spalten gilt, so wurde die Sp

breite aus Vorsicht auf 4 mm erweitert. Schließlich wurde die Messung der Wirbelgeschwindigkeit erhöht, indem statt der einfachen Stoppuhr zur Messung der Zeiten ein Chronograph benutzt wurde. Dieser[1] war eine Kopie des nach den Angaben von A. v. Brunn[2] für die Sternwarte der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig konstruierten. Bei der angewandten Belastung von 50 kg betrug die vom Papierstreifen während einer Sekunde durchlaufene Strecke 2,55 cm. Bei den hier zu messenden Zeiten von etwa 0,3 Sekunden wäre eine Stoppuhr ganz unzureichend gewesen, während die Messung mit Hilfe des Chronographen gut gelang.

Vor allem wurde aber auch noch die Genauigkeit der Messung der Ausströmungsgeschwindigkeit U erhöht. Dies geschah einfach in der Weise, daß die aus dem Bassin pro Sekunde ausfließende Wassermenge gemessen wurde. In der Regel wurde die in 15 Sekunden ausfließende Menge mit einem Meßzylinder gemessen. So ließ sich die Ausflußgeschwindigkeit genau und sicher bestimmen ohne die Bedenken, denen die oben geschilderte indirekte Methode immerhin noch ausgesetzt ist. Es ergab sich, daß die mit dem oben beschriebenen großen Schwimmer bei sehr sorgfältigem Messen erhaltenen Werte mit den sichereren aus der Ausflußmenge bestimmten in hinreichender Übereinstimmung waren.

So ergab sich in dem folgenden Versuch die Ausflußmenge zu

280 cm
273 „
275 „
270 „
275 „

im Mittel also zu 274,6 cm³. Da die Spaltbreite 0,40 cm und die Wasserhöhe im Spalt 6,5 cm betrug, so ergibt sich

$$U = \frac{274{,}6}{15 \cdot 6{,}5 \cdot 0{,}40} = 7{,}04 \text{ cm/sec.}$$

---

1) Für die liebenswürdige Überlassung des Chronographen spreche ich Hrn. Prof. Dr. Eggert auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aus.

2) A. v. Brunn, Schriften der Naturforsch. Ges. zu Danzig, N. F. 12. 4. Heft. 1910.

Die Messung nach der indirekten Methode mit dem Schwimm
ergab in diesem Fall 7,26 cm/sec; es soll jedoch hier mit de
sichereren ersten Werte gerechnet werden. In der Reg
waren die nach der indirekten Methode mit Hilfe ein
Schwimmers bestimmten Werte zu klein.

Zunächst wurde nun die Konstanz des Produktes $N \cdot f$ b
verschiedenen Schneidenabständen f geprüft; die Pendelung
frequenz N wurde wie oben aus der Zeit für 20 Pendelung
bestimmt. So ergab sich die folgende Tabelle.

Tabelle 1.

f	N	$N \cdot f$	$\frac{N \cdot f}{U}$
1,35 cm	1,92	2,6	0,37
1,50 „	1,82	2,7	0,39
1,90 „	1,40	2,66	0,38

Das Produkt $N \cdot f$ ist also in der Tat gut konstant. I
ist das vor allem ein sicheres Kriterium dafür, daß keine Eige
schwingung des Wassers im Bassin störend eingewirkt hat, ei
Störung, auf die schon E. Schmidtke in dem zuerst von ih
benutzten Gefäße gestoßen war, die ich aber auch in dem
den späteren Versuchen von Schmidtke und hier benutzte
großem Bassin gelegentlich wiederfand, wenn gerade die Au
strömungsgeschwindigkeit U unglücklich gewählt war. In solche
Falle war die Pendelungsfrequenz weitgehend unabhängig vo
Schneidenabstand; man erkennt diesen Zustand leicht dara
daß dann in dem ganzen Bassin die Wassermasse in deutlich
Schwingung, wenn auch nur mit kleiner Amplitude begriffe
ist, was man an den auf der Oberfläche schwimmenden Ko
glomeraten von Aluminiumpulver leicht konstatiert. Diese R
sonanz entspricht also ganz der Resonanzwirkung der Pfeife
rohre, deren Wirkung schon von R. Wachsmuth (a. a. O
eingehend auseinandergesetzt ist.

Die Wirbelgeschwindigkeit u wurde hier gemessen, inde
mit dem Chronographen die Zeit bestimmt wurde, in der d
Wirbel den Weg von 1 cm zurücklegten; die Wirbel waren b

Verwendung des kurzen Keiles nicht gut auf längeren Strecken zu beobachten. Die Messungen waren infolgedessen recht schwierig und anstrengend. Es wurden so für die Zeiten, die ein Wirbel zum Durchlaufen einer Strecke gebrauchte, folgende Werte erhalten:

0,36	0,42	0,32
0,32	0,36	0,34
0,24	0,30	0,32
0,26	0,36	0,36
0,34	0,32	0,29
0,42	0,30	0,32
0,42	0,40	0,32
0,30		

Das Mittel aus diesen Zahlen ist 0,336, folglich wird

$$u = \frac{1}{0{,}336} = 2{,}94 \ \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \ .$$

Dieser Wert stimmt mit dem Mittelwert 2,65 aus den obigen Werten für $N \cdot f$ in Anbetracht der Schwierigkeit der Bestimmung von u hinreichend überein.

Der natürliche Wirbelabstand bei frei ausströmender Lamelle ohne gegenüberstehende Schneide, der ja gleich dem 4,9fachen der Spaltbreite (0,19 cm) ist, wäre also hier gleich 0,93 cm; die resonanzartige Wirkung der Stauung an der Schneide hat also den Wirbelabstand bis auf 1,9 cm, also auf mehr als das Doppelte vergrößert. Bei einer geringeren weiteren Vergrößerung des Schneidenabstandes tritt deshalb der Oktavensprung und damit die Verringerung des Wirbelabstandes auf die Hälfte ein; nach dem unten angegebenen Versuch ist dies bei einem Schneidenabstand von 2,4 cm bereits eingetreten. Dadurch wird der erzwungene Wirbelabstand, der dann 1,2 cm beträgt, dem natürlichen Wirbelabstand von 0,93 cm in der Tat stark genähert, der „Zwang" wird also durch den Oktavensprung stark herabgesetzt.

Durch Vergrößerung des Schneidenabstandes wurde nun das zweite Schwingungsintervall erhalten, in dem, wie oben auseinandergesetzt, der Wirbelabstand gleich dem halben Schneidenabstand ist. Es ist dies also der Zustand nach dem ersten Oktavensprung oder der Verdoppelung der Pendelungsfrequenz. Hier ergaben sich folgende Werte:

Tabelle 2.

f	N	$N \cdot f$	$\frac{N \cdot f}{U}$
2,4 cm	2,40	5,76	0,82

Der Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot \frac{N \cdot f}{l}$ hat also den Wert 0,41, stim
also mit den für das erste Intervall gefundenen Werten
Nf/U gut überein.

Für dies Intervall muß nach dem obigen

$$N = \frac{u}{\frac{f}{2}} \quad \text{oder} \quad u = \frac{1}{2} N \cdot f$$

sein.

Für u ergab sich als Mittel aus 12 Einzelmessungen
Wert 3,02, der mit $\frac{1}{2} Nf = 2{,}88$ hinreichend übereinstim
Das Verhältnis u/U ist also in der Tat im zweiten Interv
dasselbe wie im ersten.

Der hier wie in den Schmidtkeschen Messungen benut
Spalt unterscheidet sich von den in den akustischen Versuch
von Göller und Rieth benutzten dadurch, daß hier dün
Spaltwände unter einem Winkel von 70° aufeinander treff
während dort ein mehrere Zen
meter tiefer Spalt aus parallel
Wänden benutzt wurde. Um
sehen, ob hierdurch vielleic
eine Veränderung der Konstan
$N \cdot f/U$ bedingt sein könnte, setz
ich in den bisherigen Spalt ein
ebenfalls aus $^1/_2$ mm dickem Ble

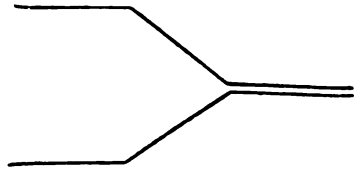


Fig. 4.

bestehenden, 3,9 cm langen und 0,3 cm breiten Spalt ein,
daß nun der Spalt die Form der Fig. 4 besaß.

Bei dem hiermit angestellten Versuche ergab sich
Mittel für die in 15 Sekunden ausgeflossene Wassermen
270 cm³; daraus berechnet sich, da die Wasserhöhe in de
0,3 cm breiten Spalte 6,55 cm betrug, die Ausströmungsgeschwi
digkeit zu

$$U = \frac{270}{15 \cdot 6{,}55 \cdot 0{,}30} = 9{,}23 \ \frac{\text{cm}}{\text{sec}} .$$

Die bei dieser Strömungsgeschwindigkeit bei zwei verschiedenen Schneidenabständen f erhaltenen Werte für N, $N \cdot f$ und $N \cdot f / U$ im ersten Pendelungsintervall sind in der folgenden Tab. 3 wiedergegeben.

Tabelle 3.

f	N	$N \cdot f$	$\frac{N \cdot f}{U}$
1,60 cm	2,30	3,68	0,40
1,85 „	1,90	3,52	0,38

Also auch hier ergibt sich für den Ausdruck $N \cdot f / U$ wieder nahezu der Wert 0,40, die Form der Austrittsöffnung der Lamelle hat also offenbar recht wenig Einfluß auf den Wert dieser Konstanten. Der früher von Schmidtke an Flüssigkeitslamellen gefundene Wert 0,50 ist jedenfalls zu groß, die Abweichung dürfte in der sehr schwierigen und nicht sehr zuverlässigen indirekten Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit U mit Hilfe suspendierter Aluminiumteilchen begründet sein. Hiernach wäre auch wohl für die akustisch bestimmten Werte des Ausdrucks $N \cdot f / U$ anzunehmen, daß der von Göller gefundene Wert 0,42 richtiger ist, als der später von Rieth gefundene Werth 0,50.

Die von Göller sowohl wie von Rieth gefundene geringe Zunahme des Ausdrucks $N \cdot f / U \cdot i$, worin für i jeweils die Zahl des betreffenden Intervalls einzusetzen ist, dürfte wohl in den höheren Intervallen nach Rieth durch die Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit infolge des Energieverlustes durch Reibung zu erklären sein.

Die hier gegebene Wirbeltheorie der Schneidentöne wird also durch die Versuche durchaus bestätigt.

Über den Zusammenhang der Schneidentöne mit den Pfeifentönen läßt sich kurz noch folgendes sagen: Durch ein angesetztes Resonanzrohr werden die Schneidentöne zu Pfeifentönen. Bei ihnen regelt, wie das R. Wachsmuth (a. a. O.) eingehend und klar dargelegt hat, die Eigenfrequenz des Resonanzrohres in weiten Grenzen die Frequenz des Schneidentones. Der Vorgang der Schwingungserregung in einer Pfeife entspricht also einem doppelt gekoppelten Systeme, bei dem zunächst die

Frequenz der Spalttöne durch den Schneidenabstand bzw. di Maulweite, die Frequenz der Schneidentöne wiederum durc den Einfluß des Pfeifenrohres resonanzartig beeinflußt wir Beiden Resonanzvorgängen sind Grenzen gezogen, außerhal deren das Mitschwingen versagt. Zu einem maximalen Mit schwingen bzw. Ansprechen der Pfeife müssen also Spaltbreit Maulweite und Resonanzrohr aufeinander abgestimmt sein Immer aber ist zu berücksichtigen, daß wegen der starke Dämpfung weder der erste, noch der zweite resonanzartig Schwingungsvorgang eine genaue Abstimmung erfordert, da vielmehr die zulässigen Grenzen, innerhalb deren noch ei Mitschwingen stattfindet, sehr weite sind.

Der Vorgang der Schwingungserregung in Pfeifen kann hiernach wohl im wesentlichen als aufgeklärt betrachtet werden

Danzig-Langfuhr, Physik. Institut d. Techn. Hochschule

(Eingegangen 5. Januar 1920.)

2. *Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese*[1]; *von A. Rubinowicz.*

(I. Mitteilung.)

Einleitung.

F. Ehrenhaft[2]) hat in einer mit großem experimentellen Geschick durchgeführten Untersuchung gezeigt, daß kleine Kügelchen, mit einem Radius von der Größenordnung 10^{-5} cm, einseitig mit stark konzentriertem Lichte bestrahlt, je nach ihrer materiellen Beschaffenheit sich entweder dem Lichte zu oder vom Lichte weg bewegen. Die hier wirksamen Kräfte bezeichnet Ehrenhaft als „positiv" bzw. „negativ" photophoretische Kräfte. Aus den bisherigen Untersuchungen von Ehrenhaft und I. Parankiewicz[3]) scheint hervorzugehen, daß diese photophoretischen Kräfte vom Drucke, sowie von der chemischen Beschaffenheit des das Kügelchen umgebenden Gases völlig unabhängig sind. Ehrenhaft zieht daraus den Schluß, daß es sich bei der Photophorese daher um Kräfte handle, die allein der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie entspringen und nicht etwa, wie die Radiometerkräfte, durch das umgebende Gas mitbedingt werden. Da ein

1) *Anm. bei der Korrektur* (20. Februar 1920). Durch ein bedauerliches Versehen, auf das mich Frl. Dr. Norst freundlichst aufmerksam machte, habe ich in dem ursprünglich an die Redaktion eingeschickten Manuskripte den hier mitgeteilten Rechnungen gerade die entgegengesetzte Einfallsrichtung des Lichtes zugrunde gelegt, als es Debye in seiner hier benutzten Arbeit tut. Dies hat auf unsere Rechnungen keinerlei weiteren Einfluß, als daß in dem Ausdruck für die Radiometerkraft das Vorzeichen geändert werden mußte. Dadurch sah ich mich auch veranlaßt, einen Teil der Diskussion der vorliegenden ersten Mitteilung durch die Ausführungen in der anschließend folgenden Mitteilung zu ersetzen. Die in dieser ersten Mitteilung bei der Korrektur sonst geänderten Stellen sind zwischen zwei Sterne *...* gesetzt.

2) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 56. S. 81. 1918.

3) I. Parankiewicz, Wien. Ak. Ber. IIa, 127. S. 1445, 1918.

„negativer" Lichtdruck nicht bekannt ist, würde die Ehrenhaftsche Auffassung, besonders bei der Deutung der negativen Photophorese, das Vorhandensein neuer, bisher unbekannter Naturkräfte postulieren, die die Einheitlichkeit unseres heutigen, recht harmonischen Weltbildes zerstören und daher mit gutem Grunde als äußerst unwillkommene Eindringlinge gelten müßten. So ist also das Bestreben wohl begreiflich, die Ehrenhaftschen Versuche ohne Annahme neuer Kräfte zu deuten.

Für eine derartige Erklärung wird man vor allem die Lichtdruck- und Radiometerkräfte in Betracht zu ziehen haben. Während nun der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material nach den Untersuchungen von Debye[1]) berechnet werden kann, sind die auf ein Kügelchen ausgeübten Radiometerkräfte noch nicht einmal abgeschätzt worden. Die vorliegende Arbeit hat daher zum Ziele, diese Radiometerkräfte exakt zu berechnen, um dadurch die Grundlage für die Entscheidung des Photophoreseproblems zu schaffen.

Da die direkte numerische Auswertung unseres strengen Ausdruckes für die Radiometerkraft sehr langwierige Zahlenrechnungen erfordert, begnügen wir uns hier zunächst damit, für eine erste Orientierung mit Näherungsformeln zu arbeiten; und zwar wollen wir in der vorliegenden ersten Mitteilung Näherungsformeln aufstellen für den Fall eines gegenüber der Wellenlänge des einfallenden Lichtes kleinen und in der anschließend folgenden Mitteilung für den Fall eines großen Radius. Dabei beschränken wir uns in der zweiten Mitteilung auf sehr schwach absorbierende Substanzen. Unsere Rechnungen ergeben nun, daß für (gegenüber der Wellenlänge) kleine Kugeln die Radiometerkraft im Sinne einer positiv —, für große, schwach absorbierende, im Sinne einer negativ photophoretischen Kraft wirkt. Unter diesen Umständen ist es verständlich, daß die numerische Berechnung der Radiometerkraft im Falle der Ehrenhaftschen Versuchsbedingungen auf große Schwierigkeiten stößt. Denn Ehrenhaft benutzt bei seinen Versuchen das kontinuierliche Spektrum einer Bogenlampe und Teilchen von der Größenordnung der Wellenlänge des verwendeten Lichtes. Die von ihm beobachteten Kräfte sind also (abgesehen vom Lichtdruck) als

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 30. S. 57. 1909.

Resultat der Superposition positiver und negativer (für große und kleine Wellenlängen) Radiometerkräfte anzusehen. Bei der Berechnung müßte man daher schrittweise vorgehend in einem großen Gebiet des Spektrums unsere exakte Formel auswerten, da die Näherungsformeln nur in dem Grenzfalle sehr großer und sehr kleiner Wellenlängen Giltigkeit haben.

Für einen exakten Vergleich der Theorie mit der Erfahrung wäre es daher notwendig, Versuche mit monochromatischem oder wenigstens annähernd monochromatischem Lichte anzustellen, um so die exakte numerische Auswertung unserer Formeln praktisch durchführbar zu machen. Selbstverständlich müßten für die zur Prüfung der Theorie angestellten Versuche alle in unseren Formeln auftretenden Daten bekannt sein.*

Der Berechnung der Radiometerwirkung, die eine einseitig bestrahlte, in einem Gas befindliche Kugel erleidet, liegt naturgemäß folgender Gedankengang zugrunde. Die von der Kugel absorbierte Lichtenergie erwärmt sie, so daß ihre verschiedenen Teile verschiedene Temperatur besitzen. Durch Betrachtung der Impulsänderung, die die auf das Kügelchen auftreffenden Gasmoleküle erleiden, kann man dann den Druck des Gases auf das getroffene Oberflächenelement in seiner Abhängigkeit von dessen Temperatur berechnen. Damit ist das Radiometerproblem auf ein Wärmeleitungsproblem zurückgeführt, nämlich auf die Berechnung der Temperaturverteilung auf der Oberfläche der Kugel. Dieses Wärmeleitungsproblem ist nun einerseits durch die Wärmeleitungsgleichung, andererseits durch eine Randbedingung bestimmt, die nur besagt, in welcher Weise die Wärme durch die auftreffenden Moleküle von der Kugeloberfläche in das Gas wegtransportiert wird.

Unsere Arbeit zerfällt dem Wesen der Sache nach in zwei Teile: In dem ersten weit kürzeren, werden im wesentlichen nach Arbeiten von Knudsen[1]) die Formeln angeführt, die das gaskinetische Problem lösen, d. h. die Abhängigkeit des Radiometerdruckes von der Temperatur des Oberflächenelementes bestimmen und den theoretischen Wert für die äußere Wärmeleitfähigkeit angeben, die ihrerseits die Rand-

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. **32.** S. 809. 1910 und **34.** S. 593. 1911.

bedingung unseres Wärmeleitungsproblems festlegt. Der zweite Teil enthält die Lösung des Wärmeleitungsproblems und den Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung soweit dies hier eben schon durchführbar ist.

I. Gaskinetische Betrachtungen.

In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst ein in einem Gase eingebettetes, materielles Kügelchen, auf dessen Oberfläche eine Temperaturverschiedenheit herrscht, und fragen uns nach der Kraft, die es unter dem Einfluß seiner Umgebung erfährt. Diese Radiometerkraft ist gegeben durch:

$$K = \int P \cos \vartheta' \, df ,$$

wo ϑ' den Winkel bedeutet, den die dem einfallenden Lichte entgegengesetzte Richtung mit dem Radiusvektor (vom Kugelmittelpunkt aus) nach dem Flächenelement df einschließt und P der Radiometerdruck des Gases auf df ist. Bezeichnen wir ferner mit φ' den Winkel, den die Ebene durch die Richtung des einfallenden Lichtes und den Radiusvektor mit einer festen, durch die Richtung des einfallenden Lichtes gelegten Ebene bildet und schließlich mit r' den Radiusvektor (die Punkte der Kugeloberfläche seien durch $r' = a$ gegeben), so haben wir ein System von Polarkoordinaten r', φ', ϑ', in dem sich das Flächenelement df ausdrückt durch:

$$df = a^2 \sin \vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi' ;$$

Zur Berechnung der Kraft K ist es also notwendig, den Radiometerdruck P, den das umgebende Gas auf unser Kügelchen ausübt, in seiner Abhängigkeit von den Koordinaten der Oberfläche φ' und ϑ' anzugeben.

Dabei genügt das Vorzeichen von K der Ehrenhaftschen Terminologie; es entspricht nämlich dem positiven Vorzeichen von K eine Kraft, die das Teilchen in der Richtung der forteilenden Lichtwelle treibt, also eine positiv photophoretische Kraft, während wir es bei negativem Zeichen von K mit lichtnegativer Photophorese zu tun haben. Wir wollen aber im folgenden durchwegs, um den Ursprung der von uns zu rechnenden Kraft K zu betonen, die Kraft K als Radiometerwirkung bezeichnen.

Für den Radiometerdruck P erhält man nun mit Hilfe gaskinetischer Überlegungen in erster Näherung den Wert[1]):

$$P = \frac{\gamma}{4} \frac{R\delta}{M} \cdot \tau,$$

wo R die auf ein Mol bezogene Gaskonstante, δ die Dichte des Gases, M dessen Molekulargewicht und τ den Temperaturüberschuß des Oberflächenelementes gegenüber der Temperatur des umgebenden Gases bedeutet. γ ist der Akkommodationskoeffizient, ein Zahlenfaktor, der im wesentlichen besagt, inwieweit das Molekül, das an einem Körper reflektiert wird, dessen Temperatur bei der Reflexion annimmt und der selbstverständlich von der Natur des Gases und der die Moleküle reflektierenden Oberfläche abhängt. γ ist stets kleiner als 1 und erreicht diesen Wert nur an „vollkommen rauhen" Oberflächen. Für blankes Platin in H_2 hat γ z. B. den Wert 0,358; in O_2 den Wert 0,895, für stark platiniertes Platin in H_2 ist $\gamma = 0{,}712$, in O_2 hat es den Wert 0,956, für Glas in H_2 0,26 usw.

Es ist zu bemerken, daß der oben angegebene Ausdruck für P nur dann verwendet werden darf, wenn die Dimensionen der Kugel klein sind gegenüber der freien Weglänge des Gases. Alle folgenden Überlegungen gelten daher nur unter dieser Annahme.

Setzen wir unseren Wert für P in den Ausdruck für die Radiometerkraft K ein, so erhalten wir endlich

$$(1) \quad \begin{cases} K = \frac{1}{4} \gamma \frac{\delta R}{M} \int \tau \cos \vartheta' \, df \\ \qquad = \frac{1}{4} \gamma \frac{\delta R}{M} a^2 \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \tau \cos \vartheta' \sin \vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi' . \end{cases}$$

Nun wollen wir noch die Randbedingung für das im folgenden zu behandelnde Wärmeleitungsproblem angeben. Sie folgt einfach aus der Tatsache, daß die, von den an dem Flächenelement df reflektierten Molekülen weggeführte Wärme-

1) M. Knudsen, a. a. O. Wir benützen den von M. v. Smoluchowski (Ann. d. Phys. **35**. S. 983. 1911, Formel 20, S. 1002) angegebenen Ausdruck für P, indem wir gleichzeitig dem Umstande Rechnung tragen, daß τ eine kleine Größe ist.

menge gleich sein muß derjenigen, die durch dieses Fläch element hindurchdringt. Die erstere nun ist nach Knud gleich

$$Q = \frac{\frac{c_p}{c_v} + 1}{\frac{c_p}{c_v} - 1} \gamma \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{R^3}{M^3} \sqrt{T}\, \delta\, \tau\, df,$$

wenn c_p und c_v die beiden spezifischen Wärmen des Ga und T seine Temperatur bezeichnen. Die durch das Fläch element hindurchströmende Wärmemenge hingegen ist

$$- w \frac{\partial \tau}{\partial \nu} df,$$

wenn w den Wärmeleitungskoeffizienten bedeutet. Die Glei setzung der beiden letzten Ausdrücke liefert dann die gesuc Randbedingung:

$$h\tau + w \frac{\partial \tau}{\partial \nu} = 0, \tag{2}$$

wo h, der äußere Wärmeleitungskoeffizient, gegeben ist du

$$h = \frac{\frac{c_p}{c_v} + 1}{\frac{c_p}{c_v} - 1} \gamma \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{R^3}{M^3} \sqrt{T}\, \delta. \tag{3}$$

Zahlenmäßig erhalten wir für den Fall, daß das Gas si bei der Temperatur $T = 273$ und unter dem Drucke $p = 10^6$ d befindet, nach Knudsen für h in H_2 den Wert $h = \gamma \cdot 10{,}9$ $\cdot 4{,}188 \cdot 10^7 = \gamma \cdot 4{,}593 \cdot 10^8 \frac{\text{erg}}{\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}}$, in O_2 den W $h = \gamma \cdot 2{,}803 \cdot 4{,}188 \cdot 10^7 = \gamma \cdot 1{,}174 \cdot 10^8 \frac{\text{erg}}{\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}}$.

Wenn wir uns im vorangehenden auch vollständig a den Standpunkt von Knudsen gestellt haben, wollen. uns doch nicht verhehlen, daß er nicht in jeder Hinsicht friedigend ist. Jedenfalls steht es aber fest, daß die Knu senschen Angaben sicherlich die richtige Größenordnung ge und dies genügt vorläufig vollständig für unsere Zwecke.

II. Betrachtung über die Temperaturverteilung in der Kugel.

§ 1. Formulierung der Wärmeleitungsaufgabe.

Nach den im ersten Teile entwickelten Überlegungen ist die auf ein Kügelchen wirkende Radiometerkraft K durch die Temperaturverteilung τ an der Oberfläche des Kügelchens gegeben und es erwächst uns daher die Aufgabe, diese Funktion τ zu bestimmen. Zunächst muß τ der Differentialgleichung

$$s \cdot d \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = w \Delta \tau + \sigma \mathfrak{E}^2 \tag{4}$$

genügen, worin s die spezifische Wärme, d die Dichte, w die Wärmeleitfähigkeit, σ die elektrische Leitfähigkeit und $\mathfrak{E}$ den Vektor der elektrischen Feldstärke in irgendeinem Punkte im Innern des Kügelchens bedeutet. Der letzte Term in unserer Gleichung bezeichnet dabei die Wärmemenge (Joulesche Wärme), die dem betreffenden Punkte unserer Kugel von der sie durcheilenden Lichtwelle zugeführt wird. Da $\mathfrak{E}$ eine bekannte Funktion ist, so wird durch die Gleichung (4) im Verein mit der Randbedingung (2) der Verlauf von τ innerhalb der Kugel vollständig bestimmt. Die Funktion τ hängt also ganz wesentlich von der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ ab. Wir wollen daher zunächst im folgenden § 2 den bekannten Ausdruck für $\mathfrak{E}$ anführen. Im § 3 wird dann, um den Gang der späteren Überlegungen nicht zu unterbrechen, eine Greensche Funktion angegeben. Unsere eigentlichen Erwägungen zur Lösung der Gleichung (4) entwickeln wir schließlich in § 4.

§ 2. Das elektrische Feld innerhalb der Kugel.

Wir wollen hier den Ausdruck für die elektrische Feldstärke innerhalb der durchstrahlten Kugel in der mathematisch sehr eleganten Form wiedergeben, die von P. Debye[1]) herrührt.

Denken wir uns ein System von Polarkoordinaten r, φ, ϑ bestimmt, das genau ebenso gelegen ist, wie das im ersten Teil angegebene System r', φ', ϑ'; bezeichnen wir ferner die Komponenten von $\mathfrak{E}$ nach diesen Koordinaten mit E_r, E_φ, E_ϑ und setzen wir endlich

$$E_r = \Re(R \cdot e^{i\omega t}), \quad E_\varphi = \Re(F \cdot e^{i\omega t}), \quad E_\vartheta = \Re(T \cdot e^{i\omega t}) \tag{5}$$

(ω ist dabei die Anzahl der Lichtschwingungen in 2π sec),

1) P. Debye, Ann. d. Phys. **30**. S. 57. 1909.

so bestimmt sich nach Debye R, F und T aus zwei Potentialen Π_1^i und Π_2^i in nachstehender Weise:

$$(6)\qquad \begin{cases} R = \dfrac{\partial^2 r\Pi_1^i}{\partial r^2} + K_i^2 r\Pi_1^i, \\ F = \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial^2 r\Pi_1^i}{\partial r\,\partial\varphi} + k_2^i\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r\Pi_2^i}{\partial\vartheta}, \\ T = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 r\Pi_1^i}{\partial r\,\partial\vartheta} - k_2^i\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial r\Pi_2^i}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

Bezüglich der hier auftretenden Konstanten ist dab folgendes zu merken. Wir bezeichnen mit:

$$(7)\qquad K^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - i\frac{\mu\sigma\omega}{c^2},\quad k_1 = \frac{i\varepsilon\omega}{c} + \frac{\sigma}{c},\quad k_2 = \frac{i\mu\omega}{c},$$

worin ε die Dielektrizitätskonstante, μ die Permeabilitä c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet und $i = \sqrt{-1}$ ist. $\mathfrak{E}$, ε, und σ werden dabei in rationellen Heavisideschen Einheite gemessen. Fügen wir nun einer der in (7) eingeführten Größe den Index i oder a bei (z. B. K_i, k_1^i, k_1^a usw.), so soll dam angezeigt werden, daß die auftretende Konstante für da Medium innerhalb bzw. außerhalb der Kugel zu nehmen is

Die in (6) auftretenden Potentialfunktionen Π_1^i und Π sind nun durch die folgenden Reihen gegeben:

$$(8)\qquad \begin{cases} r\Pi_1^i = \dfrac{\cos\varphi}{K_a^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n^1\psi_n(K_i r)P_n^1(\cos\vartheta), \\ r\Pi_2^i = -\dfrac{\sin\varphi}{K_a^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2\psi_n(K_i r)P_n^1(\cos\vartheta), \end{cases}$$

worin B_n^1 und B_n^2 später noch anzugebende Konstante sin und die Funktionen ψ_n und P_n^1 in folgender Weise definie werden. ψ_n ist eine Lösung der Differentialgleichung:

$$(9)\qquad \frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right)\psi_n(x) = 0,$$

die sich im Punkte $x = 0$ regulär verhält und durch nachstehe den Ausdruck bestimmt wird:

$$(10)\qquad \begin{cases} \psi_n(x) = \left(\dfrac{\pi x}{2}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1\cdot 3\ldots(2n+1)} \\ \qquad\qquad \left[1 - \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!\,\frac{2n+3}{2}} + \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!\,\frac{2n+3}{2}\cdot\frac{2n+5}{2}} - \cdots\right. \end{cases}$$

$J_{n+1/2}$ ist dabei die im Punkte $x = 0$ reguläre Besselsche Funktion J_ν mit dem Index $\nu = n + \frac{1}{2}$.

Für die numerische Berechnung der Funktionen ψ_n und ihrer Ableitungen sind dabei folgende Rekursionsformeln von besonderem Vorteil:

$$(11)\quad \begin{cases} (2n+1)\dfrac{d\psi_n(x)}{dx} = (n+1)\psi_{n-1}(x) - n\,\psi_{n+1}(x), \\ (2n+1)\dfrac{\psi_n(x)}{x} = \psi_{n-1}(x) + \psi_{n+1}(x). \end{cases}$$

Eine zweite, noch in diesem Paragraph zu verwendende Lösung der Gleichung (9), für die ebenfalls die Zusammenhangsformeln (11) gelten, wird durch die Funktion:

$$(12)\quad \begin{cases} \zeta_n(x) = \left(\dfrac{\pi x}{2}\right)^{1/2} H^{2}_{n+1/2}(x) = e^{i\frac{\pi}{2}(n+1)} e^{-ix} \cdot \\ \cdot \quad \left[1 - \dfrac{i}{2x}\dfrac{n(n+1)}{1!} - \dfrac{1}{(2x)^2}\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2!} + \ldots\right] \end{cases}$$

gegeben, wo $H^{2}_{n+1/2}(x)$ die Hankelsche Funktion zweiter Art mit dem Index $n + \frac{1}{2}$ ist, die mit der früher angeschriebenen Besselschen Funktion durch die Relation zusammenhängt:

$$H^{2}_{\nu}(x) = -\frac{i}{\sin \nu\pi}\left(e^{i\nu\pi} J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)\right).$$

Die in (8) auftretende Funktion $P_n^1(\cos\vartheta)$ ist die erste zugeordnete Kugelfunktion der gewöhnlichen zonalen Kugelfunktion $P_n(\cos\vartheta)$ und wird bestimmt durch die Gleichung

$$(13)\quad P_n^1(\cos\vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos\vartheta) = \sin\vartheta \frac{d}{d\cos\vartheta} P_n \cos\vartheta.$$

Die im folgenden gelegentlich gebrauchte νte zugeordnete Kugelfunktion. $P_n^\nu(\cos\vartheta)$ der ersten Kugelfunktion definieren wir, in Verallgemeinerung der Gleichung (13) mit F. Neumann durch die Gleichung[1]):

$$P_n^\nu(\cos\vartheta) = \sin^\nu\vartheta \frac{d^\nu}{d(\cos\vartheta)^\nu} P_n(\cos\vartheta).$$

Um die Einheitlichkeit der Schreibweise zu wahren, werden wir auch schreiben:

$$P_n(\cos\vartheta) = P_n^0(\cos\vartheta).$$

1) Wangerin, Enzyklopädie d. math. Wissensch. II. A. 10. S. 711.

Die in (8) auftretenden Konstanten B_n^1 und B_n^2 sind durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(14)\quad \begin{cases} B_n^1 = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\,\dfrac{k_1^a\zeta_n(K_a a)K_a\psi_n'(K_a a)-K_a\zeta_n'(K_a a)k_1^a\psi_n(K_a a)}{k_1^a\zeta_n(K_a a)K_i\psi_n'(K_i a)-K_a\zeta_n'(K_a a)k_1^i\psi_n(K_i a)}, \\ B_n^2 = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\,\dfrac{k_2^a\zeta_n(K_a a)K_a\psi_n'(K_a a)-K_a\zeta_n'(K_a a)k_2^a\psi_n(K_a a)}{k_2^a\zeta_n(K_a a)K_i\psi_n'(K_i a)-K_a\zeta_n'(K_a a)k_2^i\psi_n(K_i a)}. \end{cases}$$

Dabei ist z. B. unter $\zeta_n'(K_a r)$ zu verstehen $\dfrac{d}{d(K_a r)}\zeta_n(K_a r)$.

Aus den Formeln (6) und (8) ergeben sich endlich die nachstehenden Ausdrücke für R, F und T:

$$(15)\quad \begin{cases} R = \dfrac{\cos\varphi}{K_a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)B_n^1\,\dfrac{\psi_n(K_i r)}{r^2}\,P_n^1(\cos\vartheta), \\ F = -\dfrac{\sin\varphi}{K_a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[K_i B_n^1\,\dfrac{\psi_n'(K_i r)}{r}\,\dfrac{P_n^1(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} \\ \qquad\qquad + k_2^i B_n^2\,\dfrac{\psi_n(K_i r)}{r}\,\dfrac{d}{d\vartheta}P_n^1(\cos\vartheta)\Big], \\ T = \dfrac{\cos\varphi}{K_a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[K_i B_n^1\,\dfrac{\psi_n'(K_i r)}{r}\,\dfrac{d}{d\vartheta}P_n^1(\cos\vartheta) \\ \qquad\qquad + k_2^i B_n^2\,\dfrac{\psi_n(K_i r)}{r}\,\dfrac{P_n^1(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}\Big]. \end{cases}$$

Der Ausdruck für R ist hier mit Rücksicht auf die Differentialgleichung (9) schon gleich vereinfacht angeschrieben.

§ 3. Die Greensche Funktion für die Kugel.

Um den Fluß der im folgenden Paragraph beginnenden Ausführungen nicht zu unterbrechen, wollen wir jetzt den Ausdruck für eine später zu verwendende Greensche Funktion angeben. In den weiteren Überlegungen wird uns nämlich folgende Aufgabe entgegentreten. Es ist eine Funktion u zu bestimmen, die innerhalb unserer Kugel mit dem Radius a der Differentialgleichung

$$\Delta u + f(r, \varphi, \vartheta) = 0$$

genügt und an der Begrenzung der Kugel die Randbedingung

$$hu + w\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

erfüllt. Die Lösung unseres Problems wird nun erhalten durch das über das Innere der Kugel erstreckte Integral:

$$(16)\quad \begin{cases} u(r', \varphi', \vartheta') = \frac{1}{4\pi} \int G(r', \varphi', \vartheta'; r, \varphi, \vartheta) \cdot f(r, \varphi, \vartheta)\, d\tau, \\ \text{wo} \qquad d\tau = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr \end{cases}$$

ein Raumelement und G eine Funktion mit folgenden Eigenschaften bedeutet:

(A.) G ist mit Ausnahme eines Punktes $Q(r, \varphi, \vartheta)$ im Innern unserer Kugel überall endlich und stetig. Im Punkte Q wird G wie $1/\varrho$ unendlich, wenn ϱ den Abstand eines variablen Punktes P mit den Koordinaten r', φ', ϑ' von dem festen Punkte Q bedeutet. G läßt sich somit in der Form $G = \frac{1}{\varrho} + U$ darstellen, wo U eine im Innern der Kugel überall reguläre Funktion ist.

(B.) G genügt der Differentialgleichung $\Delta G = 0$, woraus unmittelbar das Bestehen der Gleichung $\Delta U = 0$ folgt.

(C.) G erfüllt an der Begrenzung der Kugel die Randbedingung

$$\left[h G + w \frac{\partial G}{\partial r'}\right]_{r'=a} = 0.$$

Dabei sei wie früher a der Radius unserer Kugel.

Eine solche Funktion G läßt sich nun einfach angeben. Bezeichnen wir zunächst mit γ den Winkel zwischen r' und r, so ist

$$\frac{1}{\varrho} = (r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\gamma)^{-1/2} = \frac{1}{r'}\left(1 + \frac{r^2}{r'^2} - 2\frac{r}{r'}\cos\gamma\right)^{-1/2}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^\nu}{r'^{\nu+1}} P_\nu(\cos\gamma),$$

wenn $P_\nu(\cos\gamma)$ die gewöhnliche zonale Kugelfunktion νter Ordnung bedeutet und wir den Fall $r' > r$ ins Auge fassen. Da U nach (B.) der Differentialgleichung $\Delta U = 0$ genügt, nach (A.) im Innern der Kugel überall endlich sein soll, so kann U mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse als eine Reihenentwicklung von der Form

$$U = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r'^\nu P_\nu(\cos\gamma)$$

angesetzt werden. Es ist somit

$$G = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{r^\nu}{r'^{\nu+1}} + a_\nu r'^\nu\right] P_\nu(\cos\gamma)$$

und

$$\frac{\partial G}{\partial r'} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[-(\nu+1)\frac{r^\nu}{r'^{\nu+2}} + \nu a_\nu r'^{\nu-1}\right] P_\nu(\cos\gamma).$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_ν ist nun die Randbedingung (C.) zu verwenden, deren Erfülltsein das identische Bestehen der Relation

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[h\left(\frac{r^\nu}{a^{\nu+1}} + a_\nu a^\nu\right) + w\left(-(\nu+1)\frac{r^\nu}{a^{\nu+2}} + \nu a_\nu a^{\nu-1}\right)\right] P_\nu(\cos\gamma) = 0$$

fordert.

Daraus ergibt sich der Koeffizient a_ν zu:

$$a_\nu = \frac{r^\nu}{a^{2\nu+1}}\,\frac{w(\nu+1)-ha}{w\nu+ha}.$$

Es ist daher für $r' > r$:

$$(17)\quad \begin{cases} G(r', \varphi', \vartheta';\ r, \varphi, \vartheta) \\ \quad = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{1}{r'^{\nu+1}} + \frac{w(\nu+1)-ha}{w\nu+ha}\cdot\frac{r^\nu}{a^{2\nu+1}}\right] r^\nu \cdot P_\nu(\cos\gamma). \end{cases}$$

Wir müssen noch angeben, wie der Ausdruck für G lautet, wenn wir uns die Punkte P und Q durch die räumlichen Polarkoordinaten r', φ', ϑ' bzw. r, φ, ϑ festgelegt denken. In diesem Falle ist

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi').$$

Es wird daher[1])

$$(18)\quad P_\nu(\cos\gamma) = \sum_{\mu=0}^{n}\varepsilon_\mu\frac{2(\nu-\mu)!}{(\nu+\mu)!}P_\nu^\mu(\cos\vartheta)P_\nu^\mu(\cos\vartheta')\cos\mu(\varphi-\varphi'),$$

wobei $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ und für $\mu \neq 0$ $\varepsilon_\mu = 1$ ist.

Um somit G als Funktion von r, φ, ϑ und r', φ', ϑ' auszudrücken, ist in (17) $P_\nu(\cos\gamma)$ einfach durch diesen letzteren Ausdruck (18) zu ersetzen.

§ 4. Reduktion des Wärmeleitungsproblems.

Es bietet keine Schwierigkeit, die Lösung des in § 1 formulierten Wärmeleitungsproblems in Form einer Reihenentwicklung anzuschreiben. Wir wollen uns aber vor Augen halten, daß unser eigentliches Ziel die Berechnung der radiometrischen

1) Vgl. Enzyklopädie d. math. Wiss., a. a. O. S. 713.

Kraft K (1) ist und es daher genügt, den Ausdruck für τ nur so weit anzugeben, als dies die Berechnung des Ausdrucks für K erfordert.

Wir gehen dabei in zwei Stufen vor. Zunächst behalten wir nur jene Glieder in der Darstellung von τ, die in dieser erforderlichen Weise von der Zeit abhängen, und aus diesen Gliedern wählen wir sodann jene aus, die zum Integral für die Radiometerkraft K einen nicht verschwindenden Anteil liefern. Um diese Auswahl der Glieder in der Darstellung von τ zu treffen, wollen wir den in der Wärmeleitungsgleichung (4) auftretenden Ausdruck für $\sigma \mathfrak{E}^2$ betrachten. Zunächst denken wir uns (15) in der Form geschrieben:

$$(19)\quad \begin{cases} R = (A + iA')\cos\varphi; \qquad F = (B + iB')\sin\varphi; \\ T = (C + iC')\cos\varphi. \end{cases}$$

A, A', B, B', C, C' sind dabei reelle Funktionen von r und ϑ.

Nun ist nach (5)

$$E_r = (A\cos\omega t - A'\sin\omega t)\cos\varphi,$$
$$E_\varphi = (B\cos\omega t - B'\sin\omega t)\sin\varphi,$$
$$E_\vartheta = (C\cos\omega t - C'\sin\omega t)\cos\varphi.$$

Mithin wird

$$\begin{aligned}\sigma\mathfrak{E}^2 = \sigma(E_r^2 + E_\varphi^2 + E_\vartheta^2) = \sigma[&(A^2\cos^2\varphi + B^2\sin^2\varphi \\ &+ C^2\cos^2\varphi)\cos^2\omega t + (A'^2\cos^2\varphi + B'^2\sin^2\varphi \\ &+ C'^2\cos^2\varphi)\sin^2\omega t - 2(AA'\cos^2\varphi + BB'\sin^2\varphi \\ &+ CC'\cos^2\varphi)\cos\omega t\sin\omega t] = \frac{\sigma}{2}\cdot[(A^2 + A'^2)\cos^2\varphi \\ &+ (B^2 + B'^2)\sin^2\varphi + (C^2 + C'^2)\cos^2\varphi] \\ &+ \frac{\sigma}{2}\cdot[(A^2 - A'^2)\cos^2\varphi + (B^2 - B'^2)\sin^2\varphi \\ &+ (C^2 - C'^2)\cos^2\varphi]\cos 2\omega t - \sigma(AA'\cos^2\varphi \\ &+ BB'\sin^2\varphi + CC'\cos^2\varphi)\sin 2\omega t.\end{aligned}$$

Denken wir uns nun diesen Ausdruck für $\sigma\mathfrak{E}^2$ in unsere Wärmeleitungsgleichung (4) eingesetzt, so sehen wir ohne weiteres ein, daß sich die Lösung τ von (4), die dem stationären Zustande entspricht, in 2 Teile spaltet: in einen Teil $\bar{\tau}$, der

von der Zeit nicht abhängt und in einen Teil $\bar{\bar{\tau}}$, der sich periodisch mit der Zeit ändert. (Die Periode beträgt $1/2\omega$.) Setzen wir nun $\tau = \bar{\tau} + \bar{\bar{\tau}}$ in den Ausdruck (1) für die Radiometerkraft ein, so erkennen wir, daß auch sie sich dann in 2 Terme gliedert, von denen der eine $\bar{K}$ von der Zeit unabhängig, der andere $\bar{\bar{K}}$ dagegen periodisch mit der Zeit ist. Es ist nun klar, daß es für uns genügt, die Kraft $\bar{K}$ allein zu betrachten. Nehmen wir nämlich an, daß unser Teilchen sich in einem Gase unter dem Einfluß der Kraft $K = \bar{K} + \bar{\bar{K}}$ bewegt, so ist der Widerstand, den das Teilchen bei seiner Bewegung erleidet, proportional seiner Geschwindigkeit und eine einfache Diskussion der Bewegungsgleichung zeigt, daß die mittlere Geschwindigkeit des Teilchens bei einer stationären Bewegung durch die Kraft $\bar{K}$ allein bestimmt wird. Es genügt demnach für unsere Zwecke, die Wärmeleitungsgleichung (4) nur für den Fall zu lösen, wo für $\sigma \mathfrak{E}^2$ der Ausdruck gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma}{2}\left[(A^2+A'^2)\cos^2\varphi + (B^2+B'^2)\sin^2\varphi + (C+C'^2)\cos^2\varphi\right] \\
&\quad = \frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2 + |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2\right] \\
&\quad + \frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2 - |B+iB'|^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + |C+iC'|^2\right]\cos 2\varphi .
\end{aligned}$$

Die aufzulösende Gleichung hat also die Gestalt:

$$\begin{aligned}
s\cdot d\cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} = w\Delta\bar{\tau} + \frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2 + |B+iB'|^2\right. \\
\left. + |C+iC'|^2\right] + \frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2\right. \\
\left. - |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2\right]\cos 2\varphi ,
\end{aligned}$$

was mit Rücksicht darauf, daß $\bar{\tau}$ von der Zeit nicht abhängt, sich zu

$$(20)\quad \begin{cases} w\Delta\bar{\tau} + \frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2 + |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2\right] \\ \quad + \frac{\sigma}{4}\left[|A+iA'|^2 - |B+iB'|^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. + |C+iC'|^2\right]\cos 2\varphi = 0 \end{cases}$$

vereinfacht. Dabei unterliegt $\bar{\tau}$ derselben Randbedingung wie τ, d. h.

$$h\,\bar{\tau} + w_1 \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial r} = 0\,. \tag{21}$$

Dieses Randwertproblem (20) und (21) haben wir aber schon in § 3 gelöst, so daß wir die dort angegebene Lösung (16) einfach übertragen können und finden:

$$\bar{\tau}(r',\varphi',\vartheta') = \frac{1}{4\pi}\int G(r',\varphi',\vartheta';\, r,\varphi,\vartheta)\frac{1}{w}\cdot\frac{\sigma}{4}\{[|A+iA'|^2 + |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2] + [|A+iA'|^2 - |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2]\cos 2\varphi\}\cdot r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr\,.$$

Um unserem Plane entsprechend, in $\bar{\tau}$ nur jene Glieder zu berücksichtigen, die zum Ausdruck für die Kraft (1) nicht verschwindende Beiträge liefern, wollen wir zunächst $\bar{\tau}$ in seiner Abhängigkeit von φ' betrachten. Die Einsetzung des Wertes (17) für G zeigt dabei, daß sich $\bar{\tau}$ in 2 Ausdrücke τ^* und τ^{**} spaltet, von denen der erstere von φ' überhaupt nicht abhängt, während der zweite, wie leicht zu erkennen ist, die Gestalt hat:

$$\tau^{**}(r',\varphi',\vartheta') = M(r',\vartheta')\cos 2\varphi'$$

und daher bei der für K angezeigten Integration nach φ' verschwindet.

Es reduziert sich also unsere Aufgabe jetzt auf die Berechnung von τ^* allein, das nur für $r' = a$ zu nehmen ist, weil uns ja nur die Temperaturverteilung an der Oberfläche der Kugel interessiert. Bei Ersetzung von G durch den Ausdruck (17) und (18) und nach Ausführung der Integration nach φ erhält τ^* die Form:

$$\tau^*(a,\vartheta') = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\sigma}{4w}2\pi\int_{r=0}^{a}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{1}{a^{\nu+1}} + \frac{w(\nu+1)-ha}{w\nu+ha}\cdot\frac{a^\nu}{a^{2\nu+1}}\right] r^\nu\cdot P_\nu(\cos\vartheta')\,P_\nu(\cos\vartheta)\cdot[|A+iA'|^2 + |B+iB'|^2 + |C+iC'|^2]\,r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, dr\,.$$

Dabei ist zu beachten, daß nur die Glieder für $\mu = 0$ in der Darstellung von $P_\nu(\cos\gamma)$ einen Beitrag zum Integral liefern.

Gemäß unserer Absicht, nur Glieder beizubehalten, die am Ausdrucke für die Radiometerkraft K einen nicht verschwindenden Anteil haben, denken wir uns τ durch τ^* im

Ausdruck für die Kraft K ersetzt und die Integration nach ϑ' durchgeführt. Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß $\cos\vartheta' = P_1(\cos\vartheta')$ und im Hinblick auf die bekannten Orthogonalitäts- und Normierungseigenschaften der Kugelfunktionen

$$\int_{\vartheta'=0}^{\pi} P_1(\cos\vartheta')\, P_\nu(\cos\vartheta') \sin\vartheta'\, d\vartheta' = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \nu \neq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{wenn } \nu = 1 \end{cases}$$

folgt nun, daß nur jenes Glied aus τ^* beizubehalten ist, wir bezeichnen es etwa mit $\tau_1^*(a\ \vartheta')$, wo $\nu = 1$ ist. Es ist also

$$\tau_1^*(a,\vartheta') = \frac{\sigma}{8w} \int_{r=0}^{a} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left[\frac{1}{a^2} + \frac{2w - ha}{w + ha} \cdot \frac{a}{a^2} \right]$$
$$r\cos\vartheta'\cos\vartheta \left[|A + iA'|^2 + |B + iB'|^2 + |C + iC'|^2 \right] r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dr .$$

Die angezeigte Integration nach ϑ läßt sich nun leicht durchführen; nur müssen wir zu diesem Zwecke den Ausdruck $[|A + iA'|^2 + |B + iB'|^2 + |C + iC'|^2]$ näher ins Auge fassen. Beachten wir, daß $|A + iA'|^2 = (A + iA')\,(\overline{A + iA'})$, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Definition (19) der Größen A, A', B, B', C, C' und mit Hilfe der Ausdrücke (15) für R, F und T:

$$(22)\quad \begin{cases} & |A + iA'|^2 + |B + iB'|^2 + |C + iC'|^2 \\ \text{I} & = \frac{1}{K_i^2 \bar{K}_i^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Big\{ n(n+1)\, m(m+1) B_n^1 \bar{B}_m^1 \frac{\psi_n(K_i r)\, \psi_m(\bar{K}_i r)}{r^4} \\ & \qquad P_n^1(\cos\vartheta)\, P_m^1(\cos\vartheta) \\ \text{II} & + K_i \bar{K}_i B_n^1 \bar{B}_m^1 \frac{\psi_n'(K_i r)\, \psi_m'(\bar{K}_i r)}{r^2} \cdot \frac{P_n^1(\cos\vartheta)\, P_m^1(\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta} \\ \text{III} & + k_2^i \bar{k}_2^i B_n^2 \bar{B}_m^2 \frac{\psi_n(K_i r)\, \psi_m(\bar{K}_i r)}{r^2} \cdot \frac{d}{d\vartheta} P_n^1(\cos\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} P_m^1(\cos\vartheta) \\ \text{IV} & + K_i \bar{k}_2^i B_n^1 \bar{B}_m^2 \frac{\psi_n'(K_i r)\, \psi_m(\bar{K}_i r)}{r^2} \cdot \frac{P_n^1(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} \cdot \frac{d}{d\vartheta} P_m^1(\cos\vartheta) \\ \text{V} & + \bar{K}_i k_2^i B_n^1 \bar{B}_m^2 \frac{\psi_n'(\bar{K}_i r)\, \psi_m(K_i r)}{r^2} \cdot \frac{P_n^1(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} \cdot \frac{d}{d\vartheta} P_m^1(\cos\vartheta) \\ \text{VI} & + K_i \bar{K}_i B_n^1 \bar{B}_m^1 \frac{\psi_n'(K_i r)\, \psi_m'(\bar{K}_i r)}{r^2} \cdot \frac{d}{d\vartheta} P_n^1(\cos\vartheta) \cdot \frac{d}{d\vartheta} P_m^1(\cos\vartheta) \\ \text{VII} & + k_2^i \bar{k}_2^i B_n^2 \bar{B}_m^2 \frac{\psi_n(K_i r)\, \psi_m(\bar{K}_i r)}{r^2} \cdot \frac{P_n^1(\cos\vartheta)\, P_m^1(\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta} \\ \text{VIII} & + K_i \bar{k}_2^i B_n^1 \bar{B}_m^2 \frac{\psi_n'(K_i r)\, \psi_m(\bar{K}_i r)}{r^2} \cdot \frac{d}{d\vartheta} P_n^1(\cos\vartheta) \cdot \frac{P_m^1(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} \\ \text{IX} & + \bar{K}_i k_2^i B_n^1 \bar{B}_m^2 \frac{\psi_n'(\bar{K}_i r)\, \psi_m(K_i r)}{r^2} \cdot \frac{d}{d\vartheta} P_n^1(\cos\vartheta) \cdot \frac{P_m^1(\cos\vartheta)}{\sin\vartheta} \end{cases}$$

Unter Benützung der von Debye[1]) angegebenen Relationen

$$\int_0^\pi \left(\frac{P_m^1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{P_n^1}{\sin\vartheta}+\frac{dP_m^1}{d\vartheta}\cdot\frac{dP_n^1}{d\vartheta}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$=\begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots m \neq n-1 \text{ oder } m \neq n+1, \\ 2\dfrac{(n-1)^2 n (n+1)^2}{(2n-1)(2n+1}\ldots m = n-1, \\ 2\dfrac{n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}\ldots m = n+1, \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{P_m^1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{dP_n^1}{d\vartheta}+\frac{dP_m^1}{d\vartheta}\cdot\frac{P_n^1}{\sin\vartheta}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$=\begin{cases} 0 \ldots\ldots m \neq n, \\ 2\dfrac{n(n+1)}{2n+1}\ldots m = n, \end{cases}$$

$$\int_0^\pi P_m^1 P_n^1 \cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$=\begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots m \neq n-1 \text{ oder } m \neq n+1, \\ 2\dfrac{(n-1)n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}\ldots m = n-1, \\ 2\dfrac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}\ldots m = n+1 \end{cases}$$

berechnet sich daher jetzt $\tau_1^*(a,\vartheta')$ zu:

$$23)\quad \begin{cases} \tau_1^*(a,\vartheta') = \dfrac{\sigma}{8w}\left[\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2w-ha}{w+ha}\cdot\dfrac{a}{a^3}\right]\cdot\dfrac{1}{K_n^2\cdot\bar{K}_n^2}\cdot\cos\vartheta' \\ 1 \text{ u. } 2\begin{cases} \cdot\displaystyle\int_{r=0}^{a} dr \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(n+1)^3 n^3 (n-1)^3}{(2n-1)(2n+1)} B_n^1 B_{n-1}^1 \frac{\psi_n(K_i r)\,\psi_{n-1}(\bar{K}_i r)}{r}\right. \\ \left. + \dfrac{2(n+1)^3 n^2 (n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} B^1 B_{n+1}^1 \dfrac{\psi_n(K_i r)\,\psi_{n+1}(\bar{K}_i r)}{r}\right. \end{cases} \\ 3 \text{ u. } 4\begin{cases} + \dfrac{2(n-1)^3 n (n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)} B_n^1 B_{n-1}^1 K_i \bar{K}_i r\,\psi_n'(K_i r)\,\psi_{n-1}'(\bar{K}_i r) \\ + \dfrac{2n^2(n+1)(n+2)^3}{(2n+1)(2n+3)} B_n^1 B_{n+1}^1 K_i \bar{K}_i r\,\psi_n'(K_i r)\,\psi_{n+1}'(\bar{K}_i r) \end{cases} \end{cases}$$

1) P. Debye, a. a. O. S. 95 und Diss. München 1908, S. 47.

$$(23)\quad \begin{cases} 5\text{ u. }6 \begin{cases} + \dfrac{2(n-1)^2 n(n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)} k_2^{\,i} \bar{k}_2^{\,i} B_n^2 \bar{B}_{n-1}^2 r \psi_n(K_i r) \psi_{n-1}(\bar{K}_i r) \\ + \dfrac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} k_2^{\,i} \bar{k}_2^{\,i} B_n^2 \bar{B}_{n+1}^2 r \psi_n(K_i r) \psi_{n+1}(\bar{K}_i r \end{cases} \\ .7\text{ u. }8 \begin{cases} + \dfrac{2n(n+1)}{2n+1} \bar{k}_2^{\,i} K_i B_n^1 \bar{B}_n^2 r \psi_n'(K_i r) \psi_n(\bar{K}_i r) \\ + 2 \dfrac{n(n+1)}{2n+1} k_2^{\,i} \bar{K}_i B_n^1 B_n^2 r \psi_n'(\bar{K}_i r) \psi_n(K_i r) \Big] \ldots \end{cases} \end{cases}$$

Dabei entstehen die Glieder 1 und 2 in (23) aus dem Term I unserer Relation (22), die Ausdrücke 3 und 4 aus II und VI, die Terme 5 und 6 aus III und VII und schließlich 7 aus IV und VIII und 8 aus V und IX.

Wenn wir in den Ausdrücken 1, 3 und 5 der Relation (23) den Summationsindex n durch $(n+1)$ ersetzen, erhalten wir schließlich

$$\tau_1^*(a, \vartheta') = \frac{\sigma}{8} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{3}{w + ka} \cdot \frac{1}{K_a^2 \bar{K}_a^2} \cdot \cos\vartheta'$$

$$\cdot \int_{r=0}^{a} dr \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{2n^2(n+1)^2(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} \Big(B_n^1 B_{n+1}^1 \frac{\psi_n(\bar{K}_i r) \psi_{n+1}(K_i r)}{r}$$

$$+ B_n^1 B_{n+1}^1 \frac{\psi_n(K_i r) \psi_{n+1}(\bar{K}_i r)}{r} \Big)$$

$$+ \frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} \{ B_n^1 B_{n+1}^1 K_i \bar{K}_i r \psi_n'(\bar{K}_i r) \psi_{n+1}'(K_i r)$$

$$+ B_n^1 B_{n+1}^1 K_i \bar{K}_i r \psi_n'(K_i r) \psi_{n+1}'(\bar{K}_i r)$$

$$+ k_2^{\,i} \bar{k}_2^{\,i} B_n^2 B_{n+1}^2 r \psi_n(\bar{K}_i r) \psi_{n+1}(K_i r)$$

$$+ k_2^{\,i} \bar{k}_2^{\,i} B_n^2 \bar{B}_{n+1}^2 r \psi_n(K_i r) \psi_{n+1}(\bar{K}_i r) \}$$

$$+ \frac{2n(n+1)}{2n+1} \{ \bar{k}_2^{\,i} K_i B_n^1 \bar{B}_n^2 r \psi_n'(K_i r) \psi_n(\bar{K}_i r)$$

$$+ k_2^{\,i} \bar{K}_i B_n^1 B_n^2 r \psi_n'(\bar{K}_i r) \psi_n(K_i r) \} \Big] .$$

Die Einsetzung dieses Wertes für $\tau_1^*(a, \vartheta')$ in die Relation (1) für K ergibt endlich den definitiven Ausdruck:

$$
(24)\quad
\begin{cases}
K = \dfrac{\pi}{8}\dfrac{\delta R}{M}\cdot\dfrac{1}{K_a^2\bar{K}_a^2}\cdot\dfrac{\sigma}{w+ha}\gamma\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\dfrac{2n^2(n+1)^2(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} \\
\qquad \{B_n^1 B_{n+1}^1 J_n^1(\bar{K}_i, K_i) + B_{n_i}^1 \bar{B}_{n+1}^1 J_n^1(K_i, \bar{K}_i)\} \\
\quad + \dfrac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}\{B_n^1 B_{n+1}^1 K_i \bar{K}_i J_n^2(\bar{K}_i, K_i) \\
\quad + B_n^1 B_{n+1}^1 \bar{K}_i K_i J_n^2(K_i, \bar{K}_i) + k_2^{\,i} k_2^{\,i} B_n^2 B_{n+1}^2 J_n^3(K_i, K_i) \\
\qquad + \bar{k}_2^{\,i} k_2^{\,i} B_n^2 \bar{B}_{n+1}^2 J_n^3(K_i, \bar{K}_i)\} \\
\quad + \dfrac{2n(n+1)}{2n+1}\{\bar{k}_2^{\,i} K_i B_n^1 B_n^2 J_n^4(K_i, \bar{K}_i) \\
\qquad + k_2^{\,i} \bar{K}_i B_n^1 B_n^2 J_n^4(\bar{K}_i, K_i)\}\Big]^{\mathfrak{x}},
\end{cases}
$$

wobei wir hierin folgende abkürzende Bezeichnungen benützt haben:

$$J_n^1(\alpha,\beta) = \int_{r=0}^{a} \frac{\psi_n(\alpha r)\,\psi_{n+1}(\beta r)}{r}\,dr; \quad J_n^2(\alpha,\beta) = \int_{r=0}^{a} r\,\psi_n'(\alpha r)\,\psi'_{n+1}(\beta r)\,dr;$$

$$J_n^3(\alpha,\beta) = \int_{r=0}^{a} r\,\psi_n(\alpha r)\,\psi_{n+1}(\beta r)\,dr; \quad J_n^4(\alpha,\beta) = \int_{r=0}^{a} r\,\psi_n'(\alpha r)\,\psi_n(\beta r)\,dr.$$

Für diese Integrale lassen sich (siehe die II. Mitteilung) Rekursionsformeln angeben.

§ 5. Vergleich mit der Erfahrung.

Wir wollen nun an die Frage herantreten, inwieweit mit Hilfe des Lichtdruckes und der von uns berechneten Radiometerkraft K die von Ehrenhaft beobachtete photophoretische Kraft, ohne Annahme neuer Naturkräfte erklärt werden kann. Vor allem ist zu bemerken, daß der Lichtdruck stets in Richtung der einfallenden Lichtwelle wirkt, und daher nur für die Erklärung der positiven Photophorese herangezogen werden kann. Die Radiometerkraft K dagegen, kann sowohl „lichtpositiv" als auch „lichtnegativ" wirken, da ihr Vorzeichen durch die in (24) auftretende Summe bedingt ist. Für die positiv photophoretischen Stoffe kommt demnach der Lichtdruck *und* die Radiometerwirkung, für die negativ photophoretischen die Radiometerwirkung allein in Betracht. Tatsächlich sind in jedem Falle zwar beide Kräfte wirksam; da sie aber meist praktisch von verschiedener Größenordnung sind, ist nur die jeweils überwiegende zu berücksichtigen.

Um nun die Entscheidung in unserer eingangs dieses Paragraphen gestellten Frage zu fällen, überlegen wir uns zunächst, wie K (ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen) durch den Druck, die Temperatur und die Beschaffenheit des umgebenden Gases bestimmt wird. Diese Abhängigkeit wird in unserer Formel (24) durch den Faktor $\frac{\delta R}{M} \cdot \frac{\gamma}{w + h a}$ bedingt und es sind hier vor allem zwei Grenzfälle von Wichtigkeit. Ist, erstens, $w \gg h a$, so darf $h a$ gegenüber w vernachlässigt werden und mit Rücksicht darauf, daß nach der Zustandsgleichung $\frac{R}{M} \delta = \frac{p}{T}$ wird die Radiometerkraft K proportional sein dem Druck, umgekehrt proportional der Temperatur des umgebenden Gases und, bis auf den Akkommodationskoeffizienten γ, unabhängig von seiner chemischen Natur.

Ist dagegen, zweitens, $w \ll h a$, so daß nun w gegenüber $h a$ wegzulassen ist, so ist mit Rücksicht auf den Ausdruck (3) für h die Radiometerwirkung K nur von der Temperatur, dem Molekulargewicht und dem Akkommodationskoeffizienten des umgebenden Gases abhängig, dagegen vom Druck vollständig unabhängig. Was insbesondere die Abhängigkeit vom Molekulargewicht betrifft, so müßte K im vorliegenden Falle bis auf eine durch den Faktor $\left(\frac{c_p}{c_v} + 1\right) \Big/ \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)$ bedingte Korrektur (vgl. die Kritik darüber bei Smoluchowski a.a.O.) proportional $\sqrt{M}$ sein. — Betrachten wir nun die erfahrungsmäßig gegebenen Wärmeleitfähigkeiten w, so haben sie bei den für den vorliegenden Zweck in Betracht kommenden Substanzen, für die Metalle etwa die Größenordnung 1,01 bis 0,019 g cal/grad cm sec (Silber und Wismut) für die dielektrischen Stoffe etwa die Größenordnung $4{,}70 \cdot 10^{-4}$ g cal/grad cm sec (Schwefel).[1]) Um w in C.G.S.-Einheiten umzurechnen, sind die obigen Zahlen noch mit $4{,}188 \cdot 10^7$ zu multiplizieren, so daß sich für w-Werte von der Größenordnung $4{,}23 \cdot 10^7$ bis $7{,}95 \cdot 10^5$ bzw. $1{,}97 \cdot 10^4$ erg/grad cm sec ergeben.

Nehmen wir nun an, daß wir es mit einem Kügelchen von der Größenordnung $a = 10^{-5}$ cm zu tun haben, wie dies ja bei den Versuchen von Ehrenhaft öfters der Fall ist, so berechnet sich $h a$ zu $\gamma \cdot 4{,}593 \cdot 10^8$ bis $\gamma \cdot 1{,}174 \cdot 10^9$ erg/grad cm sec.

1) A. Eucken, Ann. d. Phys. **34.** S. 185. 1911.

Wir ersehen daraus, daß bei den Metallen entschieden $w \gg h\,a$ ist, daß also hier die Radiometerkraft K proportional dem Druck des umgebenden Gases sein muß. Leider ist für diese Klasse von Stoffen, die Abhängigkeit der photophoretischen Kräfte vom Drucke, mit Ausnahme des Silbers, nicht untersucht; daß sich bei diesem aber eine Druckunabhängigkeit zeigt, nimmt uns nicht weiter wunder, da wir allen Grund haben anzunehmen, daß hier die beobachtete photophoretische Kraft im wesentlichen mit dem Lichtdruck identisch ist.

Schwieriger liegen die Verhältnisse bei den dielektrischen Stoffen. Von Ehrenhaft wurde festgestellt, daß die bei Zimmertemperatur stabile Modifikation von Selen „lichtnegativ" ist. Nach dem Obigen müßte demnach die hier maßgebende Kraft die Radiometerkraft sein. Da nach den Versuchen von I. Parankiewicz die photophoretische Kraft hier vom Druck unabhängig zu sein scheint, müßte da nach unseren Überlegungen $w \ll h\,a$ sein, was auf extrem kleines Wärmeleitvermögen des Selens deuten würde. Leider ist aber seine Wärmeleitfähigkeit nicht bekannt, so daß dieses Beispiel vorläufig nicht zur Entscheidung der Frage herangezogen werden kann, ob die hier beobachtete negativ photophoretische Kraft etwa mit unserer Radiometerkraft K identisch ist. Die von I. Parankiewicz behauptete Gleichheit der negativ photophoretischen Kräfte in den 3 Gasen, Argon, Stickstoff und Wasserstoff ist mit den Ergebnissen unserer Theorie nicht recht in Einklang zu bringen. Es müßte ja im Falle $w \ll h\,a$ die Kraft K proportional $\sqrt{M}$ sein [bis auf den unsicheren Faktor $\left(\frac{c_p}{c_v}+1\right)\Big/\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)$] und die Radiometerkräfte müßten sich in diesen Gasen verhalten, wie $\sqrt{40}:\sqrt{28}:\sqrt{2}=4{,}47:3{,}74:1$. Worin die Ursachen dieser Diskrepanz zwischen Theorie und Erfahrung liegen, soll erst geprüft werden, wenn die experimentellen Tatsachen auf einer breiteren und sichereren Basis fundiert sind.

Die Erklärung, die Ehrenhaft für das Auftreten von lichtpositiven Selenteilchen gibt, daß es sich nämlich hier um eine metallische Selenmodifikation handelt, erscheint dagegen auch von unserem Standpunkt als ziemlich plausibel; wir müssen ja berücksichtigen, daß Selen in dieser Modifikation andere Materialkonstanten hat, die leicht ein Auftreten posi-

tiver Radiometerkräfte oder ein Überwiegen des Lichtdruckes zur Folge haben könnten.

Beim lichtnegativen Schwefel, wo die photophoretische Kraft nach den Beobachtungen gleichfalls druckunabhängig und demnach $w < ha$ sein soll, ist im Gegensatze dazu nach den empirisch gegebenen Daten $w > ha$. Dazu ist jedoch zu bemerken, daß die oben nach Eucken angegebene Wärmeleitfähigkeit für amorphen Schwefel in Wirklichkeit einen kleineren Wert haben dürfte. Denn Eucken erhält ja für Schwefel, den er als „siedend in die Form gegossen, großenteils amorph (plastisch)" bezeichnet, für w den Wert $4{,}70 \cdot 10^{-4}$ g cal/grad cm sec, für Schwefel „rhombisch, kristallinisch" dagegen den größeren Wert $w = 7{,}00 \cdot 10^{-4}$ g cal/grad cm sec, so daß also anzunehmen ist, daß die Wärmeleitfähigkeit des amorphen Schwefels allein noch kleiner ist als $4{,}70 \cdot 10^{-4}$ g cal/grad cm sec. Ob aber auch die Größenordnung des wahren Wertes von w für amorphen Schwefel hinreicht, um die Druckunabhängigkeit der photophoretischen Kraft beim Schwefel zu sichern, ist jedoch nicht abzusehen.

Ferner ist es auch nicht ganz sicher, in welchem Zustande und in welcher Modifikation sich der Schwefel in den Ehrenhaftschen Partikelchen befindet. Hätte man es z. B. mit unterkühltem Schwefel zu tun, so wäre man bezüglich der Wärmeleitfähigkeit vollständig im unklaren. Schließlich ist auch noch ins Auge zu fassen, daß wenn die Ehrenhaftsche Größenbestimmung zu kleine Werte für den Teilchenradius a liefert, ha größer und damit die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung sowohl bei Se als auch bei S eine günstigere wird.

Um die Rolle, die die Radiometerkraft K bei den Ehrenhaftschen Versuchen spielt, eindeutig festzulegen, ist es nun erforderlich, in jedem einzelnen Falle den Zahlenwert dieser Kraft K zu berechnen. Dabei wird uns selbstverständlich vor allem interessieren, ob die negativ photophoretischen Kräfte im wesentlichen durch unsere Radiometerkraft erklärt werden können. Bedauerlicherweise sind jedoch bei den beiden Stoffen, Schwefel und Selen, bei denen quantitative Messungen über die negative Photophorese vorliegen, nicht alle physikalischen Konstanten bekannt. So liegen beim Se überhaupt keine Angaben über die Wärmeleitfähigkeit, beim Schwefel keine Daten

über den Absorptionskoeffizienten vor. *Bei Se wäre es überdies noch notwendig, den Brechungs- und Absorptionskoeffizienten auch im Ultraroten zu kennen, da wie aus der Einleitung hervorgeht, bei gegebenem Teilchenradius die Radiometerkraft für jede Wellenlänge im Spektrum zu berechnen ist.* Bekannt sind dagegen alle erforderlichen Daten zur Berechnung von K bei den von Ehrenhaft untersuchten lichtnegativen Metallen, Wismut und Blei. Für sie aber wird gerade eben von Ehrenhaft weder die Größe der photophoretischen Kraft noch der Teilchenradius angegeben. Der Vergleich von Theorie und Erfahrung kann somit erst dann ganz streng durchgeführt werden, wenn die entsprechenden photophoretischen Messungen vorliegen. Es genügt also zum Zwecke der Orientierung, wenn wir zunächst K nur in erster Näherung berechnen; *und zwar wollen wir hier noch im folgenden die Näherungsformeln für kleine, in der zweiten Mitteilung für große Teichenradien angeben.*

Bei den numerischen Rechnungen ist zunächst zu berücksichtigen, daß im Außenraum $\mu = \varepsilon = 1$ und $\sigma = 0$ zu setzen ist, während im Innenraum der Kugel $\mu = 1$ ist. Bezeichnen wir mit

$$N = \nu(1 - ik) = \sqrt{\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega}} \tag{25}$$

den komplexen Brechungsexponenten (ν sei der gewöhnliche Brechungsexponent, k der Absorptionsindex) so haben wir:

$$\begin{cases} k_1^a = k_2^a = i\frac{\omega}{c}; \quad K_a^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \\ k_1^i = i\frac{\omega}{c}N^2; \quad k_2^i = i\frac{\omega}{c}; \quad K_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2}N^2. \end{cases} \tag{26}$$

Beachtet man in den Ausdrücken (14) für B_n^1 und B_n^2 diese Relationen, so nehmen die Koeffizienten die Gestalt an:

$$\begin{cases} B_n^1 = i^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\zeta_n(\varrho)\psi_n'(\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\psi_n(\varrho)}{\zeta_n(\varrho)\psi_n'(N\varrho) - N\zeta_n'(\varrho)\psi_n(N\varrho)}, \\ B_n^2 = i^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{\zeta_n(\varrho)\psi_n'(\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\psi_n(\varrho)}{N\zeta_n(\varrho)\psi_n'(N\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\psi_n(N\varrho)}, \end{cases} \tag{27}$$

wobei $\varrho = aK_a = a\frac{\omega}{c}$ gesetzt ist.

Mit Rücksicht auf die Reihenentwicklungen (10) und (12) erhalten wir daher in erster Näherung (für $\varrho \ll 1$):

$$B_1^1 = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{N^2}\cdot\frac{i}{2+N^2};\quad B_1^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{N^2};\quad B_2^1 = i\frac{25}{6}\cdot\frac{1}{N^3}\cdot\frac{1}{3+2N^2};$$

$$B_2^2 = i\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{N^3};$$

$$J_1^1(\alpha,\beta) = \frac{1}{45}\cdot\alpha^3\beta^3\cdot\frac{a^5}{5};\quad J_1^2(\alpha,\beta) = \frac{2}{15}\alpha\beta^2\cdot\frac{a^5}{5};$$

$$J_1^3(\alpha,\beta) = \frac{1}{45}\alpha^2\beta^3\frac{a^7}{7};\quad J_1^4(\alpha,\beta) = \frac{2}{9}\alpha\beta^2\frac{a^5}{5}.$$

Somit ergibt sich für K mit der gleichen Genauigkeit:

$$K = \frac{p}{T}\cdot\frac{2\pi^2}{\lambda^2}\cdot\frac{c\cdot k\nu^2}{w+ha}\cdot\gamma\cdot a^5\left\{\left[\frac{i}{2+\bar{N}^2}\cdot\frac{1}{3+2N^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{i}{2+\bar{N}^2}\right]\right.$$
$$\left. + \text{konjug. kompl. Größen}\right\}.$$

Da nun ween (25)

$$\frac{1}{3+2N^2} = \frac{3+2\nu^2(1-k^2)+4\nu^2ki}{L} \text{ und } \frac{i}{2+\bar{N}^2} = \frac{2\nu^2k+i[2+\nu^2(1-k^2)]}{M},$$

wo
$$L = [3+2\nu^2(1-k^2)]^2+16\nu^4k^2,$$
$$M = [2+\nu^2(1-k^2)]^2+4\nu^4k^2,$$

so gilt somit für $\varrho \ll 1$:

$$(28)\quad K = \frac{p}{T}\cdot\frac{8\pi^3}{\lambda^2}\cdot c\cdot a^5\cdot\frac{(k\nu^2)^2}{M}\cdot\frac{1}{w+ha}\cdot\gamma\cdot\left[0{,}2-\frac{1}{L}\right].$$

Dabei ist im Ausdrucke (24) für K nach (25) σ durch $\frac{4\pi c}{\lambda}\nu^2 k$ ersetzt. (λ bedeutet hier die Wellenlänge). Dieses σ rührt nämlich aus dem Ausdruck $\sigma\mathfrak{E}^2$ für die Joulesche Wärme her und man überzeugt sich einfach, daß hier nicht nur im Geltungsbereich der Maxwellschen Theorie, sondern auch bei Vorhandensein von Leitungs- und Dispersionselektronen σ durch $\frac{4\pi c}{\lambda}\nu^2 k$ gegeben wird.

Unser Ausdruck für K gilt für den Fall, daß die Amplitude der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ der einfallenden Lichtwelle den Betrag 1 hat. Hat diese Amplitude den Wert A, so ist der Ausdruck für K noch mit A^2 zu multiplizieren. Nun wird die räumliche Energiedichte eines elektromagnetischen Feldes im Vakuum gegeben durch:

$$W = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2).$$

Handelt es sich nun um eine ebene elektromagnetische Welle, so ist $\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{H}^2$ und setzt man:

$$\mathfrak{E} = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x + c\,t) ,$$

so ist der zeitliche Mittelwert von W:

$$\bar{W} = \frac{A^2}{2} .$$

Enthält also die einfallende Welle pro cm³ die Energie $\bar{W}$, so ist die von ihr ausgeübte Radiometerkraft $\mathfrak{R}$ gegeben durch:

$$\mathfrak{R} = A^2 K = 2 \bar{W} K . \tag{29}$$

Die Diskussion dieser Näherungsformel erfolgt gemeinsam mit der auf große ϱ Werte bezüglichen in der anschließend folgenden Mitteilung II.

19. November 1919.

(Eingegangen 1. Dezember 1919.)

3. *Radiometerkräfte und Ehrenhaftsche Photophorese;* von *A. Rubinowicz.*

(II. Mitteilung.)

In der vorangehenden Mitteilung[1]) haben wir den druck für die Radiometerkraft auf ein einseitig bestra Kügelchen abgeleitet; wir haben dort gesehen, daß für k ϱ-Werte[2]) die Radiometerkraft R das Teilchen in der Rich des einfallenden Lichtes zu bewegen sucht, daß mithi diesem Falle keine durch Radiometerkräfte verursachte *neg* Photophorese möglich ist. In der vorliegenden Mitteilu wollen wir nun zeigen, daß für große ϱ-Werte ($\varrho \gg 1$) für schwach absorbierende Substanzen, deren reeller Brechu index $\nu > 1$ ist, eine *negative Radiometerkraft* zu erwarten Als sehr schwach absorbierend bezeichnen wir dabei für un Zwecke solche Substanzen, bei denen bei der Berechnung Radiometerkraft die Verteilung des elektromagnetischen Fe im Inneren der Kugel mit vollständiger Vernachlässigung Absorption ermittelt und bei der Berechnung der an e Stelle der Kugel entwickelten Jouleschen Wärme einfach bei der obigen Vernachlässigung errechnete Feldstärke ber werden kann. Da die stark negativ photophoretischen S *Se*, *S*, *J* relativ schwach absorbieren, so glaube ich, spre die Resultate der vorliegenden Mitteilung entschieden für Zurückführbarkeit der negativen Photophorese auf Radiom kräfte. Eine weitere Stütze dieser Anschauung hoffe ic einer dritten Mitteilung beizubringen, einerseits durch stellung einer Näherungsformel für große ϱ-Werte bei v Berücksichtigung der Absorption, andererseits durch ex numerische Auswertung von I (24).

1) Wird im folgenden als I zitiert.

2) Wir verwenden hier die gleichen Bezeichnungen wie in Mitteilung I.

Selbstverständlich gilt unsere jetzige Näherungsformel ebenso wie I (24) nur für den Fall, daß a klein ist gegenüber der freien Weglänge des unsere Kugel umgebenden Gases.

Bevor wir unsere Rechnungen durchführen, wollen wir durch eine anschauliche Betrachtung uns plausibel machen, daß unser Ergebnis schon von vornherein zu erwarten ist. Im Falle $\varrho \gg 1$, wo der Radius der Kugel gegenüber der Wellenlänge des einfallenden Lichtes groß ist, ist der Strahlengang in erster Näherung nach der geometrischen Optik zu berechnen und die auf diesem Wege für die Radiometerkraft erhaltene Näherungsformel muß im wesentlichen mit der jetzt abzuleitenden übereinstimmen. Aus dem geometrischen Strahlengang in einer Kugel können wir aber folgendes entnehmen. Der Brennpunkt F unserer Kugel ist im Abstand $\frac{a}{\nu - 1}$ vom Mittelpunkt O gelegen.[1]) Ist also $1 < \nu < 2$, so kommt der Brennpunkt außerhalb der Kugel zu liegen. Im Falle $\nu > 2$ befindet er sich aber innerhalb der Kugel.

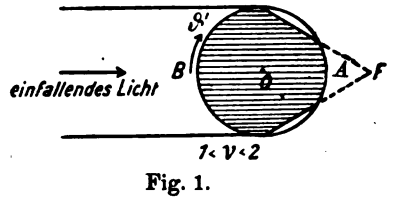


Fig. 1.

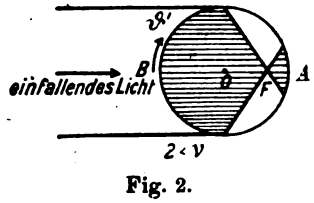


Fig. 2.

Da wir nun voraussetzen, daß die Absorption innerhalb der Kugel sehr klein ist, so ist aus den beiden Fig. 1 und 2 ohne weiteres zu entnehmen, daß die Konzentration der elektromagnetischen Energie in der Nähe des an der Rückseite gelegenen Punktes A größer ist, als in der Nähe des an der Vorderseite liegenden Punktes B. Wir werden daraus schließen, daß der Temperaturüberschuß τ in der Nachbarschaft von A größer ist als in der von B. Nun wird nach I (1) die auf unsere Kugel wirkende Radiometerkraft gegeben durch:

$$K = {}^1/_4\, \gamma\, \frac{\delta R}{M} \int \tau \cos \vartheta'\, df,$$

wobei der Winkel ϑ' vom Punkte B aus gezählt wird.

1) Im allgemeinen für den Fall, daß nur die Brechung an der Vorderseite der Kugel berücksichtigt wird.

Nach unserer Überlegung über die Temperaturverteil
auf der Oberfläche der Kugel ist daher für K ein neg
Wert zu erwarten, was nach den Festsetzungen in I
Radiometerkraft entspricht, die im Sinne einer negativ p
phoretischen Kraft wirkt. Dabei ist es selbstverständlich
Wichtigkeit, zu bemerken, daß nach der obigen Formel
es gar nicht darauf ankommt, ob etwa der Mittelwert
Temperatur auf der Kugelhälfte bei A größer ist als der b
wegen des im Integranden auftretenden $\cos\vartheta'$ reicht z. B
hinlänglich steiles Maximum bei A (d. h. für $\vartheta' = \pi$) hin
K negativ zu machen.

Auch die Tatsache, daß die Radiometerkraft in uns
Falle (wenigstens für so große Radien a, daß $ha \gg w$ ist)
dritten Potenz von a proportional wird, ist wohl unschwe
verstehen. Nach der soeben angeführten Relation I (1) i
die Radiometerkraft proportional $a^2 \iint \tau \cos\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'$ und
a proportional. Dies letztere folgt aus der Tatsache, da
einerseits proportional ist der von der Kugel absorbie
Wärmemenge, die bei kleiner Absorption mit dem durchstrah
Volumen, also wie a^3 wächst, andererseits aber verkehrt
portional ist der Oberfläche der Kugel durch die die Wä
abströmt und die wie a^2 zunimmt.

Wenn wir die obigen Plausibilitätsbetrachtungen hier
wenig über den Rahmen des in dieser Mitteilung Bewies
fortführen, so wird es uns auch noch begreiflich, daß bei den
obachtungen von Ehrenhaft die negativ photophoretische K
mit dem Teilchenradius zunächst zu einem Maximum wä
um dann wieder abzunehmen. Unsere obigen Überlegun
gelten doch nur so lange, als wir annehmen können, daß
Strahlung die Kugel im wesentlichen ungeschwächt durchs
Wird aber bei einer bestimmten Substanz der Teilchenradi
bereits so groß angenommen, daß diese Voraussetzung n
mehr zutrifft, wird vielmehr schon der überwiegende Teil
Strahlungsenergie in der ersten, dem Punkte B nahe stehen
Kugelhälfte absorbiert, dann wird die Temperatur der Ku
fläche bei B größer als bei A werden, und die Radiome
kraft muß dann im Sinne einer positiv photophoretischen K
wirken.

Bevor wir an die Ableitung der angekündigten Näherungsformeln gehen, wollen wir zunächst in § 1 zur Ergänzung der Mitteilung I, die in dem Ausdruck I (24) für die Radiometerkraft auftretenden Integrale $J_n^1 \ldots J_n^4$ in geschlossener Form auswerten, da wir sie im folgenden ohnehin brauchen werden.

§ 1. Berechnung der Integrale J_n^s für ein absorbierendes Medium.

Da wir bei der Diskussion der Formel für die Radiometerkraft I (24) alle darin auftretenden Größen k und K durch den komplexen Brechungsindex N mit Hilfe der Relation I (26) ausdrücken müssen, empfiehlt es sich, schon jetzt N einzuführen. Um schleppende Bezeichnungen zu vermeiden, wollen wir ferner statt $J_n^1(\bar{K}_i, K_i)$ auch $J_n^1(\bar{N}, N)$ schreiben und analoge Bezeichnungen für die übrigen Integrale J_n^s verwenden. Die Berechnung der Integrale J_n^s gelingt mit Hilfe der aus der Theorie der Besselschen Funktionen bekannten Relation[1])

$$(1)\quad \int_0^1 \psi_n(\alpha x)\,\psi_n(\beta x)\,dx = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha\,\psi_n(\beta)\,\psi_{n+1}(\alpha) - \beta\,\psi_n(\alpha)\,\psi_{n+1}(\beta)\}.$$

Führen wir nun hier durch $x = \frac{r}{a}$ eine neue Integrationsveränderliche r ein und setzen ferner $\alpha = N\varrho$ und $\beta = \bar{N}\varrho$, so erhalten wir den Ausdruck für ein Integral, das wir im folgenden auch kurz mit $J_n^0(N, \bar{N})$ bezeichnen wollen:

$$(2)\quad \begin{cases} J_n^0(N,\bar{N}) = \int_0^a \psi_n\left(r\frac{N\varrho}{a}\right)\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)dr \\ \quad = \frac{a}{\varrho}\,\frac{1}{N^2-\bar{N}^2}\{N\psi_n(\bar{N}\varrho)\psi_{n+1}(N\varrho) - \bar{N}\psi_n(N\varrho)\psi_{n+1}(\bar{N}\varrho)\}. \end{cases}$$

Da nun nach I (11):

$$\frac{a}{N\varrho}(2n+1)\,\psi_n\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) = r\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) + r\psi_{n-1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right),$$

so ergibt sich zunächst für

$$J_n^3(\bar{N}, N) = \int_0^a r\,\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right)dr$$

1) Vgl. die Definition der Funktion ψ_n in I (10) und etwa die Relation (21b) S. 69 in Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen. Leipzig 1908.

die Rekursionsformel

$$(3) \qquad J_n^{\,3}(\bar{N}, N) = -J_{n-1}^{\,3}(N, \bar{N}) + \frac{a}{N\varrho}(2n+1) J_n^{\,0}(N, \bar{N}),$$

wo $J_n^{\,0}(N, \bar{N})$ nach (2) durch die Funktionen ψ_n ausd
bar ist.

Um $J_n^{\,3}(\bar{N}, N)$ für alle Werte n zu berechnen, ist
nur noch die Kenntnis etwa des Ausdruckes für $J_0^{\,3}$(
notwendig, der leicht direkt angegeben werden kann. E
nämlich:[1])

$$\psi_0(x) = \sin x, \qquad \psi_1(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x,$$

und somit ergibt sich

$$J_0^{\,3}(\bar{N}, N) = \int_0^a r \sin\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right) \cdot \left[\frac{a}{r N\varrho} \sin\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) - \cos\left(r\frac{N\varrho}{a}\right)\right.$$

$$= \frac{a^2}{2\varrho^2}\left[\sin\varrho(\bar{N}-N)\frac{\bar{N}-2N}{N(\bar{N}-N)^2} - \sin\varrho(\bar{N}+N)\frac{\bar{N}+}{N(\bar{N}+}\right.$$

$$\left. + \frac{\varrho\cos\varrho(\bar{N}+N)}{\bar{N}+N} + \frac{\varrho\cos\varrho(\bar{N}-N)}{\bar{N}-N}\right].$$

Um das Integral $J_n^{\,4}(N, \bar{N})$ auszuwerten, muß man nu
Relation (2) partiell nach N differenzieren und erhält so:

$$(4) \quad \begin{cases} J_n^{\,4}(N, \bar{N}) = \int_0^a r\,\psi_n'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right)\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right) dr \\ \quad = -\frac{2N}{N^2-\bar{N}^2}\frac{a}{\varrho} J_n^{\,0}(N, \bar{N}) + \frac{a^2}{\varrho^2}\frac{1}{N^2-\bar{N}^2}\{\psi_n(\bar{N}\varrho)\psi_{n+1} \\ \quad + N\varrho\,\psi_n(\bar{N}\varrho)\psi_{n+1}'(N\varrho) - \bar{N}\varrho\,\psi_n'(N\varrho)\psi_{n+1}(\bar{N}\varrho)\}. \end{cases}$$

Für die Integrale

$$J_n^{\,1}(\bar{N}, N) = \int_0^a \frac{1}{r}\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) dr,$$

$$J_n^{\,2}(\bar{N}, N) = \int_0^a r\,\psi_n'\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) dr$$

lassen sich einzeln keine geschlossenen Ausdrücke in de
angeben. Sie können aber leicht in der Kombination, in

1) Vgl. P. Debye, Ann. d. Phys. **30**. S. 57. 1909. Formel (12),(13),

sie in I (24) auftreten, in geschlossener Form ausgewertet werden. Zunächst gilt:

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dr}\,\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) &= \frac{\bar{N}\varrho}{a}\,\psi_n'\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) \\ &\quad + \frac{N\varrho}{a}\,\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right). \end{aligned} \right.$$

Multiplizieren wir die leicht aus I (11) folgende Relation:

$$\psi_n'\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right) = (n+1)\frac{\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)}{r\frac{\bar{N}\varrho}{a}} - \psi_{n+1}\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)$$

einmal mit

$$(n+1)\frac{\bar{N}\varrho}{a}\,\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right),$$

das andre Mal mit

$$\frac{\bar{N}\varrho}{a}\cdot\frac{N\varrho}{a}\,r\,\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right),$$

so erhalten wir, wenn wir die sich ergebenden Terme entsprechend ordnen:

$$(n+1)^2\frac{1}{r}\,\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) = (n+1)\frac{N\varrho}{a}\,\psi_{n+1}\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) + (n+1)\frac{\bar{N}\varrho}{a}\,\psi_n'\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}\left(r\frac{N\varrho}{a}\right),$$

$$\frac{\varrho^2}{a^2}N\bar{N}r\,\psi_n'\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) = -\frac{\varrho^2}{a^2}N\bar{N}r\,\psi_{n+1}\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right) + (n+1)\frac{N\varrho}{a}\,\psi_n\left(r\frac{\bar{N}\varrho}{a}\right)\psi_{n+1}'\left(r\frac{N\varrho}{a}\right).$$

Addieren wir schließlich diese beiden Beziehungen, so ergibt sich mit Rücksicht auf (5) und die Tatsache, daß $\psi_n(0) = 0$ ist, für die in I (24) auftretende Kombination der beiden Integrale J_n^1 und J_n^2 endlich der Ausdruck:

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} (n+1)^2 J_n^1(\bar{N},N) + \frac{\varrho^2}{a^2}N\bar{N}J_n^2(\bar{N},N) &= (n+1)\psi_n(\bar{N}\varrho)\psi_{n+1}(N\varrho) \\ &\quad + (n+1)\frac{\bar{N}\varrho}{a}\,J_{n+1}''(N,\bar{N}) - \frac{\varrho^2}{a^2}N\bar{N}J_{n+1}'(N,\bar{N}). \end{aligned} \right.$$

§ 2. Berechnung der Integrale J_n^s für ein schwach absorbierendes Medium.

Die in dem vorangehenden Paragraphen abgelei Formeln setzen uns instand, die in dem Ausdruck I (24 die Radiometerkraft auftretenden Integrale für den Fal berechnen, daß der komplexe Brechungsexponent $N = \nu(1$ wirklich einen komplexen Wert hat. Haben wir es abe einem nicht absorbierenden Körper zu tun, wo $k = 0$ daher $N = \bar{N} = \nu$ ist, so erscheinen einzelne von den in abgeleiteten Ausdrücken in der unbestimmten Form 0/0. ist daher notwendig, hier anzugeben, durch welche Relati unsere obigen Formeln in dem jetzigen Falle zu ersetzen Wir werden sie dabei gleich in eine für das Weitere beq Form bringen. Zunächst erhält man durch Grenzübergan (2) oder mit Hilfe der zu (1) analogen Relation in der The der Besselschen Funktionen für den Fall $\alpha = \beta$[1]) für J

$$(2') \quad J_n^0(\nu) = \int_0^a \left[\psi_n\left(r\frac{\nu\varrho}{a}\right)\right]^2 dr = \frac{a}{2}\left[\psi_n^2(\nu\varrho) - \psi_{n-1}(\nu\varrho)\psi_{n+1}(\right.$$

Dabei schreiben wir in abkürzender Bezeichnung J_n statt $J_n^0(\nu,\nu)$. Aus (2') ergibt sich sofort durch Differentia nach ν unter Zuhilfenahme der leicht aus I(11) zu folgern Relationen:

$$(7) \quad \begin{cases} \psi_n'(x) = (n+1)\dfrac{\psi_n(x)}{x} - \psi_{n+1}(x), \\ \psi_n'(x) = \psi_{n-1}(x) - n\dfrac{\psi_n(x)}{x} \end{cases}$$

für $J_n^4(\nu)$ der Ausdruck:

$$(4') \quad J_n^4(\nu) = \frac{a^2}{4\nu\varrho}\left[\psi_n^2(\nu\varrho) + \psi_{n+1}(\nu\varrho)\psi_{n-1}(\nu\varrho)\right],$$

der auch durch Grenzübergang aus (4) mit Hilfe von (7) I(11) zu erhalten ist.

Die auch in unserem jetzigen Falle gültige Relation gibt nun mit Rücksicht auf (2'), (4') und I(11) die Beziehu

$$(6') \quad \begin{cases} (n+1)^2 J_n^1(\nu) + \dfrac{\nu^2\varrho^2}{a^2} J_n^2(\nu) \\ \quad = \left[(n+1) - \dfrac{(2n+3)^2}{4}\right]\psi_n(\nu\varrho)\psi_{n+1}(\nu\varrho) \\ \quad + \dfrac{2n+3}{4}\nu\varrho\psi_n^2(\nu\varrho) + \dfrac{2n+1}{4}\nu\varrho\psi_{n+1}^2(\nu\varrho). \end{cases}$$

1) Vgl. P. Schafheitlin, a. a. O. S. 69.

Schließlich gilt jetzt auch die Rekursionsformel (3):

$$J_n^3(\nu) = -J_{n-1}^3(\nu) + \frac{a}{\nu\varrho}(2n+1)J_n^0(\nu)$$

aus der offenbar

$$(3') \quad (-1)^{n+1}J_n^3(\nu) = -J_0^3(\nu) + \frac{a}{\nu\varrho}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}(2s+1)J_s^0(\nu)$$

folgt.

$J_0^3(\nu)$ ergibt sich dabei hier ebenso wie oben durch direkte Integration zu

$$J_0^3(\nu) = \frac{a^2}{2\nu^3\varrho^2}\left[\nu\varrho + \frac{\nu\varrho}{2}\cos 2\nu\varrho - \frac{3}{4}\sin 2\nu\varrho\right].$$

§ 3. Näherungsformeln für ψ_n und ζ_n.

Es handelt sich nun darum, für den in I(24) unter dem Summenzeichen stehenden Ausdruck einen für große ϱ-Werte gültigen Näherungswert anzugeben. Dies bietet uns keine Schwierigkeit, da wir hier den gleichen Weg gehen können, den Debye[1]) im analogen Falle bei der Berechnung des Lichtdruckes eingeschlagen hat. Wir stellen hier zunächst die im folgenden zu gebrauchenden Näherungswerte für die Funktionen ψ_n und ζ_n zusammen.[2]) Im folgenden § 4 werden wir dann mit ihrer Hilfe genäherte Ausdrücke für die Koeffizienten B_n^1 und B_n^2 und die Integrale $J_n^s(\nu)$ herstellen und schließlich im § 5 den Näherungswert für die Radiometerkraft K angeben.

Ist zunächst $n + {}^1/_2 < \varrho$, so gilt für große ϱ-Werte:

$$(8) \quad \begin{cases} \zeta_n(\varrho) = \dfrac{e^{-i(\varrho f_0 - \pi/4)}}{(\sin\tau_0)^{1/2}}; & \psi_n(\varrho) = \dfrac{\cos(\varrho f_0 - \pi/4)}{(\sin\tau_0)^{1/2}}; \\ \zeta_n'(\varrho) = (\sin\tau_0)^{1/2}e^{-i(\varrho f_0 + \pi/4)}; & \psi_n'(\varrho) = (\sin\tau_0)^{1/2}\cos(\varrho f_0 + \pi/4), \end{cases}$$

wobei τ_0 ein reeller im Intervall $0 < \tau_0 < \dfrac{\pi}{2}$ gelegener Winkel ist, der gegeben wird durch

$$(9) \qquad \cos\tau_0 = \frac{n + {}^1/_2}{\varrho}$$

und der Ausdruck f_0 bestimmt wird durch

$$(10) \qquad f_0 = \sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0.$$

τ_0 und f_0 sind somit sowohl vom Index n als auch vom Argument ϱ abhängig.

1) P. Debye, a. a. O. S. 119ff.

2) P. Debye, a. a. O.; ferner Math. Ann. 67, S. 535, 1909.

Im folgenden werden wir öfter vor die Aufgabe
die oben eingeführten Funktionen für den Index $(n +$
auf kleine Größen durch τ_0-Werte darzustellen, wie s
Index n entsprechen. Bezeichnen wir [1]) das zu $(n +$
hörige τ_0 mit τ_0', so ist

$$\cos \tau_0' = \frac{n + {}^3/_2}{\varrho} \tag{9'}$$

und das entsprechende f_0' wird gegeben durch

$$f_0' = \sin \tau_0' - \tau_0' \cos \tau_0' . \tag{10'}$$

Setzen wir nun

$$\tau_0' = \tau_0 + \Delta \tau_0 , \tag{11}$$

so ergibt sich aus (9') durch Entwicklung von $\cos \tau_0$
Potenzen von $\Delta \tau_0$

$$\cos \tau_0' = \cos \tau_0 - \sin \tau_0 \, \Delta \tau_0 = \frac{n + {}^3/_2}{\varrho} .$$

woraus mit Benützung von (9)

$$- \sin \tau_0 \, \Delta \tau_0 = \frac{1}{\varrho} \tag{12}$$

folgt. Aus dieser Beziehung ergibt sich schließlich
Entwicklung nach Potenzen von $\Delta \tau_0$

$$f_0' = f_0 + \tau_0 \sin \tau_0 \, \Delta \tau_0 = f_0 - \frac{\tau_0}{\varrho} . \tag{13}$$

Die beiden Gleichungen (11) und (13) lassen uns sofo
kennen, in welcher Weise die Funktionen (8) für den
wert $(n + 1)$ durch τ_0-Werte ausdrückbar sind, die de
dex n entsprechen. Bei diesem Übergang kann wohl na
in $\sin \tau_0$ das τ_0 einfach beibehalten werden, nach (13
man aber $f_0 \varrho$ durch $f_0 \varrho - \tau_0$ ersetzen, weil ja hier
$f_0 \varrho$ von gleicher Größenordnung sind. So ist z. B.

$$\psi_{n+1}(\varrho) = \frac{\cos (\varrho f_0 - \pi \, 4 - \tau_0)}{(\sin \tau_0)^{1/2}} \tag{14}$$

und analog erhalten wir für den Indexwert $(n - 1)$:

$$\psi_{n-1}(\varrho) = \frac{\cos (\varrho f_0 - \pi/4 + \tau_0)}{(\sin \tau_0)^{1/2}} . \tag{15}$$

1) P. Debye, a. a. O. S. 122.

Für den Fall $n + {}^1/_2 > \varrho$ gilt für große ϱ-Werte

$$(16)\quad \begin{cases} \zeta_n(\varrho) = i\dfrac{e^{-i\varrho f_0}}{(i\sin\tau_0)^{1/2}}; & \psi_n(\varrho) = \dfrac{e^{i\varrho f_0}}{(i\sin\tau_0)^{1/2}}; \\ \zeta_n'(\varrho) = -i(i\sin\tau_0)^{1/2}e^{-i\varrho f_0}; & \psi_n'(\varrho) = (i\sin\tau_0)^{1/2}e^{i\varrho f_0}, \end{cases}$$

wobei jetzt τ_0 die negative imaginäre Wurzel der Gleichung (9) ist und f_0 wieder durch (10) gegeben wird. Beim Übergang von n zu $(n+1)$ sind τ_0' und f_0' wieder durch (11) und (13) festgelegt, so daß man z. B. erhält:

$$(17)\qquad \psi_{n+1}(\varrho) = \frac{e^{i(\varrho f_0 - \tau_0)}}{(i\sin\tau_0)^{1/2}}.$$

Ebenso gilt:

$$(18)\qquad \psi_{n-1}(\varrho) = \frac{e^{i(\varrho f_0 + \tau_0)}}{(i\sin\tau_0)^{1/2}}.$$

Es mag hier noch bemerkt werden, daß im jetzigen Falle $i\sin\tau_0$ reell und positiv, if_0 jedoch reell und negativ ist.

§ 4. Näherungsformeln für B_n^1, B_n^2 und die Integrale J_n^s.

Bevor wir an den eigentlichen Gegenstand dieses Paragraphen herantreten, wollen wir zeigen, daß die in der Darstellung I (27) für die Koeffizienten B_n^1 und B_n^2 gegebenen Ausdrücke sich noch weiter vereinfachen lassen. Die bekannte von Lommel hergeleitete Relation[1])

$$\frac{\pi x}{2}\left(H_n^{(2)}(x)J_{n-1}(x) - H_{n-1}^{(2)}(x)J_n(x)\right) = i$$

lautet nämlich nach I (10) und I (12) in ψ_n und ζ_n ausgedrückt:

$$\zeta_n(x)\,\psi_{n-1}(x) - \zeta_{n-1}(x)\,\psi_n(x) = i.$$

Mit Hilfe der auch für ζ_n gültigen Relation I (11) erhalten wir somit für den in B_n^1 und B_n^2 auftretenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\zeta_n(\varrho)\,\psi_n'(\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\,\psi_n(\varrho) &= \frac{1}{2n+1}\{\zeta_n[(n+1)\psi_{n-1} - n\psi_{n+1}] \\ &\quad -\psi_n[(n+1)\zeta_{n-1} - n\zeta_{n+1}]\} = \frac{1}{2n+1}\{(n+1)[\zeta_n\psi_{n-1} - \zeta_{n-1}\psi_n] \\ &\quad + n[\zeta_{n+1}\psi_n - \zeta_n\psi_{n+1}]\} = \frac{(n+1)i + ni}{2n+1} = i.\end{aligned}$$

---

1) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln usw. S. 165. Leipzig 1909.

Es gilt somit allgemein:

$$(19)\quad \begin{cases} B_n^{\,1} = i^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)} \dfrac{1}{N} \dfrac{1}{\zeta_n(\varrho)\,\psi_n'(N\varrho) - N\zeta_n'(\varrho)\,\psi_n(N\varrho)}, \\ B_n^{\,2} = i^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)} \dfrac{1}{N\zeta_n(\varrho)\,\psi_n'(N\varrho) - \zeta_n'(\varrho)\,\psi_n(N\varrho)}. \end{cases}$$

In diesem Paragraphen wollen wir nun für die Ko fizienten $B_n^{\,1}$ und $B_n^{\,2}$ sowie für die Integrale $J_n^{\,s}(\nu)$ Näherun formeln angeben und gleichzeitig die erhaltenen Ausdrü in eine dem Folgenden angepaßte Form bringen. Da in $B_n^{\,2}$ und den $J_n^{\,s}(\nu)$ die Funktionen ψ_n und ζ_n nicht nur dem Argument ϱ, sondern auch mit $\nu\varrho$ auftreten, wollen jetzt durch die Relation

$$(20)\qquad \cos\tau_1 = \frac{n+1/2}{\nu\varrho}$$

einen Winkel τ_1 definieren, wobei sein Vorzeichen durch d gleichen Festsetzungen wie bei τ_0 festgelegt sein soll. Fern sei analog wie früher:

$$(21)\qquad f_1 = \sin\tau_1 - \tau_1\cos\tau_1$$

und τ_1' und f_1' seien die zu dem Indexwerte $(n+1)$ gehörig Werte von τ_1 und f_1. Zwischen τ_0 und τ_1 besteht nach (und (20) die Relation

$$(22)\qquad \cos\tau_0 = \nu\cos\tau_1 \quad \textit{(Brechungsgesetz)}.$$

Im folgenden wird stets $\nu > 1$ vorausgesetzt.

Wir wollen nun die genäherten Ausdrücke für $B_n^{\,1}$ u $B_n^{\,2}$ angeben. Wie aus (19) ersichtlich ist, enthalten die hi vorkommenden Funktionen ζ_n und ψ_n als Argument sowohl als auch $\nu\varrho$. Da aber die Näherungsformeln für ζ_n und je nachdem diese Funktionen von ϱ oder $\nu\varrho$ abhängen, f verschiedene n-Werte von der einen in § 3 angegebenen For in die andere übergehen, so müssen wir hier die folgend 3 Fälle unterscheiden:

1. $n + 1/2 < \varrho < \nu\varrho$.
2. $\varrho < n + 1/2 < \nu\varrho$,
3. $\varrho < \nu\varrho < n + 1/2$.

Befinden wir uns zunächst im Falle 1., so ist nach (8):

$$\zeta_n(\varrho)\,\psi_n'(\nu\varrho) = \left(\frac{\sin\tau_1}{\sin\tau_0}\right)^{1/2} e^{-i(\varrho f_0-\pi/4)}\,\frac{1}{2}\left\{e^{+i(\nu\varrho f_1+\pi/4)}\right.$$
$$\left. + e^{-i(\nu\varrho f_1+\pi/4)}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\tau_1}{\sin\tau_0}\right)^{1/2} e^{-i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}\left(1+e^{-2i\nu\varrho f_1}\right)$$

und analog gilt:

$$\zeta_n'(\varrho)\,\psi_n(\nu\varrho) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\tau_0}{\sin\tau_1}\right)^{1/2} e^{-i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}\left(i-e^{-2i\nu\varrho f_1}\right).$$

Berücksichtigen wir nun, daß im Hinblick auf (22):

$$\sin\tau_0+\nu\sin\tau_1 = \frac{\sin(\tau_1+\tau_0)}{\cos\tau_1} \quad \text{und}$$
$$\nu\sin\tau_0+\sin\tau_1 = \frac{\sin(\tau_0+\tau_1)\cos(\tau_0-\tau_1)}{\cos\tau_1}$$

und bezeichnen wir mit Debye (*Reflexionskoeffizienten*):

$$(23)\qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{\nu\sin\tau_0-\sin\tau_1}{\nu\sin\tau_0+\sin\tau_1} = \dfrac{\operatorname{tg}(\tau_0-\tau_1)}{\operatorname{tg}(\tau_0+\tau_1)}; \\ r_2 = \dfrac{\sin\tau_0-\nu\sin\tau_1}{\sin\tau_0+\nu\sin\tau_1} = \dfrac{\sin(\tau_0-\tau_1)}{\sin(\tau_0+\tau_1)}, \end{cases}$$

so ergibt sich schließlich:

$$(24)\begin{cases} B_n^{\,1} = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\cdot\dfrac{1}{\nu}\,\dfrac{2(\sin\tau_0\sin\tau_1)^{1/2}\cos\tau_1}{\sin(\tau_0+\tau_1)\cos(\tau_0-\tau_1)}\cdot\dfrac{e^{i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}}{1+ir_1e^{-2i\nu\varrho f_1}}, \\ B_n^{\,2} = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\cdot\dfrac{2(\sin\tau_0\sin\tau_1)^{1/2}\cos\tau_1}{\sin(\tau_1+\tau_0)}\cdot\dfrac{e^{i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}}{1+ir_2e^{-2i\nu\varrho f_1}}. \end{cases}$$

Da im Falle 2. die Ausdrücke $\zeta_n(\varrho)$ und $\zeta_n'(\varrho)$ formell in der gleichen Weise geschrieben werden können, wie im Falle 1. und da für $\psi_n(\nu\varrho)$ und $\psi_n'(\nu\varrho)$ in beiden Fällen die gleiche Darstellung gilt, so erstreckt sich die Gültigkeit von (24) auch auf den Fall 2.

Im Falle 3. erhält man dagegen:

$$(24')\begin{cases} B_n^{\,1} = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\cdot\dfrac{1}{\nu}\,\dfrac{(\sin\tau_0\sin\tau_1)^{1/2}\cos\tau_1}{\sin(\tau_0+\tau_1)\cos(\tau_0-\tau_1)}\,e^{i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}; \\ B_n^{\,2} = i^{n-1}\,\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\,\dfrac{(\sin\tau_0\sin\tau_1)^{1/2}\cos\tau_1}{\sin(\tau_0+\tau_1)}\cdot e^{i(\varrho f_0-\nu\varrho f_1)}. \end{cases}$$

Bei der Darstellung der Integrale J_n^s durch Näherungsformeln ist zu beachten, daß alle in ihnen auftretenden Funk-

tionen ψ_n nur vom Argument $r\varrho$ abhängen. Es sind dabei hier nur 2 Fälle zu unterscheiden:

$$\text{a)}\quad n + {}^1/_2 < r\varrho\,,$$
$$\text{b)}\quad r\varrho < n + {}^1/_2\,.$$

Zunächst erhalten wir aus (6'), (4'), (8), (14), (15), wenn wir uns auf die höchste Potenz von ϱ beschränken und demgemäß nach (20) n durch $r\varrho\cos\tau_1$ ausdrücken, im Falle a):

$$(25)\quad \begin{cases} (n+1)^2 J_n^{\,1}(r) + \left(\dfrac{r\varrho}{a}\right)^2 J_n^{\,2}(r) = \dfrac{(r\varrho)^2}{2}\cos\tau_1\sin\tau_1 = \dfrac{(r\varrho)^2}{4}\sin 2\tau_1 \\ J_n^{\,4}(r) = \dfrac{a^2}{4\,r\varrho}\cdot\dfrac{1}{\sin\tau_1}\left\{2\cos^2(r\varrho f_1 - \pi/4) - \sin^2\tau_1\right\} \\ = \dfrac{a^2}{8\,r\varrho}\dfrac{1}{\sin\tau_1}\left\{e^{2i(r\varrho f_1 - \pi/4)} + e^{-2i(r\varrho f_1 - \pi/4)} + 2\cos^2\tau_1\right\}. \end{cases}$$

Im Falle b) ergibt sich dagegen mit Zuhilfenahme von (16), (17) und (18):

$$(25')\quad \begin{cases} (n+1)^2 J_n^{\,1}(r) + \left(\dfrac{r\varrho}{a}\right)^2 J_n^{\,2}(r) = r\varrho\,\dfrac{\cos\tau_1}{i\sin\tau_1}\,e^{2ir\varrho f_1 - i\tau_1}, \\ J_n^{\,4}(r) = \dfrac{a^2}{2\,r\varrho}\,\dfrac{e^{2ir\varrho f_1}}{i\sin\tau_1}\,. \end{cases}$$

Etwas vorsichtiger muß man bei der Berechnung von $J_n^{\,3}(r)$ verfahren. Zunächst werde der Fall a) betrachtet. Für das in der Darstellung (3') für $J_n^{\,3}(r)$ auftretende $J_s^{\,0}$ findet man nach (2'), (8), (14), (15):

$$J_s^{\,0}(r) = \frac{a}{2}\sin\tau_1\,.$$

Da mit Rücksicht auf (20) $2s+1 = 2\,r\varrho\cos\tau_1$ gesetzt werden kann, so ergibt sich:

$$(-1)^{n+1} J_n^{\,3}(r) = -J_0^{\,3}(r) + \frac{a^2}{r\varrho}\,r\varrho\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\cos\tau_1\sin\tau_1$$
$$= -J_0^{\,3}(r) + \frac{a^2}{2}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\sin 2\tau_1\,.$$

Fassen wir nun hier in der Summe zwei aufeinanderfolgende Glieder ins Auge, etwa ein zu dem ungeraden Index s und ein zu dem geraden $(s+1)$ gehöriges, so liefern diese zu unserer Summe den Beitrag:

$$\sin 2\tau_1 - \sin 2\tau_1' = \sin 2\tau_1 - \sin 2(\tau_1 + \Delta\tau_1) = -\cos 2\tau_1 . 2\,\Delta\tau_1$$

Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden: n eine gerade Zahl und n eine ungerade Zahl. Im ersten Falle lassen sich alle in der Summe auftretenden Glieder paarweise zusammenfassen, im zweiten Falle aber bleibt dabei eines, etwa das letzte, übrig. Bezeichnen wir nun mit η_n eine Zahl, die für ein gerades n gleich 0 und für ein ungerades n gleich 1 ist, so haben wir demnach:

$$(-1)^{n+1} J_n^3(\nu) = -J_0^3(\nu) - \frac{a^2}{2} \sum_{s=1}^{n}{}' \cos 2\tau_1 \, 2\,\Delta\tau_1 + \eta_n \frac{a^2}{2} \sin 2\tau_1^{(n)}.$$

Dabei soll $\tau_1^{(n)}$ das zum Index n gehörige τ_1 bezeichnen. Der Strich beim Summenzeichen deutet an, daß die Summe nunmehr bloß über alle ungeraden s ($s \leqq n$) zu erstrecken ist. Approximieren wir nun die Summe durch ein Integral, so wird, da mit Rücksicht auf (20) $s = 1$ ungefähr $\tau_1 = \pi/2$ entspricht:

$$\sum_{s=1}^{n}{}' \cos 2\tau_1 \, 2\,\Delta\tau_1 = \int_{\pi/2}^{\tau_1^{(n)}} \cos 2\tau_1 \, d\tau_1 = \tfrac{1}{2} \sin 2\tau_1 \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\tau_1^{(n)}} = \tfrac{1}{2} \sin 2\tau_1^{(n)}.$$

Es wird daher, wenn wir jetzt den Index n bei $\tau_1^{(n)}$ wieder weglassen:

$$J_n^3(\nu) = (-1)^n J_0^3(\nu) + \frac{a^2}{4} \sin 2\tau_1 . \tag{26}$$

Für den Fall $n + \frac{1}{2} > \nu\varrho$ ist $J_n^3(\nu)$ jetzt einfach zu erledigen. Vor allem ist nach (2'), (16), (17), (18)

$$J_s^0(\nu) = 0 . \tag{27}$$

Da nun für den durch die Ungleichung $\bar{n} + \frac{1}{2} < \nu\varrho < \bar{n} + \frac{3}{2}$ bestimmten Index $\bar{n}$ wegen $\tau_1^{\bar{n}} = 0$ (vgl. (20)) nach (26) die Relation $J_{\bar{n}}^3(\nu) = (-1)^{\bar{n}} J_0^3(\nu)$ besteht, so gilt wegen (3') und (27) jetzt allgemein

$$J_s^3(\nu) = (-1)^n J_0^3(\nu) . \tag{26'}$$

Für $J_0^3(\nu)$ gilt dabei in den obigen Formeln der in § 2 angegebene Ausdruck.

§ 5. Näherungsformel für die Radiometerkraft.

Die im Ausdruck I (24) für die Radiometerkraft K auftretende unendliche Summe denken wir uns in vier Reihen $T_1 \ldots T_4$ gespalten und zwar so, daß die Reihe T_s nur Glieder mit den Integralen $J_n^s(\nu)$ enthält. Jedes Glied einer Reihe T_s

würde dann noch eine Summe zweier konjugiert komple Ausdrücke sein. Wir erhalten das gleiche Endresultat, we wir statt dessen das erste Glied doppelt nehmen und Verabredung treffen, daß dann im Schlußresultat nur Realteil beizubehalten ist. Mit Hilfe der Formeln des letz Paragraphen sind nun leicht genäherte Ausdrücke für die anzugeben. Um dies durchzuführen, denken wir uns jede d unendlichen Summen T_ϱ in zwei Teile gespalten. In eine en liche Summe T_ϱ', die die Glieder mit dem Index $n = 1$ $n = n^*$ umfaßt, wo n^* durch $n^* + \frac{1}{2} < \varrho < n^* + \frac{3}{2}$ bestim ist, und in eine unendliche Summe T_ϱ'', die die sämtlich übrigen Glieder von $n = n^* + 1$ angefangen, enthält. Zunäch befassen wir uns mit der Summe $(T_1 + T_2)$, die mit Rücksic auf I (24) und I (26) die Gestalt hat:

$$T_1 + T_2 = T_1' + T_2' + T_1'' + T_2''$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} B_n^1 B_{n+1}^1 \left\{ (n+1)^2 J_n^1(\nu\varrho) + \frac{\nu^2\varrho^2}{a^2} J_n^{2}(\nu\varrho) \right\}.$$

Bei der Berechnung von $T_1' + T_2'$ ist $n + \frac{1}{2} < \varrho$ und es sin daher die Näherungsformeln (24) und (25) zu verwenden. Es wir

$$(28) \quad \begin{cases} T_1' + T_2' = 2 \sum_{n=1}^{n^*} i \frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(2n-1)(2n+3)}{n(n+1)^2(n+2)} \\ \cdot \frac{1}{\nu^2} \frac{4 \sin \tau_0 \sin \tau_1 \cos^2 \tau_1}{\sin^2(\tau_0+\tau_1)\cos^2(\tau_0-\tau_1)} \cdot \frac{e^{-i\varrho\beta_0 - \nu\varrho\beta_1} e^{i\varrho\beta_0' - \nu\varrho\beta_1'}}{(1 - i r_1 e^{2i\nu\varrho\beta_1})(1 + i r_1 e^{-2i\nu\varrho\beta_1'}} \\ \cdot \frac{\nu^2\varrho^2}{4} \sin 2\tau_1 . \end{cases}$$

β_0' und β_1' sind dabei durch (10') und (21') gegeben. Be der Bildung von B_n^1 und B_n^2 ist zu beachten, daß β_0 und β_1 in dem jetzigen Falle reell sind. Berücksichtigen wir (13) und die Tatsache, daß für β_1' eine analoge Relation gilt, so wird

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{e^{-i\varrho\beta_0 - \nu\varrho\beta_1} \cdot e^{i\varrho\beta_0' - \nu\varrho\beta_1'}}{(1 - i r_1 e^{2i\nu\varrho\beta_1})(1 - i r_1 e^{-2i\nu\varrho\beta_1'})} \\ = \frac{e^{-i\tau_0 - \tau_1}}{(1 - i r_1 e^{2i\nu\varrho\beta_1})(1 + i r_1 e^{-2i\nu\varrho\beta_1' - \tau_1})} \\ = e^{-i\tau_0 - \tau_1} \sum_{p=0}^{\infty} (i r_1 e^{2i\nu\varrho\beta_1})^p \sum_{q=0}^{\infty} (-i r_1 e^{-2i\nu\varrho\beta_1'})^q e^{2i\tau_1 q} . \end{cases}$$

Die Reihenentwicklungen sind hier wegen $|r_1| < 1$ zulässig. Wir denken uns nun die beiden Reihen ausmultipliziert und nach positiven und negativen Potenzen von $e^{2i\nu\varrho f_1}$ geordnet. Es haben dann die Glieder 0ter Ordnung in dieser Entwicklung den Wert:

$$e^{-i(\tau_0-\tau_1)}\sum_{\mu=0}^{\infty}(i r_1 e^{2i\nu\varrho f_1})^\mu(-i r_1 e^{-2i\nu\varrho f_1})^\mu e^{2i\tau_1\mu}$$
$$= e^{-i(\tau_0-\tau_1)}\sum_{\mu=0}^{\infty}(r_1^2 e^{2i\tau_1})^\mu = \frac{e^{-i(\tau_0-\tau_1)}}{1-r_1^2 e^{2i\tau_1}}.$$

Setzen wir nun unsere nach $e^{2i\nu\varrho f_1}$ fortschreitende Reihenentwicklung in den Ausdruck (28) für $T_1' + T_2'$ ein, so liefern bei der Summation nach n alle Glieder, die nicht mit der 0ten Potenz von $e^{2i\nu\varrho f_1}$ multipliziert sind, keinen merklichen Beitrag zu $T_1' + T_2'$. Die Funktion $(e^{2i\nu\varrho f_1})^q$ ändert sich nämlich beim Übergang von einem n zum nächstfolgenden wegen (13) schon um einen beträchtlichen Betrag. Da der Koeffizient von $(e^{2i\nu\varrho f})^q$ sich dabei nur wenig ändert, so resultiert für diese Glieder im Ganzen in erster Näherung bei der Summation die Null.[1]) Ersetzen wir nun noch in (28) n nach (9) durch $\varrho\cos\tau_0$ und multiplizieren den ganzen Ausdruck mit $(-\varrho\sin\tau_0\,\Delta\tau_0 = 1)$ (12), so erhalten wir demnach:

$$T_1' + T_2' = -8i\varrho^4\sum_{n=1}^{n^*}\frac{\sin^2\tau_0\cos\tau_0\sin^2\tau_1\cos^3\tau_1}{\sin^2(\tau_0+\tau_1)\cos^2(\tau_0-\tau_1)}\cdot\frac{e^{-i(\tau_0-\tau_1)}}{1-r_1^2 e^{2i\tau_1}}\,\Delta\tau_0.$$

Formen wir die von $n=1$ bis $n=n^*$ laufende Summe in ein nach (9) zwischen den Grenzen $\pi/2$ und 0 zu erstreckendes Integral um, so wird schließlich:

$$(30)\quad T_1' + T_2' = 8i\varrho^4\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\tau_0\cos\tau_0\sin^2\tau_1\cos^3\tau_1}{\sin^2(\tau_0+\tau_1)\cos^2(\tau_0-\tau_1)}\cdot\frac{e^{-i(\tau_0-\tau_1)}}{1-r_1^2 e^{2i\tau_1}}\,d\tau_0.$$

Bei der Berechnung von $T_1'' + T_2''$ sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\alpha)$ $\varrho < n+{}^1/_2 < \nu\varrho$ oder $\beta)$ $\varrho < \nu\varrho < n+{}^1/_2$ ist. Im Falle $\alpha)$ gilt für die Koeffizienten $B_n^{\,1}$ und $B_n^{\,2}$ die Darstellung (24) und für das Integral $J_n^{\,4}(\nu)$ die Formel (25). Bei der Bildung von $B_n^{\,1}$ ist nun zu beachten, daß jetzt if_1 einen komplexen, if_0 aber einen reellen und zwar negativen

1) P. Debye, a. a. O., S. 127.

Wert hat und mithin $if_0 = \overline{if_0}$ ist. Man sieht ohne weitere daß jetzt B_n^1 und $\bar{B}_n^1$ mit wachsendem ϱ wie eine e-Poten verschwinden. Diese Glieder kommen somit nicht in Betrach Im Falle β) gilt für B_n^1 und $J_n^4(\nu)$ die Formel (24') und (25' if_0 und if_1 sind hier beide reell und zwar negativ. Wie ein leichte Überlegung zeigt, verschwinden auch die dem jetzige Falle entsprechenden Glieder in $T_1'' + T_2''$ mit wachsendem wie eine e-Potenz und wir können somit im ganzen

$$T_1'' + T_2'' = 0$$

setzen.

Bei der Berechnung von

$$T_3 = 2\frac{\varrho^2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}B_n^2 B_{n+1}^2 J_n^3(\nu)$$

setzen wir im Hinblick auf den Ausdruck (26) und (26') für $J_n^3(\nu$

$$T_3 = T_{3a} + T_{3b},$$

wo

$$T_{3a} = 2\frac{\varrho^2}{a^2}J_0^3(\nu)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}B_n^2 B_{n+1}^2.$$

$$T_{3b} = \frac{\varrho^2}{2}\sum_{n=1}^{n=n^{**}}\frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}B_n^2 B_{n+1}^2\sin 2\tau_1.$$

n^{**} ist hier mit Rücksicht darauf, daß $J_n^3(\nu)$ nach (26') für $n + {}^1/_2 > \varrho\nu$ durch $J_n^3(\nu) = (-1)^n J_0^3(\nu)$ gegeben ist, durch die Relation $n^{**} + {}^1/_2 < \nu\varrho < n^{**} + {}^3/_2$ bestimmt. Zerlegen wir T_{3b} in $T_{3b}' + T_{3b}''$, so ergibt uns zunächst das gleiche Verfahren, das zur Berechnung von $T_1' + T_2'$ gedient hat, für

$$T_{3b}' = \frac{\varrho^2}{2}\sum_{n=1}^{n^*}\frac{2n^2(n+1)(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)}B_n^2 B_{n+1}^2\sin 2\tau_1 \quad (n^* + {}^1/_2 < \varrho < n^* + {}^3/_2)$$

den Ausdruck

$$(31)\quad T_{3b}' = 8i\varrho^4\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\tau_0\cos\tau_0\sin^2\tau_1\cos^2\tau_1}{\sin^2(\tau_0+\tau_1)}\cdot\frac{e^{-i(\tau_0-\tau_1)}}{1-r_2^2e^{2i\tau_1}}\,d\tau_0.$$

T_{3b}'' und T_{3a} sind bei dem von uns angestrebten Grade der Genauigkeit Null zu setzen. Es ergibt sich ja das Ver-

schwinden von T_{3b}'' auf dem gleichen Wege wie bei $T_1'' + T_2''$ und eine leichte Abschätzung von T_{3a} zeigt, daß es günstigsten Falles einen ϱ^3 proportionalen Beitrag liefern könnte und mithin für uns nicht in Betracht kommt. Wir müssen uns noch mit der Abschätzung von

$$T_4 = T_4' + T_4'' = -2i\frac{\varrho^3}{a^2}\nu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(n+1)}{2n+1}B_n^{\,1}B_n^{\,2}J_n^{\,4}(\nu)$$

befassen. Wir können leicht einsehen, daß wir es Null setzen dürfen. T_4' ist nämlich proportional ϱ^0 und überdies rein imaginär (wir bemerken nebenbei, daß bei einer eventuellen Berechnung von T_4' mit Rücksicht darauf, daß nach (25) in $J_n^{\,4}(\nu)$ auch Glieder mit $e^{2i\nu\varrho f_1}$ und $e^{-2i\nu\varrho f_1}$ vorkommen, in der Entwicklung des Zählers von $B_n^{\,1}B_n^{\,2}$ auch diese beide Faktoren enthaltenden Glieder zu berücksichtigen sind) und T_4'' verschwindet wieder nach (24′) und (25′) exponentiell.

Nach dem Obigen liefern somit im ganzen nur die beiden Ausdrücke $T_1' + T_2'$ (30) und T_{3b}' (31) einen nicht verschwindenden Beitrag zu T. Es wird somit:

$$T = 8i\varrho^4\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\tau_0\cos\tau_0\sin^2\tau_1\cos^3\tau_1}{\sin^2(\tau_0+\tau_1)}e^{-i(\tau_0-\tau_1)}$$
$$\left\{\frac{1}{\cos^2(\tau_0-\tau_1)}\cdot\frac{1}{1-r_1^{\,2}e^{2i\tau_1}}+\frac{1}{1-r_2^{\,2}e^{2i\tau_1}}\right\}d\tau_0.$$

Um nun zu zeigen, daß unter unseren Voraussetzungen unsere Radiometerkraft im Sinne einer negativ photophoretischen Kraft wirkt, müssen wir jetzt noch nachweisen, daß T stets einen negativen Realteil besitzt.

Zunächst ist

$$\Re\left[ie^{-i(\tau_0-\tau_1)}\frac{1}{\cos^2(\tau_0-\tau_1)}\cdot\frac{1}{1-r_1^{\,2}e^{2i\tau_1}}\right]$$
$$=\frac{\Re i\left[e^{-i(\tau_0-\tau_1)}-r_1^{\,2}e^{-i(\tau_0+\tau_1)}\right]}{\cos^2(\tau_0-\tau_1)(1+r_1^{\,4}-2r_1^{\,2}\cos 2\tau_1)}=\frac{\sin(\tau_0-\tau_1)-r_1^{\,2}\sin(\tau_0+\tau_1)}{\cos^2(\tau_0-\tau_1)(1+r_1^{\,4}-2r_1^{\,2}\cos 2\tau_1)}.$$

Für den Zähler dieses Ausdruckes erhält man dabei mit Hilfe von (23)

$$\sin(\tau_0 - \tau_1) - r_1^2 \sin(\tau_0 + \tau_1) = \frac{\sin(\tau_0-\tau_1)}{\cos^2(\tau_0-\tau_1)}\Big[\cos^2(\tau_0 - \tau_1)$$

$$- \frac{\sin(\tau_0-\tau_1)}{\sin(\tau_0+\tau_1)}\cos^2(\tau_0 +$$

$$= \frac{\sin(\tau_0-\tau_1)}{\cos^2(\tau_0-\tau_1)}[1 - r_2 \sin(\tau_0 - \tau_1)\sin(\tau_0 + \tau_1) - r_2$$

$$+ \sin(\tau_0 - \tau_1)\sin(\tau_0 +$$

$$= \frac{\sin(\tau_0-\tau_1)}{\cos^2(\tau_0-\tau_1)}(1 - r_2)[1 + \sin(\tau_0 - \tau_1)\sin(\tau_0 + \tau_1)]$$

Ebenso ergibt sich

$$\Re\left[i\frac{e^{-i(\tau_0-\tau_1)}}{1-r_2^2 e^{2i\tau_1}}\right] = \frac{\sin(\tau_0-\tau_1) - r_2^2\sin(\tau_0+\tau_1)}{1 + r_2^4 - 2r_2^2\cos 2\tau_1},$$

wobei nach (23)

$$\sin(\tau_0 - \tau_1) - r_2^2 \sin(\tau_0 + \tau_1) = \sin(\tau_0 - \tau_1)(1 - r_2).$$

Wir erhalten somit für T im Ganzen jetzt den Ausdruck

$$(32)\quad \left\{ T = 8\varrho^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\tau_0 \cos\tau_0 \sin^2\tau_1 \cos^3\tau_1}{\sin^2(\tau_0+\tau_1)} \sin(\tau_0 - \tau_1)(1 - r_2) \right.$$
$$\left. \left\{ \frac{1 + \sin(\tau_0 - \tau_1)\sin(\tau_0+\tau_1)}{\cos^4(\tau_0-\tau_1)(1 + r_1^4 - 2r_1^2\cos 2\tau_1)} + \frac{1}{1 + r_2^4 - 2r_2^2\cos 2\tau_1} \right\} d\tau \right.$$

Es ist jetzt leicht zu sehen, daß T ein negatives Vorzeich hat. Da wir $\nu > 1$ voraussetzen, so ist wegen des Brechungsgesetzes (22) $\cos\tau_0 = \nu\cos\tau_1$ und in dem für uns in Betrac kommenden Bereiche $(0, \pi/2)$ ist daher $\tau_0 < \tau_1$ und mith $\sin(\tau_0 - \tau_1) < 0$, während alle übrigen Terme in (32) posit sind ($|r_2| < 1$!).

Bezeichnen wir nun das in (32) auftretende Integral mit setzen also $T = 8\varrho^4 S$, so ergibt sich jetzt aus I (24) für im Hinblick auf I (25) und I (26) der Ausdruck:

$$(33)\qquad K = \frac{p}{T} \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda} c\nu^2 k \frac{1}{\varkappa + k a} a^4 \gamma S \qquad (\varrho \gg 1$$

Das Integral S hat dabei ein negatives Zeichen. Leider läß sich S nur numerisch oder graphisch auswerten.

Die nun erwiesene Tatsache, daß für den Fall eine Kugel, die im Sinne der Einleitung als schwach absorbieren zu bezeichnen ist, für große ϱ-Werte stets eine negativ Radiometerkraft auftritt, spricht nun entschieden dafür, da die negative Photophorese als Radiometereffekt aufzufassen is

Ehrenhaft untersucht nämlich die photophoretischen Kräfte des Lichtes einer Bogenlampe, deren Spektrum infolge der Absorption der Lichtstrahlen in den Glasteilen und der Wasserkammer der Apparatur sich über einen Wellenlängenbereich $4 \cdot 10^{-5}$ bis $12 \cdot 10^{-5}$ cm erstreckt. Das Energiemaximum seiner Bogenlampenstrahlung schätzt Ehrenhaft mit Lummer bei einer Wellenlänge von $7 \cdot 10^{-5}$ cm.

Frl. Parankiewicz hat die negativ photophoretischen Kräfte an *Se*-Teilchen mit einem Radius von der Größe 0,7 bis $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ cm und an *S*-Teilchen mit einem Radius von der Größe 1 bis $4 \cdot 10^{-5}$ cm messend verfolgen können. Für jedes der experimentell untersuchten Teilchen kommen somit je nach dem Spektralbereiche $\varrho \left(= \frac{2\pi a}{\lambda}\right)$-Werte $\gtrless 1$ in Betracht. Auf Grund einer der beiden Näherungsformeln allein ist somit hier keine Entscheidung möglich und die von Ehrenhaft gemessenen photophoretischen Kräfte wären nach unserer Auffassung als die Resultierende positiver und negativer Radiometerkräfte zu deuten. Eine Entscheidung ließe sich nur durch langwierige Zahlenrechnungen mittels der exakten Formel erbringen, was aber wegen der bereits betonten Unkenntnis eines Teiles der Materialkonstanten von *Se* und *S* zurzeit nicht vollständig durchführbar ist.

Auf Grund unserer beiden Näherungsformeln können wir aber die folgenden unsere Auffassung stützenden Argumente beibringen. Vor allem kann *Se* und besonders mit vollstem Rechte *S* für die hier in Betracht kommende Größenordnung der Kügelchen als schwach absorbierend bezeichnet werden und es gilt daher, da es sich hier ohnehin nur um eine Schätzung handelt, die Näherungsformel (33) für *K*. Bei *Se* ist ja der komplexe Brechungsexponent $N = \nu(1 - ik) = 2{,}790 - i \cdot 0{,}450$ (bei der Wellenlänge $\lambda = 6{,}68 \cdot 10^{-5}$ cm).[1]) Bei *S* dürfte der imaginäre Teil von N und damit die Absorption sicher noch viel kleiner sein. Sodann ist es plausibel, daß bei *S* und *Se* die negativen Radiometerkräfte überwiegen werden und daher unsere Theorie die Beobachtungen von Ehrenhaft tatsächlich wiederspiegelt. Die positiven Radiometerkräfte werden

1) W. Meier, Ann. d. Phys. 31. S. 1017. 1910.

ja nur durch eine ultrarote Wärmestrahlung bedingt, die eine 10 cm dicke Wasserschicht passiert hat und nach den Messungen von Aschkinass[1] dringt durch eine solche für längere Wellen als $9{,}6 \cdot 10^{-5}$ cm weniger als $\frac{1}{10}$ der Intensität der einfallenden Wärmestrahlung hindurch. Die Intensität der in den Ehrenhaftschen Versuchen wirksamen ultraroten Strahlung ist demnach nicht zu überschätzen. Andererseits erkennt man aber durch Vergleich unserer beiden Näherungsformeln, daß bei gleiche Intensität der einfallenden Strahlung vorausgesetzt, die Radiometerkraft für große ϱ-Werte kleine Wellenlängen) die für kleine ϱ-Werte (große Wellenlängen) überwiegt. Aus I 2 und 33 folgt ja

$$\frac{K_{gr}}{K_{kl}} = \frac{k r^2 \varrho S_{gr}}{\varrho^2 \frac{(k r^2)^2}{M} \left(0{,}2 - \frac{1}{L}\right)_{kl}},$$

wobei die Indizes $_{gr}$ und $_{kl}$ andeuten, daß die entsprechenden Größen für große bzw. kleine ϱ-Werte zu nehmen sind. Da $k r^2$ mit der Wellenlänge nicht sehr stark variiert, ϱ die Größenordnung 1 hat und schließlich $1 : L$ gegenüber 0.2 zu vernachlässigen ist, so ist unser Quotient von der Größenordnung $\left(\frac{M \cdot S}{0{,}2\, k r^2}\right)_{kl}$, der z. B. für Se den Wert $392 \cdot S$ hat. Wenn auch S schätzungsweise kleiner als 1 ist, so ist doch das Produkt $392 \cdot S$ jedenfalls noch als groß zu bezeichnen.

Es mag auch noch betont werden, daß unsere Näherungsformeln Radiometerkräfte geben, die in der Größenordnung tatsächlich den Ehrenhaftschen Photophoresekräften entsprechen. Schätzen wir etwa die nicht gemessene Wärmeleitfähigkeit von Se als ungefähr gleich der von S $4.7 \cdot 10^{-4}$ g cal grad cm sec und setzen wir die räumliche Energiedichte der Strahlung mit Ehrenhaft zu 0.279 erg cm^{-3}, so ergibt sich aus I 2 und 33 $R = 2 \cdot 10^{-7} \gamma \cdot S$. Dabei ist $a = 10^{-5}$ cm, $\lambda = 7 \cdot 10^{-5}$ cm, $N = 2.79 - i \cdot 0.45$, $p = 10^6$ dyn und $T = 300°$ angenommen und sowohl γ als auch S sind hier beide kleiner als 1. Nach den Versuchen von Frl. Parankiewicz werden bei Se Kräfte von der Größenordnung 10^{-7} dyn beobachtet, was nach der unserer Rechnung zugrunde liegenden Annahmen eine Über-

[1] E. Aschkinass, Wied. Ann. 55, S. 401. 1895.

einstimmung der Größenordnung bedeutet. Es ist ja nämlich von vornherein zu erwarten, daß unsere Schätzung für $\mathfrak{R}$ einen zu großen Wert gibt. Zunächst nehmen wir doch an, daß die ganze Strahlungsenergie allein nur im Sinne einer negativen Radiometerkraft wirkt, während sie doch auch positive Radiometerkräfte erzeugt und die beobachtete Kraft nur die Resultierende der beiden ist. Sodann ist sicher die Absorption von *Se* nicht zu vernachlässigen, was nach unseren Überlegungen in der Einleitung eine Verkleinerung der negativen Radiometerkraft zur Folge haben muß. Schließlich wenden wir hier die Näherungsformel (33) in einem Bereich $\varrho = 1$ an, wo sie, wenn selbst alle Bedingungen für ihre Anwendbarkeit gesichert wären, zu große Werte ergeben wird. Die negative Kraft (33) ergibt sich ja nur für $\varrho \gg 1$ und muß für $\varrho \ll 1$ in die positive Kraft I (28) übergehen. In Wirklichkeit geht also K mit kleiner werdendem ϱ schneller zur Null (um dann positiv zu werden) als es (33) anzeigt.

Auch sei noch erwähnt, daß die von Ehrenhaft beobachteten photophoretischen Kräfte alle größer zu schätzen wären, falls Ehrenhaft den Teilchenradius zu klein annehmen sollte, wie das mehrfach behauptet wird. Bemerkenswert ist noch, daß die negative photophoretische Kraft bei den weniger absorbierenden S-Teilchen auch noch für größere Radien (nach Ehrenhaft bis $a = 1$ bis $2 \cdot 10^{-4}$ cm) beobachtbar bleibt, als bei *Se*. Nach der Einleitung ist für große Kugeln stets ein positiver Effekt zu erwarten und es geht aus den dortigen Überlegungen auch klar hervor, daß diese Umkehr des Effektes, den Ehrenhaft nur bis zum Nullwerden verfolgt, erst bei um so größerem Teilchenradius zu erwarten ist, je weniger die Teilchen absorbieren.

Wien, 22. Februar 1920.

(Eingegangen 27. Februar 1920.)

4. *Zur experimentellen Entscheidung der Fra der Radioaktivität aller Elemente;* *von G. Hoffmann.*

Ein Weg zur experimentellen Entscheidung der Frage d Radioaktivität aller Elemente ist die Untersuchung geringst Ionisationen. Da die Möglichkeit, auf elektrometrischem We kleinste Elektrizitätsmengen nachzuweisen, durch das von n vor mehreren Jahren konstruierte Elektrometer erheblich weitert ist, so lag es nahe, durch die Angaben dieses I strumentes auf dem Wege zur Herstellung und Untersuchu möglichst kleiner Ionisationen sich führen zu lassen. Beobac tungen in dieser Richtung über die Ionisierungen in geschl senen Gefäßen sind in einer früheren Arbeit[1]) zusammengeste worden. Sie zeigten, daß eine Beimengung der bekannt radioaktiven Elemente in einer Konzentration von der Größe ordnung 10^{-12} zu den anderen Elementen genügt, um d beobachteten Erscheinungen im allgemeinen zu erklären; ei spezielle Diskussion wurde damals zurückgestellt, weil es n wendig erschien, zunächst durch weitere Messungen die E sultate zu festigen und die elektrometrische Anordnung a die Exaktheit der Messung kleinster Elektrizitätsmengen prüfen. Die Fortführung der Untersuchung[2]) hat ergeben, d auch die Versuchsanordnung von 1915 volles Vertrauen v dient.

1. Während eine Reinigung eines geschlossenen Gefäß von den kurzlebigen radioaktiven Substanzen durch Aushungeru möglich ist, müssen die langlebigen Produkte auf chemische Wege beseitigt werden. Arbeiten in dieser Richtung konnt nur die Geringfügigkeit einer eventuell vorhandenen Re aktivität, die nicht von den bekannten Radioelementen h

1) G. Hoffmann, Elster-Geitel-Festschrift, S. 435. 1915.
2) G. Hoffmann, Ann. d. Phys. 52. S. 665. 1917.

rührt, dartun; eine Entscheidung schien unmöglich.[1]) Die Tatsache jedoch, daß jedes α-Teilchen emittierende Radioelement eine charakteristische Reichweite der Strahlung besitzt, kann zur Feststellung der Herkunft des α-Teilchens führen, falls die elektrometrische Anordnung empfindlich genug ist, um die Ionenmenge, die das einzelne α-Teilchen auf seinem Fluge erzeugt — weiterhin abgekürzt als „Stoßgröße" bezeichnet —, zu messen. Diese Methode zum Nachweis der Herkunft jeder α-Aktivität ist jedoch erschwert, weil die einzelne Stoßgröße dadurch verkürzt werden kann, daß das Teilchen vor Durchfliegung der Reichweite auf eine Wand des Gefäßes aufprallt und daß die emittierende Substanz im Wandmaterial eingebettet sein und deswegen von vornherein mit verkürzter Reichweite emittieren kann. *Durch statistische Verwertung zahlreicher Stoßgrößenbeobachtungen wird diese Schwierigkeit behoben.* Denn die wahrscheinliche Stoßgrößenverteilung ist berechenbar, falls das Gefäß, in dem sich die Ionisationen abspielen, geometrisch einfache Form hat und falls über die Art und Lagerung der emittierenden Materie — dem Gasinhalt beigemengt, als Oberflächenbelag, oder dem Wandmaterial beigemengt — bestimmte Annahmen gemacht werden.

2. Das Elektrometer, das die Grundlage der Untersuchung bildet, ist in dieser Zeitschrift[2]) ausführlich beschrieben. Es ist auf Bruchteile eines Millimeters Gasdruck evakuiert, so daß im Innern keine Ladungen auf den isolierten zentralen Teil übergehen können. Der Oberteil des Elektrometers ist so geformt, daß darauf unmittelbar das Ionisationsgefäß aufgesetzt werden kann, bestehend aus einem Außenstück, das durch eine Hochspannungsbatterie auf eine konstante Spannung gebracht werden kann, und einer zentralen Auffangeelektrode. Die unter dem Einfluß von Ladungsänderungen stattfindende Bewegung des Elektrometersystems wird durch einen Lichtzeiger auf einer sich gleichmäßig drehenden Trommel markiert, die mit photographischem Papier bespannt ist. Bei einer

---

1) Vgl. die Literaturzusammenstellung in Meyer-Schweidler, Radioaktivität, S. 482. 1916.

2) G. Hoffmann, Ann. d. Phys. 42. S. 1196. 1913; 52. S. 665. 1917; Phys. Ztschr. 13. S. 480 u. 1029. 1912.

Instrumentempfindlichkeit von etwa 5000 Ionen pro Mi
markiert sich jeder Ionisationsvorgang, der durch ein α-T
innerhalb des Gefäßes bewirkt wird (ca. 150000 Ion
einer stoßweisen gut meßbaren Bewegung des Lichtzeig
Elektrometerkopf befindet sich eine Influenzierungsvorri
vermittelst der im elektrostatischen Maß bekannte L
mengen influenziert werden können. Auf diese Weise
möglich, jederzeit die Empfindlichkeit des Instrument
zustellen und die beobachteten Stoßgrößen in Ionenzahl
zurechnen. Wegen der Einzelheiten dieser Anordnung
übrigen Schaltvorrichtungen muß auf die früheren A
verwiesen werden.

3. Für die Berechnung der Stoßgrößenverteilung ergeb
einfache Verhältnisse bei kugelförmiger Begrenzung des Ionis
raumes, weil dann jeder Punkt als Ausgangsort der Str
hinsichtlich der Begrenzung der
lung durch die übrige Wandung
berechtigt ist. Daher diente au
aus einem großen Stück Voll
ausgedrehte Hohlkugel von 7
innerem Durchmesser schon fü
Teil der 1915 publizierten Mes
(vgl. Fig. 1; *A* Ionisationsgef
Spannung; *B* Träger des Bernst
lators, vom Gefäß durch Gumm
isoliert, an Erde; *C* Elektrometero
evakuiert, mit zentralem Quecksilberkontakt). Durch stati
Verarbeitung von 810 gemessenen Stößen wurde eine Stoßg
verteilungskurve gewonnen; der damals nur graphisc
geteilten Kurve liegen die in nachstehender Tabelle ve
lichten Zahlen zugrunde.

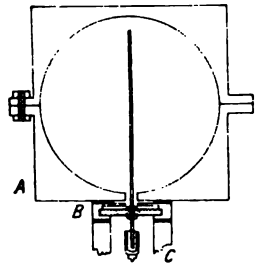


Fig. 1.

In dieser Tabelle steht unter I die mittlere Stoßg
mm, unter II die ihr entsprechende Ionenzahl, dividiert
10^4 — es war 1 mm = 5200 Ionen —, unter III die Z
zu dieser Gruppe gehörigen gemessenen Stöße. Diese Z
reihe weist noch sehr erhebliche Schwankungen auf.
daher unter IV noch eine Zahlenreihe aufgeführt, die
dadurch gewonnen ist, daß 4mal nacheinander Mitt
gebildet sind; unter IV ist also der Mittelwert m_k der Gr

Tabelle.

I Stoßgröße in mm	II Stoßgröße in Ionenzahlen × 10^{-4}	III Zahl der Stöße	IV Mittelwert
1	0,52	5	
2	1,04	24	
3	1,56	23	23,68
4	2,08	27	26,62
5	2,60	32	27,12
6	3,12	20	26,50
7	3,64	31	26,68
8	4,16	25	28,12
9	4,68	29	30,43
10	5,20	40	31,43
11	5,72	22	30,12
12	6,24	34	29,24
13	6,76	25	30,56
14	7,28	36	32,75
15	7,80	37	33,43
16	8,32	26	34,43
17	8,84	40	38,00
18	9,36	51	38,62
19	9,88	23	34,25
20	10,40	34	31,19
21	10,92	30	30,49
22	11,44	32	28,31
23	11,96	21	22,31
24	12,48	15	17,12
25	13,00	13	14,87
26	13,52	16	14,62
27	14,04	15	13,62
28	14,56	11	11,63
29	15,08	9	10,20
30	15,60	12	8,68
31	16,12	4	6,37
32	16,64	4	4,75
33	17,16	5	4,37
34	17,68	4	4,31
35	18,20	4	4,25
36	18,72	5	4,37
37	19,24	3	4,68
38	19,76	8	4,56
39	20,28	1	3,75
40	20,80	4	3,12
41	21,32	3	2,68
42	21,84	2	
43	22,36	0	

zugeordnet, der sich aus den Stoßzahlen der benachb Gruppen berechnet durch

$$m_k = \frac{1}{16}(x_{k-2} + 4x_{k-1} + 6x_k + 4x_{k+1} + x_{k+2}).$$

Die den Zahlenreihen III und IV entsprechenden L sind in der Fig. 2 gezeichnet, außerdem ist hier noch punktierte Linie als stetige Verteilungskurve eingefügt.

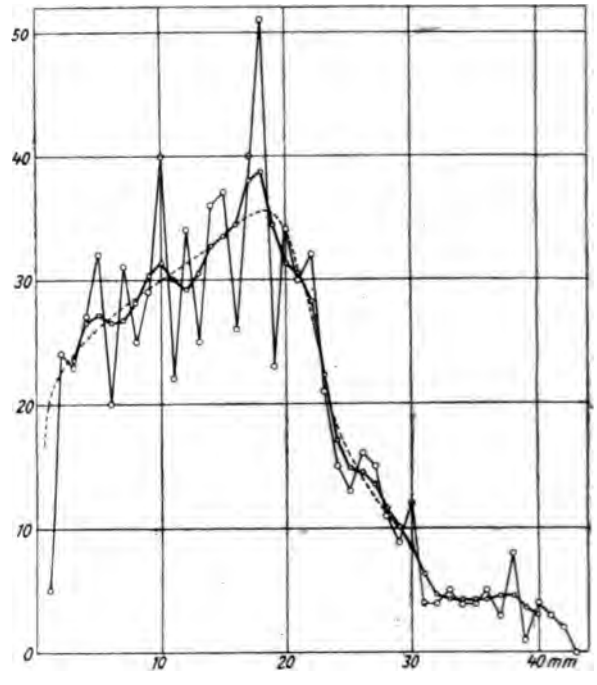


Fig. 2.

Für die Ionisationen ergaben sich folgende Werte: D schnittliche Zahl der Stöße = 52 in der Stunde, durchsch liche Größe = 15,7 mm = 81700 Ionen, Zahl der Stöße qcm Oberfläche und Stunde = 0,28. Gesamte α-Ionisatio Durchschnitt = 820 mm in der Stunde = 1190 Ionen in Sekunde. Gleichförmige Bewegung (zwischen den St = 910 mm/Stunde = 1320 Ionen/Sek. Reproduktionen Registrierkurven sind den Arbeiten 1915 und 1917 beige

4. Der Vergleich zwischen Theorie und Experiment ist in Fig. 3 durchgeführt. Die mit I bezeichnete theoretische Kurve entspricht der Annahme, daß von Radium und seinen Folgeprodukten Gleichgewichtsmengen in das Wandmaterial eingebettet sind. Dann sind die Zahlen der Teilchen, die von jedem Produkt pro ccm Wandmaterial in der Zeiteinheit austreten, einander gleich. Für jedes Produkt ist eine seiner Reichweite entsprechende Verteilungskurve nach dem in § 12

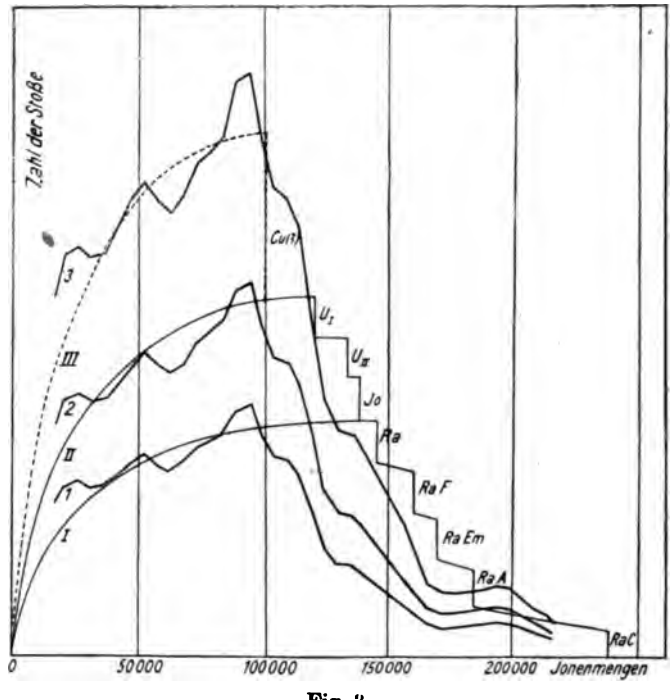


Fig. 3.

gegebenen Verfahren gezeichnet für den Fall, daß die Ionisation längs der Bahn nach der Geigerschen Formel erfolgt. An die durch Überlagerung der einzelnen Verteilungskurven entstandene Kurve I wird die durch Mittelwertsbildung aus den Messungen entstandene Kurve der Fig. 2 mit einem solchen Ordinatenmaßstab — dieser ist ja willkürlich — angelegt, daß die Kurven im oberen Teil sich möglichst nahe sind. Die Abweichung dieser Kurve 1 von I im rechten Teil würde

ergeben, daß beim Experiment die Zahl die erzeugten Ionen pro Stoß in sehr vielen Fällen weit unter dem maximalen Ionisationswert geblieben ist, daß also eine sehr ungenügende Sättigung vorhanden gewesen ist. Es müßten die abgeschiedenen Ionen im Durchschnitt etwa nur 70% der erzeugten gewesen sein. Dies ist nach den Angaben von Moulin bei einem Feld von etwa 20 Volt/cm, wie es in der Kugel während der Registrierungen geherrscht hat, ausgeschlossen. Es müssen also noch außerdem Stoffe vorhanden gewesen sein, die α-Strahlen mit kürzerer Reichweite aussenden. Wenn die Vorgänger des Radiums genommen werden bis herauf zum Uran I, ebenfalls in Gleichgewichtsmengen, so ergibt sich die Kurve II am Schluß mit I identisch. Die mit ihr kombinierte Kurve 2 gibt leidliche Kongruenz. Ihr würde eine Sättigung der Ionisation von etwa 80% entsprechen, ein Wert, der nach den Moulinschen Angaben möglich ist. Wenn eine Sättigung von etwa 90% angenommen wird, so resultiert die Kurve 3. Diese geht bei den kürzeren Stößen weit über die Uran-Radiumfamilie hinaus und würde auf eine neue Radioaktivität hinweisen.

5. Die Deutungsmöglichkeit dieser Abweichung der Kurve 3 von II durch die Annahme einer Aktivität des Messings selber oder des den Hauptbestandteil desselben bildenden Kupfers führt zur Aufstellung folgender Rechnung. Es bleibt ein Reststück der Kurve von einer maximalen Stoßlänge von etwa 100000 Ionen. Nach der Kurvenhöhe würden auf etwa 8 Stöße der Ra-Familie 5 Stöße der unbekannten Herkunft entfallen. Die Aktivität pro Flächeneinheit ist also nach den in § 3 mitgeteilten Zahlen gleich $\frac{5}{13} \cdot 0{,}28 = 0{,}108$ Stöße pro qcm und Stunde. Aus der maximalen Ionenzahl $Z = 100000$ ergibt sich nach der Geigerschen Formel $Z = 6{,}76 \cdot 10^4 \cdot R^n$ eine Reichweite von 1,80 cm in Luft von 0° und 760 mm.

Da das Bremsvermögen für Cu = 2,46 ist (nach W.H. Bragg Durchgang der α, β, γ und Röntgenstrahlen durch Materie S. 54), so würde die Reichweite einer Strahlung in einer Cu Atmosphäre von gleicher Atomzahl wie Luft bei Normaldruck gleich $\frac{1{,}80}{2{,}46} = 0{,}73$ cm sein.

Die Gesamtzahl der sekundlich aus dem Quadratzentimeter

Metall austretenden Teilchen ist gleich $\frac{5}{13} \cdot \frac{0{,}28}{3600} = 3{,}10^{-5}$. Zwischen den austretenden und den in der Zeiteinheit von der Volumeneinheit ausgesandten Teilchen (N) besteht nach Schweidler[1]) die Beziehung $\frac{NR}{4} = 3{,}10^{-5}$. Die Zahl der Atome in der Volumeneinheit $N_0 = 2{,}71 \cdot 10^{19} \times 2$ angenommen, ergibt sich für das Verhältnis der in der Sekunde zerfallenden Atome zu den vorhandenen

$$\lambda_{Cu} = \frac{N}{N_0} = 3{,}04 \cdot 10^{-24}.$$

Dieser Wert mit dem Werte für Uran ($4{,}4 \cdot 10^{-18}$) verglichen, ergibt

$$\frac{\lambda_{Ur}}{\lambda_{Cu}} = 1{,}45 \cdot 10^{6}.$$

Die Aktivität des Kupfers ist also mindestens 1,5 Millionen Mal geringer wie die des Urans.

Eine Extrapolation nach der Geiger-Nuttallschen Beziehung zwischen Reichweite und Lebensdauer etwa mit den Konstanten der Uran-Radiumfamilie würde für die eben errechnete Zerfallsgeschwindigkeit eine Reichweite von 1,86 cm ergeben, eine Zahl, die der zu Beginn des Paragraphen angenommenen nahe kommt.

6. Als Resultat der näheren Diskussion der Stoßverteilungskurve der α-Aktivität in einem kugelförmigen Metallgefäß ergibt sich, daß es nicht angängig ist, die beobachteten α-Aktivitäten allein auf das Radium und seine Abkömmlinge zu schieben. *Es ist mit Sicherheit das Vorhandensein langlebiger Radioelemente mit kurzer Reichweite nachgewiesen.* Ob es ausreicht, allein auf die Mitglieder der Uranreihe zurückzugreifen, oder ob eine Aktivität des Metalles selbst vorliegt, ist experimentell noch nicht entschieden. Die Diskussion zeigt aber, daß weiter ausgedehnte Versuchsreihen zur Lösung dieser Frage führen müssen.[2]) Für eine α-Aktivität des Kupfers wurde eine obere Grenze ermittelt.

1) E. v. Schweidler, Phys. Ztschr. 14. S. 505 u. 728. 1913.

2) Die Ausdehnung der Versuche auf Hohlkugeln aus Metallen mit hohen Atomgewichten scheint besonders aussichtsreich. Ergab doch Platinfolie einen dreimal so hohen Wert der α-Aktivität pro qcm Oberfläche wie Messing (vgl. die früher zitierte Arbeit in der Elster-Geitel-Festschrift).

7. Mit ähnlichem Resultat wie für die Uranradiumfamil läßt sich auch für die Thoriumfamilie die Stoßverteilungskur aufstellen. Die Abweichungen zwischen experimenteller u theoretischer Kurve sind hier noch größer, so daß ein Hinz ziehen von Thoraktivität zur Erklärung der Unterschiede nich beizutragen vermag.

Die Deutung der Verteilungskurve ist im vorangegangene ausschließlich auf die Annahme gleichmäßig in der Wandun verteilter radioaktiver Substanzen gestützt worden. Wie di folgenden Betrachtungen zeigen, ist es allein auf dieser Grund lage möglich, in gewisser Übereinstimmung mit dem Experimen zu bleiben, weil nur so das Auftreten von zahlreichen ver kürzten Stößen möglich ist. Die Ionisation etwa auf eine Emanationsgehalt der Luft zurückzuführen, ist deswegen un angebracht, weil in § 14 gezeigt wird, daß in luftdicht ge schlossenen Gefäßen der Emanationsgehalt auf einen seh geringen Betrag herabgeht.

Berechnung der Ionenmengenverteilung der α-Stöße innerhalb einer Kugel.

8. Nach den Kenntnissen über die Eigenschaften radio aktiver Substanzen sind verschiedene Arten der Verteilung de Ionenmengen bei α-Stößen innerhalb einer Kugel voraus zusehen. Von bestimmendem Einfluß ist:

1. die Anordnung der Substanz, die die Strahlung aus sendet.
   - a als Emanation gleichmäßig innerhalb des Kugel volumens,
   - b als aktiver Niederschlag in dünner Oberflächen schicht auf der Kugelwandung,
   - c als gleichmäßige Beimengung in der die Kugel wandung bildenden Materie.
2. die Reichweite der α-Strahlung der Substanz und ihr Verhältnis zum Durchmesser der Kugel.

Um Ionenmengenverteilungen zu berechnen sind alle diese Fälle zu sondern. Beobachtete Verteilungen können einem bestimmten Fall entsprechen, oder aber sind durch Super position verschiedener Strahlungen zu deuten. Zur Berechnung sind ferner Annahmen nötig über die Verteilung der Ionen

längs der Bahn des einzelnen α-Teilchens. Für eine erste Orientierung ist die Annahme gleichmäßiger Verteilung als einfachste Grundlage voranzustellen. Eine zweite Annäherung geht von der Geigerschen Formel für die Ionisation längs der Bahn aus. Drittens kann die empirische Ionisationskurve zugrunde gelegt werden.

9. *Ionenmengenverteilung bei Volumenionisierung.* Es ist zunächst die Verteilung der Stoßlängen zu berechnen. Die Zahl der Stöße, die vom ccm in der Sekunde ausgehen, sei gleich N. Da alle Stoßrichtungen gleich wahrscheinlich sind, so verlaufen innerhalb des Richtungskegels $d\omega$ die Zahl $\frac{d\omega}{4\pi} N$. Von den Stößen dieser ausgezeichneten Richtung sind auszusondern die Stöße, deren Länge zwischen L und $L + dL$ liegt. Wenn diese innerhalb der Kugel vom Radius r einerseits durch die Kugelwand begrenzt sein sollen, so müssen sie andererseits (vgl. Fig. 4) von einem Volumen ausgehen, das von zwei Kugelkalotten im Abstand dL begrenzt ist, und dessen Größe gleich ist

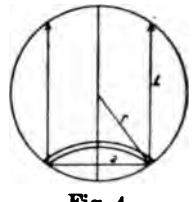


Fig. 4.

$$\pi \alpha^2 dL. \tag{1}$$

Die Zahl der Stöße in der Sekunde innerhalb des Richtungskegels $d\omega$ und von der Länge L beträgt daher:

$$\begin{cases} N \frac{d\omega}{4\pi} \pi \alpha^2 dL \\ = N \frac{d\omega}{4\pi} \pi \left(r^2 - \frac{L^2}{4} \right) dL, \end{cases} \tag{2}$$

und, da alle Richtungen wegen der kugelförmigen Begrenzung gleichberechtigt sind, für beliebige Richtungen:

$$dZ = f(L)\, dL = \pi N \left(r^2 - \frac{L^2}{4} \right) dL. \tag{3}$$

Auf diese Stoßgrößenverteilung gründet sich die Berechnung der Ionenmengenverteilung.

a) *Bei Annahme konstanter Ionisation längs der Bahn.* Die Gesamtzahl der Ionen eines Stoßes werde mit J bezeichnet, die Zahl der Ionen pro cm mit j. Dann ist

$$(4) \qquad \begin{cases} J = j\,L \\ dJ = j\,dL\,. \end{cases}$$

Die Zahl der Stöße, deren Ionenmenge zwischen J und $J + dJ$ liegt, ist dann gegeben durch:

$$(5) \qquad dZ = f(J)\,dJ = \pi N\left(r^2 - \frac{J^2}{4j^2}\right)\frac{dJ}{j}\,.$$

Dieser Ausdruck gibt die Verteilung, wenn die Reichweite größer ist als der Kugeldurchmesser, er wird Null für $J = 2rj$, dem Maximalwert der Ionisation, die bei Stößen in Richtung des Durchmessers von einer Wand zur andern auftritt. Ist jedoch die Reichweite R kleiner als $2r$, so gilt die vorstehende Betrachtung nur für Werte von L, die kleiner als R sind, die übrigen Stöße verlaufen ungehindert und erreichen alle die Ionenmenge $J_{max} = Rj$. Es berechnet sich dann die Zahl der gehinderten Stöße

$$(6) \qquad \frac{\pi N}{j}\int_0^{J_{max}}\left(r^2 - \frac{J^2}{4j^2}\right)dJ = \pi N R\left(r^2 - \frac{R^2}{12}\right)$$

und für die ganze Stoßverteilung ergibt sich

$$(7) \qquad \begin{cases} \text{Zahl der gehinderten Stöße } \frac{4}{3}\pi N\left(\frac{3}{4}Rr^2 - \frac{R^3}{16}\right), \\ \quad \text{„ \quad „ vollkommenen „ } \frac{4}{3}\pi N\left(r^3 - \frac{3}{4}Rr^2 + \frac{R^3}{16}\right), \\ \quad \text{Gesamtzahl aller Stöße } \frac{4}{3}\pi N r^3\,. \end{cases}$$

b) *Bei Voraussetzung des Geigerschen Gesetzes.* Bezeichnet x die Strecke, die das Teilchen noch bis zum Endpunkt der Bahn zurückzulegen hat, so ist nach Geiger die Ionisation, die auf dieser Reststrecke entsteht, gleich

$$(8) \qquad J = 6{,}74\cdot 10^4\cdot x^{3/2} = \left(\frac{x}{\delta}\right)^{3/2}; \quad \delta = \frac{1}{6{,}74^{2/3}}\cdot 10^{-6},$$

andererseits folgt aus dieser Formel, daß die Ionisation, die auf einer Strecke L entsteht — L gemessen von der Ursprungsstelle des α-Teilchens —, gegeben ist durch

$$(9) \qquad J = J_{max} - \left(\frac{R - L}{\delta}\right)^{3/2},$$

wo $J_{max} = \left(\frac{R}{\delta}\right)^{3/2}$ die Ionenzahl für einen ungehinderten Stoß bedeutet. Wird diese Beziehung zwischen J und L in die Gleichung (3) eingetragen, so ergibt sich für die Ionenverteilung

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} dZ = f(J)\,dJ = \frac{3}{2}\,\pi N \delta (J_{max} - J)^{1/2} \\ \qquad\qquad \left[r^2 - \frac{\delta^2}{4}(J_{max}^{2/3} - (J_{max} - J)^{2/3})^2\right] dJ. \end{array} \right.$$

10. *Ionenmengenverteilung bei Oberflächenschicht.* Es bezeichne N die Zahl der Teilchen, die vom qcm Oberfläche fortgeschleudert werden. Eine einfache Betrachtung der in den verschiedenen Richtungen zur Verfügung stehenden Längen ergibt als Resultat:

$$(11) \qquad dZ = f(L)\,dL = \pi N r\,dL,$$

d. h. gleichmäßige Verteilung der Stoßlängen.

a) Gleichförmige Ionisation. Mit Benutzung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen:

$$(12) \qquad dZ = f(J) \cdot dJ = \pi N r \frac{dJ}{j}.$$

Diese Gleichung, die besagt, daß die Verteilungskurve der Ionenmengen eine Parallele zur Abszissenachse ist, gilt jedoch nur, wenn die Reichweite größer ist als der Kugeldurchmesser, die Ionisationen also durch die zur Verfügung stehenden Stoßlängen begrenzt sind. Ist die Reichweite kleiner, so verläuft ein Bruchteil der Stöße ungehindert und diesen Stößen entsprechen Vollionisationen $J_0 = Rj$. Es ist dann:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Zahl der Vollstöße} & = \pi N r (2r - R) \\ \text{„ „ begrenzten Stöße} & = \pi N r R \\ \text{Gesamtzahl aller Stöße} & = 2\pi N r^2. \end{array} \right.$$

b) Bei Ionisation nach der Geigerschen Formel. Der aus (8) sich ergebende Differentialausdruck in (11) eingesetzt ergibt:

$$(14) \qquad dZ = f(J) \cdot dJ = \tfrac{3}{2}\,\pi N r \delta \cdot (J_0 - J)^{1/2} \cdot dJ.$$

11. *Ionenmengenverteilung bei gleichmäßiger Beimengung des radioaktiven Stoffes zum Wandmaterial.* Die Zahl der α-Teilchen, die in der Zeiteinheit in der Richtung ϑ, φ aus dem Flächenstück dq austreten, ist gleich dem Inhalt des schiefen Zylinders

von der Länge ϱ — wo ϱ die Reichweite der Strahlung innerhalb der Wandmaterie bedeutet — multipliziert mit der Zahl der im ccm in der Zeiteinheit emittierenden Atome N und multipliziert mit dem Bruchteil der Einheitskugel, der von dem Richtungskegel $d\vartheta . dq$ ausgeschnitten wird. Diese Zahl ist gleich

$$15 \qquad dq \cdot \varrho \cdot \cos\vartheta \cdot N \cdot \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{4\pi}.$$

Alle Teilchen zusammengefaßt, die unter gleichem Winkel ϑ gegen die Normale zur Oberfläche fliegen, ergibt:

$$16 \qquad \tfrac{1}{2}\, dq \cdot \varrho \cdot N \cdot \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta .$$

Nach ϑ summiert zwischen den Grenzen 0 und 90° ergibt sich die Gesamtzahl aller austretenden α-Teilchen zu

$$17 \qquad \tfrac{1}{4}\varrho N dq .$$

Dieser Ansatz kann zur Berechnung der Strahlungsverhältnisse im Innern der betrachteten Kugel herangezogen werden, weil die Bedingung erfüllt ist, daß die Größe ϱ klein ist gegen den Kugelradius und kleiner wie die Wandstärke der Kugelwandung. Die Richtungsverteilung der Strahlung, die von jedem Oberflächenelement ausgeht, ist die oben angegebene und außerdem sind in jeder Richtung alle Reichweiten von 0 bis R je nach der Tiefe, aus der die Strahlung kommt, gleichmäßig verteilt.

b) Berechnung der Ionenmengenverteilung unter Annahme gleichmäßiger Ionisierung längs der Bahn. Zunächst seien diejenigen Teilchen betrachtet, deren Anfangsreichweite die zwischen 0 und R gelegene Größe s hat und die in solchen Richtungen fliegen, daß sie innerhalb der Kugel die ganze Ionisationsbahn frei durchlaufen können. Sie bilden von der Gesamtzahl den Bruchteil

$$18 \qquad \frac{s}{R}.$$

Der von ihnen unter einer Richtung ϑ gegen die Normale fliegende Teil ist

$$19 \qquad \tfrac{1}{2}\, dq \cdot \varrho \cdot N \cdot \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \frac{s}{R} .$$

Die Gesamtheit aller frei endigenden Bahnen liegt innerhalb

eines Kegels, dessen Öffnungswinkel ϑ_0 an die Bedingung gebunden ist

$$\cos \vartheta_0 = \frac{s}{2r} \cdot \tag{20}$$

Die Gesamtzahl ergibt sich also zu

$$\tfrac{1}{4} dq \cdot \varrho \cdot N \cdot (1 - \cos^2 \vartheta) \frac{ds}{R} \cdot \tag{21}$$

Diese Teilchen haben alle eine zwischen s und $s + ds$ liegende Reichweite. Außerdem durchfliegen noch alle diejenigen Teilchen die Strecke s, die unter dem Winkel ϑ_0 ausgehen und eine Reichweite haben, die zwischen s und R liegt. Die Zahl dieser Teilchen ist:

$$\tfrac{1}{2} dq \cdot \varrho \cdot N \cdot \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0 \, d\vartheta \frac{R - s}{R}, \tag{22}$$

oder, unter Benutzung der Beziehung (20),

$$\tfrac{1}{2} dq \cdot \varrho \cdot N \cdot \frac{s \, ds}{4r^2} \frac{R - s}{R} \cdot \tag{23}$$

Für die Gesamtzahl aller aus dem Flächenelement dq austretenden Teilchen, die die Strecke s frei durchfliegen, ergibt sich durch Addition beider Anteile

$$\frac{dq \cdot \varrho \cdot N}{16 r^2} \frac{ds}{R} (4r^2 + 2Rs - 3s^2). \tag{24}$$

Werden statt der Stoßlängen die Ionisationen als Variable eingeführt und an Stelle des Flächenelementes die Oberfläche der ganzen Kugel, so ergibt sich der Gesamteffekt:

$$dZ = \frac{r^2 \pi \varrho N}{J_0^2 J_{\max}} (J_0^2 + 2 J_{\max} J - 3 J^2) \, dJ. \tag{25}$$

Hierbei ist gesetzt:

$2rj = J_0$ die gesamte Ionenmenge, die bei einem Stoß entstehen würde, bei dem ein ganzer Durchmesser durchlaufen wird.

$Rj = J_{\max}$ die Ionenmenge, die bei Durchlaufung der vollen Reichweite entsteht.

b) Berechnung der Ionenmengenverteilung unter Annahme der Ionisierung nach dem Geigerschen Gesetz. Es ist in diesem Falle nicht möglich, die Formel für die Berechnung explizit zu entwickeln, sondern die Kugel muß in Gebiete eingeteilt werden, innerhalb der die zur Verfügung stehende freie

Stoßlänge als konstant angenommen wird. Die gesamte Verteilung muß dann durch Überlagerung der Verteilungen in einzelnen Zonen ermittelt werden. Der Gang der Rechnung ist folgender:

Im Gebiet zur Verfügung stehende freie Strecke gleich A.

Alle Teilchen, deren Reichweite zwischen s und $s-ds$ liegt, und die den Bruchteil ds/R bilden, fallen in das Ionisierungsintervall dJ, das mit ds in der Beziehung steht:

1. falls s kleiner als A:

$$26 \qquad \begin{cases} J = 6{,}74 \cdot 10^4 \cdot s \cdot \\ dJ = 6{,}74 \cdot 10^4 \cdot \frac{s}{R} \cdot ds. \end{cases}$$

2. falls s größer als A:

$$27 \qquad \begin{cases} J = 6{,}74 \cdot 10^4 \left[s^2 - s - A^2 \right] \\ dJ = 6{,}74 \cdot 10^4 \cdot \frac{s}{R} \left[s^2 - s - A^2 \right] ds. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ergibt sich für jeden s-Wert die erzielte Ionisation und die Zahl der Teilchen im Intervall. Für die praktische Durchführung der umständlichen numerischen Rechnung wurden für A Stufen angenommen von je 1 cm Höhenunterschied. Für jede Stufe ergibt sich ein bestimmter Kugelabschnitt, für den die wahrscheinliche Gesamtzahl der Stöße nach 16 zu berechnen ist. Die Anteile von 1. und 2. sind für gleiche Ionisationen zu summieren. Die erhaltenen Werte können zur Konstruktion einer stetigen Verteilungskurve benutzt werden. Auf Einzelheiten dieser Rechnung soll nicht eingegangen werden.

12. Die verschiedenen Verteilungen sind in Fig. 5 übersichtlich zusammengestellt. Hierbei ist angenommen, daß eine Kugel von 4 cm Radius und eine Reichweite der Substanz von 5 cm vorliegt. Die punktierten Kurven entsprechen der Annahme gleichmäßiger Ionisation, die ausgezogenen Kurven der Geigerschen Ionisation; die Zahlen entsprechen den drei Fällen: Volumstrahlung, Oberflächenstrahlung, Tiefenstrahlung.

Liegt jedoch eine Substanz vor, deren Reichweite kürzer ist als der Durchmesser der Kugel, so treten bei Volum-Fall 1 und Oberflächenstrahlung (Fall 2) neben den durch die Gefäßdimensionen verkürzten Stößen auch vollkommene

Stöße auf in einer Anzahl, die sich nach den Formeln (7) und (13) berechnet. Zur Erläuterung der Verhältnisse diene die Fig. 6. Hier ist angenommen (Kurve I), daß in einer Kugel

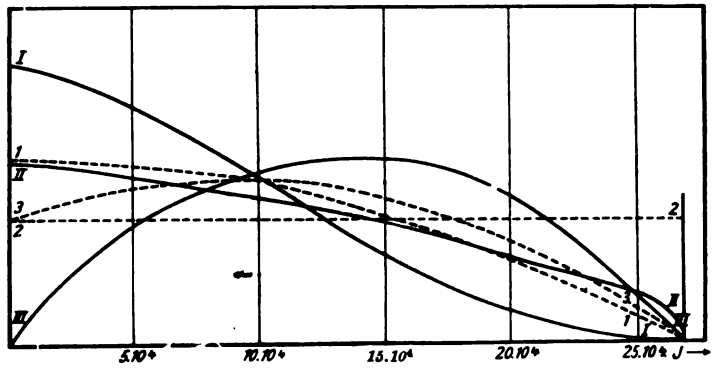


Fig. 5.

von 4 cm Radius Ra-Emanation enthalten ist, Reichweite 4,0 cm. Die nach Formel (10) gezeichnete Kurve nähert sich für $J = 169000$ der Null. Um aber die Zahl der Vollstöße

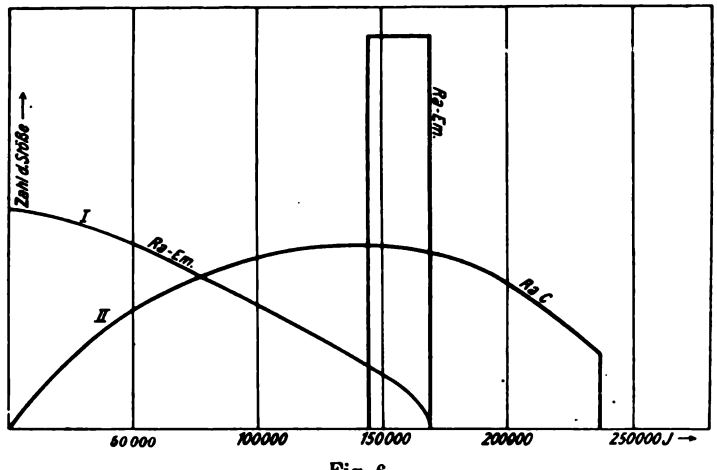


Fig. 6.

(31,3 Proz.) auch in der Figur ersichtlich zu machen, ist am Schluß ein Rechteck endlicher Breite eingezeichnet, dessen Flächeninhalt der Zahl der Vollstöße entspricht. Die Kurve II

gibt die Verteilung für gleichmäßig der Wand der Ku gleicher Größe beigemengtes RaC (Reichweite 6,9 cm). I Verteilungskurve bricht ohne Häufungsstelle beim Maxim wert ab.

Die theoretischen Kurven der Fig. 3 sind entstanden dur Überlagerung von Kurven nach der Art der Kurve II d Fig. 6; die experimentelle Kurve zeigt keine Besonderhe die zur Annahme einer Häufungsstelle auffordert.

Über Versuche zur Erzielung von Räumen, die möglichst fr von α-Ionisationen sind.

13. Um genauere experimentelle Grundlagen zur Deutu der Verteilungskurve zu gewinnen, war es nötig, eine Tre nung der Stöße nach Herkunft — ob aus der Luftfüllu oder aus der Wandung des Gefäßes stammend — zu b wirken. Zur Verkleinerung des Wandeffektes gegen die Wi kung des Gases gab es die beiden Mittel: Reduktion d Wandoberfläche durch Ersetzung der massiven Wand durc ein weitmaschiges Netz und Erhöhung des Gasdruckes. F wurde daher ein aus feinen Platindrähten zusammengeschweißte Netzkorb in einem Gefäß aufgehängt, in dem durch eine klein Kompressionspumpe Druck bis zu 15 Atm. hergestellt werde konnte. Der Durchmesser des Korbes war 1,5 cm, die Höh 1,8 cm, das Volumen 3,17 ccm. Bei einem Druck von 4—5 Atm entsprachen die größten Abmessungen der Reichweite de schnellsten α-Teilchen. Die Versuche ergaben, daß die durc die durchdringende Strahlung bewirkte gleichmäßige Ionisation - die Elektrometerbewegung zwischen den Stößen — proportion dem Druck im Gefäß war, daß aber die durchschnittlich Größe der α-Stöße bei höheren Drucken stark abhängig vo der angelegten Spannung war, weil es immer schwieriger wurd Sättigung zu erreichen, so daß oberhalb 12 Atm. die α-Stöß sich selbst bei 500 Volt Spannung am Netz nicht mehr deu lich von der starken gleichmäßigen Ionisation abhoben. A zweckmäßig erwies sich ein Druck von etwa 5 Atm. Hierb war die Zahl der beobachteten α-Stöße bei 240 Volt un 480 Volt die gleiche, also wurden alle Stöße konstatiert; d durchschnittliche Größe der Stöße war bei 80 Volt 39000 Ione bei 240 Volt 57000 Ionen, bei 480 Volt 74000 Ionen.

Bei 5 Atm. und 240 Volt ergaben sich folgende Effekte bei verschiedener Füllung des Gefäßes:

Luft durch Wattefilter aus dem Zimmer entnommen .	14,5	Stöße/Stde.
CO_2 aus Bombe (mit Wattefilter)	4,5	„
CO_2 aus anderer Bombe (mit Filter)	2,3	„
Luft aus großer Bombe (unter 200 Atm. Druck stehend)	2,0	„
dgl. am nächsten Tage	3,2	„
dgl. nach 2 Tagen	5,2	„
„ „ 4 „	9,2	„
„ „ 6 „	8,6	„

Die Registrierungen wurden immer über 4 Stunden erstreckt und auch wiederholt. Die Messungen zeigen, daß Gase unter Abschluß sehr geringe Aktivität aufweisen können, speziell wenn sie aus einer Bombe, wo sie unter hohem Druck standen, entnommen werden. Blieb die Luft tagelang im Beobachtungsgefäß, so stieg die Radioaktivität an. Die Bildungsgeschwindigkeit entsprach ungefähr der Radiumemanation. Offenbar stammt diese Aktivität von einem Radiumgehalt der Wandungen des äußeren Druckgefäßes, das aus roh bearbeiteten Eisenteilen zusammengesetzt war. Daß die Aktivität der Bombenluft so gering ist, erklärt sich daher, daß ein eventuell auch in der Bombenluft vorhandener Emanationsgehalt, der mit der Bombenwandung im Gleichgewicht ist, bei Ausdehnung auf kleinere Drucke proportional der Druckabnahme verdünnt wird.

14. Weitere Versuche wurden bei Atmosphärendruck ausgeführt mit einem Drahtgeflecht von sehr großer Maschenweite, das ungefähr einer Kugel von 8 cm Durchmesser entsprach, aufgehängt in einem großen Zinkgefäß von solchen Dimensionen, daß die α-Strahlung der Wandung nicht in den Kugelraum eintreten konnte. Der Deckel des Zinkgefäßes war durch eine Öldichtung abgeschlossen. Der untere Teil der zentralen Elektrode war durch eine Drahtspirale, die auf Nullpotential gehalten war, vor übertretenden Ladungen geschützt. Es wurden zwei verschiedene Drahtkugeln verwandt. Beide waren aus Kupferdraht von 0,2 mm Durchmesser gebogen. Bei dem ersten Netz war eine Maschenweite von etwa 1,5 cm hergestellt. Die halbe Drahtoberfläche, von der wirksame Strahlen ausgehen konnten, betrug 6,5 qcm. Das Verhältnis halbe Drahtoberfläche/Kugeloberfläche betrug 1/31.

Bei dem zweiten Netz waren nur Drähte gezogen, die Kreise bildeten in drei zu einander senkrechten Richt die halbe Drahtoberfläche war hier nur 2,25 qcm, da hältnis zur Kugeloberfläche nur 1/112 (Fig. 7).

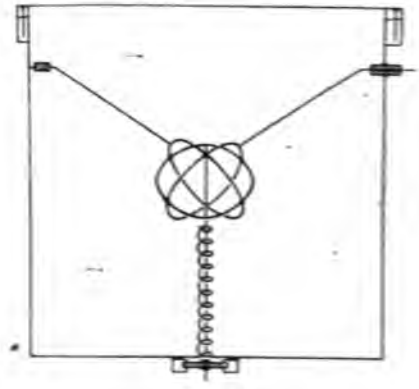


Fig. 7.

Die Resultate waren ähnlich denen im Druckgefäß. zeigte sich, daß im Zinkgefäß eine Ra-Emanationsentwic wie im Druckgefäß höchstens spurenweise vorhanden war. Netz II glückte es, ganz außerordentlich geringe Ionisat zu erzielen; es ist zu bedenken, daß es sich hier un Volumen von 260 ccm handelte. Im einzelnen wurden folg Zahlen gewonnen:

	Stöße pro Stunde	
	Netz I	Netz II
Zimmerluft ohne Absorption	58	37
„ mit „	—	6,6
Bombenluft ohne „	29	4,8
„ mit „	19	4,4
CO_2 (aus Bombe) ohne Absorption	—	3,1
Außenluft ohne Absorption	—	9,6

Die betreffenden Füllungen strömten immer me Stunden vor der Registrierung durch das Gefäß, so da radioaktiven Niederschläge sich in Gleichgewichtsmengen b konnten. Für die Absorption wurden zwei 1 m lange un 40 mm starke Glasrohre vorgesehen, die mit ausgegl Holzkohle gefüllt waren.

Das Verhältnis der Stoßzahlen für Bombenluft mit Absorption bei Netz I und Netz II ist ungefähr gleich dem Verhältnis der Drahtoberflächen. Man ist versucht, daraus zu schließen, daß die Restaktivität im wesentlichen auf radioaktiven Stößen beruht, die von den Drähten ausgehen.

Beobachtungskurven, die mit Netz II aufgenommen sind, sind in der Fig. I und II der Tafel III, die zu der Annalenarbeit (52. S. 665. 1917) gehört, wiedergegeben. Wenn die Stoßzahlen auf 3—4 Stöße in der Stunde herabgehen, kann die Neigung der Geraden, die durch gleichförmige Ionisation infolge durchdringender Strahlung bedingt ist, mit großer Genauigkeit gemessen werden. Unmittelbar aufeinanderfolgende Teile der Registrierkurven ergaben Übereinstimmung der Größe der durchdringenden Strahlung bis auf $1—2^0/_{00}$ genau. Die Zahl der Ionen, die so im ganzen Volumen entstanden, wurde durchschnittlich zu etwa 1003 Ionen in der Sekunde ermittelt, d. h. auf den ccm kamen etwa 3,88 Ionenbildungen in der Sekunde.

Die Netzanordnung ist sehr empfindlich auf Änderungen der durchdringenden Strahlung. Die Strahlung stärkerer Radiumpräparate konnte durch dicke Mauern aus entfernteren Teilen des Gebäudes her beobachtet werden. Die Strahlung eines Gefäßes, das ein Kaliumsalz enthält, kann in wenigen Minuten gemessen werden.

15. Zum Schluß sei noch referiert über einige Meßreihen, die an einer Steinsalzhohlkugel angestellt wurden. Aus großen Blöcken Steinsalz aus dem Kaliwerk Hedwigsburg wurden zwei Klötze ausgeschnitten, mit ebenen Flächen versehen und die Hälften einer 8 cm-Kugel eingeschnitten. Nach der Bearbeitung wurden die Flächen mit grobem Schmirgel abgerieben, der Staub mit kräftigem Strahl aus einer CO_2-Bombe abgeblasen und dann sofort in das Zinkgefäß hineingebracht, das mit CO_2 gefüllt wurde. Man konnte vermuten, daß auf diese Weise sich ein Raum gewinnen ließ, der eine sehr geringe α-Aktivität zeigte. Denn K. Bergwitz[1]) hat festgestellt durch Messungen im Bergwerk Hedwigsburg, daß in Räumen, die allseitig von dicken Schichten Steinsalz umgeben sind, ein sehr geringer

1) K. Bergwitz, Elster-Geitel-Festschrift S. 585. 1915.

Entdeckung neue
Verteilungskurve
und mit der Sta
kugel verglichen.
obachtungen die
linge nicht ausrei
stanzen mit Stra
handen sein müss
des Cu, wird disk
gestellt werden k
aufweisen.

Die vorstehen
der Universität Kö
mann bin ich für
großem Dank verpf

Königsberg,

(E

5. *Bemerkung zu der Arbeit von W. Hahnemann und H. Hecht: „Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons“; von Max Wien.*

In der oben genannten Arbeit[1]) werden Messungen über die in einem Telephon verzehrte elektrische Leistung angestellt, wobei sich eine interessante Abhängigkeit dieser Leistung von Größe und Form des Luftraums vor und hinter der Membran ergibt, und auch davon, ob das Telephon offen oder mit geschlossener Schallöffnung oder an das Ohr gedrückt verwandt wurde. Hieraus wird dann der akustische Wirkungsgrad, d. h. das Verhältnis der auf den Gehörgang übertragenen Leistung zu der aufgewandten Leistung für den Tonbereich von 500 bis 1000 Perioden zu 1 bis 10 pro Mille berechnet. Schließlich wird eine Anwendung dieser Zahl auf die Schwellenempfindlichkeit des menschlichen Ohres für 1000 Perioden gemacht, und diese zu $1{,}9 \cdot 19^{-17}$ Watt gefunden, während die Verfasser aus älteren Messungen von mir[2]) für denselben Ton, eine Schwellenleistung von nur $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Watt, also einen etwa 120 mal kleineren Wert berechnen. Die Gründe für diese recht erhebliche Differenz suchen Hahnemann und Hecht in meiner Versuchsanordnung.

Diese Versuchsanordnung war so einfach wie möglich und gestattete die Schallausbreitung theoretisch zu berechnen. Es wurde ein Telephon in einer Öffnung eines großen — theoretisch unendlichen — Blechschirmes so befestigt, daß die Telephonplatte mit der Ebene des Schirmes zusammenfiel (vgl. Fig. 1), und der Ton des Telephons in einer Entfernung von 30 cm beobachtet. Der Strom des Telephons wurde so lange geschwächt, bis der Ton gerade nicht mehr hörbar war. Die Schallintensität in O läßt sich bei gegebener Plattengröße und Amplitude berechnen. Die von mir damals gegebene Formel stimmt mit dem kürzlich von Hahnemann und Hecht[3]) auf ganz anderem Wege abgeleiteten Ausdruck bis auf eine unwesentliche Abweichung in einem Zahlenfaktor überein.

1) W. Hahnemann u. H. Hecht, Ann. d. Phys. 60. S. 454. 1919.
2) M. Wien, Pflügers Archiv f. d. ges. Physiologie 97. S. 1. 1903.
3) W. Hahnemann u. H. Hecht, Physik. Zeitschr. 18. S. 267. 1917.

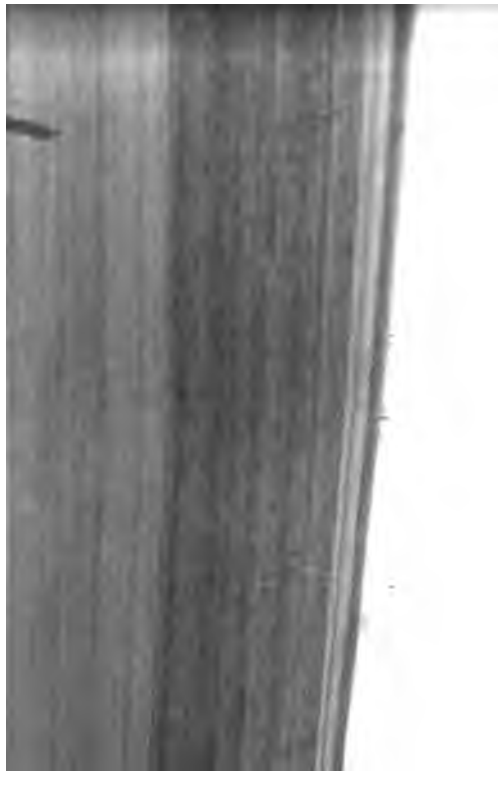


Fig. 1.

Beide oben gen
ständlich schon in m
Nach Rayleigh
Störung der Schallau
derselben Größenord
Tones. Bei höheren
des Hörenden Störung
diese Störungen an
der weichen Haut nicl
harten Gegenstand, z.
sein würden. Hahnen
gewiesen, daß die nac
ganges erhebliche Teile
hin ist dies eine ernste
Versuchen

Die Dimensionen des Telephons waren klein gegen die Wellenlänge, so daß von diesem keine Störung zu erwarten war.

Der äußere Gehörgang ist etwa 3,5 cm lang, also klein gegen die Wellenlänge des Tones 1000, so daß er nicht als Schallsenke wirken kann, und im Inneren des Gehörganges annähernd die gleichen Dichtigkeitsänderungen vorhanden sein müssen, wie in der Luft außerhalb. Anders werden die Verhältnisse, wenn der Schall durch ein längeres Glasrohr dem Ohre zugeführt wird. Dieses gibt notwendigerweise zu stehenden Schwingungen und Resonanzerscheinungen Veranlassung. Die Stärke der Schwingungen in dem Rohre hängt im hohen Maße von der Tonhöhe und auch von der Umgebung und Form der Öffnung ab, Fragen, die ja schon Helmholtz in seiner Theorie der Luftschwingungen in offenen Röhren behandelt hat.

Hiernach ist es nicht verwunderlich, daß Hahnemann und Hecht bei ihren Versuchen mit einem Gipsmodell des Kopfes und längeren Glasröhren als Zuleitung zum Ohr starke Unterschiede der Schallaufnahme gefunden haben; ein Rückschluß auf meine Versuche kann jedoch daraus nicht gezogen werden, da die Versuchsbedingungen ganz andere waren.

Hahnemann und Hecht suchen weiter eine Fehlerquelle bei der Auswertung meiner Versuche darin, daß ich die Amplitude der Telephonplatte der Stromamplitude proportional angenommen habe.

In meiner Arbeit habe ich ausdrücklich darauf hingewiesen, daß bei der mikroskopischen Ausmessung der Telephonamplituden mit der Stromstärke nicht über den Bereich hinausgegangen wurde, für den der Ausschlag dem Strom proportional war. Dieser Bereich ist, wie seitdem durch W. Kunze[1]) und W. Birnbaum[2]) nachgewiesen ist, außerordentlich groß. Ob nach unten, nach dem Gebiet der ganz schwachen Ströme, der Ausschlag ebenfalls proportional bleibt, läßt sich experimentell nicht mehr nachweisen, weil die Ausschläge schließlich zu klein werden. Es hängt das mit der Frage nach dem Verlauf der Anfangspermeabilität zusammen. Wenn jedoch eine Abweichung vorhanden ist, so würde sie in der Richtung liegen, daß die

1) W. Kunze, Arch. f. Elektrotechnik 2. S. 495. 1914.
2) J. W. Birnbaum, Ann. d. Phys. 49. S. 201. 1916.

Ausschläge und damit die Schwellenleistung tatsächlich noch etwas kleiner sind, als die berechneten.

Beide Fehlerquellen können auf meine Ergebnisse nur einen geringen Einfluß ausgeübt haben, sie reichen jedenfalls nicht aus um die großen Differenzen der beiderseitigen Werte zu erklären.

Ich möchte hier nicht die Frage erörtern, ob den auf recht umständlichem Wege durch mehrfache Umrechnung und Extrapolation gewonnenen Zahlen der Herren Hahnemann und Hecht eine größere Sicherheit zukommt, sondern nur darauf hinweisen, daß die Differenz sich vielleicht aus dem Umstande erklären läßt, daß die Schwellenleistung in beiden Fällen in verschiedener Weise definiert wurde.

Bei mir wurde die Tonintensität (A) definiert als die Schallenergie, welche im freien Raum in einer Sekunde durch 1 cm² Fläche hindurchwandert. Indem die Fläche des Trommelfells zu 1/3 cm² angenommen wurde, wurde die in das Ohr gelangende Energie einfach $= A/3$ gesetzt[1]) und daraus die Schwellenleistung berechnet.

Hahnemann und Hecht hingegen berechnen die von den weichen Wänden des ganzen Gehörganges und eines Teiles der Ohrmuschel beim Andrücken des Telephons an das Ohr absorbierte Leistung. Wenn wir die Länge des äußeren Gehörganges zu 3,5 cm, den mittleren Durchmesser zu 1 cm annehmen, so haben wir hier allein schon eine absorbierende Oberfläche von 11 cm². Setzen wir die Schallabsorption dieser Weichteile überall als gleich voraus, so müssen wir die berechnete Leistung auf 1/33 reduzieren, um die von dem Trommelfell (1/3 cm²) allein verzehrte Leistung zu erhalten. Nach dieser Reduktion würden die Werte von Hahnemann und Hecht nur noch etwa 3 bis 4 mal so groß sein wie die meinigen — eine Differenz, wie sie durchaus innerhalb der Fehlerquellen bei ein und derselben Methode liegt, die jedoch bei diesen, auf ganz verschiedenem Wege gewonnenen Zahlen, sogar eine auffallend gute Übereinstimmung bedeuten würde.

Jena, Physik. Institut d. Universität, 9. Februar 1920.

1) Dabei blieb es unerörtert, ob wirklich die durch den Gehörgang auf das Trommelfell treffende dort absorbierte Energie mit der so definierten übereinstimmt.

(Eingegangen 12. Februar 1920.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Fig. 1.

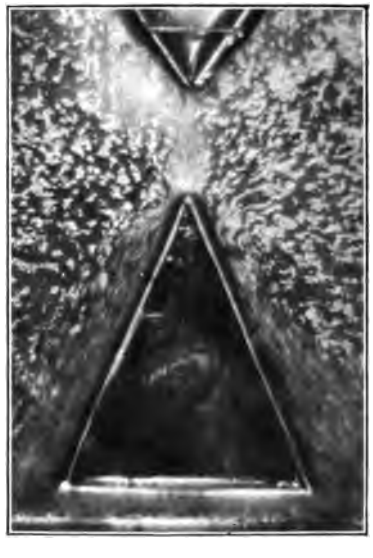
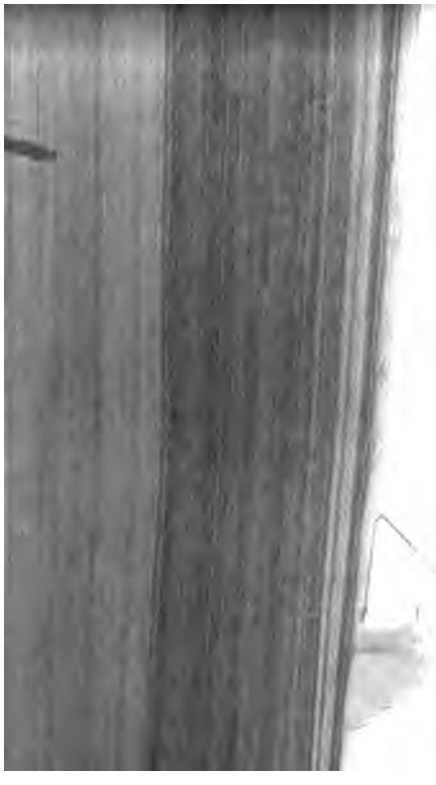
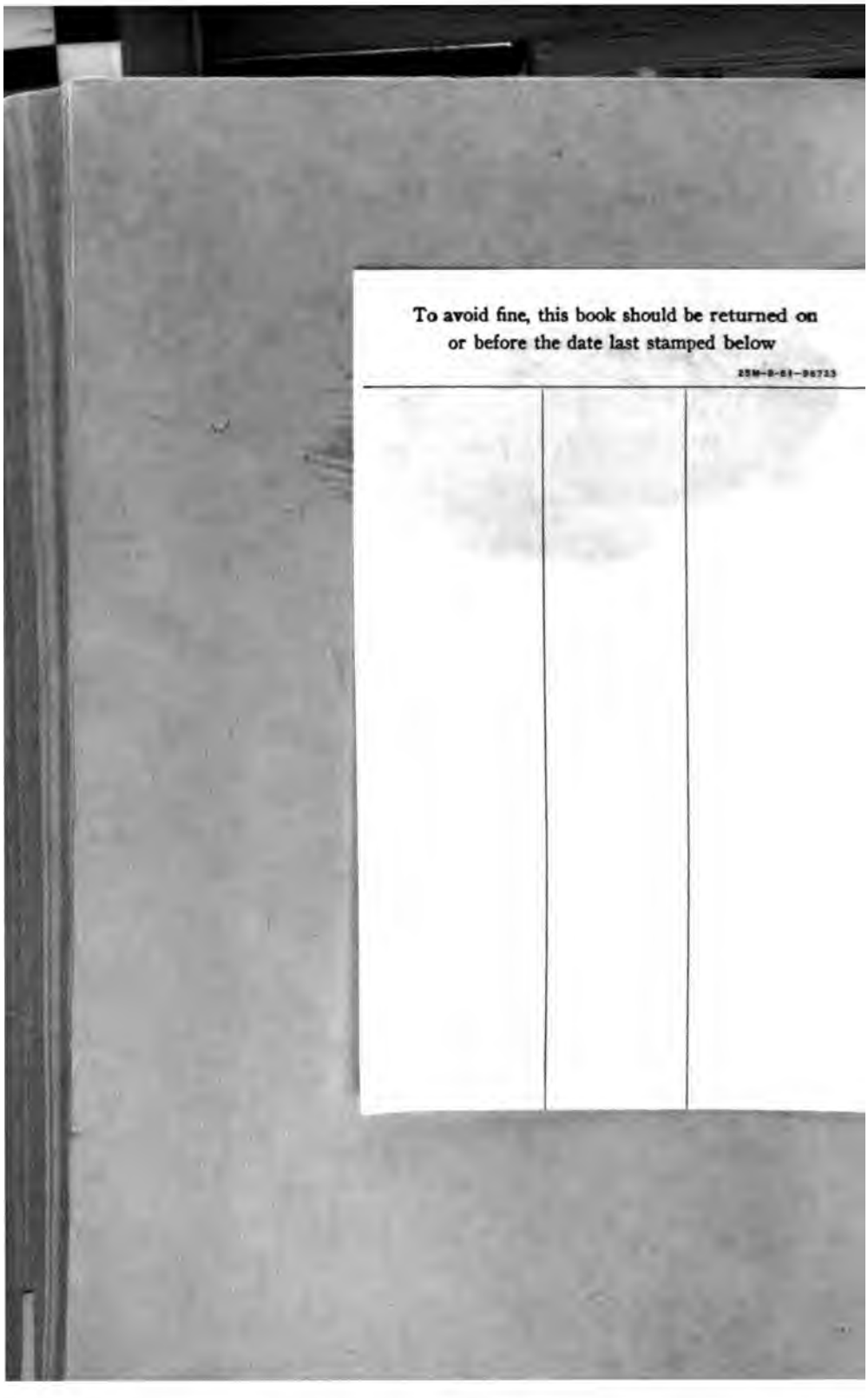


Fig. 2.

Fig. 3.

F. Krüger.




To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

25M-8-61-96733

PHYSICS - [illegible]

530.5
A613
Vol. 366-367
4 ser.
v. 61-62, 19[illegible]

PHYSICS

285353